جمهوريـــة العراق
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جـــــــــامعة كـــــــربلاء
كلية الادارة والاقتصـــــــــــــــــاد
قسـم الاحـــــــصاء

تقدير بيز الحصين لتوزيع فريچت

رسالة مقدمـة الى مجلس كلية الادارة والاقتصاد في جامعة كربلاء

وهي جزء من متطلبات نيل درجة ماجستير في علوم الاحصاء

تقدمت بها

تماره علي غـــــني

بإشـــراف

أ.م .د. مهدي وهاب نعمة نصر الله

١٤٤٢ هـ ٢٠٢٠ م

كربلاء المقدسة

بسم الله الرحمن الرحيم

﴿ أَرَأَيْتَ الَّذِي يَنْهَىٰ (*) عَبْدًا إِذَا
صَلَّىٰ (*) أَرَأَيْتَ إِن كَانَ عَلَى الْهُدَىٰ (*) أَوْ
أَمَرَ بِالتَّقْوَىٰ (*)أَرَأَيْتَ إِن كَذَّبَ وَتَوَلَّىٰ (*) أَلَمْ
يَعْلَم بِأَنَّ اللَّهَ يَرَىٰ (*) كَلَّا لَئِن لَّمْ يَنتَهِ لَنَسْفَعًا
بِالنَّاصِيَةِ (*) نَاصِيَةٍ كَاذِبَةٍ خَاطِئَةٍ (*)﴾

صدق الله العلي العظيم

(القلم: الآية ١٦ -٩)

الاهداء ...

بسم الله الرحمن الرحيم

(قل إعملوا فسيرى الله عملكم ورسوله والمؤمنون)

إلهي لايطيب الليل إلا بشكرك ولايطيب النهار إلى بطاعتك .. ولاتطيب اللحظات إلا بذكرك .. ولا تطيب الآخرة إلا بعفوك ..

الله جل جلاله

إلى ...

**من بلغ الرسالة وأدى الأمانة .. ونصح الأمة .. إلى نبي الرحمة ونور العالمين..
سيدنا محمد صلى الله عليه وعلى اله وصحبه وسلم**

من كلله الله بالهيبة والوقار .. إلى من علمني العطاء بدون انتظار .. إلى من أحمل أسمه بكل افتخار .. أرجو من الله أن يمد في عمرك لترى ثماراً قد حان قطافها بعد طول انتظار وستبقى كلماتك نجوم أهتدي بها اليوم وفي الغد وإلى الأبد (والدي العزيز)

الى حبيبة فؤادي وعيناي اللتان أنظر للحياة بهما، الى التي لم تتوقف عن الايمان بي ودائما صلت وتمنت لي الافضل،الى الملاك الجميل التي تزهر تحت قدميها حدائق الجنه ،الى اروع أمراءة في الوجود (أمي الحبيبة) أمد الله في عمرها وجعل السلام بكل أركان أضلعها وجزاها الله عني خير الجزاء

الى من ساعدني في التغلب على التحديات التي واجهتها خلال مشواري ودعمني بشكل هائل كنت دائما معي وللأجلي لقد شجعتني بكلماتك الحكيمة عندما شعرت باليأس تجاه العالم وتجاه نفسي شكرا لتواجدك لجانبي (أخي الصغير)

الى من هم أجزاء من أمي تسير على قدمين ،كنافذه من زجاج صاف، نطل منها على أحلى مافي الدنيا ،ونرى من خلالها كل المعاني الجميلة (أخوتي ...وأخواتي)

الى النجوم التي قد لاتراهم دائما ،لكنك تعرف أنهم موجودون،والذي يفتح ماأستطاع من شبابيك النور ليهزم عنك عتمة البارحة يعادلان كل عابري هذه الحياة (صديقتاي)

كل من يسعده نجاحي ... إلى هؤلاء جميعاً ...أُهدي هذا الجهد المتواضع سائلة المولى عزّ وجَل أن يجعله شاهدا لنا لا علينا .

الباحثة

شكر وامتنان ...

الحمد لله والحمد حقهُ كما يستحقهُ حمداً كثيراً ، والحمد لله الذي هدانا لهذا وما كنا لنهتدي لولا أن هدانا الله وأصلي وأسلم وأبارك على خير خلقه البشير النذير السراج المنير الطهر الطاهر أبا القاسم محمد وعلى آله الطيبين الطاهرين وصحبه المنتجبين .

من دواعي العرفان بالجميل أتوجه بجزيل شكري وخالص أمتناني لأستاذي الفاضل الأستاذ المساعد الدكتور (**مهدي وهاب نعمة نصر الله**) لتفضله بالإشراف على رسالتي ولما قدمه من آراء سديدة وبنّاءة طيلة مدة البحث والدراسة والتي كان لها الأثر الكبير في اغناء الرسالة، أسأل الله أن يحفظه ويوفقه وينعم عليه بالصحة والعافية لأكمال مشواره العلمي .

كما أتقدم بالشكر الجزيل إلى السادة رئيس وأعضاء لجنة المناقشة المحترمون لتفضلهم بقبول مناقشة الرسالة ولما سيبدونه من ملاحظات قيّمة تسهم في اغناء الرسالة.

وأتقدم بوافر شكري وآمتناني إلى جميع أساتذتي الأفاضل في قسم الإحصاء إذ كانوا لنا كالأضواء التي تنير لنا الدرب المظلم ففضلهم علينا لا يقدر بحجم ، لذلك نحن شاكرون وممتنون لتفانيهم وإخلاصهم في الجهد الذي بذلوه لكي يوصلونا إلى هذا المستوى .

والشكر والتقدير وأسمى جمل الأعتذار إلى كل من لم يسعنا ذكرهم وتذكرهم لتقديم شكرنا لهم سائلين المولى عز وجل دوام الموفقية للجميع ، إنه قريب مجيب .

قائمة المحتويات

فهرس الجداول

فهرست الاشكال

الرموز والمصطلحات المستعملة في الرسالة

الرمز	المعنى
$f_T(t)$	دالة الكثافة الاحتمالية للفشل
$F_T(t)$	دالة الكثافة التجميعية
α	معلمة الشكل لتوزيع فريچت
β	معلمة القياس لتوزيع فريچت
α	معلمة الشكل لتوزيع ويبل
λ	معلمة القياس لتوزيع ويبل
λ	معلمة القياس للتوزيع الأسي
α	معلمة الشكل لتوزيع ليندلي
θ	معلمة القياس لتوزيع ليندلي
Q	صنف التلويث
$\pi_0(\theta)$	المعلومات المسبقة الاساسية
$q(\theta)$	الدالة الاحتمالية السابقة غير المعلوماتية فيما يخص المعلومات الملوثة باحتمال ε
ML-II- ε	صنف الامكان الاعظم النوع الثاني
$f(x/\underline{\theta})$	دالة التوزيع الأساسي
$L\ (x/\underline{\theta})$	دالة الامكان للتوزيع الأساسي
$M(X/q)$	دالة الكثافة الاحتمالية الحدية (Marginal) التي تقابل التوزيع الأحتمالي لـ x
$\hat{\pi}(\theta)$	لتوزيع المختلط (Mixed Prior distribution) للمعلمة المراد تقديرها باستعمال مقدر الامكان الاعظم النوع الثاني

$\hat{\pi}^*(\theta)$	**توزيع اللاحق (Posterior) للمعلمة المراد تقديرها باستعمال مقدر الامكان الأعظم النوع الثاني**
$\hat{\lambda}$	**الوزن اللاحق $\hat{\lambda}$**
$q^*{}_0(\theta)$	**التوزيع اللاحق للتوزيع الاساسي للمعلمة المراد تقديرها**
$E\hat{\pi}^*(\theta)$	**مقدر بيز الحصين للمعلمة المراد تقديرها حسب التوزيع المختلط**
$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{Feweibull}}$	**مقدر بيز الحصين لمعلمة القياس (β) لتوزيع فريجت عندما يكون التوزيع الاساسي القياسي والملوث ويبل**
$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{FeIF}}$	**مقدر بيز الحصين لمعلمة القياس (β) لتوزيع فريجت عندما يكون التوزيع الاساسي القياسي والملوث معكوس فريجت**
$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{Fegamma}}$	**مقدر بيز الحصين لمعلمة القياس (β) لتوزيع فريجت عندما يكون التوزيع الاساسي القياسي والملوث كاما**
$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{FeLindely}}$	**مقدر بيز الحصين لمعلمة القياس (β) لتوزيع فريجت عندما يكون التوزيع الاساسي القياسي والملوث ليندلي**

المستخلص:

زاد اهتمام الإحصائيين في العقود الأخيرة على معالجة حالة الشواذ في البيانات أو بمعنى أدق كيفية التعامل مع البيانات في حالة احتوائها على شـــــــواذ (تلوث) ، وذلك من خلال اتجاهين ، الأول استعمال الطرائق الحصينة التي يتم منها الحصول على مقدرات اكثر كفاءة من الطرائق الاعتيادية في حالة وجود الشواذ، والاتجاه الاخر هو الاتجاه البيزي او ما يسمى بمقدرات بيز الحصين (Robust Bayesian) الذي يعد المعلمة او المعلمات المراد تقديرها متغيرات عشوائية تتوفر معلومات سابقة عنها في صيغة توزيع احتمالي يطلق عليه التوزيع المسبق(الأولي) والذي يعتمد تقدير بيز على حساسية هذا التوزيع في مدى دقته في تحديد المعلومات الاولية عن المعلمات المراد تقديرها.

هدفت هذه الرسالة الى تقدير معلمة القياس لتوزيع فريچت باستعمال اسلوب بيز الحصين بالاعتماد على الصنف الملوث الامكان الاعظم النوع الثاني (الملوث ML-II- ε) لأربعة انواع من التوزيع الاساسي القياسي والتوزيع الاساسي الملوث وهي عندما يكون التوزيع الاساس القياسي والتوزيع الملوث القياسي توزيع ويبل وعندما يكون التوزيع الاساس القياسي والتوزيع الملوث القياسي توزيع معكوس فريچت وعندما يكون يكون التوزيع الاساس القياسي والتوزيع الملوث القياسي توزيع كاما وعندما يكون التوزيع الاساس القياسي والتوزيع الملوث القياسي توزيع ليندلي باستخدام دالة خسارة تربيعية ، ومن ثم التقدير باستعمل معيار متوسط مربعات الخطأ(MSE) . اذ تم استعمال اسلوب المحاكاة مونت- كارلو لغرض اختبار افضلية طرائق التقدير المستعملة في تقدير معلمات توزيع فريچت باستعمال اسلوب بيز الحصين في ظل صنف التلويث الامكان الأعظم النوع الثاني وتم التوصل الى ان طرائق التقدير المعتمدة كافة متوسط اقرب الى القيم الافتراضية لمعلمة القياس لتوزيع فريچت (β) عند النماذج واحجام العينات المفترضة كافة عند كل نســـــــب التلوث ($\boldsymbol{\varepsilon} = 0.1, 0.5, 0.9$). وان افضل تقدير بيزي حصين عند صنف التوزيع الأولي الامكان الاعظم النوع الثاني كان عند التوزيع الأولي القياسي الاساسي والتوزيع الاولي الملوث توزيع ليندلي يليه توزيع معكوس فريچت ومن ثم توزيع كاما واخيراً توزيع ويبل ، بزيادة قيمة نسب التلوث في التوزيع الاولي (0.1-0.9) تحقق افضلية تقدير بيز الحصين المعتمد على الصنف الاساسي القياسي ليندلي والملوث الاساسي ليندلي مما يدل على افضلية استعمال التوزيع الاولي ليندلي في تقدير معلمات توزيع فريچت. في حين اظهرت نتائج تحليل البيانات التطبيقية المتمثلة باوقات البقاء **(lifetimes)** بالأيام تحت العلاج لحين الوفاة او الشفاء من المرض أو مغادرة المستشفى للمصابين بفايروس **(COVD-19)** التي تم الحصول عليها من قسم الحميات في مستشفى الحسين التعليمي في محافظة كربلاء التأكيد على ضرورة استعمال توزيع ليندلي كتوزيع اولي ملوث بنسب معينة من التلوث في ايجاد تقدير بيز الحصين في حال اتباع البيانات الحقيقية توزيع فريچت .

١-١ المقدمة Introduction

في العديد من الدراسات والبحث تكون فيها بعض المشاهدات في العينة قيد الدراسة تبتعد أو تشذ عن النسق الاصلي للبيانات ، اما نتيجة لأخطاء القياس او نتيجة المعاينة الخاطئة، او في بعض الاحيان يكون الباحث متعمداً ان تكون تلك المشاهدات الشاذة مضمنة في البيانات لاسباب بحثية، وبالتالي يمكن معاملة تلك البيانات على انها قيم شاذة (ملوثة) لذا تفقد المتغيرات العشوائية احد اهم الافتراضات الاساسية لها وهو تماثل واستقلال توزيع مفردات العينة (iid) ، وكذلك اذا تم تجاهل هذه القيم الشاذة في تقدير المعلمات فان تباين تلك المقدرات سيزداد ويؤدي الى تقديرات غير حصينة . وبالتالي فأن تطبيق الطرائق الكلاسيكية مباشرة لتقدير معلمات التوزيع الاحتمالي لايعطي تقديرات كفوءة وبالتالي عدم الدقة في التقدير. ويعد اكتشاف المشاهدات البعيدة (الملوثات) امراً مهما إما لان تلك الشواذ نفسها تكون مهمة بحد ذاتها ، او ان المجرب يريد منع الشواذ (الملوثات) للظهور في التقديرات المطلوبة.

وفي الوقت الحالي هنالك توجه كبير الى استعمال الطرائق الحصينة Robust Method للتخفيف من اثر الشواذ على البيانات والتي تستعمل بكثرة في النماذج الخطية ، ولكن عندما يكون النموذج تحت الدراسة غير خطي وفيه درجة من التعقيد قد لاتؤدي تلك الطرائق الحصينة المطلوب منها ، اضافة الى ان الطرائق الحصينة تعد استراتيجيات وطرائق قائمة بحد ذاتها لاتعتمد على التوزيع الأصلي للبيانات ، مع انها لها فعالية في ايجاد تقديرات كفوءة لمعلمات التوزيع.

لذا أهتم الأحصائيون بمسألة فحص البيانات للتأكد من مدى نقاوتها من القيم الشاذة بوصفها مرحلة أولى تسبق مرحلة الاستدلال الإحصائي لمعلمات المجتمع. وقد أخذت تنقية البيانات اتجاهين أحدهما الأوسع انتشارا يجري بموجبه تشذيب المشاهدات الشاذة ثم التعامل مع العينة المشذبة. أما الاتجاه الآخر فيتم

بموجبه تعديل المشاهدات الشاذة وذلك بإعادة تقديرها بحيث يكون التعامل مع العينة كاملة. إلا أن اتجاها آخر مهم برز لمعالجة تلك المشكلة وذلك بأن تقدر المعلمات المطلوبة دون الحاجة إلى فحص البيانات وذلك باستخدام طرائق بيز الحصينة .

ولتسليط الضوء على محتوى هذه الرسالة ، فقد جاءت لتقدير معلمات توزيع فريچت باستعمال التحليل البيزي الحصين وباستعمال صنف التلوث الامكان الاعظم النوع الثاني ML-II ε-contaminated class ، أما هيكلة الرسالة فتضمنت خمسة فصول:

الفصل الأول منهجية الرسالة حيث تضمن المقدمة ، هدف الرسالة ، مشكلة الرسالة والاستعراض المرجعي لأهم البحوث وبعض الدراسات السابقة التي لها علاقة بموضوع الرسالة.

الفصل الثاني تضمن الجانب النظري الذي تطرق لاهم المفاهيم الاساسية الخاصة بالبيانات الملوثة وعرض لتوزيع فريچت Frechet Distrbution واهم اصناف التوزيعات المسبقة الملوثة وكذلك شرح وافي للصنف الملوث الامكان الاعظم النوع الثاني ML-II ε-contaminated class ، وكذلك خطوات التحليل البيزي الحصين باستعمال هذ الصنف.

والفصل الثالث فقد شمل الجانب التجريبي، حيث تضمن تجارب محاكاة مونت كارلو لايجاد تقديرات معلمات التوزيع .

الفصل الرابع تضمن الجانب التطبيقي، حيث استخدمت بيانات حقيقية من قسم الحميات في مستفى الحسين التعليمي في محاظفة كربلاء المقدسة عن اوقات البقاء (lifetimes) بالأيام تحت العلاج لحين الوفاة او الشفاء من المرض أو مغادرة المستشفى للمصابين بفايروس COVD-19 .

الفصل الخامس شمل أهم الاستنتاجات والتوصيات التي تضمنت عنها الرسالة وتم التوصل اليها في الجانبين التجريبي والتطبيقي.

١–٢ مشكلة الرسالة Problem of the thesis

عندما تدعونا الحاجة الى اجراء عمليات التحليل الاحصائي لظاهرة معينة، يتطلب الأمر جمع بيانات عن هذه الظاهرة ، فقد يحدث ومن خلال عملية المعاينة الاحصائية شذوذ بعض المشاهدات او إنحرافها عن النمط الاصلي للمشاهدات الموجودة معها ، والتي غالباً ما يطلق على تلك المشاهدات المنحرفة تسمية شواذ (Outliers) أو ملوثات (Contaminations) ، والتي في حالة وجودها ضمن البيانات او ضمن توزيع البيانات او نتيجة الحصول على معلومات اولية غير كاملة او غير دقيقة فأن استعمال الطرائق الاعتيادية مثل طريقة الامكان الاعظم او طريقة العزوم... الخ . وبسبب اختراق الشروط الأساسية لها تخفق في أعطاء تقديرات دقيقة عن معلمات المجتمع الإحصائي الذي سحبت منه تلك البيانات لذا فأن استخدام المقدرات التقليدية عند القيم الملوثة يعد مشكلة حقيقية وذلك لانها لاتعطي مقدرات كفوءة ، لذلك لابد من استخدام طرائق تقودنا الى تقديرات كفوءة لمعلمات ذلك المجتمع الاحصائي التي تنتمي اليه البيانات، ومن تلك الطرائق هي طرائق بيز الحصينة التي تتعامل مع وجود الشواذ في البيانات وتقود الى تقديرات ذات كفاءة عالية مقارنة بالتقديرات الكلاسيكية في حالة وجود القيم الشاذة.

١–٣ هدف الرسالة Aim of the thesis

تهدف الرسالة الى تقدير معلمة القياس لتوزيع فريچت باستعمال اسلوب بيز الحصين بالاعتماد على الصنف الملوث الامكان الاعظم النوع الثاني (الملوث ε -ML-II) عند اربعة انواع من التوزيع الاساسي القياسي والتوزيع الاساسي الملوث وهي عندما يكون التوزيع الاساس القياسي والتوزيع الملوث القياسي توزيع ويبل وعندما

يكون التوزيع الاساس القياسي والتوزيع الملوث القياسي توزيع معكوس فريچت وعندما يكون يكون التوزيع الاساس القياسي والتوزيع الملوث القياسي توزيع كاما وعندما يكون التوزيع الاساس القياسي والتوزيع الملوث القياسي توزيع ليندلي عند دالة خسارة تربيعية ، ومن ثم التقدير باستعمال معيار متوسط مربعات الخطأ (MSE) .

٤-١ الاستعراض المرجعي Literature Review

تتضمن هذه الفقرة استعراضاً مرجعياً لاهم الدراسات والبحوث ذات العلاقة بموضوع الرسالة منذ عام ١٩٨٥ وانتهاء بأحدث ما تم الحصول عليه وكالآتي:

- **في عام ١٩٨٦ استعمل (Bergerand & Berliner)** التقدير البيزي الحصين من خلال مسألتين ، الأولى تعتمد على استعمال صنف التلوث **ε–contamination** بتحديد نسب تلوث مختلفة ، والثاني بالاعتماد على صنف الامكان الاعظم النوع الثاني ML– II للتوزيع الطبيعي باستعمال محاكاة مونت–كارلو ، وبينت النتائج ان مقدر بيز الحصين باستعمال صنف التلوث الامكان الاعظم النوع الثاني افضل من مقدر بيز الحصين باستعمال صنف التلوث **ε-contamination** عند نسب تلوث مختلفة . **(Bergerand & Berliner, 1986, 461)**

- **في عام ١٩٨٩ قام (Sivganesan, Berger)** بدراسة الحصانة أو الحساسية بالنسبة إلى تخصيص التوزيع الأولي بهدف تقدير المتوسط والتباين للدالة $\pi(\theta/X)$ وأيضاً اختبار الفرضيات في حالة عدم التأكد من تحديد التوزيع الأولي بالنسبة إلى المعلومات الأساسية π والتي تقع ضمن الصنف الملوث $\Gamma=\{\pi;\pi(1-\varepsilon)\pi_o(\theta)+\varepsilon q; q\in Q\}$ حيث أن Q هي التوزيعات الملوثة للمعلومات المسبقة وأن ε يمثل الاحتمال في عدم التأكد من (Q,π_0). وأعتمد على مقياس حدود الثقة وبين انه كلما كان

المجال أصغر كلما كان التأكد من الحصانة بالنسبة إلى عملية التحديد للصنف عالياً. (Sivganesan, Berger, 1989, 870)

- **في عام ١٩٩٩ قدر (Haro-Lopez & Smith)** معلمة الموقع والقياس للتوزيع الكروي المتعدد المتغيرات **V-Spherical Distribution** باستعمال التحليل البيزي الحصين عند دالة ارجحية متلاشية واخذ بنظر الاعتبار تأثير التوزيع السابق على التوزيع اللاحق عندما يكون هنالك تعارض بين التوزيع بين دالة الارحجية والتوزيع المسبق وبينا أنه عندما ||.||=V(.) فأن طول التوزيع الكروي، القوة الأسي ، واللوجستي يعطي تحليل حصين لمعلمة الموقع ومعلمة القياس في حين ان التوزيع t'power يعطي تحليل حصين لمعملة القياس فقط وتم تحليل النتائج باستعمال محاكاة مونت–كارلو وتوليد البيانات باستعمال معاينة جبس Gipps Sampling. **((Haro-Lopez & Smith,1999,1)**

- **في عام ٢٠٠٤ اقترح (Kopcimzewski)** عدة طرائق لتقريب التوزيع السابق صنف الامكان الاعظم النوع الثاني في حالة كون التوزيعات السابقة معلوماتية Informative وغير معلوماتية Non- Informative باستعمال محاكاة سلاسل ماركوف مونت–كارلو وبين بان الخوارزميات المقترحة تعطي سهولة في حساب التوزيعات اللاحقة عند صنف الامكان الاعظم النوع الثاني**(Kopcimzewski, 2004, 61)**

- **في عام ٢٠٠٨ اشتق (Sinhaa & Bansal)** دالة كثافة تنبؤية للمشاهدات المستقبلية عندما يكون توزيع متوسط المجتمع المجهول السابق يتبع التوزيع الطبيعي هو صنف الامكان الاعظم النوع الثاني ML-II ε-contaminated class ، وتم تخصيص الدالة التنبؤية التي تم اشتقاقها في مسالة تخصيص نموذج الانحدار **(Sinhaa & Bansal, 2008, 203)**

- **في عام ٢٠٠٩ وَظَفَ** (**Sinha & et al.**) صنفين من اصناف التوزيعات السابقة الاول هو صنف الامكان الاعظم النوع الثاني ML-II ε-contaminated class والثاني هو صنف Edgeworth Series (ESD) لدراسة حساسية مقياس المعولية البيزية بتوظيف تقدير معلمة الموقع للتوزيع الطبيعي المعكوس IG ، واشارت نتائج المحاكاة بأن المعولية لكلا التوزيعين لا تتأثر عند توزيعات سابقة مختلفة تنتمي لصنف الامكان الاعظم النوع الثاني وصنف Edgeworth Series (ESD) . (**Sinha & J.Prabha, 2009, 2**)

- **في عام (٢٠١١) قارن (Rivaz)** التحليل البيزي الحصين في ظل الصنف الملوث **ML-II contamination** واسلوب بيز التجريبي ومن خلال تجارب محاكاة مونت–كارلوا تبين بان اصناف التوزيعات السابقة الملوثة الامكان الاعظم النوع الثاني لايمكن استعمالها الا مع نماذج الارتباط المنفصلة (**Rivaz, 2011, 264**)

- **في عام (٢٠١٣) درس (Chaturvedi & Pati.)** التحليل البيزي الحصين لنموذج فشل ويبل تحت فئة تلوث الصنف الملوث ε–II–ML . اذ تم الحصول على مقدرات Bayes لمتوسط العمر ودالة المعولية ومعدل الفشل تحت دالة خسارة الخطأ التربيعية ودالة خسارة LINEX باستعمال محاكاة مونت– كارلوا باستعمال معاينة Gibbs sampler لتوليد العينات. (**Chaturvedi & Pati, 2013, 1**)

- **في العام ٢٠١٧ (Baltagia et al.)** اطار عمل بيزي عام لنماذج البيانات الطولية الاحصائية الخطية باستعمال صنف التلوث ε–**contamination** ، وتم استعمال الاسلوب بمرحلتين لاشتقاق التوزيع اللاحق للامكان الاعظم النوع الثاني ML-II لمعلمات الانموذج باعتبار التوزيعات اللاحقة

كمعدلات اوزان لمقدر بيز في ظل التوزيع المسبق الاساس بالاعتماد على مقدر بيز التجريبي . وتم تطوير المقدرات الهرمية بمرحتلين وبثلاث مراحل باستعمال محاكاة مونت – كارلو لبيان افضلية المراحل وبينت نتائج المحاكاة الافضلية لمقدر التسلسل الهرمي بثلاث مراحـــــــــــل. **(Baltagia et al., 2017, 1)**

- **في عام (٢٠١٨) طور (Chaturvedi& Kumari)** التحليل البيزي الحصين لعائلة التوزيعات المقلوبة العمومية (GIFD) في ظل اصناف مختلفة من التوزيعات الســـــــابقة الملوثة ذات الصنف **ε–contamination** لمعلمة الشكل α ولعدة قيم ممكنة مختلفة لمعلمة القياس β باستعمال بيانات مراقبة من النوع الثاني تم توليدها باستعمال خوارزمية **(Bartholomew, 1963)** تحت دالة خسارة تربيعية ودالة خسارة LINEX واستعملا مقدر الامكان الاعظم من النوع الثاني البيزي لكل من معلمات التوزيعات ودالة المعولية ودالة المخاطرة عن طريق محاكاة مونت–كارلوا واستنتجا ان بزيادة نسبة التلوث في العينات فان تباين التوزيع اللاحق في ظل الصنف الملوث الامكان الامكان الاعظم من النوع الثاني يتناقص في ظل دالة خسارة تربيعية وكذلك انه في ظل بيانات المراقبة من النوع الثاني فان مقدر الامكان الاعظم البيزي الحصين يعطي اقل متوسط مربعات خطأ من مقدر الامكان الاعظم الحصين قي ظل بيانات كاملة . **(Chaturvedi and Kumari, 2018, 1)** .

- **في عام (٢٠١٩) قدرت (العاني وآخرون)** دالة المعولية بأسلوب بيز الحصين باستخدام التوزيع الأولي للمعلمة θ ذو الصنف الملوث ε–II–ML عندما تكون معلمة الشكل β معلومة وتحت دالة الخسارة التربيعية لمدة بقاء مرضى قرحة المعدة منذ تشخيص المرض واخذ العلاج ولحين الشفاء ومغادرة المستشفى أو الوفاة اذ تم بتر الوقت منذ دخول المريض لحين تشخيص المرض واخذ

العالج وتبين ان البيانات تتوزع توزيع ويبل ذو المعلمتين β, θ حيث ان التوزيع الاولي لمعلمة القياس يتوزع توزيع فريچت Frechet حسب المعلومات الاولية من السنوات الاولية حول مدة بقاء المرضى بالمستشفى واخذ راي الاطباء والمختصين. وتبين كذلك انه كلما زاد بقاء المريض في المستشفى قلت قيمة الموثوقية.(**العاني، ٢٠١٩، ١**).

