جمهوريـــــــة العراق
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جـــــــامعة كـربـــــــلاء
كلية الادارة والاقتصـــــــــــاد
قســـــــم الاحــــــصاء

دالة الإنتروبي العامة الموزونة لتوزيع ويبل – باريتو مضاعف البتر

رسالة مقدمة إلى مجلـس كلية الإدارة والاقتصاد في جامعة كربلاء
وهي جزء من متطلبات نيل درجة ماجستير في علوم الإحصاء

تقدم بها

حــازم عبد الرزاق عبد الامير

باإشـــــراف

أ. د. مهدي وهاب نعمة نصر الله

١٤٤٢ هـ ٢٠٢١ م

كربلاء المقدسة

بسم الله الرحمن الرحيم

قَالُوا

سُبْحَانَكَ لاَ عِلْمَ لَنَا إلاَّ مَا عَلَّمْتَنَا

إنَّكَ أنْتَ

العَلِيْمُ الحَكِيْمُ

صَدَقَ اللهُ العَلِيُ العَظيم

(البقرة ٣٢)

الإهـــداء

الى مـــــن خصـــهم الله تعـــالى بالكرامــــة وحبـــاهم بالرســـالة محمد واله الطاهرين .

إلى مَن أذكره ولا أنساه الجبل الصامد ادامك الله لي روحاً وقلباً وفخراً

(والدي الحبيب) .

إلى . . التي غذتني طعم الحياة ونفس الدنيا .

(روح أمي الطاهرة) .

إلى العيون التي تنظر لي بحب واحترام . . رفيقتي الدائمة وابتسامة الحياة .

(زوجتي) .

الى الذين وقفوا بجانبي وشدوا من أزري طِوال أيام الدراسة .

(اخوتي واصدقائي) .

الى . الشموع التي أضاءت لي الطريق

(أساتذتي) .

أهدي ثمرة جهدي المتواضع هذا

الباحث

شكر وإمتنان

الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات والصلاة والسلام على المصطفى محمد وآله الطيبين الطاهرين . بعد الله عز وجل، أتوجه بالشكر والامتنان إلى كل مَنْ مَدّ يد العون والمساعدة وأدعو من الله الموفقية للجميع.

ويطيب لي بعد أن أتممت رسالتي، أن أتقدم بالشكر والإمتنان الوافر لأستاذي الفاضل الأستاذ الدكتور(مهدي وهاب نعمة نصر الله) لما منحني إياه من شرف قبول الإشراف على هذه الرسالة ، ولما قدمه من آراء سديدة وبنّاءة طوال مدة البحث والدراسة والتي كان لها الأثر الكبير في إغناء الرسالة، فكان بحق مرجعاً علمياً وخيرُ معين،

كما أتقدم بالشكر والإمتنان الى أساتذتي في قسم الإحصاء لما بذلوه من جهد وعناء خلال مدة الدراسة. ففضلهم علينا لا يُقدر ، فنحن شاكرون وممتنون لتفانيهم وإخلاصهم في الجهد الذي بذلوه لكي يوصلونا إلى هذا المستوى

كما أتقدم بالشكر الجزيل إلى السادة رئيس وأعضاء لجنة المناقشة المحترمين لتفضلهم بقبول مناقشة الرسالة ولما سيبدونه من ملاحظات قيّمة تسهم في إغناء الرسالة.

واتقدم بالشكر الخالص الى الاستاذ (بشار خالد علي)، على دعمه المتواصل ومتابعته وتشجيعه لي في أثناء الدراسة مما كان له الدور البالغ في تذليل الصعوبات التي اعترضتها مع تمنياتي له بالصحة والتوفيق.

كما أقدم شكري وأحترامي إلى زملائي واصدقائي من طلبة الدرا سات العليا،

ولا يفوتني أن اقدم شكري لملاك وحد الأشعة في مستشفى الإمام الصادق في دائرة صحة بابل لما أبدوه من تعاون كبير في تيسيرالحصول على مصادر البيانات وأخص بالذكر(سيد لؤي وسيدأحمد) .

والشكر والتقدير وأسمى جمل الأعتذار إلى كل من لم يسعني ذكرهم لتقديم شكرنا لهم مع تمنياتنا بدوام الموفقية للجميع ، واسال الله ان يجزيهم عني خير الجزاء انه مجيب الدعاء .