- **في نفس العام (٢٠١٩) قدر (مناع)** معلمات ودالـــة البقاء لأنموذجي البقاء (توزيع مستمر (Weibull distribution) وتوزيع متقطع ((Binomial distribution)) في حالة بيانات سابقة غير متناقضة (متعارضة) وفي حالة بيانات سابقة متناقضة باستعمال بيز الاعتيادي وبيز الحصين، اذ قدر معلمة القياس ودالة البقاء لتجربتين من المحاكاة، الاولى كانت في حالة بيانات سابقة غير متناقضة فاظهرت نتائج المحاكاة بان اسلوب بيز الاعتيادي يتقارب مع اسلوب بيز الحصين باستعمال معيار المقارنة (IMSE) ، التجربة الثانية كانت في حالة بيانات سابقة متناقضة فاظهرت نتائج المحاكاة بان اسلوب بيز الحصين هو الافضل باستعمال معيار المقارنة (IMSE) ، في الجانب التطبيقي تم جمع بيانات حقيقية من مستشفى المناذرة التابع لدائرة صحة النجف لوفيات مرضى الجلطة القلبية لعام ٢٠١٨ ، تم تسجيل وقت دخول المريض للمستشفى لحين الوفاة وهو وقت الخروج حيث تم جمع عينة من (١٥) واظهر اختبار حسن المطابقة بان البيانات تتبع توزيع ويبل بمعلمتين ، تم استعمال اسلوب بيز الحصين لتقدير معلمة القياس ودالة البقاء. اما في توزيع باينوميل تم تقدير المعلمة (P) ودالة البقاء لتجربتين من المحاكاة الاولى كانت في حالة بيانات سابقة غير متناقضة فاظهرت نتائج المحاكاة بان اسلوب بيز الحصين هو الافضل باستعمال معيار المقارنة (IMSE) ، اما بالنسبة للتجربة الثانية فكانت في حالة بيانات سابقة متناقضة فاظهرت نتائج المحاكاة بان اسلوب بيز الحصين

هو الافضل باستعمال معيار المقارنة (IMSE) ، في الجانب التطبيقي تم جمع بيانات حقيقية من مستشفى اليرموك التعليمي وفيات مرضى سرطان الثدي من عام ٢٠١٠ ولغاية ٢٠١٧ واظهر اختبار حسن المطابقة بان البيانات تتبع توزيع باينوميل ، تم استعمال اسلوب بيز الحصين لتقدير المعلمة (P) ودالة البقاء. اذ اظهرت نتائج المحاكاة بانه عند زيادة حجم العينة فان الانحراف المعياري والخطأ المعياري للمتوسط للتوزيع اللاحق يقترب من الانحراف المعياري والخطأ المعياري للمتوسط للتوزيع الاولي وبالتالي فان دقة مقدر بيز الاعتيادي يقترب من مقدر بيز الحصين.وفي في حالة تساوي الانحراف المعياري للتوزيع الاولي مع الانحراف المعياري للتوزيع اللاحق تتساوى كفاءة او دقة المقدرين.وكذلك بينت المحاكاة بان اسلوب بيز الاعتيادي متقارب مع اسلوب بيز الحصين لتقدير معلمة القياس (θ) في حالة بيانات سابقة غير متناقضة باستعمال معيار المقارنة متوسط مربعات الخطأ التكاملي.(IMSE) وأن دالة البقاء في حالة بيانات سابقة غير متناقضة باستعمال معيار المقارنة متوسط مربعات الخطأ التكاملي.(IMSE) **(مناع، ٢٠١٩، ٢)**

- **وفي العام نفسه استعمل (Panwar & Tomer)** التقدير البيزي الحصين في ظل صنف التوزيعات السابقة الامكان الاعظم النوع الثاني لتقدير معلمات توزيع ماكسويل Maxwell Distribution لاوقات بقا مراقبة من النوع الثاني هجينة في ظل دالة خسارة تربيعية ، وبينت نتائج المحاكاة مونت–كارلو بان التقدير البيزي في ظل صنف التوزيع السابق الامكان الاعظم النوع الثاني يعطي تقديرات حصينة وان اختيار الصنف الملوث له اهمية في حساسية التقدير البيزي. **(Panwar & Tomer, 2019, 38, 47)**

- **وفي نفس العام قدرت (حسن والعاني) معلمة القياس (θ) ودالة المعولية R(t)** لتوزيع ويبل المبتور من جهة اليسار باسلوب بيز الحصين باستعمال التوزيع الأولي للمعلمة **(θ)** ذو الصنف الامكان الاعظم النوع الثاني (ε ML-II) عندما تكون معلمة الشكل معلومة وعند دالة خسارة ديكروت (Degroot) عندما تكون دالة الكثافة الاحتمالية الأولية للتوزيع الأساس والملوث تتوزع توزيع فريچت وتم التوصل الى أن افضل تقدير للمعلمة θ هو عندما يكون حجم العينة (100) وان افضل مقدر لدالة المعولية بطريقة بيز الحصين هو عندما يكون حجم العينة. (100) . (حسن ، ٢٠١٩، ١٣٢–١١٧)

- **في عام (٢٠٢٠) بحث (.Baltagi et al)** الحصانة البيزية لانموذج البيانات الطولية الديناميكية حيث قاموا اولا باستعمال صنف التوزيعات المسبقة الملوثة **ε–contamination** بنسب تلوث معينة وصنف الامكان الاعظم النوع الثاني ثانيا لتقدير الانموذج وعن طريق تجارب محاكاة مونت–كارلو بينوا ان مقدر بيز الحصين للانموذج باستعمال صنف الامكان الاعظم النوع الثاني افضل من مقدر بيز الحصين باستعمال صنف التلوث **ε–contamination** (**Baltagi et al., 2020, 4**).

نلاحظ من استعراض الدراسات السابقة ندرة الدراسات العربية التي تناولت موضوع اسلوب بيز الحصين باستعمال صنف التلوث الامكان الاعظم النوع الثاني وان في اكثرية الدراسات الاجنبية تناول الباحثين اسلوب بيز الحصين باستعمال صنف التلوث **(ε–contamination**) عند نسب تلوث معينة ومنهم من استخدم صنف التلوث الامكان الاعظم النوع الثاني للتوزيع السابق عند دوال خسارة تربيعية ودوال خسارة (LINEX) لكنهم لم ياخذوا بنظر الاعتبر مسالة تغيير التوزيع المسبق الاساس القياسي والتوزيق الملوث القياسي على فاعلية تقدير معلمات التوزيع وكذلك لم يتم تطبيق اسلوب بيز

الحصين على توزيع فريچت لذلك جاءت هذه الرسالة آخذة بنظر الاعتبار مسألة تغيير التوزيعات المسبقة على تقدير المعلمات فجاءت لتقدير معلمة القياس لتوزيع فريچت باستعمال اسلوب بيز الحصين بالاعتماد على الصنف الملوث (الملوث ε -ML-II) عندما يكون التوزيع الاساس القياسي والتوزيع الملوث القياسي توزيع ويبل وعندما يكون التوزيع الاساس القياسي والتوزيع الملوث القياسي توزيع معكوس فريچت وعندما يكون التوزيع الاساسي القياسي والتوزيع الملوث القياسي توزيع كاما وعندما يكون التوزيع الاساس القياسي والتوزيع الملوث القياسي توزيع ليندلي .

٢-١ تمهيد (Preface)

من الطرائق الشائعة في تقدير معلمات التوزيعات الاحتمالية هي الطرائق الكلاسيكة (التقليدية) مثل طريقة الامكان الاعظم ML ، والمربعات الصغرى OLS ، وطريقة العزوم Moments وغيرها من الطرائق والتي تعتمد على بيانات العينة الحالية في تقدير المعلمات، ولكن مقدرات هذه الطرائق قد تكون غير كفوءة في حالة احتواء البيانات على قيم شاذة (Outliers) او ملوثات ، ولهذا السبب زاد اهتمام الإحصائيين في العقود الأخيرة على معالجة حالة الشواذ في البيانات أو بمعنى أدق كيفية التعامل مع البيانات في حالة احتوائها على شـــــــواذ (تلوث) ، وذلك من خلال اتجاهين ، الأول استعمال الطرائق الحصينة التي يتم منها الحصول على مقدرات اكثر كفاءة من الطرائق الاعتيادية في حالة وجود الشواذ، كما يفترض بها أن تكون قريبة جداً من مقدرات الطرائق الاعتيادية في حالة عدم وجود الشواذ من تلك الطرائق الحصينة مثل مقدرات M ومقدرات MM ومقدرات الانحراف المعياري S ومقدر المربعات الصغرى المبتورة LS ومقدر GM2 ومقدر اقل مجموع مربعات وسيط LMS وغيرها من الطرائق ، والاتجاه الاخر هو الاتجاه البيزي او ما يسمى بمقدرات بيز الحصين Robust (Bayesian) الذي يعد المعلمة او المعلمات المراد تقديرها متغيرات عشوائية تتوفر معلومات سابقة عنها في صيغة توزيع احتمالي يطلق عليه التوزيع المسبق(الأولي) والذي يعتمد تقدير بيز على حساسية هذا التوزيع في مدى دقته في تحديد المعلومات الاولية عن المعلمات المراد تقديرها .

سيتم التطرق في هذا الفصل الى أهم المبادي الاساسية للحصانة الى اسلوب بيز الحصين في التقدير بالاعتماد على احد اصناف التوزيعات المسبقة الملوثة والذي هو صنف التلويث - ε الامكان الأعظم النوع الثاني ، وكذلك عرض لجميع الاشتقاقات والصيغ الضرورية لتحقيق هدف الرسالة.

٢-٢ مفهوم الحصانة (Robustness Concept)

تعددت الدراسات والبحوث الاحصائية فيما يخص مجال الحصانة (Robustness) وتطورت بشكل كبير في العقود الماضية ، الا أن فكرة استعمال الحصانة تعود الى القرن الثامن عشر الميلادي الى الفترة (1885-1920م) حيث كان اهتمام الباحثين ينصب في موضوع الحصانة أي عدم الحساسية للانحرافات في الفرضيات ، حيث نشر الباحث (Laplace) في عام (1818 م) أول عمل رياضي في مجال التقدير الحصين . (Stigler, 1973:P872) . وبين (Box) بأن الطريقة الاحصائية الجيدة يجب ان تكون حساسة Sensitive لأي تغيرات في المعلمات المراد تقديرها والفرضيات المراد اختبارها ، ولكن تلك الطريقة يجب ان تكون غير حساسة لأي تغيرات اخرى. (Stigler,2010 : P277).

استمرت الابحاث حتى يومنا هذا فظهرت العديد من معايير الحصانة ، حيث اصبحت النظرة اكثر شمولية نحو الطرائق الحصينة وطرائق التجانس اذ جرى الدمج بين الاسلوبين ، فمن جهة زادت اهمية النظرة الى طرائق التجانس وذلك لاهمية اكتشاف الشواذ ودراستها ، ومن وجهة نظر اخرى وحتى يتغلب على عيوب طرائق التشخيص ، فقد استخدمت المقدرات الحصينة للمساعدة في تشخيص الشواذ (الملوثات) ، وهنالك عدة انواع مختلفة من الطرائق لايجاد المقدرات الحصينة صممت لتكون فعالة في حالة التوزيعات الملوثة ومنها اسلوب بيز الحصين.

2-3 المقدر الحصين (Robust Estimator)

المقدر الحصين (Robust Estimator) بانه المقدر الذي يتصف باحتفاظه بالعديد من الخصائص المرغوب بها للتقديرات عند انتهاك بعض الفرضيات ، كما يتصف بانه مقاوم لحالات تلوث البيانات بقيم

شاذة والخروق الاخرى ويكون ملائم لفئة واسعة من التوزيعات. (Nakagawa &Hashimoto: 2018 p:1-2) (الصراف وآخرون : ٢٠١٦ -P:279)

ان طرائق التقدير الكلاسيكية مثل طريقة المربعات الصغرى OLS وتعميماتها قد اخذا شوطاً كبيراً في مجال التحليل الاحصائي لعدة سنوات بسبب مميزاتها الجيدة عند تحقق بعض الفرضيات، ولكن عند اتباع الطرائق الكلاسيكية في تقدير المعلمات، ليس اكثر اماناً من تطبيق طرائق التقدير الحصينة وذلك لان الظروف الواجب توفرها لتطبيق الطرائق الكلاسيكية ليست بالسهلة ، مثل عدم وجود قيم شاذة (ملوثة) او اتباع الخطأ العشوائي توزيعاً غير التوزيع الذي يناسب الطريقة المعتمدة في التقدير. فقد قال (Huber) ان وجود مشاهدة شاذة (ملوثة) واحدة قد تهدم المزايا الجيدة لمقدرات المربعات الصغرى. لذلك فقد تم ايجاد طرائق التقدير الحصينة كبديل للطرائق التقليدية في التقدير لمعلمات التوزيع الاحتمالي حيث تتصف هذه الطرائق بانها قليلة الحساسية تجاه القيم الشاذة وتعمل بشكل جيد تحت مختلف التوزيعات.

(الصراف وآخرون : ٢٠١٦ -P:279)

2-4 البيانات المُلَوثة (الشاذة) (Outliers (Contamination) Data)

تعد المُلَوِثات (Contaminants) او الشواذ (outliers) عناصر لها توزيع او نسق يختلف عن النسق الاصلي للبيانات او التوزيع الاصلي للبيانات ، اذ تعد نقاط بيانات تبتعد عن باقي نقاط البيانات في نفس العينة اي انها مشاهدات لا تنسجم مع بقية بيانات المجموعة لأي متغير من المتغيرات لظاهرة معينة أو لمجموعة من الظواهر وان مسالة الشذوذ في البيانات قد تكون مسالة مهمة في البيانات لاعتبارات معينة.

وتعرف المشاهدة الشاذة (الملوثة) إحصائياً بأنها المُشاهدة التي لها مجتمع يختلف عن مختلف عن المجتمع قيد البحث. **(الياسري: ٢٠٠٧: P:6) (هبة الله : ٢٠٠٥ P:4).**

5-٢ دالة الكثافة الاحتمالية للفشل (Failure Density Function)

احتمال ان تفشل أو تتوقف الوحدة عن العمل خلال المدة $(t < T < t + \Delta t)$ بغض النظر عن قيمة Δt باعتبار T متغير عشوائي موجب يمثل وقت حدوث الفشل ويمكن التعبير عنها رياضياً كما يأتي:

$$\mathbf{f_T(t) = lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_r(t < T < t+\Delta t)}{\Delta t} \; ; \; t \geq 0} \qquad \textbf{...(2-1)}$$

وخصائص هذه الدالة كالاتي:

١- $\int_0^{\infty} f_T(t)dt = 1$

٢- $0 \leq f_T(t) \leq 1$

٣- t دالة وحيدة القيمة عند كل قيمة من قيم اوقات الفشل **(Iyer: 2013 P:26-27)**

6- ٢ دالة الكثافة التجميعية للفشل (Failure Cumulative Function)

احتمال ان تفشل أو تتوقف الوحدة عن العمل حتى الوقت t ويعبر عنها رياضياً كما يأتي:

$$\mathbf{F_T(t) = p_r(T < t) = \int_0^t f(u)du \; ; \; t \geq 0} \qquad \textbf{...(2-2)}$$

والتي يطلق عليها دالة الاحتمال التجميعي للفشل حتى الوقت t. وهي دالة متزايدة غير متناقصة عن اي وقت من اوقات الفشل. **(Rousseau: 2016 P:41)**

٢–7 توزيع فريچت Frechet Distribution

قُدِم هذا التوزيع من قبل عالم الرياضيات الفرنسي (Maurice Frechet) عام (١٨٢٨–١٩٧٣) وهو من توزيعات ازمنة الفشل (Failure times) ويستخدم في نمذجة معدلات الفشل وله تطبيقات واسعة في نمذجة العديد من الاحداث مثل الزلازل والهزات الارضية، الفيضانات، سقوط الامطار، سرعة الرياح، اختبارات الحياة، تيارات البحار، وكذلك يستعمل في نمذجة وفيات الاطفال الرضع والدراسات البايولوجية وتحليل الاشارات الضوئية وبناء نماذج الاخطاء، وهو من التوزيعات المناسبة للملائمة الجيدة لعينات البقاء على قيد الحياة.

(Kersey: 2010 P:8) ، (A.Loganathan & M. Uma : 2017 P83-84)

وهذا التوزيع هو معكوس المتغير العشوائي الذي له توزيع ويبل (Wiebull distribution) فاذا كان المتغير العشوائي z له توزيع ويبل، فانه المتغير العشوائي $x = \frac{1}{z}$ له توزيع فريچت بدالة الكثافة الاحتمالية الاتية :

$$\mathbf{f(x, \alpha, \beta) = \alpha\beta\, x^{-(\alpha+1)} \exp(-\beta x^{-\alpha})\ ;\ x \geq 0\ ;\ \alpha, \beta > 0} \qquad \textbf{... (2-3)}$$

وان $\alpha > 0$ معلمة الشكل Shape Parameter و $\beta > 0$ معلمة القياس Scale Parameter

، وان x يمثل المتغير العشوائي وقت الفشل ، واذا كان $x \sim Frechet(\alpha, \beta)$ ، فان دالة التوزيع التراكمية Cumulative Distribution Function له هي :

$$\mathbf{F(x, \alpha, \lambda) = P(X \leq x) = \int_0^x f(u)du = \exp(-\beta x^{-\alpha})\ \ ;\ x \geq 0}$$

وان العزم ذو المرتبة (r) حول نقطة الاصل كالاتي:

$$EX^r = \int_0^\infty X^r f(x)dx = \beta^{\frac{r}{\alpha}}\, \Gamma(1 - \frac{r}{\alpha}) \quad ; r = 1,2,3,\ldots$$

اذا كان $r > \alpha$ فان العزوم للتوزيع غير موجود، وعندما $0 < r \leq \alpha$ فان العزوم غير موجودة ، وعندما يكون $0 < \alpha \leq 2$ فان العزوم موجودة ولكن التباين غير موجود.

حيث ان :

$$EX=\beta^{\frac{1}{\alpha}}\Gamma(1 - \frac{1}{\alpha})$$

$$EX^2 = \beta^{\frac{2}{\alpha}}\Gamma(1 - \frac{2}{\alpha})$$

$$Var(X) =\beta^{\frac{2}{\alpha}}[\Gamma(1 - \frac{2}{\alpha}) - (\Gamma^2(1 - \frac{1}{\alpha}))]$$

(A.Loganathan & M. Uma : 2017 P83-84) ، (Kersey: 2010 P:8)

(Kundu, & Howlader 2010 P1548) (بشار، ٢٠١٨، ص ٢٣-٢٤)

٢-8 توزيع ويبل Weibull Distribution

تم اشتقاق هذا التوزيع من قبل العالم السويدي (Waloddi Weibull) عام 1939م ويعد احد أهم التوزيعات الاحتمالية المهمة في نمذجة اوقات الفشل للاجهزة والمعدات الكهربائية والمكان والذي يعتبر من التوزيعات الاحتمالية المهمة في دراسة المعولية .

المتغير العشوائي x له له توزيع ويبل (Weibull Distribution) بدالة الكثافة الاحتمالية الآتية:

$$\mathbf{f(x, \alpha, \lambda) = \alpha\lambda x^{\alpha-1} \exp(-\lambda x^{\alpha}) \quad ; \quad x > 0} \qquad \text{... (2-4)}$$

وان $\alpha > 0$ معلمة الشكل (Shape Parameter) و $\lambda > 0$ معلمة القياس (Scale (Parameter

، وان x يمثل المتغير العشوائي الوقت لحين الفشل.

اذا كان $x \sim Weibull(\alpha, \lambda)$ ، فان دالة التوزيع التراكمية Cumulative Distribution Function له هي :

$$\mathbf{F(x,\alpha,\lambda) = P(X \le x) = \int_0^x f(u)du = 1 - \exp(-\lambda x^{\alpha})\ ;\ \ x \ge 0)}$$

وان العزم ذي المرتبة r حول نقطة الأصل هو:

$$EX^r = \int_0^{\infty} X^r f(x)dx = \frac{r\Gamma\left(\frac{r}{\alpha}\right)}{\alpha\lambda^{\frac{r}{\alpha}}} \quad ; \quad r = 1,2,3,\dots$$

إذ أن :

$$EX = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha\lambda^{\frac{1}{\alpha}}}$$

$$EX^2 = \frac{2\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right)}{\alpha\lambda^{\frac{2}{\alpha}}}$$

$$Var(X) = \frac{r\Gamma\left(\frac{r}{\alpha}\right)}{\alpha\lambda^{\frac{r}{\alpha}}} - \left(\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{(\alpha\lambda^{\frac{1}{\alpha}})^2}\right)$$

(M. M. Mohie El-Din; M.) (A.Loganathan & M. Uma : 2017 P83-84)

(Nagy, 2017, P98)

٩-٢ التوزيع الأسي Exponential Distribution

سمي بالاسي لانه مشتق من الدالة الأسية ويستعمل عادة في مسائل متعلقة بقياس الزمن وفي تخمين الفترات الزمنية بين وقوع الأحداث. مثل مدة خدمة شباك البريد، مدة المكالمة هاتفية، مدة تفريغ باخرة الشحن، مدة تصليح آلة، مدة انتظار زبون قبل الحصول على الخدمة.

ويعد التوزيع الأسي حالة خاصة من توزيع ويبل فعندما تكون $\alpha = 1$ فتكون دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الأسي بالشكل الآتي :

$$\mathbf{f(x,\alpha,\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}} \quad ; \qquad \mathbf{x > 0} \qquad \text{... (2-5)}$$

اذا كان $x \sim \exp(\lambda)$ ، فان دالة التوزيع التراكمية Cumulative Distribution Function له هي :

$$\mathbf{F(x,\alpha,\lambda) = P(X \le x) = \int_0^x f(u)du = 1 - e^{-\lambda x}} \; ; \quad \mathbf{x \ge 0}$$

إذ أن :

$$\mathbf{EX} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\mathbf{EX^2} = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$\mathbf{Var(X)} = \frac{1}{\lambda^2}$$

(Ross,2009:P176:180)

٢-١٠ توزيع كاما Gamma Distribution

يعتبر توزيع كاما واحد من التوزيعات المتصلة الشائعة الاستخدام في التطبيق، عرف من قبل الباحثه Stacy(1962) فقد عد هذا التوزيع اساسا لعدد من التوزيعات الأخرى وخاصة التوزيعات الخاصة بدراسة زمن الحياة .

ويستعمل توزيع كاما في قياس المهل الزمنية كالعمر وأوقات الانتظار لدى المطاعم او مكاتب الخدمات وحتى حجز قنوات الاتصال، حيث ان دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع كاما هي:

$$f(x,\alpha,\beta)=\frac{1}{\Gamma\alpha\,\beta^{\alpha}}\,x^{\alpha-1}\,e^{-\frac{x}{\beta}}\quad x\geq 0\qquad \alpha,\beta>0 \qquad \ldots(2\text{-}6)$$

حيث ان α معلمة الشكل ، β معلمة القياس

ولتوزيع كاما ذي المعلمتين متوسط وتباين هما على التوالي:

$$Ex=\alpha\beta$$

$$V(x)=\alpha\beta^{2}$$

اما دالة التوزيع التجميعي (التراكمي) لتوزيع كاما هي:

$$F(x,\alpha,\beta)=\int_0^x f(u,\alpha,,\beta)du=\frac{\gamma(\alpha,\frac{x}{\beta})}{\Gamma\alpha} \qquad \ldots(2\text{-}7)$$

حيث ان $\gamma(\alpha,\frac{x}{\beta})$ دالة كاما المنقوصة(الدنيا).

٢-١١ توزيع ليندلي Lindley Distribution

يعد توزيع ليندلي (Distribution Lindley) أحد التوزيعات المستمرة المهمة التي تمتاز بإمكانية كبيرة في تمثيل الانظمة المختلفة التي تتالف من مجتمعات مركبة وغير متجانسة وكذلك المرونة العالية لهذا التوزيع كإنموذج للفشل.

ويعد توزيع ليندلي من التوزيعات المختلطة الناتجة من خلط متغيرين عشوائيين احدهما يتبع التوزيع الأسي بمعلمة قياس (θ) والثاني يتبع توزيع كاما بمعلمتي شكل وقياس (θ) و (α) على التوالي لتكوّنان دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ليندلي بمعلمتين كالآتي:

$$\mathbf{f(x,\alpha,\theta) = \frac{\theta^2}{\alpha\theta+1}(\alpha + x)e^{-\theta x}\ ;\ x > 0\ ,\theta > 0,\ \ \alpha\theta > 0} \qquad \text{... (2-6) ...}$$

وان دالة الاحتمال التراكمي لتوزيع ليندلي تكتب كالآتي:

$$\mathbf{F(x,\alpha,\theta) = 1 - [\frac{1+\alpha\theta+\theta X}{\alpha\theta+1} e^{-\theta x}]\ ;\ x > 0\ ,\theta > 0,\ \ \alpha\theta > 0}$$

(Shanker & Fesshay, 2016, P2)

٢-١٢ اصناف التوزيعات الأولية (Classes of Prior Distributions)

إن مفهوم الحصانة الخاص بأساليب بيز يعتمد على ثلاث اتجاهات رئيسية وبمعنى أدق على ثلاث مشاكل هي :

١- عدم دقة المعلومات الأولية اي عدم الدقة في تحديد التوزيع الأولي

٢- تلوث مشاهدات العينة الحالية أو المشاهدات السابقة أوعدم تحقق فروض الأخطاء العشوائية

.

٣- عدم الدقة في تحديد دالة الخسارة.

وتعد مشكلة عدم دقة المعلومات الأولية من تحديد التوزيع الأولي (المسبق) (Prior Distribution) في تقدير بيز واحدة من اتجاهات تحليل بيز الحصين التي ستتم دراستها ، فهنالك أصناف (عوائل) من التوزيع المُسبق حيثُ يُمثل صنف التوزيع المُسبق التوزيع الذي تتبعه المعلومات المسبقة. ونتيجة لعدم التأكد من التحديد الدقيق لأنموذج دالة هذه المعلومات وهي المشكلة الأساسية في أساليب بيز فقد دُرست الحصانة أو الحساسية لمقدرات بيز تحت أصناف مختلفة من التوزيعات المُسبقة ومن هذه الأصناف ما يأتي:

الصنف الذي تكون فيه المعلومات المُسبقة عبارة عن خليط (mixtures) من المعلومات المُسبقة الأساسية (Base prior) المتمثلة بدالة كثافة احتمالية سابقة مرافق طبيعي (Natural conjugate) وبثقة $(1-\varepsilon)$ حيثُ أن (ε) يُمثل احتمال أن المعلومات المُسبقة تبتعد عن المعلومات الأساسية π_0. أما المعلومات الأخرى فهي المعلومات الملوثة التي تكون بصورة دالة احتمالية سابقة غير ملائمة (Improper) أو قد تتمثل بدالة احتمالية سابقة غير معلوماتية (Non-informative). إذ يُمكن التعبير عن هذا الصنف من المعلومات المُسبقة وفق الصيغة العامة الآتية:

$$\Gamma = \{\pi(\theta): \pi(\theta) = (1-\varepsilon)\pi_0(\theta) + \varepsilon q(\theta); q(\theta) \in Q\} \qquad \dots(2\text{-}7)$$

إذ أن:

$\pi_0(\theta)$: المعلومات المُسبقة الأساسية.

$q(\theta)$: الدالة الاحتمالية السابقة غير المعلوماتية فيما يخص المعلومات الملوثة باحتمال ε.

Q: صنف التلويث.

إذا كانت المعلومات المُسبقة تنتمي الى صنف يستبدل ε بدالة ملائمة $\varepsilon(\theta)$ وفق الصيغة الاتية:

$$\Gamma = \{Q: \varepsilon(\theta)\} = \{\pi(\theta) = (1-\varepsilon)\pi_0(\theta) + \varepsilon(\theta) q(\theta); q(\theta) \in Q\} \qquad \dots(2\text{-}8)$$

٣. الصنف الذي تكون فيه المعلومات المُسبقة خليط وفقاً لما يأتي:

$$\Gamma = \{\pi: \pi(\theta) = \pi_i(\theta)\}\ ; i = 1,2,\dots,k \qquad \dots(2\text{-}9)$$

إذ أن:

$\pi_i(\theta)$: هي توزيعات مُسبقة مفترضة إلى المعلمة (θ) وباحتمال P_i وبذلك يظهر k من الدوال اللاحقة تبعاً لكل دالة مُسبقة وكما يأتي:

$$P_1(\theta/X)\,, P_2(\theta/X), \dots\dots, P_K(\theta/X) \qquad \dots(2\text{-}10)$$

وتكون هنالك عائلة من التوزيعات الخليطة للتوزيع المُسبق للمعلمة θ:

$$\pi(\theta) = \sum_{i=1}^{k} P_i\, \pi_i(\theta) \qquad \dots(2\text{-}11)$$

٤. صنف التكامل ويكون وفق الصيغة الاتية:

$$\Gamma = \{\pi(\theta): \int g_i(\theta)\, \pi(\theta) d\pi(\theta) = \mu_i, i = 1,2, \dots . n\} \qquad \dots(2\text{-}12)$$

إذ أن:

$g_i(\theta)$, μ_i : معلومات مسبقة محددة.

٥. الصنف الذي تكون المعلومات المُسبقة عبارة عن حدود لمدى من الاحتمالات المجزأة وكما يأتي:

$$\Gamma(\alpha, \beta) = \{\pi: \pi(\theta): \alpha_i \le \int \pi(\theta) d\,\theta \le \beta_i; i = 1,2, \dots, n\} \qquad \dots(8\text{-}2)$$

إذ أن α_i , β_i أعداد محددة وهي كما يأتي:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \le \sum_{i=1}^{n} \beta_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \le 1 \le \sum_{i=1}^{n} \beta_i$$

(الياسري: ٢٠٠٧: P:9)

٢–١٣ اسلوب بيز الحصين بالاعتماد على الصنف الملوث (الملوث ε -ML-II)

أقترح (Berger, ١٩٨٥) صنف من التوزيعات السابقة يعتمد على تقدير الامكان الاعظم سميَّ بالصنف الملوث (الملوث ε -ML-II) والمعرف بالدالة الآتية:

$$\Gamma = \{q(\theta): q(\theta) = (1-\varepsilon)q_0(\theta) + \varepsilon q_1(\theta); q(\theta)\in G\} \qquad \ldots(2\text{-}13)$$

إذ أن:

$q_0(\theta)$: المعلومات المسبقة الاساسية

$q_1(\theta)$: المعلومات المسبقة الملوثة

ε: احتمال الخطأ في اختيار المعلومات الأولية (نسبة التلوث في التوزيع الاولي)

وأن $0 < \varepsilon < 1$. (Berger & Berliner, 1986, 463-466)

اذ تقدير بيز الحصين في ظل هذا الصنف من التوزيعات الأولية يعتمد على مبدأ ايجاد مقدر للمعلمة (المعلمات) الفوقية للتوزيع الاولي المسبق الملوث باعتبار نسبة تلوث (ε) فيه بأيجاد الدالة الحدية التي تقابل التوزيع الاحتمالي للبيانات الاصلية في ظل وجود المعلومات المسبقة الملوثة عن المعلمة المراد تقديرها ومن ثم تعظيم هذه الدالة الحدية للحصول على مقدر جديد للمعلمة الفوقية للتوزيع الاولي المفترض للمعلمة المراد تقديرها ومن ثم تعويض هذا المقدر الجديد للمعلمة الفوقية في دالة التوزيع الملوث المسبق للمعلمة ، ومن ثم ايجاد التوزيع المختلط السابق باستعمال مقدر الامكان الاعظم نوع الثاني ومنه نجد التوزيع اللاحق في ظل المعلومات المسبقة الأولية الملوثة واخيراً ايجاد مقدر بيز الحصين في ظل دالة خسارة معينة كأن تكون دالة خسارة تربيعية.

وتتلخص خطوات ايجاد مقدر بيز الحصين بالاعتماد على تقدير الامكان الاعظم النوع الثاني بالآتي:

١- تحديد دالة التوزيع الأساسي $f(x/\underline{\theta})$ المطلوب تقدير معلماته

٢- نجد دالة الامكان للتوزيع الأساسي$L\left(x/\underline{\theta}\right)$

٣- افتراض توزيعات اولية للمعلمة المراد تقديرها وكالآتي:

- توزيع اولي اساسي قياسي يتضمن معلمات مغايرة للتوزيع الأصلي وليكن $q_0(\underline{\theta})$
- توزيع اولي ملوث قياسي يتضمن معلمات مغايرة للتوزيع الاصلي وليكن $q(\underline{\theta})$

وأن كل من $q_0(\underline{\theta})$ و $q(\underline{\theta})$ يتوزعان وفق توزيع معين يتم افتراضه.

٤- ايجاد دالة الكثافة الاحتمالية الحدية (Marginal) التي تقابل التوزيع الأحتمالي لـ x في ظل وجود المعلومات المسبقة الملوثة عن المعلمة المطلوب تقديرها والتي تكون بالصيغة الأتية :

$$M(X/q) = \int_0^{\infty} L\left(x/\underline{\theta}\right) q(\underline{\theta}/x) d\theta \qquad \dots(2\text{-}14)$$

٥- نعظم الدالة الحدية $M(X/q)$ نسبة للمعلمات(المعلمة) الفوقية (Hyper parameters) في التوزيعات الاولية الملوثة لايجاد مقدرات جديدة لتلك المعلمات.

٦- نستبدل المعلمات الفوقية المقدرة في الخطوة (٥) بدالة التوزيع المسبق الملوث $q(\underline{\theta}/x)$

٧- ايجاد التوزيع المختلط (Mixed Prior distribution) للمعلمة المراد تقديرها باستعمال مقدر الامكان الاعظم النوع الثاني وحسب الصيغة الآتية:

$$\hat{\pi}(\theta) = (1-\varepsilon)q_0(\boldsymbol{\theta}) + \varepsilon q(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \qquad \dots(2\text{-}15)$$

٨- ايجاد التوزيع اللاحق (Posterior) للمعلمة المراد تقديرها باستعمال مقدر الامكان الأعظم النوع الثاني وحسب الصيغة الآتية :

$$\hat{\pi}^*(\theta) = \hat{\boldsymbol{\lambda}} {q^*}_0(\theta) + (1-\hat{\boldsymbol{\lambda}})q^*(\theta) \qquad \dots(2\text{-}16)$$

٩- ايجاد الوزن اللاحق $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ حسب الصيغة الآتية :

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \frac{(1-\varepsilon)M(X/\mathrm{q}_0(\theta))}{(1-\varepsilon)M(X/q_0(\theta)) + \varepsilon M(X/\hat{q}(\theta))}$$

$$= [\frac{(1-\varepsilon)M(X/\mathrm{q}_0(\theta))}{(1-\varepsilon)M(X/q_0(\theta)) + \varepsilon M(X/\hat{q}(\theta))}]^{-1}$$

$$= \frac{(1-\varepsilon)M(X/q_0(\theta)) + \varepsilon M(X/\hat{q}(\theta))}{(1-\varepsilon)M(X/\mathrm{q}_0(\theta))}$$

$$= \frac{(1-\varepsilon)M(X/q_0(\theta))}{(1-\varepsilon)M(X/\mathrm{q}_0(\theta))} + \frac{\varepsilon M(X/\hat{q}(\theta))}{(1-\varepsilon)M(X/\mathrm{q}_0(\theta))}$$

$$= 1 + \frac{\varepsilon M(X/\hat{q}(\theta))}{(1-\varepsilon)M(X/\mathrm{q}_0(\theta))}$$

$$\therefore \hat{\boldsymbol{\lambda}} = \left[1 + \frac{\varepsilon M\left(x/q(\theta)\right)}{(1-\varepsilon)M\left(x/q_0(\theta)\right)}\right]^{-1} \qquad \ldots (2\text{-}17)$$

او :

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \left[1 + \frac{\varepsilon M\left(x/q(\theta)\right)}{(1-\varepsilon)M\left(x/q_0(\theta)\right)}\right]^{-1}$$

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \left[\frac{(1-\varepsilon)M\left(x/q_0(\theta)\right) + \varepsilon M\left(x/q(\theta)\right)}{(1-\varepsilon)M\left(x/q_0(\theta)\right)}\right]^{-1}$$

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \frac{(1-\varepsilon)M\left(x/q_0(\theta)\right)}{(1-\varepsilon)M\left(x/q_0(\theta)\right) + \varepsilon M\left(x/q(\theta)\right)}$$

١٠- ايجاد التوزيع اللاحق للتوزيع الاساسي للمعلمة المراد تقديرها وكالآتي:

$$\mathrm{q}^*{}_0(\theta) = \frac{L\left(x/\underline{\theta}\right)q_0(\theta)}{M(X/q_0(\theta))} \qquad \ldots (2\text{-}18)$$

ولحد هذه الخطوة اننا اوجدنا التوزيع اللاحق للتوزيع الاساس في ظل المعلومات الاولية الملوثة .

وبنفس الخطوات نجد التوزيع اللاحق للتوزيع الملوث $\mathrm{q}^*{}_0(\theta)$

١١- نجد مقدر بيز الحصين للتوزيع الاساس والتوزيع الملوث في ظل دالة خسارة معينة ولتكن $l(\boldsymbol{\theta})$ وكالآتي:

$$\mathrm{E}q^*{}_0(\theta) = \int_0^\infty L\,(\theta)\, q^*{}_0(\theta) d\theta \qquad \ldots(2\text{-}19)$$

$$E q^*(\theta) = \int_0^\infty L\,(\theta)\, q^*(\theta) d\theta \qquad \ldots(2\text{-}20)$$

١٢- ايجاد مقدر بيز الحصين للمعلمة المراد تقديرها حسب التوزيع المختلط الآتي:

$$E\hat{\pi}^*(\theta) = \hat{\boldsymbol{\lambda}}\mathrm{E}q^*{}_0(\theta) + (1-\hat{\boldsymbol{\lambda}})\varepsilon q^*(\theta) \qquad \ldots(2\text{-}21)$$

(Sinha & J.Prabha, 2014, 2-6) (Berger & Berliner, 1986, 463-469)

(Chaturvedi et al., 2013, 3-10)

٢-١٤ تقدير معلمات توزيع فريچت باستعمال صنف التلوث الامكان الاعظم النوع الثاني الملوث ML-II- ε

٢-١٤-١ تقدير معلمة القياس β عندما يكون التوزيع الاساس القياسي والتوزيع الملوث القياسي توزيع ويبل:

باعتبار معلمة الشكل α معلومة سيتم تقدير معلمة القياس β باستعمال اسلوب بيز الحصين بالاعتماد على صنف التوزيع الأولي الملوث الامكان الاعظم النوع الثاني وكالآتي:

$$\Gamma = \{\pi(\beta): q(\beta) = (1-\varepsilon)q_0(\beta) + \varepsilon q(\beta)\} \qquad \ldots(2\text{-}22)$$

إذ أن :

$q_0(\beta)$: المعلومات الأساسية المسبقة القياسية

$q(\beta)$: المعلومات الملوثة المسبقة القياسية

ε : نسبة التلوث

وتتوفر لدى الباحثة المعلومات الأتية :

$q_0(\beta/\sigma_0)\ \sim Weibull(\alpha=1, \sigma_0)$

$$q_{We0}(\beta/\sigma_0) = f(\beta, \sigma_0) = \sigma_0 \boldsymbol{e}^{-\sigma_0\beta} \qquad \ldots(2\text{-}23)$$

$q(\beta/\sigma)\ \sim Weibull(\alpha=1, \sigma)$

$$q_{We}(\beta/\sigma) = f(\beta, \sigma) = \sigma \boldsymbol{e}^{-\sigma\beta} \qquad \ldots(2\text{-}24)$$

إن التوزيع الاساسي المراد تقدير معلماته هو توزيع فريجت بدالة الكثافة الاحتمالية الآتية:

$$f(x, \alpha, \beta) = \alpha\beta\, x^{-(\alpha+1)} \exp(-\beta x^{-\alpha})$$

لذلك فأن دالة الامكان تكون بالصيغة الآتية:

$$L(x_i, \alpha, \beta) = \alpha^n \beta^n \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)} \exp(-\beta \sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha})$$

والآن نقوم بإيجاد الدالة الحدية التي تقابل التوزيع الاحتمالي للبيانات الأصلية X بوجود المعلومات

المسبقة الملوثة للمعلمة β وكالآتي:

$$M_{WeF}(X/q) = \int_0^\infty L\,(x/\beta)\, q(\beta/x) d\beta$$

$$= \int_0^\infty \alpha^n \beta^n \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)}\ e^{(-\beta \sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha})}\, \sigma e^{-\sigma\beta} d\beta$$

$$= \sigma\alpha^n \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)} \int_0^\infty \beta^n\ e^{(-\beta(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}+\sigma))} d\beta$$

$$= \frac{\sigma\alpha^n \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)}\, \Gamma(n+1)}{(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}+\sigma)^{n+1}} \qquad \ldots(2\text{-}25)$$

والآن نقوم بتعظيم الدالة الحدية $M_{WeF}(X/q)$ للحصول على مقدر جديد لـ σ وكالآتي:

$$\frac{dM_{WeF}(X/q)}{d\sigma} = \alpha^n \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)}\, \Gamma(n+1) \left[\frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha} + \sigma)^{n+1} - \sigma(n+1)(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha} + \sigma)^n}{(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha} + \sigma)^{2(n+1)}}\right]$$

وبأستخراج عامل مشترك $(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha} + \sigma)^n$ ومساواة $\frac{dM_{WeF}(X/q)}{d\sigma}$ بالصفر نحصل على :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha} + \hat{\sigma}\right)^n \left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha} + \hat{\sigma}\right) - (n+1)\hat{\sigma}\right] = 0$$

اما المقدار $(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} + \hat{\sigma})^{n} = 0$ وهذا لايجوز لأن هذا المقدار اكبر من الصفر

$$\therefore ((\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} + \hat{\sigma}) - (n+1)\hat{\sigma}) = 0 \Longrightarrow$$

$$(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} + \hat{\sigma} - n\hat{\sigma} - \hat{\sigma}) = 0 \qquad \Longrightarrow$$

$$\hat{\sigma} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}}{n} \qquad \ldots(2\text{-}26)$$

وعليه نستبدل σ بـ $\hat{\sigma}$ في التوزيع المسبق الملوث الأساس للـ β لنحصل على :

$$q_{WeF}(\beta/\sigma) = \begin{cases} \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}}{n} \boldsymbol{e}^{-\beta \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}}{n}} & if \quad \sigma_0 < \hat{\sigma} \\ q_{We0F}(\beta/\sigma_0) & if \quad \sigma_0 \geq \hat{\sigma} \end{cases}$$

وعليه يكون التوزيع المختلط السابق للمعلمة β باستعمال مقدر الامكان الأعظم النوع الثاني كما يأتي:

$$\hat{\pi}_{WeF}(\beta) = (1-\varepsilon) q_{WeF0}(\boldsymbol{\beta}) + \varepsilon q_{WeF}(\hat{\sigma}) \qquad \ldots(2\text{-}27)$$

$\therefore$ التوزيع اللاحق للمعلمة β بأستعمال مقدر الامكان الأعظم النوع الثاني هو :

$$\hat{\pi}^{*}_{WeF}(\beta) = \hat{\boldsymbol{\lambda}} q^{*}_{We0F}(\beta/\sigma_0) + (1-\hat{\boldsymbol{\lambda}}) q^{*}_{WeF}(\beta/\hat{\sigma})$$ تاكد

وسيتم ايجاد الوزن اللاحق باستعمال مقدر الامكان الاعظم النوع الثاني كالآتي:

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}}_{WeF} = \frac{(1-\varepsilon) M_{We0F}(X/q_0(\beta))}{(1-\varepsilon) M_{We0F}(X/q_0(\beta)) + \varepsilon M_{WeF}(X/\hat{q}(\theta))}$$

او يمكن ان يكتب بشكل آخر وكالآتي:

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}}_{WeF} = \left[1 + \frac{\varepsilon M_{WeF}(X/\hat{q}(\theta))}{(1-\varepsilon) M_{We0F}(X/q_0(\beta))}\right]^{-1} \qquad \ldots (2\text{-}28)$$

$$= \left[1 + \frac{\varepsilon \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}}{n} \alpha^{n} \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)} \Gamma(n+1)}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} + \sigma\right)^{n+1}}}{(1-\varepsilon) \frac{\sigma_0 \alpha^{n} \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)} \Gamma(n+1)}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} + \sigma_0\right)^{n+1}}}\right]^{-1}$$

$$= \left[1 + \frac{\varepsilon \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} + \sigma\right)^{-(n+1)}}{(1-\varepsilon) \sigma_0 \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} + \sigma_0\right)^{-(n+1)}}\right]^{-1}$$

$$\therefore \hat{\boldsymbol{\lambda}}_{WeF}=\begin{cases}\left[1+\frac{\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}+\sigma\right)^{-(n+1)}}{(1-\varepsilon)\sigma_0\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}+\sigma_0\right)^{-(n+1)}}\right]^{-1} & if \quad \sigma_0<\hat{\sigma}\\ (1-\varepsilon) & if \quad \sigma_0\geq\hat{\sigma}\end{cases} \quad \ldots(2\text{-}29)$$

ومن ثم نجد التوزيع اللاحق الاساس $q^*_{We0F}(\beta/\sigma_0)$ للمعلمة β كالآتي:

$$q^*_{We0F}(\beta/\sigma_0)=\frac{L(x/\beta)q_0(\beta/\sigma_0)}{M(X/q_0(\beta))}$$

$$=\frac{\alpha^n\beta^n\prod_{i=1}^{n}x^{-(\alpha+1)}\,e^{\left(-\beta\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}\right)}\sigma_0\boldsymbol{e}^{-\sigma_0\beta}}{\dfrac{\sigma_0\alpha^n\prod_{i=1}^{n}x^{-(\alpha+1)}\Gamma(n+1)}{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}+\sigma_0\right)^{n+1}}}$$

$$=\frac{1}{\Gamma(n+1)\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}+\sigma_0}\right)^{n+1}}\beta^{(n+1)-1}e^{-\frac{\beta}{\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}+\sigma_0\right)}}} \quad \ldots(2-30)$$

$$\sim Gamma\left((n+1),\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}+\sigma_0}\right)$$

ونلاحظ ان التوزيع اللاحق للتوزيع المسبق الاساس هو دالة كاما بالمعلمتين

$\alpha=(n+1)$ و $\beta=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}+\sigma_0}$ وهو دالة احتمالية مجال تكاملها يساوي الواحد الصحيح.

وبالطريقة نفسها نوجد التوزيع اللاحق *(Posterior)* للتوزيع الملوث لنحصل على :

$$q^*_{WeF}(\beta/\sigma)=\frac{L(x/\beta)q(\beta/\sigma)}{M(X/q(\beta))}$$

$$=\frac{\alpha^n\beta^n\prod_{i=1}^{n}x^{-(\alpha+1)}\,e^{\left(-\beta\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}\right)}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{e}^{-\sigma\beta}}{\dfrac{\sigma\alpha^n\prod_{i=1}^{n}x^{-(\alpha+1)}\Gamma(n+1)}{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}+\sigma\right)^{n+1}}}$$

$$=\frac{1}{\Gamma(n+1)\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}+\sigma}\right)^{n+1}}\beta^{(n+1)-1}e^{-\frac{\beta}{\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}+\sigma\right)}}} \quad \ldots(2-31)$$

$$\sim Gamma\left((n+1),\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}+\sigma}\right)$$

ونلاحظ ان التوزيع اللاحق للتوزيع المسبق الملوث هو دالة كامـــا بالمعلمتين

α=(n + 1) و $\beta=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma}$ وهو دالة احتمالية مجال تكاملها يساوي الواحد الصحيح.

ولايجاد مقدر بيز للمعلمة β في ظل دالة خسارة تربيعية يكون كالآتي:

$$Eq^*_{We0F}(\beta) = \int_0^\infty \beta\, q^*_{We0F}(\beta) d\beta$$

$$= \int_0^\infty \beta \quad \beta^{(n+1)-1}\, e^{-\frac{\beta}{\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma_0)}}} d\beta$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n+1)(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma_0})^{n+1}} \int_0^\infty \beta^{(n+1)-1+1}\, e^{-\frac{\beta}{\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma_0)}}} d\beta$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n+1)(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma_0})^{n+1}} \int_0^\infty \frac{\Gamma(n+2)\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma_0\right)^{n+2}}}{\Gamma(n+2)\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma_0\right)^{n+2}}} \beta^{(n+1)}\, e^{-\beta(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma_0)} d\beta$$

$$= \frac{\Gamma(n+2)\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma_0\right)^{n+2}}}{\Gamma(n+1)(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma_0})^{n+1}} \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(n+2)\left(\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma_0)}\right)^{n+2}} \beta^{(n+2)-1}\, e^{-\frac{\beta}{\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma_0)}}} d\beta$$

$$= \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma_0)^{n+1}\Gamma(n+2)}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma_0\right)^{n+2}\Gamma(n+1)}$$

$$= \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma_0)^{n+1}(n+1)\Gamma(n+1)}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma_0\right)^{n+2}\Gamma(n+1)}$$

$$= \frac{(n+1)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma_0\right)^{n+1}}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma_0\right)^{n+2}}$$

$$= \frac{(n+1)}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma_0)} \qquad \ldots(2\text{-}32)$$

وبالطريقة نفسها نوجد مقدر بيز للمعلمة β عند دالة خسارة تربيعية للتوزيع الملوث وكالآتي:

$$Eq^*_{WeF}(\beta) = \int_0^\infty \beta\, q^*_{WeF}(\beta) d\beta$$

$$= \int_0^\infty \beta \quad \beta^{(n+1)-1}\, e^{-\frac{\beta}{\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma)}}} d\beta$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n+1)\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma}\right)^{n+1}} \int_0^\infty \beta^{(n+1)-1+1}\, e^{-\frac{\beta}{\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma)}}} d\beta$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n+1)\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma}\right)^{n+1}} \int_0^\infty \frac{\Gamma(n+2)\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma)^{n+2}}}{\Gamma(n+2)\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma)^{n+2}}} \beta^{(n+1)}\, e^{-\beta(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma)} d\beta$$

$$= \frac{\Gamma(n+2)\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma\right)^{n+2}}}{\Gamma(n+1)\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma}\right)^{n+1}} \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(n+2)\left(\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma_0)}\right)^{n+2}} \beta^{(n+2)-1}\, e^{-\frac{\beta}{\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma)}}} d\beta$$

$$= \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma)^{n+1}\Gamma(n+2)}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma\right)^{n+2}\Gamma(n+1)}$$

$$= \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma)^{n+1}(n+1)\Gamma(n+1)}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma\right)^{n+2}\Gamma(n+1)}$$

$$= \frac{(n+1)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma_0\right)^{n+1}}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma\right)^{n+2}}$$

$$= \frac{(n+1)}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma)} \qquad \ldots(2\text{-}33)$$

وعليه يكون مقدر بيز الحصين للمعلمة β للتوزيع اللاحق المختلط في ظل دالة خسارة تربيعية كالآتي:

$$\therefore E\hat{\pi}^*_{WeF}(\beta) = \begin{cases} \hat{\boldsymbol{\lambda}}\frac{(n+1)}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma_0)} + (1-\hat{\boldsymbol{\lambda}})\frac{(n+1)}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma)} & if \quad \sigma_0 < \hat{\sigma} \\ \frac{(n+1)}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma_0)} & if \quad \sigma_0 \ge \hat{\sigma} \end{cases} \ldots(2\text{-}34)$$

ونلاحظ من معادلة (2-34) انه لايمكن حلها بالطرائق التحليلية الاعتيادية لكونها معادلة غير خطية لذلك سيتم الطرائق التكرارية وهي طريقة نيوتن رافسون في ايجاد مقدر بيز الحصين للمعلمة ($\hat{\beta}_{WeFR.Bayes}$)

٢-١٤-٢ تقدير معلمة القياس β عندما يكون التوزيع الاساس القياسي والتوزيع الملوث القياسي توزيع معكوس فريجت:

باعتبار معلمة الشكل α معلومة سيتم تقدير معلمة الشكل β باستعمال اسلوب بيز الحصين بالاعتماد على صنف التوزيع الأولي الملوث الامكان الاعظم النوع الثاني وكالآتي:

$$\Gamma = \{\pi(\beta): q(\beta) = (1-\varepsilon)q_0(\beta) + \varepsilon q(\beta)\} \qquad \ldots(2\text{-}35)$$

إذ أن :

$q_0(\beta)$: المعلومات الأساسية المسبقة القياسية

$q(\beta)$: المعلومات الملوثة المسبقة القياسية

ε : نسبة التلوث

وتتوفر لدى الباحثة المعلومات الأتية :

$q_0(\beta/\sigma_0)$ ~*Invers Frechet (α=1,* σ_0)

$$q_{F0}(\beta/\sigma_0) = f(\beta, \sigma_0) = \frac{\sigma_0}{\beta^2}\boldsymbol{e}^{-\frac{\sigma_0}{\beta}} \qquad \ldots(2\text{-}36)$$

$q(\beta/\sigma)$ ~*Invers Frechet (α=1,* σ)

$$q_F(\beta/\sigma) = f(\beta, \sigma) = \frac{\sigma}{\beta^2}\boldsymbol{e}^{-\frac{\sigma}{\beta}} \qquad \ldots(2\text{-}37)$$

إن التوزيع الاساسي المراد تقدير معلماته هو توزيع فريجت بدالة الكثافة الاحتمالية الآتية:

$$f(x, \alpha, \beta) = \alpha\beta\, x^{-(\alpha+1)} \exp(-\beta x^{-\alpha})$$

لذلك فأن دالة الامكان تكون بالصيغة الآتية:

$$L(x_i, \alpha, \beta) = \alpha^n \beta^n \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)} \exp\left(-\beta \sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}\right)$$

والان نقوم بإيجاد الدالة الحدية التي تقابل التوزيع الاحتمالي للبيانات الأصلية X بوجود المعلومات

المسبقة الملوثة للمعلمة β وكالآتي:

$$M_{FF}(X/q) = \int_0^\infty L\,(x/\beta)\, q(\beta/x) d\beta$$

$$= \int_0^\infty \alpha^n \beta^n \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)}\ e^{(-\beta \sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha})} \frac{\sigma}{\beta^2}\boldsymbol{e}^{-\frac{\sigma}{\beta}} d\beta$$

$$= \sigma\alpha^n \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)} \int_0^\infty \beta^{n-2}\ e^{\left(-\beta\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \frac{1}{\sigma}\right)\right)} d\beta$$

$$=\frac{\sigma\alpha^{n}\prod_{i=1}^{n}\mathrm{x}^{-(\alpha+1)}\Gamma(\mathrm{n}-1)}{\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{x}_i{}^{-\alpha}-\frac{1}{\sigma}\right)^{n-1}} \quad \ldots(2\text{-}8)$$

والآن نقوم بتعظيم الدالة الحدية $M_{FF}(X/q)$ للحصول على مقدر جديد للـ σ وكالآتي:

$$\frac{dM_{FF}(X/q)}{d\sigma}=\alpha^{n}\prod_{i=1}^{n}\mathrm{x}^{-(\alpha+1)}\Gamma(\mathrm{n}-1)\left[\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{x}_i{}^{-\alpha}-\frac{1}{\sigma}\right)^{n-1}+(n-1)\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{x}_i{}^{-\alpha}-\frac{1}{\sigma}\right)^{n-2}}{\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{x}_i{}^{-\alpha}-\frac{1}{\sigma}\right)^{2(n-1)}}\right]$$

وبأستخراج عامل مشترك $\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{x}_i{}^{-\alpha}+\sigma\right)^{n}$ ومساواة $\frac{dM_{WeF}(X/q)}{d\sigma}$ بالصفر نحصل على :

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{x}_i{}^{-\alpha}-\frac{1}{\sigma}\right)^{n-1}\left[1+(n-1)\hat{\sigma}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{x}_i{}^{-\alpha}-\frac{1}{\sigma}\right)^{-1}\right]=0$$

اما المقدار $\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{x}_i{}^{-\alpha}-\frac{1}{\sigma}\right)^{n-1}=0$ وهذا لايجوز لأن هذا المقدار اكبر من الصفر

$$\therefore 1+(n-1)\hat{\sigma}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{x}_i{}^{-\alpha}-\frac{1}{\sigma}\right)^{-1}=0 \Longrightarrow$$

$$1+\frac{(n-1)}{\hat{\sigma}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{x}_i{}^{-\alpha}-\frac{1}{\sigma}\right)}=0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\hat{\sigma}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{x}_i{}^{-\alpha}-\frac{1}{\sigma}\right)+(n-1)}{\hat{\sigma}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{x}_i{}^{-\alpha}-\frac{1}{\sigma}\right)}=0$$

$$\hat{\sigma}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{x}_i{}^{-\alpha}-\frac{1}{\sigma}\right)+(n-1)=0 \Longrightarrow \hat{\sigma}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{x}_i{}^{-\alpha}-1+n-1=0$$

$$\hat{\sigma}=\frac{2-n}{\sum_{i=1}^{n}\mathrm{x}_i{}^{-\alpha}} \quad \ldots(2\text{-}18)$$

وعليه نستبدل σ بـ $\hat{\sigma}$ في التوزيع المسبق الملوث الأساس للـ β لنحصل على :

$$\mathrm{q}_{\mathrm{FF}}(\beta/\sigma)=\begin{cases}\frac{2-n}{\beta^{2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{x}_i{}^{-\alpha}}\boldsymbol{e}^{-\frac{2-n}{\beta\sum_{i=1}^{n}\mathrm{x}_i{}^{-\alpha}}} & if \quad \sigma_0<\hat{\sigma}\\ \mathrm{q}_{\mathrm{FF}}(\beta/\sigma_0) & if \quad \sigma_0\geq\hat{\sigma}\end{cases} \quad \ldots(2\text{-}38)$$

وعليه يكون التوزيع المختلط السابق للمعلمة β باستعمال مقدر الامكان الأعظم النوع الثاني كما يأتي:

$$\hat{\pi}_{FF}(\beta)=(1-\varepsilon)\mathrm{q}_{\mathrm{FF0}}(\boldsymbol{\beta})+\varepsilon\mathrm{q}_{\mathrm{FF}}(\hat{\sigma}) \quad \ldots(2\text{-}39)$$