الباحث

قائمة المحتويات

قائمة الاشكال

قائمة الجداول

قائمة الرموز

الرمز	المعنى
Φ	معلمة القياس لتوزيع ويبل
p	معلمة الشكل لتوزيع ويبل
k	معلمة الشكل لتوزيع باريتو
$\boldsymbol{\theta}$	معلمة القياس لتوزيع باريتو،التوزيع المركب ويبل باريتومضاعف البتر
$\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\lambda}$	معلمتي الشكل للتوزيع المركب ويبل - باريتو مضاعف البتر
$\mathbf{P_i}$	إحتمال المشاهدة (i)
$I(x_i)$	نظرية المعلومات
$\mathbf{H}_{(x)}$	إنتروبي شانون
$H^{w}{}_{x}$	إنتروبي شانون الموزون
α, β	المعلمات المضافة الى دالة الإنتروبي
$H_{\alpha}(X)$	رني إنتروبي من الدرجة (α)
$H_{\boldsymbol{\alpha}}^{\boldsymbol{w}}(\mathbf{x})$	رني إنتروبي من الدرجة (α) الموزون
$H_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$	الإنتروبي العامة من الدرجة (α, β)
$\mathbf{H}_{\alpha,\beta}^{w}$	الإنتروبي العامة الموزونة من الدرجة (α, β)
$\mathbf{t}_1$	نقطة البتر العليا
$\mathbf{t}_2$	نقطة البتر السفلى

الرمز	المعنى
$H_{\alpha,\beta}(\boldsymbol{x}; \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$	الإنتروبي العامة من الدرجة (α, β) للتوزيعات مضاعفة البتر
$H_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}\,;\mathbf{t})$	الإنتروبي العامة المتبقية من الدرجة (α, β)
$\bar{\mathbf{H}}_{\alpha,\beta}(x\,;t)$	الإنتروبي العامة السابقة من الدرجة (α, β)
$\mathbf{H}^{w}_{\alpha,\beta}(\boldsymbol{x}: \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$	الإنتروبي العامة الموزونة من الدرجة (α, β) للتوزيعات مضاعفة البتر
$\mathbf{g}(\mathbf{x}\vert\mathbf{t}_1 \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{t}_2)$	دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع المركب ويبل – باريتو مضاعف البتر
$\mathbf{G}(\mathbf{x}: \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\theta})$	الدالة التراكمية للتوزيع المركب ويبل – باريتو مضاعف البتر
$\mathbf{R}(\mathbf{x})$	دالة المعولية
MLE	التقديربطريقة الإمكان الأعظم
MOM	التقدير بطريقة العزوم
PEM	التقدير بطريقة المقدرات التجزيئية
MOM LB	التقدير بطريقة العزوم في حالة التحيز
MSE	متوسط مربعات الخطأ

المستخلص

هدفت الرسالة الى تقدير دالة الإنتروبي العامة الموزونة من الدرجة (α,β) لقياس التغير في عدم التأكد الموجود في التوزيع المركب ويبل- باريتو مضاعف البتر ذو ثلاث معلمات (λ,θ,δ) إذ تم في الجانب النظري دراسة الخصائص الرياضية للتوزيع المركب مضاعف البتر وطرائق تقدير معلماته ، أما في الجانب التجريبي فقد تم إستعمال المحاكاة بطريقة مونت كارلو لإختبار أفضلية طرائق التقديرإذ تم إختيار قيم مختلفة لمعلمتي الشكل (λ,δ) ومعلمة القياس (θ) وبواقع ستة نماذج وتمت المقارنة بين طرائق التقدير بإستعمال الرتب الكلية والجزئية المقابلة لمتوسط مربعات الخطأ ، إذ أظهرت طريقة الإمكان الأعظم أفضليتها على باقي الطرائق لأنها كانت تقابل أقل مجموع للرتب ولاسيما عند حجوم العينات الكبيرة ، وفي الجانب التطبيقي إستُعملت طريقة الإمكان الأعظم لتقدير دالة الإنتروبي العامة الموزونة من الدرجة (α,β) ودراسة التزايد والتناقص في هذه الدالة عند قيم مختلفة من البتر في عينة من (95) مشاهدة تمثل أوقات العمل لحين الفشل لجهاز الرنين المغناطيسي التابع لمستشفى الإمام الصادق في دائرة صحة بابل إذ أفضت الرسالة الى نتائج أهمها إستعمال طريقة الإمكان الأعظم لتقدير معلمات التوزيع المركب (ويبل – باريتو) مضاعف البتر عند حجوم العينات الكبيرة، وكذلك إزدياد دالة الإنتروبي بزيادة قيم البتر مما يجعل التوزيع أكثر ملائمة في تمثيل البيانات الحقيقية.