∴ التوزيع اللاحق للمعلمة β بأستعمال مقدر الامكان الأعظم النوع الثاني هو :

$$\hat{\pi}^{*}{}_{FF}(\beta)=\hat{\boldsymbol{\lambda}}\mathrm{q}^{*}{}_{F0F}(\beta/\sigma_0)+(1-\hat{\boldsymbol{\lambda}})\mathrm{q}^{*}{}_{FF}(\beta/\hat{\sigma})$$

وسيتم ايجاد الوزن اللاحق باستعمال مقدر الامكان الاعظم النوع الثاني كالآتي:

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}}_{FF}=\frac{(1-\varepsilon)M_{F0F}(X/q_0(\beta))}{(1-\varepsilon)M_{F0F}(X/q_0(\beta))+\varepsilon M_{FF}(X/\hat{q}(\theta))}$$

او يمكن ان يكتب بشكل آخر وكالآتي:

$$\hat{\lambda}_{FF}=\left[1+\frac{\varepsilon M_{FF}(X/\hat{q}(\beta))}{(1-\varepsilon)M_{F0F}(X/q_0(\beta))}\right]^{-1}$$

$$=\left[1+\frac{\varepsilon\dfrac{\frac{2-n}{\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}}\alpha^n\prod_{i=1}^{n}x^{-(\alpha+1)}\Gamma(n-1)}{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}-\frac{1}{\frac{2-n}{\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}}}\right)^{n-1}}}{(1-\varepsilon)\dfrac{\sigma_0\alpha^n\prod_{i=1}^{n}x^{-(\alpha+1)}\Gamma(n-1)}{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}-\frac{1}{\sigma_0}\right)^{n-1}}}\right]^{-1}$$

$$=\left[1+\frac{\varepsilon\dfrac{(2-n)\alpha^n\prod_{i=1}^{n}x^{-(\alpha+1)}\Gamma(n-1)}{\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}}{(2-n)}\right)^{n-1}}}{(1-\varepsilon)\dfrac{\sigma_0\alpha^n\prod_{i=1}^{n}x^{-(\alpha+1)}\Gamma(n-1)}{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}-\frac{1}{\sigma_0}\right)^{n-1}}}\right]^{-1}$$

$$=\left[1+\frac{\varepsilon(2-n)\alpha^n\prod_{i=1}^{n}x^{-(\alpha+1)}\Gamma(n-1)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}}{(2-n)}\right)^{-(n-1)}}{(1-\varepsilon)\sigma_0\alpha^n\prod_{i=1}^{n}x^{-(\alpha+1)}\Gamma(n-1)\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}-\frac{1}{\sigma_0}\right)^{-(n-1)}}\right]^{-1}$$

$$\therefore\hat{\boldsymbol{\lambda}}_{WeF}=\begin{cases}\left[1+\dfrac{\varepsilon(2-n)\alpha^n\prod_{i=1}^{n}x^{-(\alpha+1)}\Gamma(n-1)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}}{(2-n)}\right)^{-(n-1)}}{(1-\varepsilon)\sigma_0\alpha^n\prod_{i=1}^{n}x^{-(\alpha+1)}\Gamma(n-1)\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}-\frac{1}{\sigma_0}\right)^{-(n-1)}}\right]^{-1} & if\quad \sigma_0<\hat{\sigma}\\ (1-\varepsilon) & if\quad \sigma_0\geq\hat{\sigma}\end{cases}\quad\ldots(2\text{-}40)$$

ومن ثم نجد التوزيع اللاحق الاساس $q^*_{F0F}(\beta/\sigma_0)$ للمعلمة β كالآتي:

$$q^*_{F0F}(\beta/\sigma_0)=\frac{L(x/\beta)q_0(\beta/\sigma_0)}{M(X/q_0(\beta))}$$

$$=\frac{\alpha^n\beta^n\ \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)}\ e^{(-\beta\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha})}\ \frac{\sigma_0}{\beta^2}\boldsymbol{e}^{-\frac{\sigma_0}{\beta}}}{\dfrac{\sigma_0\alpha^n\prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)}\Gamma(n-1)}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}-\frac{1}{\sigma_0}\right)^{n-1}}}$$

$$=\frac{1}{\Gamma(n-1)(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}-\frac{1}{\sigma_0}})^{\,n-1}}\beta^{(n-1)-1}\ e^{-\frac{\beta}{\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}-\frac{1}{\sigma_0})}}}\qquad \ldots(2\text{-}41)$$

$$\sim Gamma\ ((n-1),\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}-\frac{1}{\sigma_0}})$$

ونلاحظ ان التوزيع اللاحق للتوزيع المسبق الاساس هو دالة معكوس كاما بالمعلمتين

$\alpha=(n-1))$ و $\beta=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}-\frac{1}{\sigma_0}}$ وهو دالة احتمالية مجال تكاملها يساوي الواحد الصحيح

وبالطريقة نفسها نوجد التوزيع اللاحق للتوزيع الملوث لنحصل على :

$$q^*{}_{FF}(\beta/\sigma)=\frac{L\,(x/\beta)q(\beta/\sigma)}{M(X/q(\beta))}$$

$$=\frac{\alpha^n\beta^n\ \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)}\ e^{(-\beta\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha})}\ \frac{\sigma}{\beta^2}\boldsymbol{e}^{-\frac{\sigma}{\beta}}}{\dfrac{\sigma\alpha^n\prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)}\Gamma(n-1)}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}-\frac{1}{\sigma}\right)^{n-1}}}$$

$$=\frac{1}{\Gamma(n-1)(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}-\frac{1}{\sigma}})^{\,n-1}}\beta^{(n-1)-1}\ e^{-\frac{\beta}{\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}-\frac{1}{\sigma})}}}\qquad \ldots(2\text{-}42)$$

$$\sim Gamma\ (\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}-\frac{1}{\sigma}},(n-1))$$

ونلاحظ ان التوزيع اللاحق للتوزيع المسبق الملوث هو دالة معكوس كاما بالمعلمتين

$\alpha=(n-1))$ و $\beta=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}-\frac{1}{\sigma}}$ وهو دالة احتمالية مجال تكاملها يساوي الواحد الصحيح.

ولايجاد مقدر بيز للمعلمة β في ظل دالة خسارة تربيعية يكون كالآتي:

$$\mathrm{Eq^*}_{F0F}(\beta) = \int_0^\infty \beta\, \mathrm{q^*}_{F0F}(\beta)d\beta$$

$$= \int_0^\infty \beta \frac{1}{\Gamma(n-1)\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}-\frac{1}{\sigma_0}}\right)^{n-1}} \beta^{(n-1)-1}\, e^{-\frac{\beta}{\frac{1}{(\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}-\frac{1}{\sigma_0})}}} d\beta$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-1)\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}-\frac{1}{\sigma_0}}\right)^{n-1}} \int_0^\infty \beta^{(n-1)-1}\, e^{-\frac{\beta}{\frac{1}{(\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}-\frac{1}{\sigma_0})}}}\, d\beta$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-1)\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}-\frac{1}{\sigma_0}}\right)^{n-1}} \int_0^\infty \frac{\Gamma(n-2)\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}-\frac{1}{\sigma_0}}\right)^{n-2}}{\Gamma(n-2)\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}-\frac{1}{\sigma_0}}\right)^{n-2}} \beta^{(n-1)-1}\, e^{-\frac{\beta}{\frac{1}{(\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}-\frac{1}{\sigma_0})}}} d\beta$$

$$= \frac{\Gamma(n-2)\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}-\frac{1}{\sigma_0}}\right)^{n-2}}{\Gamma(n-1)\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}-\frac{1}{\sigma_0}}\right)^{n-1}}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}-\frac{1}{\sigma_0}\Gamma(n-2)}{(n-2)\Gamma(n-2)}$$

$$\therefore\ \mathrm{Eq^*}_{F0F}(\beta) = \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}-\frac{1}{\sigma_0}\right)}{(n-2)} \qquad \ldots(2\text{-}43)$$

وبالطريقة نفسها نوجد مقدر بيز للمعلمة β عند دالة خسارة تربيعية للتوزيع الملوث وكالآتي:

$$\mathrm{Eq^*}_{FF}(\beta) = \int_0^\infty \beta\, \mathrm{q^*}_{FF}(\beta)d\beta$$

$$= \int_0^\infty \beta \frac{1}{\Gamma(n-1)\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}-\frac{1}{\sigma}}\right)^{n-1}} \beta^{(n-1)-1}\, e^{-\frac{\beta}{\frac{1}{(\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}-\frac{1}{\sigma})}}} d\beta$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-1)\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}-\frac{1}{\sigma}}\right)^{n-1}} \int_0^\infty \beta^{(n-1)-1}\, e^{-\frac{\beta}{\frac{1}{(\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}-\frac{1}{\sigma})}}}\, d\beta$$

$$=\frac{1}{\Gamma(n-1)(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}-\frac{1}{\sigma}})^{n-1}}\int_0^{\infty}\frac{\Gamma(n-2)(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}-\frac{1}{\sigma}})^{n-2}}{\Gamma(n-2)(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}-\frac{1}{\sigma}})^{n-2}}\beta^{(n-1)-1}e^{-\frac{\beta}{\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}-\frac{1}{\sigma})}}}d\beta$$

$$=\frac{\Gamma(n-2)(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}-\frac{1}{\sigma}})^{n-2}}{\Gamma(n-1)(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}-\frac{1}{\sigma}})^{n-1}}$$

$$=\frac{(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}-\frac{1}{\sigma})\Gamma(n-2)}{(n-2)\Gamma(n-2)}$$

$$\therefore\ Eq^{*}_{FF}(\beta)=\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}-\frac{1}{\sigma}\right)}{(n-2)} \qquad \ldots(2\text{-}44)$$

وعليه يكون مقدر بيز الحصين للمعلمة β للتوزيع اللاحق المختلط في ظل دالة خسارة تربيعية كالآتي:

$$\therefore E\hat{\pi}^{*}_{FF}(\beta)=\begin{cases}\hat{\lambda}\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}-\frac{1}{\sigma_0}\right)}{(n-2)}+(1-\hat{\lambda})\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}-\frac{1}{\sigma}\right)}{(n-2)} & if \quad \sigma_0<\hat{\sigma}\\ \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\alpha}-\frac{1}{\sigma_0}\right)}{(n-2)} & if \quad \sigma_0\geq\hat{\sigma}\end{cases} \qquad \ldots(2\text{-}45)$$

ونلاحظ من معادلة (2-44) انه لايمكن حلها بالطرائق التحليلية الاعتيادية لكونها معادلة غير خطية لذلك سيتم الطرائق التكرارية وهي طريقة نيوتن رافسون في ايجاد مقدر بيز الحصين للمعلمة ($\hat{\beta}_{FFR.Bayes}$)

٣-١٤-٢ تقدير معلمة القياس β عندما يكون التوزيع الاساس القياسي والتوزيع الملوث القياسي توزيع كاما Gamma Distribution :

باعتبار معلمة الشكل α معلومة سيتم تقدير معلمة القياس β باستعمال اسلوب بيز الحصين بالاعتماد على صنف التوزيع الأولي الملوث الامكان الاعظم النوع الثاني وكالآتي:

$$\Gamma=\{\pi(\beta):q(\beta)=(1-\varepsilon)q_0(\beta)+\varepsilon q(\beta)\} \qquad \ldots(2\text{-}46)$$

إذ أن :

$q_0(\beta)$: المعلومات الأساسية المسبقة القياسية

$q(\beta)$: المعلومات الملوثة المسبقة القياسية

ε : نسبة التلوث

وتتوفر لدى الباحثة المعلومات الأتية :

$$q_0(\beta/\sigma_0) \sim Gamma(\alpha=1, \sigma_0)$$

$$q_{\text{Gamma }0}(\beta/\sigma_0) = f(\beta, \sigma_0) = \frac{\mathbf{1}}{\sigma_0}\boldsymbol{e}^{-\frac{\beta}{\sigma_0}} \qquad \dots (2\text{-}47)$$

$$q(\beta/\sigma) \sim Gamma\ (\alpha=1, \sigma)$$

$$q_{\text{Gamma}}(\beta/\sigma) = f(\beta, \sigma) = \frac{\mathbf{1}}{\sigma}\boldsymbol{e}^{-\frac{\beta}{\sigma}} \qquad \dots (2\text{-}48)$$

إن التوزيع الاساسي المراد تقدير معلماته هو توزيع فريجت بدالة الكثافة الاحتمالية الآتية:

$$f(x, \alpha, \beta) = \alpha\beta\, x^{-(\alpha+1)} \exp(-\beta x^{-\alpha})$$

لذلك فأن دالة الامكان تكون بالصيغة الآتية:

$$L(x_i, \alpha, \beta) = \alpha^n\beta^n\ \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)}\ \exp(-\beta \sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha})$$

والان نقوم بإيجاد الدالة الحدية التي تقابل التوزيع الاحتمالي للبيانات الأصلية X بوجود المعلومات

المسبقة الملوثة للمعلمة β وكالآتي:

$$M_{GammaF}(X/q) = \int_0^\infty L\ (x/\beta)\, q(\beta/x) d\beta$$

$$= \int_0^\infty \alpha^n\beta^n\ \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)}\ e^{(-\beta\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha})}\,\frac{\mathbf{1}}{\sigma}\boldsymbol{e}^{-\frac{\beta}{\sigma}} d\beta$$

$$= \frac{1}{\sigma}\alpha^n \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)}\ \int_0^\infty \beta^n\ e^{(-\beta(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha} - \sigma))} d\beta$$

$$= \frac{\alpha^n \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)}\, \Gamma(n+1)}{\sigma(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha} - \sigma)^{n+1}} \qquad \dots (2\text{-}48)$$

والآن نقوم بتعظيم الدالة الحدية $M_{GammaF}(X/q)$ للحصول على مقدر جديد لـ σ وكالآتي:

$$\frac{dM_{GammaF}(X/q)}{d\sigma} = \alpha^n \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)}\, \Gamma(n+1) \left[\frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha} - \sigma)^{n+1} - \sigma(n+1)(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha} - \sigma)^{n}}{(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha} - \sigma)^{2(n+1)}}\right]$$

وبأستخراج عامل مشترك $(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma)^n$ ومساواة $\frac{dM_{WeF}(X/q)}{d\sigma}$ بالصفر نحصل على :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \hat{\sigma}\right)^n \left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \hat{\sigma}\right) - (n+1)\hat{\sigma}\right] = 0$$

اما المقدار $(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \hat{\sigma})^n = 0$ وهذا لايجوز لأن هذا المقدار اكبر من الصفر

$$\therefore \left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \hat{\sigma}\right) - (n+1)\hat{\sigma}\right) = 0 \Longrightarrow$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \hat{\sigma} - n\hat{\sigma} - \hat{\sigma}\right) = 0 \qquad \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - 2\hat{\sigma} - n\hat{\sigma} = 0$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \hat{\sigma}(n+2) = 0$$

$$\hat{\sigma} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}}{n+2} \qquad \ldots(2\text{-}49)$$

وعليه نستبدل σ بـ $\hat{\sigma}$ في التوزيع المسبق الملوث الأساس للـ β لنحصل على :

$$q_{\mathrm{GammaF}}(\beta/\sigma) = \begin{cases} \frac{n+2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}} \boldsymbol{e}^{-\beta \frac{n+2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}}} & if \quad \sigma_0 < \hat{\sigma} \\ q_{Gamma0\mathrm{F}}(\beta/\sigma_0) & if \quad \sigma_0 \geq \hat{\sigma} \end{cases} \quad \ldots (2-50)$$

وعليه يكون التوزيع المختلط السابق للمعلمة β باستعمال مقدر الامكان الأعظم النوع الثاني كما يأتي:

$$\hat{\pi}_{GammaF}(\beta) = (1-\varepsilon) q_{GammaF0}(\boldsymbol{\beta}) + \varepsilon q_{GammaF}(\hat{\sigma}) \qquad \ldots(2\text{-}51)$$

$\therefore$ التوزيع اللاحق للمعلمة β بأستعمال مقدر الامكان الأعظم النوع الثاني هو :

$$\hat{\pi}^*_{GammaF}(\beta) = \hat{\boldsymbol{\lambda}} q^*_{Gamma0F}(\beta/\sigma_0) + (1-\hat{\boldsymbol{\lambda}}) q^*_{GammaF}(\beta/\hat{\sigma})$$

وسيتم ايجاد الوزن اللاحق باستعمال مقدر الامكان الاعظم النوع الثاني كالآتي:

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}}_{GammaF} = \frac{(1-\varepsilon) M_{Gamma0F}(X/q_0(\beta))}{(1-\varepsilon) M_{Gamma0F}(X/q_0(\beta)) + \varepsilon M_{GammaF}(X/\hat{q}(\theta))}$$

او يمكن ان يكتب بشكل آخر وكالآتي:

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}}_{WeF} = \left[1 + \frac{\varepsilon M_{GammaF}(X/\hat{q}(\theta))}{(1-\varepsilon) M_{Gamma0F}(X/q_0(\beta))}\right]^{-1}$$

$$= \left[1 + \frac{\varepsilon \frac{\alpha^n \prod_{i=1}^n x^{-(\alpha+1)} \Gamma(n+1)}{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}}{n+2}\left(\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}}{n+2}\right)^{n+1}}}{(1-\varepsilon)\frac{\alpha^n \prod_{i=1}^n x^{-(\alpha+1)} \Gamma(n+1)}{\sigma_0\left(\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} - \sigma_0\right)^{n+1}}}\right]^{-1}$$

$$= \left[\frac{(1-\varepsilon)\frac{\alpha^n \prod_{i=1}^n x^{-(\alpha+1)} \Gamma(n+1)}{\sigma_0\left(\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} - \sigma_0\right)^{n+1}}}{(1-\varepsilon)\frac{\alpha^n \prod_{i=1}^n x^{-(\alpha+1)} \Gamma(n+1)}{\sigma_0\left(\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} - \sigma_0\right)^{n+1}}} + \frac{\varepsilon \frac{\alpha^n \prod_{i=1}^n x^{-(\alpha+1)} \Gamma(n+1)}{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}}{n+2}\left(\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}}{n+2}\right)^{n+1}}}{(1-\varepsilon)\frac{\alpha^n \prod_{i=1}^n x^{-(\alpha+1)} \Gamma(n+1)}{\sigma_0\left(\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} - \sigma_0\right)^{n+1}}}\right]^{-1}$$

$$= \left[\frac{(1-\varepsilon)\frac{\alpha^n \prod_{i=1}^n x^{-(\alpha+1)} \Gamma(n+1)}{\sigma_0\left(\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} - \sigma_0\right)^{n+1}} + \varepsilon \frac{\alpha^n \prod_{i=1}^n x^{-(\alpha+1)} \Gamma(n+1)}{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}}{n+2}\left(\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}}{n+2}\right)^{n+1}}}{(1-\varepsilon)\frac{\alpha^n \prod_{i=1}^n x^{-(\alpha+1)} \Gamma(n+1)}{\sigma_0\left(\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} - \sigma_0\right)^{n+1}}}\right]^{-1}$$

$$= \left[\frac{\alpha^n \prod_{i=1}^n x^{-(\alpha+1)} \Gamma(n+1)\left[\frac{(1-\varepsilon)}{\sigma_0\left(\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} - \sigma_0\right)^{n+1}} + \frac{\varepsilon\alpha^n}{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}}{n+2}\left(\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}}{n+2}\right)^{n+1}}\right]}{(1-\varepsilon)\frac{\alpha^n \prod_{i=1}^n x^{-(\alpha+1)} \Gamma(n+1)}{\sigma_0\left(\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} - \sigma_0\right)^{n+1}}}\right]^{-1}$$

$$= \left[\frac{\left[\frac{(1-\varepsilon)}{\sigma_0\left(\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} - \sigma_0\right)^{n+1}} + \frac{\varepsilon\alpha^n}{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}}{n+2}\left(\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}}{n+2}\right)^{n+1}}\right]}{\frac{(1-\varepsilon)}{\sigma_0\left(\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} - \sigma_0\right)^{n+1}}}\right]^{-1}$$

$$= \left[\frac{\left(\sigma_0\left(\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} - \sigma_0\right)^{n+1}\right)\left[\frac{(1-\varepsilon)}{\sigma_0\left(\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} - \sigma_0\right)^{n+1}} + \frac{\varepsilon\alpha^n}{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}}{n+2}\left(\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}}{n+2}\right)^{n+1}}\right]}{(1-\varepsilon)}\right]^{-1}$$

$$= \left[\frac{\left(\sigma_0\left(\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} - \sigma_0\right)^{n+1}\right)\left[\frac{(1-\varepsilon)\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}}{n+2}\left(\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}}{n+2}\right)^{n+1}\right) + \varepsilon\alpha^n\left(\sigma_0\left(\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} - \sigma_0\right)^{n+1}\right)}{\left(\sigma_0\left(\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} - \sigma_0\right)^{n+1}\right)\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}}{n+2}\left(\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha} - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}}{n+2}\right)^{n+1}\right)}\right]}{(1-\varepsilon)}\right]^{-1}$$

$$= \left[\frac{\left(\sigma_0\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}-\sigma_0\right)^{n+1}\right)\left[(1-\varepsilon)\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}}{n+2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}}{n+2}\right)^{n+1}\right)+\varepsilon\alpha^n\left(\sigma_0\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}-\sigma_0\right)^{n+1}\right)\right]}{(1-\varepsilon)\left(\sigma_0\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}-\sigma_0\right)^{n+1}\right)\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}}{n+2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}}{n+2}\right)^{n+1}\right)}\right]^{-1}$$

$$\therefore \hat{\boldsymbol{\lambda}}_{GammaF} = \begin{cases} \left[\frac{\left(\sigma_0\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}-\sigma_0\right)^{n+1}\right)\left[(1-\varepsilon)\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}}{n+2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}}{n+2}\right)^{n+1}\right)+\varepsilon\alpha^n\left(\sigma_0\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}-\sigma_0\right)^{n+1}\right)\right]}{(1-\varepsilon)\left(\sigma_0\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}-\sigma_0\right)^{n+1}\right)\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}}{n+2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}}{n+2}\right)^{n+1}\right)}\right]^{-1} & if \quad \sigma_0 < \hat{\sigma} \\ (1-\varepsilon) & if \quad \sigma_0 \geq \hat{\sigma} \end{cases} \quad \dots(2-52)$$

ومن ثم نجد التوزيع اللاحق الاساس $q^*_{Gamma0F}(\beta/\sigma_0)$ للمعلمة β كالآتي:

$$q^*_{Gamma0F}(\beta/\sigma_0) = \frac{L(x/\beta)q_0(\beta/\sigma_0)}{M(X/q_0(\beta))}$$

$$= \frac{\alpha^n\beta^n \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)}\, e^{\left(-\beta\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}\right)}\, \frac{\mathbf{1}}{\sigma_0} \boldsymbol{e}^{-\frac{\beta}{\sigma_0}}}{\frac{\alpha^n \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)}\Gamma(n+1)}{\sigma_0\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}-\sigma_0\right)^{n+1}}}$$

$$= \frac{\alpha^n\beta^n\, e^{\left(-\beta\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}\right)}\, \boldsymbol{e}^{-\frac{\beta}{\sigma_0}}}{\Gamma(n+1)\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}-\sigma_0\right)^{n+1}}}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n+1)\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}-\sigma_0}\right)^{n+1}}\beta^{(n+1)-1}\, e^{-\frac{\beta}{\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}-\sigma_0\right)}}} \quad \dots(2-53)$$

$$\sim Gamma\left((n+1), \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}-\sigma_0}\right)$$

ونلاحظ ان التوزيع اللاحق للتوزيع المسبق الاساس هو دالة كاما بالمعلمتين

$\alpha = (n+1)$ و $\beta=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}-\sigma_0}$ وهو دالة احتمالية مجال تكاملها يساوي الواحد الصحيح

وبالطريقة نفسها نوجد التوزيع اللاحق للتوزيع الملوث لنحصل على :

$$q^*_{GammaF}(\beta/\sigma) = \frac{L(x/\beta)q(\beta/\sigma)}{M(X/q(\beta))}$$

$$= \frac{\alpha^n \beta^n \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)}\, e^{\left(-\beta \sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}\right)} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{e}^{-\frac{\beta}{\sigma}}}{\frac{\alpha^n \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)} \Gamma(n+1)}{\sigma\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma\right)^{n+1}}}$$

$$= \frac{\beta^n\, e^{\left(-\beta \sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}\right)}\, \boldsymbol{e}^{-\frac{\beta}{\sigma}}}{\Gamma(n+1) \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma\right)^{n+1}}}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n+1)\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma}\right)^{n+1}}\ \beta^{(n+1)-1}\, e^{-\frac{\beta}{\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma\right)}}} \qquad \ldots(2\text{–}54)$$

$$\sim Gamma\left((n+1), \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma_\circ}\right)$$

ونلاحظ ان التوزيع اللاحق للتوزيع المسبق الملوث هو دالة كامـا بالمعلمتين

$\alpha = (n+1)$ و $\beta = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma}$ وهو دالة احتمالية مجال تكاملها يساوي الواحد الصحيح

ولايجاد مقدر بيز للمعلمة β في ظل دالة خسارة تربيعية يكون كالآتي:

$$Eq^*_{Gamma0F}(\beta) = \int_0^\infty \beta\, q^*_{Gamma0F}(\beta) d\beta$$

$$= \int_0^\infty \beta\ \ \beta^{(n+1)-1}\, e^{-\frac{\beta}{\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma_0\right)}}} d\beta$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n+1)\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma_0}\right)^{n+1}} \int_0^\infty \beta^{(n+1)-1+1}\, e^{-\frac{\beta}{\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma_0\right)}}} d\beta$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n+1)\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma_0}\right)^{n+1}} \int_0^\infty \frac{\Gamma(n+2)\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma_0\right)^{n+2}}}{\Gamma(n+2)\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma_0\right)^{n+2}}} \beta^{(n+1)}\, e^{-\beta\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma_0\right)} d\beta$$

$$= \frac{\Gamma(n+2)\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma_0\right)^{n+2}}}{\Gamma(n+1)\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma_0}\right)^{n+1}} \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(n+2)\left(\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma_0\right)}\right)^{n+2}} \beta^{(n+2)-1}\, e^{-\frac{\beta}{\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma_0\right)}}} d\beta$$

$$= \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha} - \sigma_0)^{n+1}\Gamma(n+2)}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha} - \sigma_0\right)^{n+2}\Gamma(n+1)}$$

$$= \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha} - \sigma_0)^{n+1}(n+1)\Gamma(n+1)}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha} - \sigma_0\right)^{n+2}\Gamma(n+1)}$$

$$= \frac{(n+1)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha} -\right)^{n+1}}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha} - \sigma_0\right)^{n+2}}$$

$$= \frac{(n+1)}{(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha} - \sigma_0)} \qquad \ldots(2\text{-}55)$$

وبالطريقة نفسها نوجد مقدر بيز للمعلمة β عند دالة خسارة تربيعية للتوزيع الملوث وكالآتي:

$$Eq^*{}_{GammaF}(\beta) = \int_0^\infty \beta \, q^*{}_{GammaF}(\beta) d\beta$$

$$= \int_0^\infty \beta \quad \beta^{(n+1)-1} \, e^{-\frac{\beta}{\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha} - \sigma)}}} d\beta$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n+1)(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha} - \sigma})^{n+1}} \int_0^\infty \beta^{(n+1)-1+1} \, e^{-\frac{\beta}{\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha} - \sigma)}}} d\beta$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n+1)(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha} - \sigma})^{n+1}} \int_0^\infty \frac{\Gamma(n+2)\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha} - \sigma)^{n+2}}}{\Gamma(n+2)\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha} - \sigma)^{n+2}}} \beta^{(n+1)} \, e^{-\beta(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha} - \sigma)} d\beta$$

$$= \frac{\Gamma(n+2)\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha} - \sigma\right)^{n+2}}}{\Gamma(n+1)(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha} - \sigma})^{n+1}} \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(n+2)\left(\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha} - \sigma_0)}\right)^{n+2}} \beta^{(n+2)-1} \, e^{-\frac{\beta}{\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha} - \sigma)}}} d\beta$$

$$= \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha} - \sigma)^{n+1}\Gamma(n+2)}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha} - \sigma\right)^{n+2}\Gamma(n+1)}$$

$$= \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha} - \sigma)^{n+1}(n+1)\Gamma(n+1)}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha} - \sigma\right)^{n+2}\Gamma(n+1)}$$

$$= \frac{(n+1)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha} - \sigma_0\right)^{n+1}}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha} - \sigma\right)^{n+2}}$$

$$= \frac{(n+1)}{(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha} - \sigma)} \qquad \ldots(2\text{-}56)$$

وعليه يكون مقدر بيز الحصين للمعلمة β للتوزيع اللاحق المختلط في ظل دالة خسارة تربيعية كالآتي:

$$\therefore E\hat{\pi}^{*}_{GammaF}(\beta)=\begin{cases}\hat{\boldsymbol{\lambda}}\frac{(n+1)}{(\sum_{i=1}^{n}x_i{}^{-\alpha}-\sigma_0)}+(1-\hat{\boldsymbol{\lambda}})\frac{(n+1)}{(\sum_{i=1}^{n}x_i{}^{-\alpha}-\sigma)} & if \quad \sigma_0<\hat{\sigma}\\ \frac{(n+1)}{(\sum_{i=1}^{n}x_i{}^{-\alpha}-\sigma_0)} & if \quad \sigma_0\geq\hat{\sigma}\end{cases} \quad \dots (2\text{-}63)$$

ونلاحظ من معادلة (2-63) انه لايمكن حلها بالطرائق التحليلية الاعتيادية لكونها معادلة غير خطية لذلك سيتم الطرائق التكرارية وهي طريقة نيوتن رافسون في ايجاد مقدر بيز الحصين للمعلمة ($\hat{\beta}_{GammaFR.Bayes}$) .

٤-١٤-٢ تقدير معلمة القياس β عندما يكون التوزيع الاساس القياسي والتوزيع الملوث القياسي توزيع ليندلي Lindley Distribution :

باعتبار معلمة الشكل α معلومة سيتم تقدير معلمة القياس β باستعمال اسلوب بيز الحصين بالاعتماد على صنف التوزيع الأولي الملوث الامكان الاعظم النوع الثاني وكالآتي:

$$\Gamma=\{\pi(\beta):q(\beta)=(1-\varepsilon)q_0(\beta)+\varepsilon q(\beta)\} \quad \dots(2\text{-}57)$$

إذ أن :

$q_0(\beta)$: المعلومات الأساسية المسبقة القياسية

$q(\beta)$: المعلومات الملوثة المسبقة القياسية

ε : نسبة التلوث

وتتوفر لدى الباحثة المعلومات الأتية :

$q_0(\beta/\sigma_0)$ ~*Lindley Distribution* (α=1, σ_0)

$$q_{\text{Lindley }0}(\beta/\sigma_0)=f(\beta,\sigma_0)=\frac{\sigma_0^2}{\sigma_0+1}(\beta+1)e^{-\sigma_0\beta}$$

$q(\beta/\sigma)$ ~*Lindley Distribution* (α=1, σ)

$$q_{\text{Lindley}}(\beta/\sigma) = f(\beta,\sigma) = \frac{\sigma^2}{\sigma+1}(\beta+1)e^{-\sigma\beta}$$

إن التوزيع الاساسي المراد تقدير معلماته هو توزيع فريچت بدالة الكثافة الاحتمالية الآتية:

$$f(x,\alpha,\beta) = \alpha\beta\, x^{-(\alpha+1)} \exp(-\beta x^{-\alpha})$$

لذلك فأن دالة الامكان تكون بالصيغة الآتية:

$$L(x_i,\alpha,\beta) = \alpha^n\beta^n \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)} \exp\left(-\beta \sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}\right)$$

والان نقوم بإيجاد الدالة الحدية التي تقابل التوزيع الاحتمالي للبيانات الأصلية X بوجود المعلومات المسبقة الملوثة للمعلمة β وكالآتي:

$$M_{\text{Lindley}F}(X/q) = \int_0^\infty L\,(x/\beta)\, q(\beta/x) d\beta$$

$$= \int_0^\infty \alpha^n\beta^n \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)}\ e^{\left(-\beta\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}\right)} \left(\frac{\sigma^2}{\sigma+1}\right)(\beta+\mathbf{1})\boldsymbol{e}^{-\sigma\beta} d\beta$$

$$= \left(\frac{\sigma^2}{\sigma+1}\right)\prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)} \int_0^\infty \beta^n(\beta+\mathbf{1})\ e^{-\beta\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma\right)} d\beta$$

$$= \left[\left(\frac{\sigma^2}{\sigma+1}\right)\alpha^n \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)}\right]\left[\int_0^\infty (\beta^{n+1}+\beta^n)\ e^{-\beta\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma\right)} d\beta\right]$$

$$= \left[\left(\frac{\sigma^2}{\sigma+1}\right)\alpha^n \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)}\right]\left[\int_0^\infty (\beta^{n+1} e^{-\beta\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma\right)} d\beta + \int_0^\infty \beta^n e^{-\beta\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma\right)} d\beta\right.$$

$$= \left[\left(\frac{\sigma^2}{\sigma+1}\right)\alpha^n \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)}\right]\left[\frac{\Gamma(n+2)}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma\right)^{n+2}} + \frac{\Gamma(n+1)}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma\right)^{n+1}}\right]$$

$$= \left[\left(\frac{\sigma^2}{\sigma+1}\right)\alpha^n\ \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)}\right]\left[\frac{\Gamma(n+2)}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma\right)^{n+2}} + \frac{\Gamma(n+1)}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma\right)^{n+1}}\right]$$

$$= \left[\left(\frac{\sigma^2}{\sigma+1}\right)\alpha^n\ \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)}\right]\left[\frac{\Gamma(n+2)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma\right)^{n+1} + \Gamma(n+1)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma\right)^{n+2}}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma\right)^{n+2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma\right)^{n+1}}\right]$$

$$= \left[\left(\frac{\sigma^2}{\sigma+1}\right)\alpha^n\ \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)}\right]\left[\frac{(n+1)\Gamma(n+1)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma\right)^{n+1} + \Gamma(n+1)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma\right)^{n+2}}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma\right)^{n+2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma\right)^{n+1}}\right]$$

$$= \left[\left(\frac{\sigma^2}{\sigma+1}\right)\alpha^n\Gamma(n+1)\ \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)}\right]\left[\frac{(n+1)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma\right)^{n+1} + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma\right)^{n+2}}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma\right)^{n+2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma\right)^{n+1}}\right]$$

$$= \left[\left(\frac{\sigma^2}{\sigma+1}\right)\alpha^n\Gamma(n+1)\ \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)}\right]\left[\left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma\right)^{n+1}\right)\left(\frac{(n+1)+\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma\right)^{n+2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma\right)^{n+1}}\right)\right]$$

$$= \left[\Gamma(n+1)\ \alpha^n \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)} \left[\left(\frac{\sigma^2}{\sigma+1}\right)\right] \left[\frac{(n+1)+(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}+\sigma)}{(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}+\sigma)^{n+2}}\right]\right] \qquad \ldots (2\text{-}2)$$

والآن نقوم بتعظيم الدالة الحدية $M_{\text{Lindley}F}(X/q)$ للحصول على مقدر جديد لـ σ وكالآتي:

$$\frac{dM_{\text{Lindley}F}(X/q)}{d\sigma} = \left[\Gamma(n+1)\ \alpha^n \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)}\right]\left[\left(\frac{\sigma^2}{\sigma+1}\right)\left[\frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}+\sigma)^{n+2} - ((n+1)+(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}+\sigma)).(n+2)(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}+\sigma)^{n+1}}{(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}+\sigma)^{2(n+2)}}\right]\right.$$
$$\left. + \left[\frac{(n+1)+(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}+\sigma)}{(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}+\sigma)^{n+2}}\right].\left(\frac{\sigma(\sigma+2)}{(\sigma+1)^2}\right)\right]$$

$$\frac{dM_{\text{Lindley}F}(X/q)}{d\sigma} =$$
$$\left[\Gamma(n+1)\ \alpha^n \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)}\right]\left[\left(\frac{\sigma^2}{\sigma+1}\right)\left[\frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}+\sigma)^{n+2} - \left((n+1)(n+2)(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}+\sigma)^{n+1}\right) - (n+2)(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}+\sigma)(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}+\sigma)^{n+1}}{(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}+\sigma)^{2(n+2)}}\right]\right] + \left[\frac{(n+1)+(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}+\sigma)}{(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}+\sigma)^{n+2}}\right]\left(\frac{\sigma(\sigma+2)}{(\sigma+1)^2}\right)]$$

$$= \left[\Gamma(n+1)\ \alpha^n \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)}\right]\left[\left(\frac{\sigma^2}{\sigma+1}\right)\left[\frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}+\sigma)^{n+1}\left[1-(n+1)(n+2)-(n+2)(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}+\sigma)\right]}{(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}+\sigma)^{2(n+2)}}\right]\right] +$$
$$\left[\frac{(n+1)+(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}+\sigma)}{(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}+\sigma)^{n+2}}\right]\left(\frac{\sigma(\sigma+2)}{(\sigma+1)^2}\right)]$$

$$= \left[\Gamma(n+1)\ \alpha^n \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)}\right]\left[\left[\frac{\sigma^2\left[1-(n+1)(n+2)-(n+2)(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}+\sigma)\right]}{(\sigma+1)(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}+\sigma)^{(n+1)}}\right] + \left[\frac{(\sigma(\sigma+2))\left[(n+1)+(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}+\sigma)\right]}{(\sigma+1)^2(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}+\sigma)^{n+2}}\right]\right]$$

$$= \left[\Gamma(n+1)\ \alpha^n \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)}\right]\left[\frac{[(\sigma+1)^2(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}+\sigma)^{n+2}][\sigma^2[1-(n+1)(n+2)-(n+2)(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}+\sigma)]+[(\sigma+1)(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}+\sigma)^{(n+1)}]\left[(\sigma(\sigma+2))[(n+1)+(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}+\sigma)]\right]}{(\sigma+1)(\sigma+1)^2(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}+\sigma)^{(n+1)}(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}+\sigma)^{n+2}}\right]$$

$$= \left[\Gamma(n+1)\ \alpha^n \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)}\right]\left[(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}+\sigma)^{n+1}\ \frac{[(\sigma+1)^2(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}+\sigma)][\sigma^2[1-(n+1)(n+2)-(n+2)(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}+\sigma)]+[(\sigma+1)]\left[(\sigma(\sigma+2))[(n+1)+(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}+\sigma)]\right]}{(\sigma+1)(\sigma+1)^2(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}+\sigma)^{(n+1)}(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}+\sigma)^{n+2}}\right]$$

$$= \left[\Gamma(n+1)\ \alpha^n \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)}\right]\left[\frac{[(\sigma+1)^2(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}+\sigma)][\sigma^2[1-(n+1)(n+2)-(n+2)(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}+\sigma)]+[(\sigma+1)]\left[(\sigma(\sigma+2))[(n+1)+(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}+\sigma)]\right]}{(\sigma+1)(\sigma+1)^2(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}+\sigma)^{n+2}}\right]$$

$$= \left[\Gamma(n+1)\ \alpha^n \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)}\right]\left[\frac{[(\sigma+1)[(\sigma+1)(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}+\sigma)][\sigma^2[1-(n+1)(n+2)-(n+2)(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}+\sigma)]+\left[(\sigma(\sigma+2))[(n+1)+(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}+\sigma)]\right]}{(\sigma+1)(\sigma+1)^2(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}+\sigma)^{n+2}}\right]$$

$$= \left[\Gamma(n+1)\ \alpha^n \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)}\right]\left[\frac{[[(\sigma+1)(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}+\sigma)][\sigma^2[1-(n+1)(n+2)-(n+2)(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}+\sigma)]+\left[(\sigma(\sigma+2))[(n+1)+(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}+\sigma)]\right]}{(\sigma+1)^2(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}+\sigma)^{n+2}}\right]$$

$$= \left[\Gamma(n+1)\ \alpha^n \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)}\right]\left[(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}+\sigma)\ \frac{[[(\sigma+1)][\sigma^2[1-(n+1)(n+2)-(n+2)(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}+\sigma)]+\left[\frac{(\sigma(\sigma+2))}{(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}+\sigma)}[(n+1)+(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}+\sigma)]\right]}{(\sigma+1)^2(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}+\sigma)^{n+2}}\right]$$

$$= \left[\Gamma(n+1)\ \alpha^n \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)}\right]\left[\frac{[[(\sigma+1)][\sigma^2[1-(n+1)(n+2)-(n+2)(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}+\sigma)]+\left[\frac{(\sigma(\sigma+2))}{(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}+\sigma)}[(n+1)+(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}+\sigma)]\right]}{(\sigma+1)^2(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}+\sigma)^{n+1}}\right]$$

$$[[(\hat{\sigma}+1)][\hat{\sigma}^2[1-(n+1)(n+2)-(n+2)(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}+\hat{\sigma})]+\left[\frac{(\hat{\sigma}(\hat{\sigma}+2))}{(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}+\hat{\sigma})}[(n+1)+(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}+\hat{\sigma})]\right]=0 \quad \ldots(2\text{-}58)$$

نلاحظ ان المعادلة (58−٢) لايمكن حلها بالطرائق التحليلية الاعتيادية لايجاد مقدر $\hat{\sigma}$ لذلك سيتم استعمال طريقة نيوتن رافسون التكرارية لايجاد جذر المعادلة وتعويض النتيجة في التوزيع الملوث الاساس للـ β.

وعليه نستبدل σ بـ $\hat{\sigma}$ في التوزيع المسبق الملوث الأساس للـ β لنحصل على :

$$q_{\text{LindleyF}}(\beta/\sigma)=\begin{cases}\frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}+1}(\beta+1)e^{-\beta\hat{\sigma}} & if \quad \sigma_0<\hat{\sigma}\\ q_{\text{LindleyF}}(\beta/\sigma_0) & if \quad \sigma_0\geq\hat{\sigma}\end{cases} \quad (2-59)$$

وعليه يكون التوزيع المختلط السابق للمعلمة β باستعمال مقدر الامكان الأعظم النوع الثاني كما يأتي:

$$\hat{\pi}_{\text{Lindley}F}(\beta)=(1-\varepsilon)q_{\text{LindleyF0}}(\boldsymbol{\beta})+\varepsilon q_{\text{LindleyF}}(\hat{\sigma}) \quad \ldots(2\text{-}60)$$

∴ التوزيع اللاحق للمعلمة β بأستعمال مقدر الامكان الأعظم النوع الثاني هو :

$$\hat{\pi}^*{}_{\text{Lindley}F}(\beta)=\hat{\boldsymbol{\lambda}}q^*{}_{\text{Lindley}0F}(\beta/\sigma_0)+(1-\hat{\boldsymbol{\lambda}})q^*{}_{\text{Lindley}F}(\beta/\hat{\sigma})$$

وسيتم ايجاد الوزن اللاحق باستعمال مقدر الامكان الاعظم النوع الثاني كالآتي:

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}}_{\text{Lindley}F}=\frac{(1-\varepsilon)M_{\text{Lindley}0F}(X/q_0(\beta))}{(1-\varepsilon)M_{\text{Lindley}0F}(X/q_0(\beta))+\varepsilon M_{\text{Lindley}F}(X/\hat{q}(\theta))}$$

او يمكن ان يكتب بشكل آخر وكالآتي:

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}}_{\text{Lindley}F}=\left[1+\frac{\varepsilon M_{\text{Lindley}F}(X/\hat{q}(\theta))}{(1-\varepsilon)M_{\text{Lindley}0F}(X/q_0(\beta))}\right]^{-1}$$

$$=\left[1+\frac{\left[\Gamma(n+1)\,\alpha^n\prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)}[(\frac{(\hat{\sigma})}{(\hat{\sigma})+1})\right][\frac{(n+1)+\left(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}+(\hat{\sigma})\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}+(\hat{\sigma})\right)^{n+2}}]]}{\left[\Gamma(n+1)\,\alpha^n\prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)}[(\frac{\sigma_0}{\sigma_0+1})\right][\frac{(n+1)+\left(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}+\sigma_0\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{-\alpha}+\sigma_0\right)^{n+2}}]]}\right]^{-1}$$

$$\therefore \hat{\lambda}_{\text{Lindley}F} = \begin{cases} \left[1 + \dfrac{\left[\left(\frac{(\hat{\sigma})}{(\hat{\sigma})+1} \right) \right] \left[\frac{(n+1)+(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+(\hat{\sigma}))}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+(\hat{\sigma})\right)^{n+2}} \right]}{\left[\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_0+1} \right) \right] \left[\frac{(n+1)+\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma_0\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma_0\right)^{n+2}} \right]} \right]^{-1} & if \quad \sigma_0 < \hat{\sigma} \\ (1-\varepsilon) & if \quad \sigma_0 \geq \hat{\sigma} \end{cases} \quad ...(2\text{-}61)$$

ومن ثم نجد التوزيع اللاحق الاساس $q^*_{0F}(\beta/\sigma_0)$ للمعلمة β كالآتي:

$$q^*_{\text{Lindley}0F}(\beta/\sigma_0) = \frac{L(x/\beta) q_0(\beta/\sigma_0)}{M(X/q_0(\beta))}$$

$$= \frac{\alpha^n \beta^n \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)} \; e^{(-\beta \sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha})} \left(\frac{{\sigma_0}^2}{\sigma_0 + 1} \right) (\beta + \mathbf{1}) \boldsymbol{e}^{-\sigma_0 \beta}}{\left[\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{n}+\mathbf{1}) \, \boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{n}} \prod_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}} \mathbf{x}^{-(\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{1})} \left[\left(\frac{{\sigma_0}^{\mathbf{2}}}{\sigma_0 + \mathbf{1}} \right) \right] \left[\frac{(\boldsymbol{n}+\mathbf{1}) + (\sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}} \mathbf{x}_{\boldsymbol{i}}^{-\boldsymbol{\alpha}} + \sigma_0)}{(\sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}} \mathbf{x}_{\boldsymbol{i}}^{-\boldsymbol{\alpha}} + \sigma_0)^{\boldsymbol{n}+\mathbf{2}}} \right] \right]}$$

$$= \frac{\beta^n e^{(-\beta \sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha})} (\beta + \mathbf{1}) \boldsymbol{e}^{-\sigma_0 \beta}}{\Gamma(n+1) \left[\frac{(n+1) + (\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} + \sigma_0)}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} + \sigma_0)^{n+2}} \right]}$$

$$= \frac{\beta^n (\beta + \mathbf{1}) e^{-\beta(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} + \sigma_0)}}{\Gamma(n+1) \left[\frac{(n+1) + (\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} + \sigma_0)}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} + \sigma_0)^{n+2}} \right]}$$

$$= \frac{\beta^{n+1} e^{-\beta(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} + \sigma_0)} + \beta^n e^{-\beta(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} + \sigma_0)}}{\Gamma(n+1) \left[\frac{(n+1) + (\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} + \sigma_0)}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} + \sigma_0)^{n+2}} \right]}$$

$$= \frac{\sigma \beta^n (\beta + \mathbf{1}) e^{(-\beta \sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha})} \, \boldsymbol{e}^{-\sigma_0 \beta}}{\Gamma(n+1) \; \left[\frac{(n+1) + (\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} + \sigma_0)}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} + \sigma_0)^{n+2}} \right]}$$

$$\frac{\beta^n (\beta + \mathbf{1}) e^{(-\beta \sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha})} \, \boldsymbol{e}^{-\sigma_0 \beta}}{\Gamma(n+2) \frac{1}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} + \sigma_0)^{n+2}} + \; \Gamma(n+1) \frac{1}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} + \sigma_0)^{n+1}}}$$

$$= \frac{\beta^{n+1} e^{(-\beta \sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} + \sigma_0)} + \beta^n e^{(-\beta \sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} + \sigma_0)}}{\Gamma(n+2) \frac{1}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} + \sigma_0)^{n+2}} + \; \Gamma(n+1) \frac{1}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} + \sigma_0)^{n+1}}}$$

$$= \frac{\beta^{n+1} e^{\frac{-\beta}{\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma_0)}}} + \beta^{n} e^{\frac{-\beta}{\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma_0)}}}}{\Gamma(n+2)\left(\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma_0)}\right)^{n+2} + \Gamma(n+1)\left(\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma_0)}\right)^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(2n+3)\left(\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma_0)}\right)^{2n+3}} \beta^{2n+4} e^{\frac{-\beta}{\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma_0)}}} + \beta^{n} e^{\frac{-\beta}{\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma_0)}}} \quad ...(2\text{-}62)$$

$$\sim Gamma\ \left((2n+3), \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}-\sigma_0}\right)$$

ونلاحظ ان التوزيع اللاحق للتوزيع المسبق الاساس هو دالة كاما بالمعلمتين

$\alpha=(2n+3)$ و $\beta=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}-\sigma_0}$ وهو دالة احتمالية مجال تكاملها يساوي الواحد الصحيح .

وبالطريقة نفسها نوجد التوزيع اللاحق للتوزيع الملوث لنحصل على :

$$q^{*}_{\text{Lindley}F}(\beta/\sigma) = \frac{L\,(x/\beta)q(\beta/\sigma)}{M(X/q(\beta))}$$

$$= \frac{\alpha^{n}\beta^{n}\ \prod_{i=1}^{n} x^{-(\alpha+1)}\ e^{(-\beta\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha})}\left(\frac{\sigma^{2}}{\sigma+1}\right)(\beta+\mathbf{1})\boldsymbol{e}^{-\sigma\beta}}{\left[\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{n}+\mathbf{1})\ \boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{n}} \prod_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}} \mathbf{x}^{-(\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{1})}\ [(\frac{\sigma^{2}}{\sigma+\mathbf{1}})\ \right] [\frac{(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})+(\sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}} \mathbf{x}_{\boldsymbol{i}}^{-\boldsymbol{\alpha}}+\sigma)}{(\sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}} \mathbf{x}_{\boldsymbol{i}}^{-\boldsymbol{\alpha}}+\sigma)^{\boldsymbol{n}+\mathbf{2}}}]]}$$

$$= \frac{\beta^{n} e^{(-\beta\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha})}(\beta+\mathbf{1})\boldsymbol{e}^{-\sigma_0\beta}}{\Gamma(n+1)\left[\frac{(n+1)+(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma)}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma)^{n+2}}\right]}$$

$$= \frac{\beta^{n}(\beta+\mathbf{1})e^{-\beta(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma)}}{\Gamma(n+1)\left[\frac{(n+1)+(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma)}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}+\sigma)^{n+2}}\right]}$$

$$=\frac{\beta^{n+1}e^{-\beta(\sum_{i=1}^{n}x_i{}^{-\alpha}+\sigma)}+\beta^{n}e^{-\beta(\sum_{i=1}^{n}x_i{}^{-\alpha}+\sigma)}}{\Gamma(n+1)\left[\frac{(n+1)+(\sum_{i=1}^{n}x_i{}^{-\alpha}+\sigma)}{(\sum_{i=1}^{n}x_i{}^{-\alpha}+\sigma)^{n+2}}\right]}$$

$$=\frac{\beta^{n}(\beta+\mathbf{1})e^{(-\beta\sum_{i=1}^{n}x_i{}^{-\alpha})}\,\boldsymbol{e}^{-\sigma\beta}}{\Gamma(n+1)\left[\frac{(n+1)+(\sum_{i=1}^{n}x_i{}^{-\alpha}+\sigma)}{(\sum_{i=1}^{n}x_i{}^{-\alpha}+\sigma)^{n+2}}\right]}$$

$$=\frac{\beta^{n}(\beta+\mathbf{1})e^{(-\beta\sum_{i=1}^{n}x_i{}^{-\alpha})}\,\boldsymbol{e}^{-\sigma\beta}}{\Gamma(n+2)\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i{}^{-\alpha}+\sigma\right)^{n+2}}+\Gamma(n+1)\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i{}^{-\alpha}+\sigma\right)^{n+1}}}$$

$$=\frac{\beta^{n+1}e^{(-\beta\sum_{i=1}^{n}x_i{}^{-\alpha}+\sigma)}+\beta^{n}e^{(-\beta\sum_{i=1}^{n}x_i{}^{-\alpha}+\sigma)}}{\Gamma(n+2)\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n}x_i{}^{-\alpha}+\sigma)^{n+2}}+\Gamma(n+1)\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n}x_i{}^{-\alpha}+\sigma)^{n+1}}}$$

$$=\frac{\beta^{n+1}e^{\frac{-\beta}{\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n}x_i{}^{-\alpha}+\sigma)}}}+\beta^{n}e^{\frac{-\beta}{\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n}x_i{}^{-\alpha}+\sigma)}}}}{\Gamma(n+2)\left(\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n}x_i{}^{-\alpha}+\sigma)}\right)^{n+2}+\Gamma(n+1)\left(\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n}x_i{}^{-\alpha}+\sigma)}\right)^{n+1}}$$

$$=\frac{1}{\Gamma(2n+3)\left(\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n}x_i{}^{-\alpha}+\sigma)}\right)^{2n+3}}\beta^{2n+4}e^{\frac{-\beta}{\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n}x_i{}^{-\alpha}+\sigma)}}}+\beta^{n}e^{\frac{-\beta}{\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n}x_i{}^{-\alpha}+\sigma)}}}\quad ...(2\text{-}63)$$

$$\sim Gamma\ \left((2n+3),\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}x_i{}^{-\alpha}-\sigma}\right)$$

ونلاحظ ان التوزيع اللاحق للتوزيع المسبق الملوث هو دالة كاما بالمعلمتين

$\alpha=(2n+3)$ و $\beta=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}x_i{}^{-\alpha}-\sigma}$ وهو دالة احتمالية مجال تكاملها يساوي الواحد الصحيح .

ولايجاد مقدر بيز للمعلمة β في ظل دالة خسارة تربيعية يكون كالآتي:

$$Eq^{*}{}_{\mathrm{Lindley}0F}(\beta)=\int_{0}^{\infty}\beta\,q^{*}{}_{\mathrm{Lindley}0F}(\beta)d\beta$$

$$= \int_0^\infty \beta \quad \beta^{(n+1)-1} \, e^{-\frac{\beta}{\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma_0)}}} d\beta$$

$$= \frac{1}{\Gamma(2n+3)(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma_0})^{(2n+3)}} \int_0^\infty \beta^{(2n+4)-1} \, e^{-\frac{\beta}{\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma_0)}}} d\beta$$

$$= \frac{1}{\Gamma(2n+3)(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma_0})^{(2n+3)}} \int_0^\infty \frac{\Gamma(2n+4)}{\Gamma(2n+4)} \frac{(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma_0})^{(2n+4)}}{(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma_0})^{(2n+4)}} \beta^{(2n+4)-1} \, e^{-\frac{\beta}{\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma_0)}}} d\beta$$

$$= \frac{\Gamma(2n+4)(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma_0})^{(2n+4)}}{\Gamma(2n+3)(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma_0})^{(2n+3)}} \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(2n+4)(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma_0})^{(2n+4)}} \beta^{(2n+4)-1} \, e^{-\frac{\beta}{\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma_0)}}} d\beta$$

$$= \frac{\Gamma(2n+4)(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma_0})^{(2n+4)}}{\Gamma(2n+3)(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma_0})^{(2n+3)}}$$

$$= \frac{1}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma_0)} \frac{\Gamma(2n+4)}{\Gamma(2n+3)} \qquad \text{.....(2-64)}$$

وبالطريقة نفسها نوجد مقدر بيز للمعلمة β عند دالة خسارة تربيعية للتوزيع الملوث وكالآتي:

$$Eq^*_{\text{Lindley}F}(\beta) = \int_0^\infty \beta \, q^*_{\text{Lindley}F}(\beta) d\beta$$

$$= \int_0^\infty \beta \quad \beta^{(n+1)-1} \, e^{-\frac{\beta}{\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma)}}} d\beta$$

$$= \frac{1}{\Gamma(2n+3)(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma})^{(2n+3)}} \int_0^\infty \beta^{(2n+4)-1} \, e^{-\frac{\beta}{\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma)}}} d\beta$$

$$= \frac{1}{\Gamma(2n+3)(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma})^{(2n+3)}} \int_0^\infty \frac{\Gamma(2n+4)}{\Gamma(2n+4)} \frac{(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma})^{(2n+4)}}{(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma})^{(2n+4)}} \beta^{(2n+4)-1} \, e^{-\frac{\beta}{\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma)}}} d\beta$$

$$= \frac{\Gamma(2n+4)(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma})^{(2n+4)}}{\Gamma(2n+3)(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma})^{(2n+3)}} \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(2n+4)(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma})^{(2n+4)}} \beta^{(2n+4)-1} \, e^{-\frac{\beta}{\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma)}}} d\beta$$

$$= \frac{\Gamma(2n+4)(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma})^{(2n+4)}}{\Gamma(2n+3)(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma})^{(2n+3)}}$$

$$= \frac{1}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma)} \frac{\Gamma(2n+4)}{\Gamma(2n+3)} = \frac{1}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma)} \frac{(2n+3)(2n+2)!}{(2n+2)!} = \frac{2n+3}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma)} \quad \ldots..(2\text{-}65)$$

وعليه يكون مقدر بيز الحصين للمعلمة β للتوزيع اللاحق المختلط في ظل دالة خسارة تربيعية كالآتي:

$$\therefore E\hat{\pi}^{*}{}_{\mathrm{Lindley}F}(\beta) = \begin{cases} \hat{\lambda} \frac{1}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma_0)} \frac{2n+3}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma)} + (1-\hat{\lambda}) \frac{1}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma)} \frac{2n+3}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma)} & if \quad \sigma_0 < \hat{\sigma} \\ \frac{1}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma_0)} \frac{2n+3}{(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} - \sigma)} & if \quad \sigma_0 \geq \hat{\sigma} \end{cases} \ldots (2\text{-}66)$$

ونلاحظ من معادلة (2-66) انه لايمكن حلها بالطرائق التحليلية الاعتيادية لكونها معادلة غير خطية لذلك سيتم الطرائق التكرارية وهي طريقة نيوتن رافسون في ايجاد مقدر بيز الحصين للمعلمة ($\hat{\beta}_{\mathrm{Lindley}FR.Bayes}$)

3 -1 مقدمــة Introduction

تم استعمال اسلوب المحاكاة مونت- كارلو لغرض اختبار افضلية طرائق التقدير المستعملة في تقدير معلمات توزيع فريچت باستعمال اسلوب بيز الحصين في ظل صنف التلويث الامكان الأعظم النوع الثاني (ML.II.ε)، اذ شمل هذا الفصل عرض لبعض المفاهيم العامة للمحاكاة وكذلك وصف لتجارب المحاكاة من حيث احجام العينات المولدة وكذلك عرضت نتائج تجربة المحاكاة التي تم الحصول عليها من جراء تطبيق طرائق تقدير بيز الحصين.

3-2 مفاهيم عامة عن المحاكاة General concepts of simulation

تعددت اساليب المحاكاة ولاسيما بعد التطور السريع الذي حصل في استخدام الحاسبة الالكترونية ولكونها الاسلوب الفعال الذي يمكننا من ادارته بشكل تطبيقي واسع ذي مديات تفوق الامكانات المعقولة في التطبيق العملي. وتعرف المحاكاة بانها عملية تمثيل او تقليد للواقع الحقيقي باستعمال نماذج معينة، وكثيراً ما نجد في الواقع الحقيقي ان هناك عمليات تكون معقدة الفهم والتحليل لذلك فمن الافضل ان نوصف هذه العمليات بصورة مشابهة للصور الحقيقية بنماذج معينة، ففهم النموذج يحقق لنا قدرا من الادراك للعملية الاصلية او الواقع الحقيقي من خلال محاكاة النموذج، ومن الطبيعي ان درجة المشابهة بين أي تجربة محاكاة والواقع الحقيقي تعتمد على مدى مطابقة او مشابهة نموذج المحاكاة للنظام الحقيقي.

ومن المبادئ الاساسية للمحاكاة باستعمال الحاسبة وضع برنامج يمثل او يقلد سلوك العملية الحقيقية بشكل مقارب للواقع الحقيقي قدر الامكان، وغالبا ما يكون هذا الواقع معقدا جدا لتمثيله او تقليده بصورة متقنة في برنامج الحاسبة ورغم ذلك فأن اسلوب المحاكاة يمكن ان يعطي معلومات مفيدة حول الواقع الحقيقي الذي يقلده، ونماذج المحاكاة الاكثر مشابهة للواقع الحقيقي تكون اكثر دقة في النتائج والمعلومات المستخلصة منها. ان اول مراحل استخدام اسلوب المحاكاة هو توليد المتغيرات العشوائية قيد الدراسة، كما ان أي تجربة محاكاة ماهي الى عبارة عن نوع معين من انواع المعاينة اذ تسحب هذه العينة من المجتمع الافتراضي الممثل للظاهرة المدروسة بدلا من ان تسحب من المجتمع الحقيقي.

وبذلك فأن اسلوب المحاكاة يمكن ان يحقق للباحثين حلولا تحليلية وكذلك يؤمن قاعدة تجريبية تكون دليلا لهم مع القاعدة النظرية لاختيار الاسلوب الملائم او الطريقة الملائمة لتحليل ودراسة بيانات

الظواهر التي يدرسونها من خلال مطابقة خصائصها مع الانواع التي طبقت المحاكاة عليها. [Silva & et. al. , 2010 P:429-430]

٣-٣ مراحل تطبيق تجارب المحاكاة:

تتضمن تجارب المحاكاة المراحل الآتية:

المرحلة الأولى: تعد هذه المرحلة من اهم المراحل التي تعتمد عليها المراحل اللاحقة حيث يتم فيها اختيار القيم الافتراضية وكما يأتي:

١- تعيين حجوم العينات المفترضة وكما يأتي:

$(n = 10, 20, 30, 50, 100)$

٢- اختيار قيم المعلمات الافتراضية (التجريبية) كما مبينة بالجدول الاتي:

جدول (١-٣)

قيم المعلمات الافتراضية

Model	β
١	١
٢	١.5
٣	2
٤	2.5
٥	٤
٦	١٠

٣- تكرار تجارب المحاكاة مساوياً لـ $(r = 1000)$ لكل تجربة.

المرحلة الثانية: توليد البيانات:

١- توليد بيانات توزيع فريچت:

باستعمال معكوس الدالة التوزيعية للتوزيع حسب الصيغة الآتية:

$$\boldsymbol{t_i} = \left(-\frac{\ln(\boldsymbol{u})}{\boldsymbol{\beta}}\right)^{\left(-\frac{1}{\alpha}\right)} \qquad \ldots(3\text{-}1)$$

إذ إن u: متغير عشوائي مستمر يتبع التوزيع المنتظم ويتم توليده بالحاسبة الالكترونية من خلال الدالة:

$$u = \text{rand}\ (1) \qquad \ldots(3-2)$$

٢- المرحلة الثالثة :

افتراض نسب تلوث في التوزيعات الأولية $0 < \varepsilon < 1$ وهي $\boldsymbol{\varepsilon} = 0.1, 0.5, 0.9$

المرحلة الرابعة: وهي المرحلة الأخيرة حيث يتم فيها المقارنة بين طرائق تقدير دالة معولية توزيع فريچت لغرض الوصول للمقدر الأكفأ من خلال المفاضلة بين طرائق التقدير المدروسة. وتم المقارنة بين الطرائق حسب مقياس متوسط مربعات الخطأ الآتي:

1. متوسط مربعات الخطأ (MSE):

$$MSE\ (\hat{\theta}) = \frac{\sum_{i=1}^{R} (\hat{\theta}_i - \theta)^2}{R} \qquad \ldots\ (٣\text{-}3)$$

[Uddin & et. al., 2017, P17−18]

3-4 نتائج المحاكاة لطرائق تقدير بيز الحصين الصنف الملوث الامكان الاعظم النوع الثاني (الملوث ε -ML-II)

سوف يتم تحليل نتائج المحاكاة لطرائق تقدير معلمة القياس لتوزيع فريجت (β) وذلك للوصول الى افضل طريقة للتقدير من بين الطرائق عند كل صنف من اصناف التوزيعات الأولية الملوثة والاساسية لستة نماذج حسب المعلمة (β) عند ثلاثة نسب من نسب التلوث في التوزيعات الاولية وكما موضح في الجداول التالية.

3-4-1 تقديرات المعلمة (β) عند نسبة تلوث في التوزيع الأولي$(\varepsilon = 0.1)$:

جدول رقم (3-2) تقديرات بيز الحصينة للمعلمة β ومتوسط مربعات الخطأ عند اصناف التوزيعات الأولية الأربعة عند نسبة تلوث في التوزيع الأولي$(\varepsilon = 0.1)$

β	n	$\hat{\beta}_{Feweibull}$	MSE	$\hat{\beta}_{FeIF}$	MSE	$\hat{\beta}_{Fegamma}$	MSE	$\hat{\beta}_{FeLindely}$	MSE	*Best*
١	10	1.09920	0.12867	1.68582	0.16699	١.١٣١١٠	0.12964	1.71245	0.18528	*Feweibull*
	20	1.02377	0.09144	1.60524	0.10458	1.05943	0.12463	1.9720	0.09431	*Feweibull*
	30	1.02460	0.01111	1.60111	0.06937	1.02912	0.10941	1.07165	0.05629	*Feweibull*
	50	1.03039	0.0382	1.47224	0.1042	1.02348	0.0361	1.02400	0.0102	*FeLindely*
	100	0.99959	0.0085	1.39894	0.10202	0.99987	0.00936	1.03222	0.01001	*Feweibull*
١.٥	10	1.68939	0.2053	1.86353	0.0633	1.57076	0.13432	1.56980	0.03285	*FeLindely*
	20	1.58020	0.07821	1.74962	0.06055	1.53210	0.06155	1.52120	0.01497	*FeLindely*
	30	1.55221	0.05675	1.73201	0.05802	1.52089	0.01251	1.50360	0.05196	*Fegamma*
	50	1.53557	0.01591	1.62371	0.05361	1.50120	0.01175	1.51423	0.03391	*Fegamma*
	100	1.51292	0.01047	1.61102	0.02381	1.48100	0.00148	1.50517	0.01927	*Fegamma*
	10	2.26374	0.14139	2.97300	0.09844	2.19550	0.05212	2.07092	0.06013	*Fegamma*

٢	20	2.14327	0.09487	2.99410	0.05849	2.05731	0.02262	2.93042	0.00532	*FeLindely*
	30	2.07531	0.09487	2.99540	0.06977	2.03012	0.01518	2.95091	0.00272	*FeLindely*
	50	2.06360	0.06469	2.14038	0.00495	2.94855	0.01035	2.99040	0.04656	*FeIF*
	100	2.02850	0.01491	2.11559	0.00121	2.090141	0.00239	2.99145	0.01385	*FeIF*
2.5	10	2.56654	0.94341	2. 62374	1.4646	2.62661	0.79314	2.47489	0.15095	*FeLindely*
	20	2.58061	0.92485	2.86190	0.69828	2.62344	0.57292	2.52400	0.14198	*FeLindely*
	30	2.58300	0.87107	2.81540	0.40295	2.73320	0.45595	2.50816	0.11037	*FeLindely*
	50	2.58443	0.85932	2.48368	0.13749	2.73377	0.38902	2.51951	0.20385	*FeIF*
	100	256٢2.5	0.84079	2.61899	0.0772	2.57790	0.13633	2.52561	0.35054	*FeIF*
4	10	4.51881	0.89544	4.11467	0.14533	4.42442	1.36557	4.42174	0.75446	*FeIF*
	20	4.54999	0.87432	4.16222	0.13897	4.52454	0.68764	4.45611	0.55664	*FeIF*
	30	4.63448	0.77432	4.609855	0.40134	4.43370	0.43322	4.65043	0.129875	*FeLindely*
	50	4.62185	0.84321	4.63343	0.20255	4.14889	0.13647	4.67533	0.37864	*Fegamma*
	100	4.51754	0.57044	4.55460	0.13342	4.18886	0.06753	4.56565	0.35222	*Fegamma*
10	10	10.86331	0.89544	10.42443	1.36531	10.56322	0.73475	10.27442	0.16325	*FeLindely*
	20	10.78776	0.85428	10.43521	0.66873	10.58744	0.54387	10.22332	0.13336	*FeLindely*
	30	10.66655	0.76532	10.43442	0.44317	10.64432	0.499642	10.08744	0.12214	*FeLindely*
	50	10.33254	0.83327	10.16432	0.14433	10.61113	0.202166	10.43422	0.37333	*FeIF*
	100	10.50554	0.57133	10.13491	0.06544	10.50644	0.13211	10.41990	0.32762	*FeIF*

جدول (3-3)

افضلية تقدير بيز الحصين للمعلمة (β) من خلال المفاضلة بمعيار متوسط مربعات الخطأ (MSE) عند نسبة تلوث في التوزيع الأولي$(\varepsilon = 0.1)$

الطريقة	حجم العينة					عدد مرات الأفضلية	نسبة الأفضلية
	١٠	٢٠	٣٠	٥٠	١٠٠		
Feweibull	1	1	1	0	1	4	13
FeIF	1	1	0	3	3	8	27
Fegamma	1	0	1	2	2	6	15
FeLindely	3	4	4	1	0	12	45

يتضح من جدول (3−2) وجدول (3−3) ما يأتي :

- اظهرت تقديرات المعلمة (β) باستعمال طرائق التقديرالمعتمدة كافة متوسط اقرب الى القيم الافتراضية لهذه المعلمة عند كافة النماذج وكافة أحجام العينات المفترضة.
- تتساوى تقديرات بيز الحصينة عندما يكون التوزيع الاساس القياسي والتوزيع الملوث توزيع معكوس فريچت عند احجام العينات (100،50)
- عند القيمة الافتراضية للمعلمة (β=1) وعند احــجام العينات (n=10, 20,30, 100) سجل تقدير بيز الحصين عندما يكون التوزيع الاساسي القياسي والملوث الأساسي توزيع ويبل $(\boldsymbol{Feweibull})$ اقل متوسط مربعات خطأ بلغ (MSE=0.12867) و (MSE=0.09144) و (MSE=0.01111) و (MSE=0.00850) على التوالي عند المعلمات المقدرة ($\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{Feweibull}}$=1.09920, 1.02377, 1.02460, 0.9995). وعند حجم عينة (n=50) سجل تقدير بيز الحصين عندما يكون صنف التلوث توزيع ليندلي $(\boldsymbol{FeLindely})$ اقل متوسط مربعات خطأ بلغ (MSE=0.0102) عند المعلمة المقدرة ($\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{FeLindely}}$=1. 02400).

- ❖ عند القيمة الافتراضية (β=1.5) حقق تقدير بيز الحصين للتوزيع الاساسي القياسي وللتوزيع الملوث كاما ($\boldsymbol{Fegamma}$) أفضيلة عندما يكون حجم العينة (n=30,50 ,100) عند قيمة متوسط مربعات خطأ (MSE=0.00148) و (MSE=0.01175) و (MSE=0.01251) على التوالي عند المعلمات المقــدرة ($\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{Fegamma}$=1.52089, 1.50120, 1.48100). وعند حجم عينة (n=10,20) سجل تقدير بيز الحصين عندما يكون صنف التلوث توزيع ليندلي($\boldsymbol{Felindely}$) اقل متوسط مربعات خطأ بلغ (MSE=0.03285) و (MSE=0.01497) عند المعلمـات المقدرة ($\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{Felindely}$=1.56980, 1.52120).
- ❖ عند القيمة الافتراضية (β=2) حقق تقدير بيز الحصين للتوزيع الاساسي القياسي وللتوزيع الملوث ليندلي ($\boldsymbol{FeLindely}$) أفضيلة عندما يكون حجم العينة (n=10,20,30) عند قيمة متوسط مربعات خطأ (MSE=0.06013) و (MSE=0.00532) و (MSE=0.00272) على التوالي عند المعلمات المقـدرة ($\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{FeLindely}$=2.07092, 2.93042, 2.95091). وتفوق تقدير بيز الحصين للتوزيع الاساس القياسي والملوث معكوس فريچت ($\boldsymbol{FeIF}$) عندما يكون حجم العينة (n=50,100) بمتوسط مربعات خطأ (MSE=0.00495) و (MSE=0.00121) علــى التوالي عند المعلمات المقـــــدرة ($\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{FeIF}$=2.14038, 2.11559, 2.95091).
- ❖ عند القيمة الافتراضية (β=2.5) حقق تقدير بيز الحصين للتوزيع الاساسي القياسي وللتوزيع الملوث ليندلي ($\boldsymbol{FeLindely}$) أفضيلة عندما يكون حجم العينة (n=10,20,30) عند قيمة متوسط مربعات خطأ (MSE=0.15095) و (MSE=0.14198) و (MSE=0.11037) على التوالي عند المعلمات المقـدرة ($\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{FeLindely}$=2.47489, 2.52400, 2.50816). وتفوق تقدير بيز الحصين للتوزيع الاساس القياسي والملوث معكوس فريچت($\boldsymbol{FeIF}$) عندما يكون حجم العينة (n=50,100) بمتوسط مربعات خطأ (MSE=0.13749) و (MSE=0.0772) على التوالي عند المعلمات المقـدرة ($\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{FeIF}$=2.48368, 2.61899).
- ❖ عند القيمة الافتراضية (β=4) حقق تقدير بيز الحصين للتوزيع الاساسي القياسي وللتوزيع الملوث ليندلي ($\boldsymbol{FeIF}$) أفضيلة عندما يكون حجم العينة (n=10,20) عند قيمة متوسط مربعات خطأ بلغ (MSE=0.14533) و (MSE=0.13897) على التوالي عند المعلمات المقـدرة

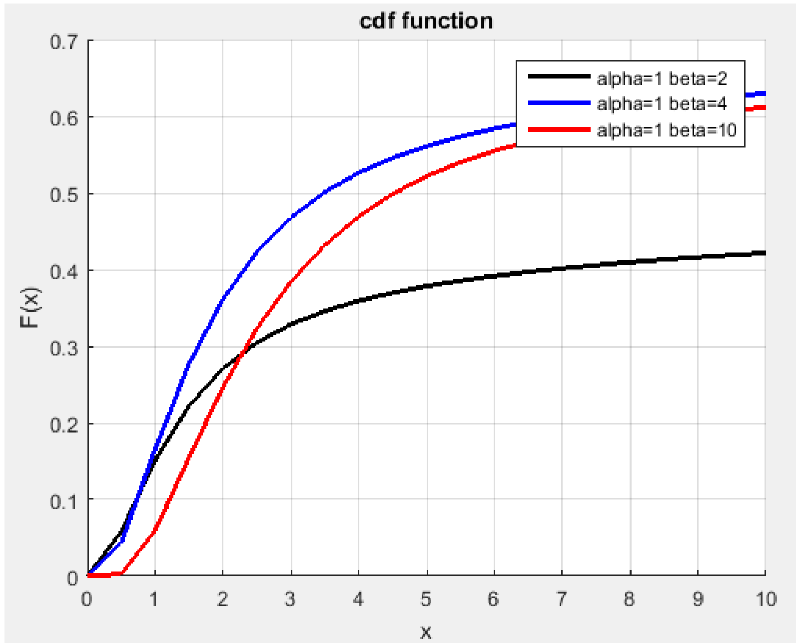
($\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{FeIF}$=4.11467, 4.16222). وتفوق تقدير بيز الحصين للتوزيع الاساس القياسي والملوث ليندلي ($\boldsymbol{FeLindely}$) عندما يكون حجم العينة (n=٣٠) بمتوسط مربعات خطأ (MSE=0.129875) . عند المعلمة المقدرة ($\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{FeLindely}$=4.65043). وتفوق تقدير بيز الحصين للتوزيع الاساس القياسي والملوث كاما ($\boldsymbol{Fegamma}$) عندما يكون حجم العينة (n=50,100) بمتوسط مربعات خطأ (MSE=0.13647) و (MSE=0.06753) عـلـى التوالــي عند المعلمات المقـدرة ($\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{Fegamma}$=4.14889, 4.18886).

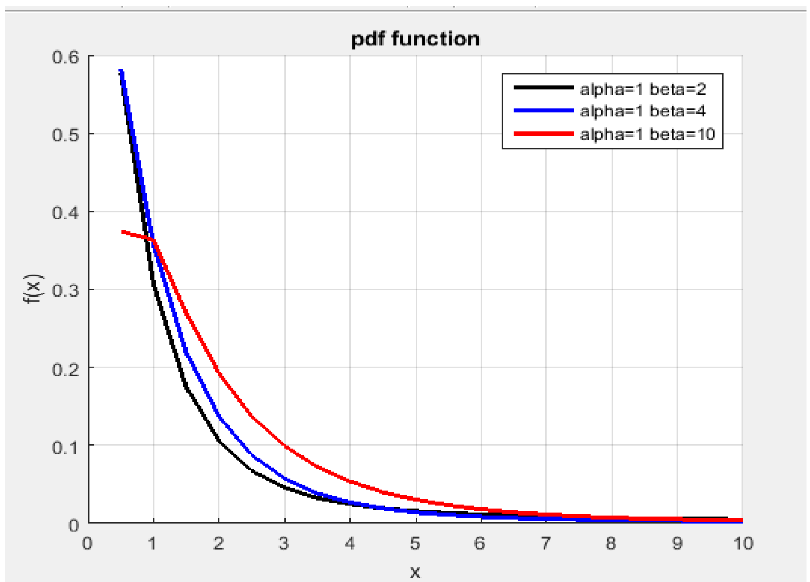
❖ عند القيمة الافتراضية (β=10) حقق تقدير بيز الحصين للتوزيع الاساسي القياسي وللتوزيع الملوث ليندلي ($\boldsymbol{FeLindely}$) أفضيلة عندما يكون حجم العينة (n=10,20,30) عند قيمة متوسط مربعات خطأ (MSE=0.16325) و (MSE=0.13336) و (MSE=0.12214) على التوالي عند المعلمات المقـدرة ($\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{FeLindely}$=10.27442, 10.22332, 10.08744). وتفوق تقدير بيز الحصين للتوزيع الاساس القياسي والملوث معكوس فريچت($\boldsymbol{FeIF}$) عندما يكون حجم العينة (n=50,100) بمتوسط مربعات خطأ (MSE=0.14433) و (MSE=0.06544) على التوالي عند المعلمـات المقـدرة ($\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{FeIF}$=10.16432, 10.13491).

❖ تفوق تقدير بيز الحصين عندما يكون صنف التلوث الاولي توزيع معكوس ليندلي بنسبة افضلية (٤٥%) بالاعتماد على مقياس متوسط مربعات الخطأ. تليهما تقدير بيز الحصين عندما يكون صنف التلوث الاولي توزيع معكوس فريچت بنسبة افضلية (٢٧%) يليها توزيع ويبل بنسبة افضلية((١٣%) وتوزيع كاما بنسبة افضلية (١٥%) لكل طريقة

.

❖ حقق تقدير بيز الحصين افضلية عندما يكون التوزيع الاساس القياسي والتوزيع الملوث القياسي توزيع ليندلي عند احجام العينات (10,20,30)





شكل (١-٣) منحنى دالة الكثافة الاحتمالية ومنحنى الدالة التجميعية لتوزيع فريجت عند المعلمات المقدرة بطريقة الحصين عند صنف التوزيع الأولي الملوث ليندلي بنسبة تلوث **(ε=0.1)** عند القيم الافتراضية (α=1 , β=2,4,10) .

3-4-2 تقديرات المعلمة (β) عند نسبة تلوث في التوزيع الأولي$(\varepsilon = 0.5)$:

جدول رقم (3-4) تقديرات بيز الحصينة للمعلمة β ومتوسط مربعات الخطأ عند اصناف التوزيعات الأولية الأربعة عند نسبة تلوث في التوزيع الأولي$(\varepsilon = 0.5)$

β	n	$\hat{\beta}_{Feweibull}$	MSE	$\hat{\beta}_{FeIF}$	MSE	$\hat{\beta}_{Fegamma}$	MSE	$\hat{\beta}_{FeLindely}$	MSE	*Best*
١	10	١.٨٤٣٣٢	0.28973	1.75543	0.27864	1.16684	0.17796	1.16774	0.17677	FeLindel
	20	1.68311	0.24555	1.67684	0.25443	1.16322	0.25463	1.14219	0.16799	FeLindel
	30	1.19786	0.17665	1.57689	0.17664	1.43897	0.23433	1.04103	0.15618	FeLindel
	50	1.19989	0.12420	1.13228	0.01021	1.34221	0.22161	1.55431	0.14532	FeIF
	100	1.14987	0.01001	1.18974	0.11202	1.62398	0.21139	1.56641	0.13455	Feweibu
١.٥	10	1.65701	0.30433	٩٠٣٦٩١.	0.05644	1.68091	0.14353	1.69915	0.02135	FeLindel
	20	1.64456	0.20122	1.67892	0.04543	1.67569	0.13765	1.53421	0.01367	FeLindel
	30	1.63092	0.20111	1.59118	0.05088	1.66812	0.03988	1.53121	0.01201	FeLindel
	50	1.68755	0.20011	1.53116	0.01101	1.82102	0.03002	1.71777	0.02332	FeIF
	100	1.69111	0.17887	1.73378	0.02234	1.50231	0.01148	1.83276	0.00234	Felindel
٢	10	٢.٦٣٣٢٨	0.14655	2.55437	0.02113	2.55087	0.05432	2.17501	0.02431	FeIF
	20	2.61410 9	0.14211	2.64444	0.02302	2.57309	0.04355	2.13132	0.02099	FeLindel
	30	2.41130	0.08998	2.73221	0.01088	2.69092	0.03152	2.02239	0.00263	FeLindel
	50	2.36756	0.06476	2.15882	0.01391	2.63008	0.02114	2.52201	0.02551	FeIF
	100	2.87621	0.05321	2.59443	0.01619	2.01033	0.01221	2.61187	0.02385	Fegamm
2.5	10	2.85562	0.99341	2.54444	1.65532	2.59888	0.79875	٢.٥٠٨٧٧	0.17631	FeLindel
	20	2.85374	0.98732	2.52311	0.98753	2.59327	0.65732	2.54565	0.16752	FeLindel

	30	2.72544	0.84534	2.56132	0.78232	2.79871	0.55695	2.53735	0.15921	FeLindel
	50	2.71433	0.81115	2.76437	0.76139	2.52198	0.14742	2.62111	0.45981	Fegamm
	100	2.70621	0.80091	2.55443	0.33435	2.51033	0.11321	2.71187	0.33224	Fegamm
4	10	4.53323	0.89762	5096٢4.	0.16754	4.56743	1.32411	٤.٥٨٩٧٢	0.74321	FeIF
	20	4.64222	0.87398	444214.	0.13435	4.54233	0.99611	0998٥4.	0.65453	FeIF
	30	4.52453	0.77637	4.55227	0.18777	4.73431	0.43422	4.21099	0.16544	FeLindel
	50	4.76543	0.64356	4.55142	0.17251	4.11563	0.15645	4.53322	0.35644	Fegamm
	100	4.73217	0.55644	4.61001	0.15643	4.10093	0.13451	4.54352	0.37231	Fegamm
10	10	10.59888	0.88765	10.87643	1.32111	10.67428	0.72122	١٠.١٣٣١٣	0.15433	FeLindel
	20	10.67654	0.85342	10.15313	0.13298	10.56432	0.64385	10.51788	0.76874	FeIF
	30	10.55643	0.77658	10.54351	0.45647	10.64098	0.54453	10.11676	0.11225	FeLindel
	50	10.65409	0.73432	10.55643	0.35675	10.11562	0.14009	10.67421	0.20348	Fegamm
	100	10.50098	0.65444	10.54325	0.18221	10.10135	0.08554	10.57534	0.33467	Fegamm

جدول (3-5)

افضلية تقدير بيز الحصين للمعلمة (β) من خلال المفاضلة بمعيار متوسط مربعات الخطأ (MSE)
عند نسبة تلوث التوزيع الأولي $\varepsilon = 0.5$

نسبة الأفضلية	عدد مرات الأفضلية	حجم العينة					الطريقة
		١٠٠	٥٠	٣٠	٢٠	١٠	
3	1	1	0	0	0	0	***Feweibull***
21	7	0	3	0	2	2	***FeIF***
26	7	4	3	0	0	0	***Fegamma***
50	15	1	0	6	4	4	***FeLindely***

من الجدول (3-4) و (٣-5) يتضح الآتي:

- للنماذج واحجام العينات المفترضة كافة اظهرت تقديرات المعلمة (β) عندما يكون التقدير الحصين المعتمد على التوزيع الاساس القياسي والتوزيع الملوث القياسي توزيع ليندلي في التقدير متوسطات اقرب الى القيم الحقيقية (الافتراضية) لهذه المعلمة من متوسطات تقديرات المعلمة لكل من مقدر بيز الحصين للمعلمة عندما يكون التوزيع الاساس القياسي والتوزيع والملوث الاساسي فريچت وتوزيع ويبل وتوزيع كاما.
- افضلية التقدير البيزي الحصين عند صنف التلوث ليندلي عند احجام العنيات(10,20,30)
- افضلية التقدير البيزي الحصين عندما يكون صنف التوزيع الاولي كاما عند حجم العينة (١٠٠).
- عند القيمة الافتراضية (β=1) حقق تقدير بيز الحصين للتوزيع الاساسي القياسي وللتوزيع الملوث ليندلي $(\boldsymbol{FeLindely})$ أفضلية عندما يكون حجم العينة (n=10,20,30) عند قيمة متوسط مربعات خطأ (MSE=0.17677) و (MSE=0.16799) و (MSE=0.15618) على التوالي عند المعلمات المقـدرة ($\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{FeLindely}}$=1.16774, 1.14219, 1.04103). وعند حجم عينة (n=50) سجل تقدير بيز الحصين عندما يكون صنف التلوث توزيع معكوس فريچت

($\boldsymbol{FeIF}$) اقل متوسط مربعات خطأ بلغ (MSE=0.01021) عند المعلمة المقدرة ($\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{FeIF}$=1. 01021) وعند حجم عينة (n=100) سجل تقدير بيز الحصين عندما يكون صنف التلوث توزيع ويبل ($\boldsymbol{Feweibull}$) اقل متوسط مربعات خطأ بلغ (MSE=0.01001) عند المعلمة المقدرة ($\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{Feweibull}$=1.14987)

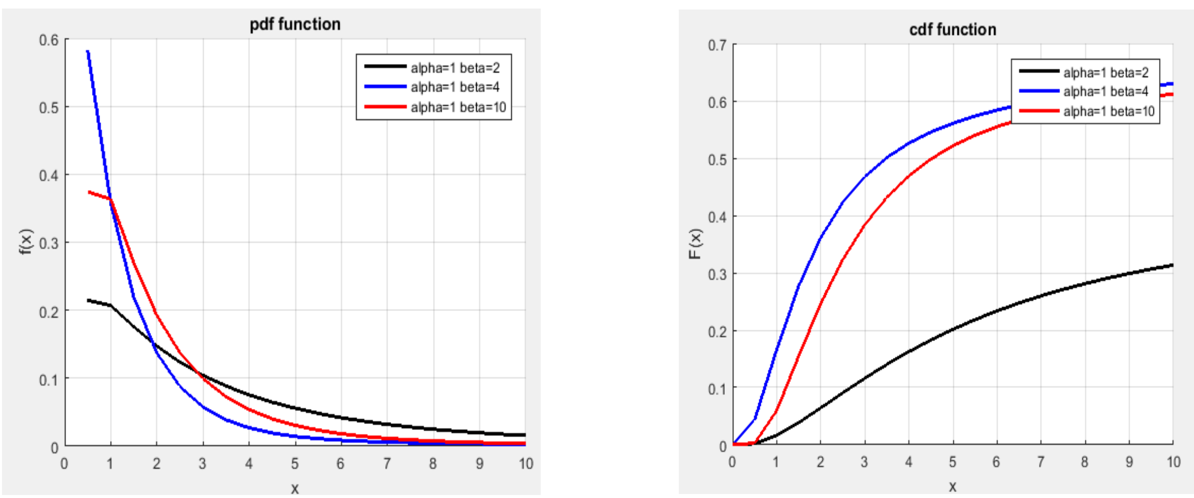
- عند القيمة الافتراضية (β=1.5) ، حقق تقدير بيز الحصين للتوزيع الاساسي القياسي وللتوزيع الملوث ليندلي ($\boldsymbol{FeLindely}$) أفضيلة عندما يكون حجم العينة (n=10,20,30,100) عند قيمة متوسط مربعات خطأ (MSE=0.00234)و(MSE=0.02135) و (MSE=0.01367) و (MSE=0.01202) على التوالي عند المعلمات المقـدرة $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{FeLindely}$=1.699915, 1.53421, 1.53121,1.83276). وعند حجم عينة (n=50) سجل تقدير بيز الحصين عندما يكون صنف التلوث توزيع معكوس فريچت ($\boldsymbol{FeIF}$) اقل متوسط مربعات خطأ (MSE=0.01101) عند المعلمة المقدرة ($\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{FeIF}$=1.53116).
- عند القيمة الافتراضية (β=2) يتساوى تقدير بيز الحصين للتوزيع الاساسي القياسي وللتوزيع الملوث ليندلي ($\boldsymbol{FeLindely}$) أفضيلة عندما يكون حجم العينة (n=,20,30) عند قيمة متوسط مربعات خطأ (MSE=0.02431) و (MSE=0.02099) على التوالي عند المعلمات المقـدرة ($\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{FeLindely=}$, 2.13132, 2.02239). وعند حجم عينة (n=10,50) سجل تقدير بيز الحصين عندما يكون صنف التلوث توزيع معكوس فريچت ($\boldsymbol{FeIF}$) اقل متوسط مربعات خطأ بلغ (MSE=0.01391)و(MSE=0.02113) عند المعلمة المقدرة $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{FeIF}$=2.55437 ,2.15882). وعند حجم عينة (n=100) سجل تقدير بيز الحصين عندما يكون صنف التلوث توزيع كاما ($\boldsymbol{Fegamma}$) اقل متوسط مربعات خطأ بلغ (MSE=0.01221) عند المعلمة المقدرة ($\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{Fegamma}$=2.01033).
- عند القيمة الافتراضية (β=2.5) حقق تقدير بيز الحصين للتوزيع الاساسي القياسي وللتوزيع الملوث ليندلي ($\boldsymbol{FeLindely}$) أفضيلة عندما يكون حجم العينة (n=10,20,30) عند قيمة متوسط مربعات خطأ (MSE=0.17631) و (MSE=0.16752) و (MSE=0.15921) على التوالي عند المعلمات المقـدرة ($\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{FeLindely}$=2.50877, 2.54565, 2.53735). وتفوق تقدير بيز الحصين للتوزيع الاساس القياسي والملوث كاما ($\boldsymbol{Fegamma}$) عندما يكون حجم العينة (n=50,100) بأقل متوسط مربعات خطأ (MSE=0.14742) و (MSE=0.11321) على التوالي عند المعلمات المقـدرة ($\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{Fegamma}$=2.52198, 2.51033, 2.02239).

- عند القيمة الافتراضية (β=4) حقق تقدير بيز الحصين للتوزيع الاساسي القياسي وللتوزيع الملوث ليندلي ($FeIF$) أفضيلة عندما يكون حجم العينة (n=10,20) عند قيمة متوسط مربعات خطأ بلغ (MSE=0.16754) و (MSE=0.13435) على التوالي عند المعلمات المقـدرة ($\widehat{\beta}_{FeIF}$=4.25096, 4.14442). وتفوق تقدير بيز الحصين للتوزيع الاساس القياسي والملوث ليندلي ($FeLindely$) عندما يكون حجم العينة (n=٣٠) بمتوسط مربعات خطأ (MSE=0.16544) عند المعلمة المقدرة ($\widehat{\beta}_{FeLindely}$=4.21099). وتفوق تقدير بيز الحصين للتوزيع الاساس القياسي والملوث كاما ($Fegamma$) عندما يكون حجم العينة (n=50,100) بمتوسط مربعات خطأ (MSE=0.15645) و (MSE=0.13451) على التوالي عند المعلمات المقدرة ($\widehat{\beta}_{Fegamma}$=4.11563, 4.10093).
- عند القيمة الافتراضية (β=10) حقق تقدير بيز الحصين للتوزيع الاساسي القياسي وللتوزيع الملوث ليندلي ($FeLindely$) أفضيلة عندما يكون حجم العينة (n=10, 30) عند قيمة متوسط مربعات خطأ (MSE=0.15433) و (MSE=0.11225) على التوالي عند المعلمات المقدرة ($\widehat{\beta}_{FeLindely}$=10.13313, 10.15313) . وتفوق تقدير بيز الحصين للتوزيع الاساس القياسي والملوث معكوس فريچت($FeIF$) عندما يكون حجم العينة (n=20) بمتوسط مربعات خطأ (MSE=0.13298) . عند المعلمة المقدرة ($\widehat{\beta}_{FeIF}$=10.11676) وتفوق تقدير بيز الحصين للتوزيع الاساس القياسي والملوث كاما($Fegamma$) عندما يكون حجم العينة (n=50,100) بمتوسط مربعات خطأ (MSE=0.14009) . و (MSE=0.08554) عند المعلمات المقدرة ($\widehat{\beta}_{FeFegamma}$=10.11562, 10.10135)
- عندما زيادة قيمة التلوث في التوزيع الاولي من (0.1) الى(0.5) تزداد افضلية تقدير بيز الحصين المعتمد على الصنف الاساسي القياسي والملوث الاساسي ليندلي مما يدل على افضلية استعمال التوزيع الاولي ليندلي في تقدير معلمات توزيع فريچت عند زيادة نسبة التلوث عند احجام العينات (10,20,30) و الصنف الملوث معكوس فريچت وكاما عند احجام العينات (50,100)

❖ تفوق تقدير بيز الحصين عندما يكون صنف التلوث الاولي توزيع ليندلي بنسبة افضلية (50%) تليها تقدير بيز الحصين عندما يكون صنف التلوث الاولي توزيع كاما بنسبة افضلية (26%) ومن ثم تليها تقدير بيز الحصين عندما يكون صنف التلوث الاولي توزيع معكوس فريجت بنسبة افضلية (21%) واخيرا تقدير بيز الحصين عندما يكون صنف التلوث الاولي توزيع ويبل بنسبة افضلية (3%) اعتماداً على مقياس متوسط مربعات الخطأ.

❖ تفوق تقدير بيز الحصين المعتمد على الصنف الاولي الملوث ليندلي عند احجام العينات (10,20,30) واكبر نسبة متحققة عند حجم العينة (30).

❖ تفوق تقدير بيز الحصين المعتمد على الصنف الاولي الملوث كاما عند احجام العينات (50,100) .



شكل (٢-٣) منحنى دالة الكثافة الاحتمالية ومنحنى الدالة التجميعية لتوزيع فريجت عند المعلمات المقدرة بطريقة بيز الحصين عند صنف التوزيع الأولي الملوث ليندلي بنسبة تلوث **ε=0.5** عند القيم الافتراضية ((α=1 , β=2,4,10

3-4-3 تقديرات المعلمة (β) عند نسبة تلوث في التوزيع الأولي$(\varepsilon = 0.9)$:

جدول رقم (3-6) بيز الحصينة للمعلمة β ومتوسط مربعات الخطأعند اصناف التوزيعات الأولية الأربعة عند نسبة تلوث في التوزيع الأولي$(\varepsilon = 0.9)$

β	n	$\hat{\beta}_{Feweibull}$	MSE	$\hat{\beta}_{FeIF}$	MSE	$\hat{\beta}_{Fegamma}$	MSE	$\hat{\beta}_{FeLindely}$	MSE	Best
١	10	1.59776	0.27189	1.68002	0.26984	1.67997	0.16984	١.١٣٢١١	0.16895	*FeLindely*
	20	1.57887	0.23897	1.69454	0.24783	1.68642	0.25683	1.13277	0.16734	*FeLindely*
	30	1.58798	0.16754	1.56677	0.17643	1.47787	0.21123	1.04113	0.15568	*FeLindely*
	50	1.18895	0.01412	1.53119	0.13421	1.39345	0.24322	1.56785	0.14436	*Feweibull*
	100	1.98967	0.10776	1.11997	0.01007	1.55644	0.20977	1.57896	0.13246	*FeIF*
١.٥	10	1.65701	0.30454	1.68091	0.05674	1.69915	0.15399	١.٥٤٩٠٣	0.01876	*FeLindely*
	20	1.64456	0.21245	1.67569	0.13553	1.61892	0.01231	1.63421	0.14674	*Fegamma*
	30	1.63092	0.20008	1.73118	0.04785	1.66812	0.04285	1.53327	0.01169	*FeLindely*
	50	1.68755	0.20438	1.53116	0.01004	1.82102	0.02084	1.71777	0.02520	*FeIF*
	100	1.69111	0.17856	1.50231	0.00171	1.83276	0.00221	1.73378	0.02553	*FeIF*
٢	10	٢.٦٩١٨٦	0.13578	2.85678	0.02032	2.51345	0.05536	2.36843	0.02322	*FeIF*
	20	2.67843	0.14322	2.84653	0.02358	2.56437	0.04137	2.20754	0.02114	*FeLindely*
	30	2.48753	0.07989	2.82255	0.01177	2.67865	0.03257	2.01198	0.00213	*FeLindely*
	50	2.35733	0.06333	2.73022	0.02340	2.56727	0.02322	2.00897	0.00132	*FeLindely*
	100	2.58354	0.03444	2.01154	0.01367	2.62887	0.01569	2.55794	0.02278	*FeIF*
2.5	10	2.54444	0.97866	2.55562	1.66097	2.53288	0.77775	٢.٥٤٨٧٧	0.17324	*FeLindely*
	20	2.85374	0.96789	2.12311	0.95466	2.54565	0.65458	327١2.5	664٤0.1	*FeLindely*
	30	2.72544	0.84455	2.56132	0.79267	2.52871	0.15965	2.63735	0.56789	*Fegamma*
	50	2.71433	0.81436	2.52198	0.26679	2.62111	0.76556	2.56437	0.47435	*FeIF*
	100	2.70621	0.82245	2.51033	0.14986	2.71187	0.33432	2.55443	0.33677	*FeIF*

4	10	4.65321	0.78964	4.53332	0.76754	4.55644	1.46443	٤.١٨٨٨٧	0.15786	FeLindely
	20	4.35337	0.86898	4.53456	0.64897	4.55020	0.98975	4.10321	0.13764	FeLindely
	30	4.53275	0.77637	4.55235	0.66544	4.74533	0.18777	4.02043	0.01342	FeLindely
	50	4.66554	0.65378	4.55221	0.16964	4.12197	0.14599	4.45664	0.34329	Fegamma
	100	4.83211	0.37787	4.10134	0.12457	4.61211	0.56574	10.53486	0.15555	FeIF
10	10	10.77543	0.84566	10.59324	1.12143	10.57855	0.72011	١٠.١٢٢١٣	0.14378	FeLindely
	20	10.64586	0.84333	10.55322	0.79435	10.54586	0.65256	10.12355	0.13323	FeLindely
	30	10.34662	0.76988	10.64324	0.44589	10.65033	0.56177	10.13432	0.13220	FeLindely
	50	10.65545	0.73346	10.55656	0.34776	10.16683	0.11394	10.61578	0.21711	Fegamma
	100	10.50213	0.64493	10.14445	0.07342	10.40188	0.14367	10.54343	0.33436	FeIF

جدول (3-7)

افضلية تقدير بيز الحصين للمعلمة (β) من خلال المفاضلة بمعيار متوسط مربعات الخطأ (MSE)

عند نسبة التلوث التوزيع الاولي (ε=0.9)

الطريقة	حجم العينة					عدد مرات الأفضلية	نسبة الأفضلية
	١٠	٢٠	٣٠	٥٠	١٠٠		
Feweibull	0	0	0	1	0	1	3
FeIF	1	0	0	2	6	9	28
Fegamma	0	١	١	2	0	4	13
FeLindely	5	5	5	1	0	16	56

من الجدول (3-6) و (٣-٧) يتضح ما يأتي:

- ان تقديرات المعلمة (β) باستعمال طرائق التقدير المعتمدة كافة قد اظهرت متوسط اقرب الى القيم الافتراضية لهذه المعلمة عند النماذج واحجام العينات المفترضة كافة .
- للنماذج واحجام العينات المفترضة كافة اظهرت تقديرات المعلمة (β) عندما يكون التقدير الحصين المعتمد على التوزيع الاساس القياسي والتوزيع الملوث القياسي توزيع ليندلي في التقدير متوسطات اقرب الى القيم الحقيقية (الافتراضية) لهذه المعلمة من متوسطات تقديرات المعلمة لكل من مقدر بيز الحصين للمعلمة عندما يكون التوزيع الاساس القياسي والتوزيع والملوث الاساسي توزيع معكوس فريچت وويبل وكاما الأولي.
- افضلية استعمال التوزيع الاولي الملوث ليندلي عند احجام العينات (10,20,30).
- افضلية استعمال التوزيع الاولي الملوث معكوس فريچت عند احجام العينات (50,100).
- عند القيمة الافتراضية (β=1) حقق تقدير بيز الحصين للتوزيع الاساسي القياسي وللتوزيع الملوث ليندلي ($\boldsymbol{FeLindely}$) أفضيلة عندما يكون حجم العينة (n=10,20,30) عند قيمة متوسط مربعات خطأ (MSE=0.16895) و (MSE=0.16734) و (MSE=0.15568) على التوالي. عند المعلمات المقـدرة ($\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{FeLindely}$=1.13211, 1.13277, 1.04113). وعند حجم عينة (n=50) سجل تقدير بيز الحصين عندما يكون صنف التلوث توزيع ويبل ($\boldsymbol{Fewebull}$) اقل متوسط مربعات خطأ بلغ (MSE=0.01412) عند المعلمة الافتراضية($\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{Fewebull}$=1.18895). . وعند حجم عينة (n=100) سجل تقدير بيز الحصين عندما يكون صنف التلوث توزيع كاما ($\boldsymbol{FeIF}$) اقل متوسط مربعات خطأ بلغ (MSE=0.01007) عند المعلمة المقدرة($\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{FeIF}$=1.11997).
- عند القيمة الافتراضية (β=1.5) ، حقق تقدير بيز الحصين للتوزيع الاساسي القياسي وللتوزيع الملوث ليندلي ($\boldsymbol{FeLindely}$) أفضيلة عندما يكون حجم العينة (n=10,30) عند قيمة متوسط مربعات خطأ (MSE=0.01867) و (MSE=0.001169) على التوالي عند المعلمات المقـدرة ($\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{FeLindely}$=1.54903, 1.61892). وعند حجم عينة (n=20) سجل تقدير بيز الحصين عندما يكون صنف التلوث توزيع كاما ($\boldsymbol{Fegamma}$) اقل متوسط مربعات خطأ بلغ (MSE=0.01231) عند المعلمة الافتراضية($\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{Fegamma}$=1.53327). ، وعند حجم عينة (n=50,100) سجل تقدير بيز الحصين عندما يكون صنف التلوث توزيع معكوس فريچت($\boldsymbol{FeIF}$) اقل متوسط مربعات خطأ بلغ (MSE=0.01004) (MSE=0.00171) على التوالي عند المعلمات الافتراضية ($\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{FeIF}$=1.53116, 1.50231).

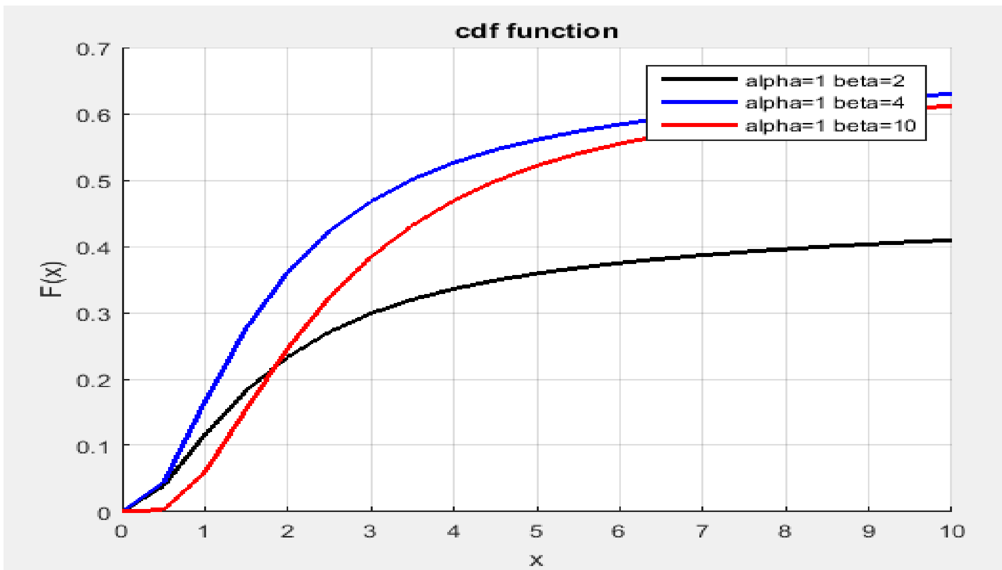
- عند القيمة الافتراضية (β=2) حقق تقدير بيز الحصين للتوزيع الاساسي القياسي وللتوزيع الملوث ليندلي ($\boldsymbol{FeLindely}$) أفضيلة عندما يكون حجم العينة (n=20,30,50) عند قيمة متوسط مربعات خطأ (MSE=0.02114) و (MSE=0.00213) و (MSE=0.00132) على التوالي عند المعلمات المقـدرة ($\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{FeLindely}}$= 2.20754, 2.01198, 2.00897). وعند حجم عينة (n=,10100) سجل تقدير بيز الحصين عندما يكون صنف التلوث توزيع معكوس فريچت ($\boldsymbol{FeIF}$) أقل متوسط مربعات خطأ بلغ (MSE=0.02032 ,0.01367) عند المعلمة المقدرة عند المعلمات المقـدرة ($\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{FeIF}}$= 2.85678, 2.01154).
- عند القيمة الافتراضية (β=2.5) حقق تقدير بيز الحصين للتوزيع الاساسي القياسي وللتوزيع الملوث ليندلي ($\boldsymbol{FeLindely}$) أفضيلة عندما يكون حجم العينة (n=10,20) عند قيمة متوسط مربعات خطأ (MSE=0.17324) و (MSE=0.14664) على التوالي عند المعلمات المقـدرة ($\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{FeLindely}}$=2.54877, 2.51327) وتفوق تقدير بيز الحصين للتوزيع الاساس القياسي والملوث كاما ($\boldsymbol{Fegamma}$) عندما يكون حجم العينة (n=30) بأقل متوسط مربعات خطأ (MSE=0.15965) عند المعلمة المقـدرة ($\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{Fegamma}}$=2.52871)، وتفوق تقدير بيز الحصين للتوزيع الاساس القياسي والملوث معكوس فريچت ($\boldsymbol{FeIF}$) عندما يكون حجم العينة (n=50,100) بأقل متوسط مربعات خطأ (MSE=0.26679) و (MSE=0.14986) على التوالي عند المعلمات المقـدرة ($\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{FeIF}}$=2.52198, 2.51033)
- عند القيمة الافتراضية (β=4) حقق تقدير بيز الحصين للتوزيع الاساسي القياسي وللتوزيع الملوث ليندلي ($\boldsymbol{FeLindely}$) أفضيلة عندما يكون حجم العينة (n=10,20,30) عند قيمة متوسط مربعات خطأ بلغ (MSE=0.15786) و (MSE=0.13764) و (MSE=0.01342)على التوالي عند المعلمات المقـدرة ,$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{FeLindely}}$=4.18887, 4.10321 (4.02043) وتفوق تقدير بيز الحصين للتوزيع الاساس القياسي والملوث كاما ($\boldsymbol{Fegamma}$) عندما يكون حجم العينة (n= 50) بمتوسط مربعات خطأ (MSE= 0.14599) عند المعلمة المقـدرة ($\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{Fegamma}}$=4.12197)، وتفوق تقدير بيز الحصين للتوزيع الاساس القياسي والملوث معكوس فريچت ($\boldsymbol{FeIF}$) عندما يكون حجم العينة (100

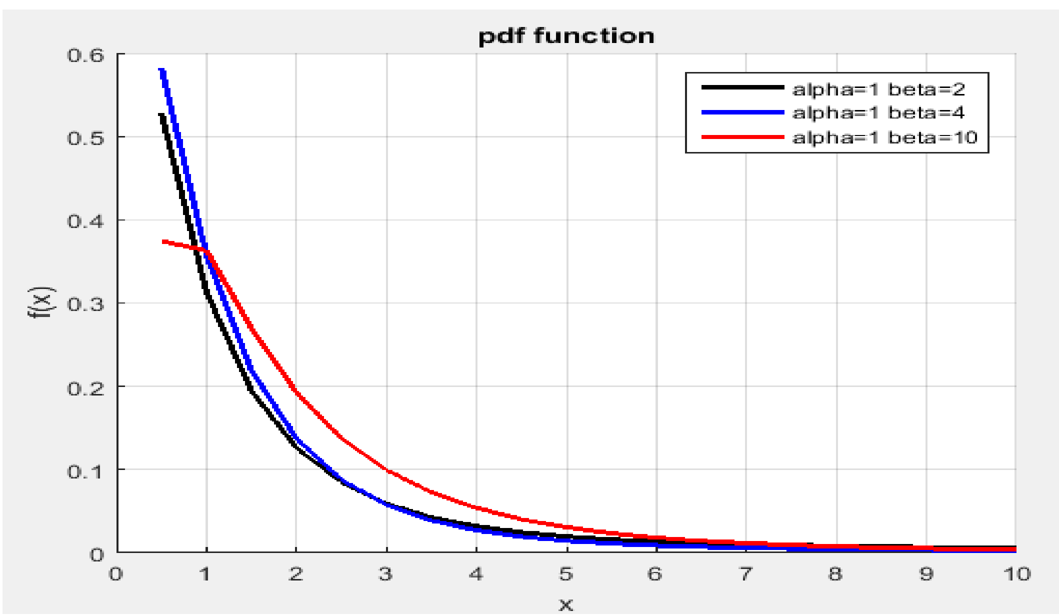
n=) بمتوسط مربعات خطأ (MSE= 0.12457) عند المعلمات المقـدرة ($\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{FeIF}$=4.10134)

❖ عند القيمة الافتراضية (β=10) حقق تقدير بيز الحصين للتوزيع الاساسي القياسي وللتوزيع الملوث ليندلي ($\boldsymbol{FeLindely}$) أفضيلة عندما يكون حجم العينة (n=10, 20, 30) عند قيمة متوسط مربعات خطأ (MSE=0.14378) و (MSE=0.13323) و (MSE=0.13220) على التوالي عند المعلمات المقـدرة ($\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{FeLindely}$=10.12213, 10.2355, 10.13432). وتفوق تقدير بيز الحصين للتوزيع الاساس القياسي والملوث كاما($\boldsymbol{Fehamma}$) عندما يكون حجم العينة (n= 50) بمتوسط مربعات خطأ (MSE=0.11394) عند المعلمة المقـدرة ($\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{Fegamma}$=10.16683) وتفوق تقدير بيز الحصين للتوزيع الاساس القياسي والملوث معكوس فريچت ($\boldsymbol{FeIF}$) عندما يكون حجم العينة (n=100) بمتوسط مربعات طأ (MSE=0. 07342) عند المعلمة المقـدرة ($\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{FeIF}$=10.14445)

❖ عندما زيادة قيمة التلوث في التوزيع الاولي من(0.5) الى(0.9) تزداد افضلية تقدير بيز الحصين المعتمد على الصنف الاساسي القياسي ليندلي والملوث الاساسي ليندلي مما يدل على افضلية استعمال التوزيع الاولي ليندلي في تقدير معلمات توزيع فريچت عند زيادة نسبة التلوث عند احجام العينات الصغيرة و الصنف الملوث معكوس فريچت وكاما عند احجام العينات الكبيرة.

❖ تفوق تقدير بيز الحصين عندما يكون صنف التلوث الاولي توزيع ليندلي بنسبة افضلية(56%) تليها تقدير بيز الحصين عندما يكون صنف التلوث الاولي توزيع معكوس فريچت بنسبة افضلية (28%) تقدير بيز الحصين عندما يكون صنف التلوث الاولي توزيع كاما بنسبة افضلية (13%) وأخيرا تقدير بيز الحصين عندما يكون صنف التلوث الاولي توزيع ويبل بنسبة افضلية (3%) اعتماداً على مقياس متوسط مربعات الخطا.





شكل (٣-٣) منحنى دالة الكثافة الاحتمالية ومنحنى الدالة التجميعية لتوزيع فريجت عند المعلمات المقدرة بطريقة بيز الحصين عند صنف التوزيع الأولي الملوث ليندلي بنسبة تلوث**0.9 =ε** عند القيم الافتراضية(α=1,β=2,4,10).

4−1 مقدمة Introduction

تعد فيروسات كورونا والتي عُرفت بالفيروسات التاجية مجموعة كبيرة من الفيروسات التي يمكن أن تُصيب الحيوانات والبشر على حد سواء، حيث تسبب أمراض الجهاز التنفسي، سواء التي تكون خفيفة مثل نزلات البرد أو شديدة مثل الالتهاب الرئوي. ونادرًا ما تصيب فيروسات كورونا الحيوانية البشر ثم تنتشر بينهم. وقد تتذكر مرض سارس **(SARS)** المتلازمة التنفسية الحادة الوخيمة الذي انتشر في الفترة بين ٢٠٠٢-٢٠٠٣، والذي يعد مثالاً على أحد فيروسات كورونا الذي انتقل من الحيوانات إلى البشر. وقد ظهرت في الشرق الأوسط في عام ٢٠١٢ سلالة أخرى بارزة حديثة من فيروسات كورونا تسمى **(MERS)** متلازمة الشرق الأوسط التنفسية، ويقول العلماء إنها انتقلت في البداية من جمل إلى إنسان.

ومؤخراً ظهر نوع جديد من فيروسات كورونا وتسبب في وفاة الكثيرين حول العالم، ولا يزال مستمراً حتى الآن وهو فايروس كوفيد-١٩ .

كوفيد-١٩ هو اسم الوباء المعدي الذي يتسبب به كورونا المستجد، وظهر الفيروس أول مرة في ديسمبر/ كانون أول ٢٠١٩ بمدينة ووهان الصينية، وتم تعريف المرض في ١٣ يناير/ كانون ثاني عقب أعراض ظهرت على مجموعة من المرضى . وظهر الوباء لأول مرة في سوق للمأكولات البحرية والحيوانات، ثم انتقل منها إلى بقية مدن مقاطعة هوبي، ومنها إلى مقاطعات الصين وثم إلى سائر أنحاء العالم. وأن من الأعراض الأكثر شيوعًا لهذا الفايروس هي الحمى والسعال وضيق

التنفس والإرهاق، ولكن في الحالات المتقدمة من المرض فقد يصاب المريض بآلام، وانسداد الأنف، والرشح، وآلام في الحلق وإسهال.

ان (**80**) بالمئة من المصابين بالفيروس يتعافون دون الحاجة إلى علاج خاص، وواحد من كل ستة مصابين "بكوفيد-١٩" تكون حالته شديدة ويجد صعوبة في التنفس، و٢٠ بالمئة من الحالات يمكن علاجها في المستشفى، ويؤثر المرض في المسنين الذين تتجاوز أعمارهم الستين أكثر من غيرهم. ويمكن أن يؤدي الفيروس إلى الوفاة للمرضى الذين يعانون من أمراض مزمنة مثل الضغط والقلب والسكري، ولابد لمن يعانون ارتفاع درجات الحرارة والسعال وضيق التنفس الحصول على دعم طبي. ينتقل وباء "كوفيد-١٩" عن طريق تعرض الأشخاص لرذاذ المرضى الناتج عن السعال والعطس ولمسهم للفم والأنف والعينين، كما ينتقل عن طريق لمس اليدين للأسطح الملوثة بالرذاذ الحامل للفيروس.

لا يوجد لقاح أو علاج محدد فعال ضد الفيروس حتى الآن، ولكن يتم استخدام الأدوية الداعمة حسب حالة المريض، ويتم البحث في فعالية بعض الأدوية على الفيروس، ولكن لم يتم اكتشاف علاج مقاوم له حتى الآن.**[https://www.aa.com.tr/ar/2020]** لذلك يعد هذا المرض او الوباء من امراض العصر الحالية التي من الأهمية اجراء الدراسات حولها وتطبيق البيانات الناتجة عنه على الطرائق الاحصائية والرياضية التي يتناولها الباحثين.

٤-٢ البيانات التطبيقية

تم أخذ عينة عشوائية بحجم **(n=30)** مريض مصاب بفايروس كورونا المستجد **COVD-19** من سجلات المرضى الراقدين في قسم الحميات في مستشفى الحسين التعليمي في محافظة كربلاء المقدسة وتمثلت هذه البيانات بقياس اوقات البقاء **(lifetimes)** بالأيام تحت العلاج لحين الوفاة او الشفاء من المرض او مغادرة المستشفى وقد تم اعتبار مدة البقاء منذ التشخيص واخذ العلاج ولحين المغادرة كما هو مبين في جدول (٤-١):

جدول(٤ – ١) اوقات البقاء **(lifetimes)** بالأيام تحت العلاج لحين الوفاة او الشفاء من المرض أو مغادرة المستشفى للمصابين بفايروس **COVD-19**

i	t_i
1	22
2	11
3	17
4	23
5	29
6	44
7	35
8	38
9	41
10	8
11	17

12	19
13	14
14	19
15	34
16	29
17	17
18	18
19	19
20	16
21	22
22	33
23	10
24	15
25	25
26	19
27	20
28	21
29	22
30	43

٤-3 اختبار ملائمة البيانات Data Fitting

تم اختبار البيانات باستعمال برنامج easy fit للتاكد من كونها تتبع التوزيعات المدروسة ام لا فقد تم اختبار البيانات التي تمثل اوقات البقاء **(lifetimes)** بالأيام تحت العلاج لحين الوفاة او الشفاء من المرض أو مغادرة المستشفى للمصابين بفايروس **(COVD-19)** عند الفرضية الاحصائية الآتية:

H_0: البيانات تتبع توزيع فريچت

H_1: البيانات لا تتبع توزيع فريچت

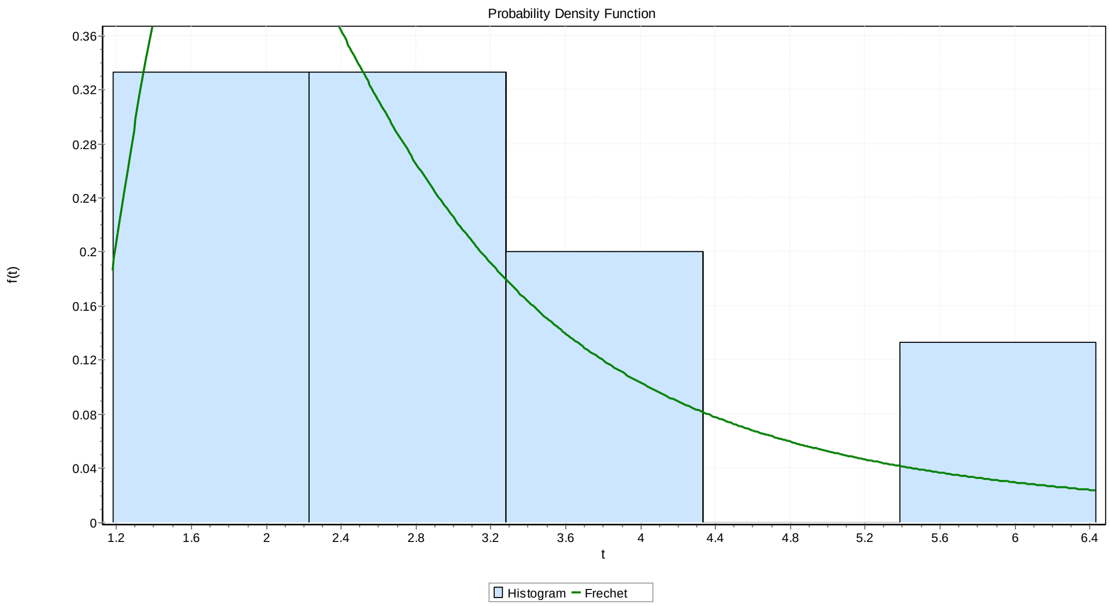
وكانت نتائج الاختبار كما في الجدول (٢-٤)

جدول (٢-٤) نتائج اختبار البيانات الحقيقة

Distribution	Kolmogorov-Smirnov	Anderson Darling	Sig.
	Statistic	Statistic	
Frechet	0.14721	0.7917	0.48857

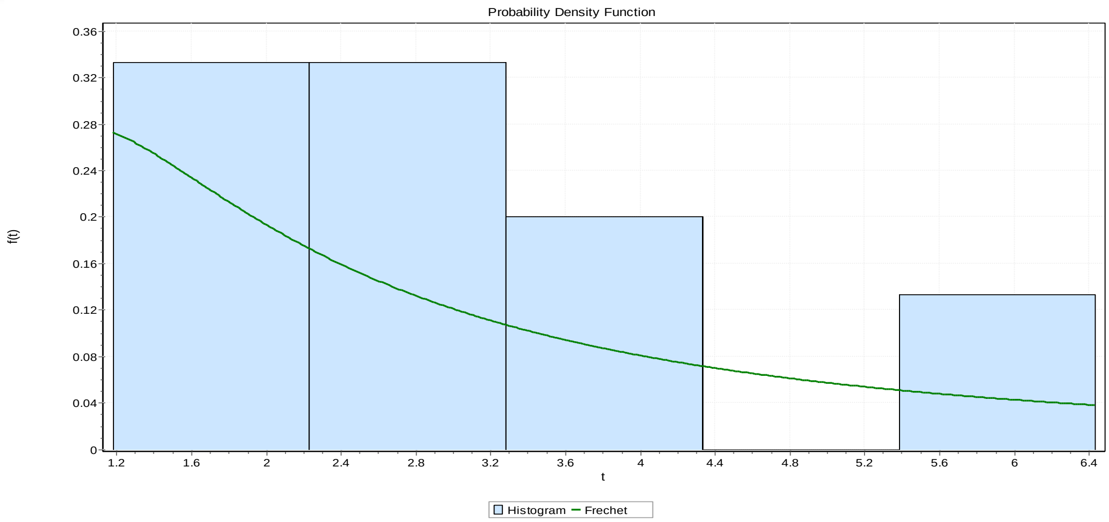
حيث يتضح من جدول(٢-٤) ان قيمة .Sig والبالغة (0. 48857) اكبر من مستوى المعنوية ٠.٠٥ لذلك لانرفض فرضية العدم اي ان البيانات تتبع توزيع فريچت .

وقد كانت المعلمات المقدرة بموجب برنامج (α=2.4125, β=2.046) وان منحنى دالة الكثافة الاحتمالية كان كما في شكل (١-٤)



شكل (٤-١) منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع فريچت بالمعلمات (α=2.4125, β=2.046)

عندما (α=1, β=2.046) يصبح منحنى دالة الكثافة الاحتمالية كما في شكل (٤-٢) لاننا بصدد تقدير معلمة القياس لتوزيع فريچت



شكل (٢-٤) منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع فريچت بالعلمات $(\alpha=1, \beta=2.046)$

ونلاحظ من نتائج برنامج (easyfit) ان معلمة القياس **(β)** لتوزيع فريچت قريبة جداً من المعلمة الافتراضية التي تم افتراضها في تجربة المحاكاة الثالثة والتي كانت $(\beta=2)$ مما يدل على دقة القيم الافتراضية في تجارب المحاكاة في توضيح سلوك طرائق التقدير.

وعند الرجوع الى الأطباء لغرض الحصول على المعلومات الأولية عن المرضى المصابين بفايروس كورونا وما تم متابعته من قلبلهم حول تاريخهم المرضي والامراض المزمنة المصابين بها او غيرها من العوامل المؤثرة على شدة الاصابة بالمرض والمؤثر على حالتهم المرضية من مدة بقاء او الوفاة او المغادرة واعادة اختبار البيانات الاولية تم التوصل الى انها تتبع توزيع ليندلي.

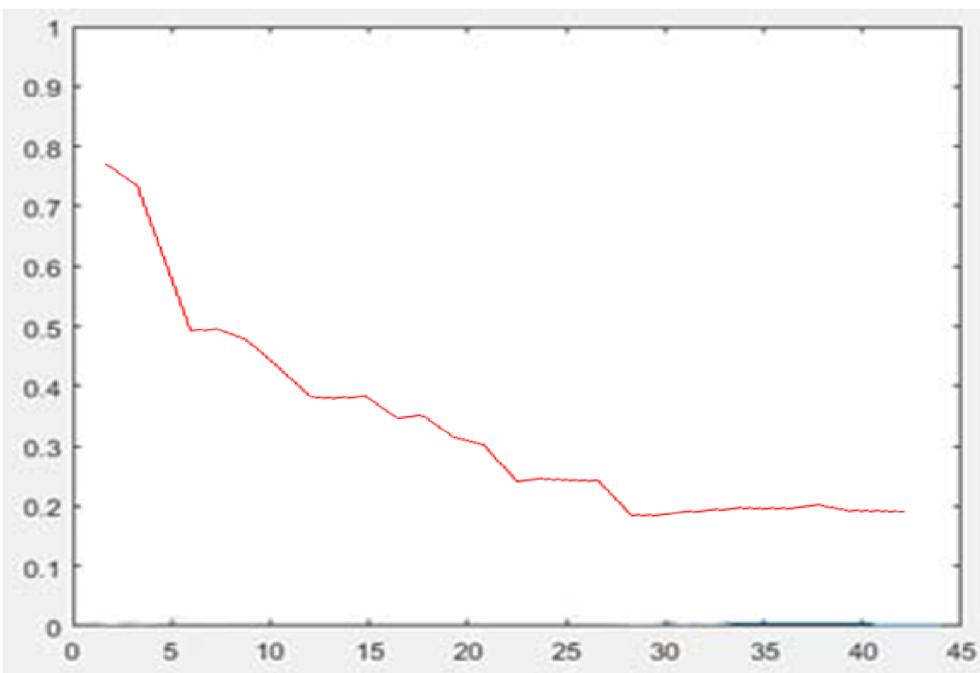
٤-٣ تحليل البيانات Data analysis

بينت نتائج تجارب المحاكاة ان افضل طريقة لتقدير معلمات توزيع فريچت هي تقدير بيز الحصين عندما يكون التوزيع الاساسي القياسي والتوزيع الملوث الاساسي توزيع ليندلي عند احجام

العينات (10,20,30) ، لذلك سيتم تطبيق هذه الطريقة على البيانات الحقيقية لتقدير معلمات توزيع فريچت ، وباستعمال برنامج Mat lab تم انشاء برنامج خاص لتطبيق الطريقة على البيانات الحقيقية وكانت قيمة معلمة القياس المقدرة ($\hat{\beta}_{FeLindely}$=2.045) وهي قريبة من المعلمات المقدرة عند حجم عينة (n=30) في تجارب المحـــــــــــاكاة عند نسب التلوث ($\varepsilon = 0.5, 0.9$) .

ان نتائج تحليل البيانات التطبيقية تؤكد على ضرورة استعمال توزيع ليندلي كتوزيع اولي ملوث بنسب معينة من التلوث في ايجاد تقدير بيز الحصين في حال اتباع البيانات الحقيقية توزيع فريچت .

والشكل التالي يبين منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع فريچت للبيانات الحقيقية عندما تكون قيمة معلمة القياس ($\hat{\beta}$=2.045) و (α=1)



شكل (٣-٤) منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع فريچت عند ($\hat{\beta}$=2.045) المقدرة بطريقة بيز الحصين عن صنف التلوث الاولي ليندلي.

5.1 الاستنتاجات Conclusions

من خلال ماتم التوصل اليه من نتائج في الجانبين التجريبي والتطبيقي توصلنا الى اللآتي:

١. اظهرت طرائق التقدير المعتمدة كافة متوسط اقرب الى القيم الافتراضية لمعلمة القياس لتوزيع فريچت (β) عند النماذج واحجام العينات المفترضة كافة عند كل نسب التلوث ($\boldsymbol{\varepsilon} = 0.1, 0.5, 0.9$).

٢. عند تجارب المحاكاة كافة عند نسبة التلوث في صنف التوزيع الأولي $\varepsilon = 0.1$ تقارب افضلية الطرائق المستعملة بالاعتماد على معيار متوسط مربعات الخطأ (MSE) وكذلك من حيث اقتراب قيم المعلمة (β) المقدرة من القيم الافتراضية للمعلمة وهذا يدل على دقة وموثوقية نتائج تجارب المحاكاة فيما يخص تقديرات المعلمة (β) بالاعتماد على اصناف التوزيعات الأولية الاساسية القياسية والملوثة .

٣. افضل تقدير بيزي حصين عند صنف التوزيع الأولي الامكان الاعظم النوع الثاني كان عند التوزيع الأولي القياسي الاساسي والتوزيع الاولي الملوث توزيع ليندلي يليه توزيع معكوس فريچت ومن ثم توزيع كاما واخيراً توزيع ويبل.

٤. بزيادة قيمة نسب التلوث في التوزيع الاولي (0.1-0.9) تحقق افضلية تقدير بيز الحصين المعتمد على الصنف الاساسي القياسي فريجيت والملوث الاساسي ليندلي مما يدل على افضلية استعمال التوزيع الاولي ليندلي في تقدير معلمات توزيع فريچت.

٥. اظهرت نتائج تحليل البيانات التطبيقية المتمثلة باوقات البقاء **(lifetimes)** بالأيام تحت العلاج لحين الوفاة او الشفاء من المرض أو مغادرة المستشفى للمصابين بفايروس **(COVD-19)** التأكيد على ضرورة استعمال توزيع ليندلي كتوزيع اولي ملوث بنسب معينة من التلوث في ايجاد تقدير بيز الحصين في حال اتباع البيانات الحقيقية توزيع فريچت .

2 – 5 التوصيات Recommendations

من خلال ما تم التوصل اليه من نتائج ، توصي الباحثة بالآتي :

١. توسيع نطاق هذه الرسالة باستعمال توزيعات احتمالية تتضمن معلمات اكثر من ثلاثة لكي تساهم في وصف المتغيرات بصورة اكثر دقة.

٢. استعمال توزيعات اخرى غير توزيع فريچت ومقارنتها بما توصل اليه الباحثان.

٣. استعمال دوال خسارة اخرى غير دالة الخسارة التربيعية مثل دالة خسارة Linex ودالة اخسارة Entropy لمعرفة سلوك تقدير بيز الحصين في ظل وجود تلك الدوال.

٤. عدم أستخدام توزيع الفشل ويبل لعدم أفضليتة لقياس متوسط مربعات الخطأ MSE مقارنة مع بقية الاصناف الاولية وكذلك عدم أفضلية في تقدير بيز الحصين عند زيادة في نسب التلوث.

٥. امكانية استعمال المنطق الضبابي في التوزيع الاولي الملوث للحصول على دقة اكثر في تقديرات بيز الحصينة .

٦. مقارنة تقديرات بيز الحصينة مع التقديرات الكلاسيكية الحصينة مثل طريقة الامكان الاعظم الحصينة وطريقة المربعات الصغرى الحصينة .

٧. نتيجة ماتوصل اليه من نتائج تحليل البيانات التطبيقية المتمثلة بأوقات البقاء lifetime الى ضرورة أبقاء المرضى لمدة لاتقل عن شهر حسب حالة المريض تحت العلاج والرعاية الخاصة الى ان يتعافى كليا لمغادرة المستشفى .

١- المصادر العربية:

١- العاني، بان غانم عمر ، حسن ، ضوية سلمان ، الرسام , ريا سالم ، (٢٠١٩) ، تقدير بيز الحصين لدالة الموثوقية لتوزيع ويبل المبتور مع التطبيق على مرضى قرحة المعدة" ، المجلة العراقية للعلوم الاحصائية (٢٩) عدد خاص بالمؤتمر الطلابي الأول ، صص[1-10]

٢- العاني، بان غانم عمر – حسن ، ضوية سلمان، (٢٠١٩) ، ايجاد مقدر بيز الحصين لمعلمة القياس (θ) ولدالة المعولية $R(t)$ لتوزيع ويبل المبتور من طرف اليسار عندما تكون معلمة الشكل معلومة" ، المجلة العراقية للعلوم الاحصائية المجلد (١٣) العدد (٥٥)

٣- الصراف، نزار مصطفى ، اسماعيل كمال ، غفران ، الـــــراوي ، اسماء غالب، (٢٠١٦)، (التقدير الاحصائي)، جامعة بغداد ، ط١

٤- الياسري ، تهاني مهدي عباس ، (٢٠٠٧) ، " مقارنة مقدرات بيز الحصين مع مقدرات أخرى لتقدير دالة المعولية التقريبية لتوزيع ويبل" ، اطروحة دكتوراه غير منشورة ، كلية الادارة والاقتصاد– جامعة بغداد .

٥- بشار خالد علي (٢٠١٨) ، "اختيار افضل تقدير للمعولية الضبابية لتوزيع فريچت " ، رسالة ماجستير غير منشورة، جامعة كربلاء ، كلية الادارة والاقتصاد .

٦- هبة الله، و ماجد علي شريم، (٢٠٠٥) ، " دراسة مقارنة لطرق التقدير الحصينة لدالة البقاء مع تطبيق عملي على مرضى سرطان الدم في اليمن " ، اطروحة دكتوراه غير منشورة– كلية الادارة والاقتصاد– جامعة بغداد .

٧- مناع ، احمد سعدون ، (٢٠١٩) ، " بعض طرائق معولية بيز الحصينة في حالة بيانات سابقة متناقضة ((prior data conflict " ، رسالة ماجستير غير منشورة ، جامعة بغداد كلية الادارة والاقتصاد.

٨- وادي، اوات سردار،٢٠٠٧، مقارنة طرائق تقدير معلمات ودالة معوليه توزيع كاما ذي المعلمتين في حالة البيانات المفقودة باستخدام المحاكاة، رسالة ماجستير، جامعة بغداد ،كلية الادارة والاقتصاد.

المصادر الأجنبية:

9- A.LOGANATHAN ; M.UMA, (2017), " COMPARISON OF ESTIMATION METHODS FOR INVERSE WEIBULL PARAMETERS" , Global and Stochastic Analysis Vol. 4 No. 1, , 83-93 .

10- Baltagia, Badi H.; Bresson, Georges;Anoop Chaturvedi; Guy Lacroix Août , (2017), Robust linear static panel data models using ε-contamination" , Centre de recherche sur les risques les enjeux économiques et les politiques publiques www.crrep.ca

11- Baltagia, Badi H.; Bresson, Georges;Anoop Chaturvedi; Guy Lacroix Août , (2020), Robust Dynamic Panel Data Models Using ε-Contamination" , IZA – Institute of Labor Economics, ISSN: 2365-9793

12- Berger, James; Berlliner , L. Mark, (1986). "Robust Bayes and Emperical Bayes analysis with ε- contaminated Priors" , the annals of statistics Vol.14 No.2.

13- Chaturvedi , Anoop ; Pati ,Manaswini, (2013), " Robust Bayesian analysis ofWeibull failure model" , Springer, © Sapienza Università di Roma.

14- Chaturvedi, Ajit & Kumari, Taruna, (2018), " Robust Bayesian analysis of generalized inverted family of distributions' , Communications in Statistics - Simulation and Computation

15- Haro-Lopez, Rube A ; M. Smith ,Adrian F.,(1999), " On Robust Bayesian Analysis for Location and Scale Parameters" , Journal of Multivariate Analysis 70, 30-56

16- Iyer , Ravi K., (2013) , " Hazard and Reliability Functions,Failure Rates" , Probability with Engineering Applications, Dept. of lectrical and Computer Engineering University of Illinois at Urbana Champaign, ECE 313.

17- Kersey, Jing Xiong, (2010), " Weighted Inverse Weibull and Beta-Inverse Weibull Distribution", https://digitalcommons.georgiasouthern.edu/etd Part of theMathematics Commons .

18- Kopcimzewski, Pawel, (2004), " INFERENCE FROM NONINFORMATIVE ML-II PRIOR'', Scientific Research of the Institute of Mathematics and Computer Science, 2004, Volume 3, Issue 1, pages 61-66

19- Kundua, Debasis; Howlader, Hatem, (2010) , " Bayesian inference and prediction of the inverse Weibull distribution for Type-II censored data , Computational Statistics and Data Analysis 54 (2010) 1547_1558 .

20- M. M. Mohie El-Din; M. Nagy, (2017) , " Estimation for Inverse Weibull distribution under Generalized Progressive Hybrid Censoring Scheme" , Journal of Statistics Applications & Probability Letters An International Journal , J. Stat. Appl. Pro. Lett. 4, No. 3, 97-107.

21- Nakagawa, Tomoyuki ; Hashimoto, Shintaro, (2018), " Robust Bayesian inference via –divergence" , Faculty of Science and Technology, Tokyo University of Science, Noda, Chiba, 278{8510}

22- Pankaj Sinha* and J. Prabha(2010)” Bayes Reliability Measures of Lognormal and Inverse Gaussian Distributions under ML-II e-contaminated Class of Prior Distributions” Defence Science Journal, Vol. 60, No. 4, July 2010, pp. 442-450

23- Panwar , M. S.; Tomer , Sanjeev K. . (2019) " Robust Bayesian Analysis of Lifetime Data from Maxwell Distribution" , Austrian Journal of Statistics January 2019, Volume 48, 38–55.

24- Rivaz , Firoozeh ,(2011) , " A Comparison of Empirical Bayes and Reference Prior Methods for Spatio-Temporal Data Analysis" Procedia Environmental Sciences 7 (2011) 264–268.

25- Ross, Sheldon M., (2009) , " INTRODUCTION TO PROBABILITY and STATISTICS FOR ENGINEERS AND SCIENTISTS" , Fourth Edition, Academic Press is an imprint of Elsevier .

26- Rousseau, Gilles,(2016), " Vieillissement du TRIAC soumis à des essais de fiabilité du type HTRB" , HAL Id: dumas-01803690 https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-01803690

27- Shanker, Rama; Fesshay, Hagos; Sharma, Shambula, (2016) , " On Two -Parameter Lindley Distribution and its Applications to Model Lifetime Data" , Biometrics & Biostatistics International Journal, October 28, 2015 Published: January 02, 2016.

28- Silva, Pedro Sa ; Trigo, António, Varajão, João ; Pinto, Tiago , (2010) , " Simulation – Concepts and Applications" , M.D. Lytras et al. (Eds.): WSKS 2010, Part II, CCIS 112, pp. 429–434. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2010.

29- Sinha, Pankaj and Jayaraman, Prabha , (2009), " Bayes reliability measures of Lognormal and inverse Gaussian distributions under ML-II -contaminated class of prior distributions , Munich Personal RePEc Archive, Online at https://mpra.ub.uni-muenchen.de/16528/ MPRA Paper No. 16528, posted 02 Aug 2009 02:12 UTC.

30- Sinha, Pankaj and K. Bansal, Ashok ."2008" Hierarchical Bayes Prediction for the 2008 US Presidential Election' , Research gate, https://www.researchgate.net/publication/24112177.

31- Sivaganesan, S and Berger, J. O. (1989). "Ranges of Posterior Measures for Priors with Unimodal contaminations". Annal of statistics. Vol. 17, No. 2, 868-889.

32- Stigler, Stephen M. (2010) , " The Changing History of obustness", Taylor & Francis Informa Ltd Registered in England and Wales Registered Number: 1072954 Registered office: Mortimer House, 37-41 Mortimer Street, London W1T 3JH, UK.

33- Syed Misbah Uddin*, Aminur Rahman, Emtiaz Uddin Ansari, (2017) , " COMPARISON OF SOME STATISTICAL FORECASTING TECHNIQUES WITH GMDH PREDICTOR: A CASE STUDY" Comparison of Some Statistical Forecasting Techniques with GMDH Predictor: A Case Study

المصـــــــــــــــــــــــــادر ....

ABSTRACT ....

The interest of statisticians in recent decades has increased in addressing the case of anomalies in the data, or more precisely, how to deal with the data in the event that it contains anomalies (contaminates), in two directions, the first is the use of fortified methods from which to obtain more efficient capabilities than the usual methods in the case of The presence of contaminates, and the other direction is the Bayesian direction, or the so-called Robust Bayesian, which is the parameter or parameters to be assessed as random variables for which previous information is available in a probability distribution formula called the (prior) distribution, which depends on the estimation of Bayesian on the sensitivity of this distribution. The extent of its accuracy in determining the prior information about the parameters to be assessed.

This thesis aimed at estimating the measurement parameter for the distribution of Frechet by using the robust Bayesian method based on the contaminant variety (contaminant ML-II-) at four types of the standard basic distribution and the main contaminant distribution which is when the standard base distribution and the standard contaminant distribution is the Weibull distribution and when the main distribution is The standard and standard pollutant distribution is the inverse Frechet distribution, and when the standard base distribution and the standard contaminates distribution is a gamma distribution, and when the standard base distribution and the standard contaminates distribution are the Lindley distribution at a squared loss function, and then the estimation using the standard mean squared error (MSE) . Since the Monte-Carlo simulation method was used for the purpose of testing the preference of the estimation methods used in estimating the parameters of the Frigate distribution using the hippocampal Bayesian method under the category of contamination, the ML- type II, and it was concluded that all the approved estimation methods are average closer to the default values of the measurement parameter for the Freight distribution (β) when all the experiments of simulation and sample sizes are assumed at each level of contamination (ε= 0.1,0.5,0.9). And the best robust Bayesian estimate for the prior distribution class. The second ML was at the standard primary distribution and the contaminated primary distribution, followed by the inverse Frechet distribution and from then the gamma distribution and finally the Weibull distribution, by increasing the value of the contamination ratios in the primary distribution (0.9-0.1), the preference for the robust Bayesian estimation based on the standard basic class of Lindley and the main contaminant of Lindley was achieved, indicating the preference for using the primary distribution of Lindley in estimating the parameters of the Frechet distribution. The results of the analysis of applied data represented in the lifetimes of the days under treatment until death or recovery from disease or leaving the hospital for those infected with the virus (COVD-19), obtained from the Fever Department at Al-Hussein Teaching Hospital in Karbala Governorate, emphasizing the need to use the Lindley distribution as a primary distribution contaminated with certain percentages of contamination in finding an estimate of the robust Bayesian in case the real data follow the Frechet distribution.

Republic of Iraq
Ministry of Higher Education
And Scientific Research
University of Karbala
Faculty of Management and Economics
Department of Statistics

Robust Bayesian Estimation for Frechet distribution

A thesis submitted to the council of the college of Administration &Economics\ University of Karbala as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Statistics Sciences

By

Tamara Ali Ghany

Under supervision

Ass. Prof. Dr . Mahdi Wahab Nea'ama Naser Allah

A.H. ١٤٤٢ **Holy Karbala** **A.D. 2020**