الفصل الأول

منهجية الرسالة

الـفصـــــــل الأول
منهجية الرسالة

1-1 المقدمة : Introduction

إزداد إهتمام الباحثين في العقود الأخيرة بدراسة عدم التأكد المرتبط بالدالة الإحتمالية والمسمى بالإنتروبي (entropy) والذي له العديد من التطبيقات في مختلف المجالات العلمية إذ إستُعمل مفهوم الإنتروبي في الكثيرمن فروع الإحصاء لأنه يوفر إطاراً عاماً يتعامل مع مجموعة متنوعة من المشاكل الإحصائية ففي التحليل الأحصائي عُرِف الإنتروبي على انه الطريقة التي يتم بها تقدير النتائج الأحتمالية بصورة أكثر عمومية(حسب مبدأ أعظم إنتروبي في التقدير) والذي ينتُج عنه توزيع إحتمالي جديد ضمن القيود المعروفة والمحددة والمعبّرعنها بمجموع أوتكامل الدالة والقيم المتوقعة فلو كان لدينا توزيعان إحتماليان تقريبا متساويان فإننا نُفضل التوزيع الأكثر إنتروبي بمعنى أن التوزيع الأقل إنتروبي يسمح بقيود إحتمالية أقل. **[العبيدي:2016]**

وكذلك للتخلص من التحيز في دالة الإنتروبي مع بعض التوزيعات فقد إستعمل الباحثون الإنتروبي الموزون **weighted entropy** والذي يعطي معلومات أكثردقة عن عدم اليقين الموجود في الدالة الإحتمالية .

ومن جانب آخرفإن دراسة أوقات الفشل المتتالية لبعض الأنظمة وخاصة إذا كانت البيانات واقعة بين نقطتين معلومتين يحتاج الى إجراء بتر مضاعف **(Double Truncated)** للبيانات التي تمثل ذلك النظام، وبما أن التوزيعات المركبة **(Compound Distributions)** تكون أكثر مرونة من التوزيعات القياسية سنستعمل في هذا الرسالة التوزيع المركب ويبل باريتو **(Weibull- Pareto)**، وبقدر تعلق الامر بوزارة الصحة وخاصةً فيما يتعلق بالبيانات المستخدمة في الرسالة تظهر الحاجة الى إستعمال البتر المضاعف إذ جرى في هذه الرسالة البتر المضاعف للتوزيع المركب ويبل - باريتو عند النقطة **(t_1)** من اليسار **(Left Truncated)** وعند النقطة **(t_2)** من اليمين **(Right Truncated)** وذلك لنمذجة بيانات الفشل لجهاز الرنين المغناطيسي **(MRI)** ولمعرفة عدم التأكد المتوقع في التوزيع المضاعف البتر سنستعمل مقياس الإنتروبي المعمم الموزون**weighted generalized entropy** من الدرجة **(α , β)** ولتسليط الضوء على محتوى هذه الرسالة فقد جاءت لتقدير دالة الإنتروبي العامة الموزونة من الدرجة **(α,β)** للتوزيع المركب ويبل- باريتو مضاعف البتر ولتحقيق الهدف المنشود من هذه الرسالة فقد قُسمِت الى أربعة فصول :

الفصل الأول وتضمن المقدمة والمشكلة وهدف الرسالة وإستعراض أهم الدراسات السابقة التي لها علاقة بموضوع الرسالة ،أما الفصل الثاني فقد تضمن الجانب النظري إذ تم التطرق لبعض المفاهيم الأساسية الخاصة بالإنتروبي مع توضيح لأهم التعميمات لدالة الإنتروبي وخصائصها مع التوزيعات مضاعفة البتر، وكذلك إشتقاق الصيغة الرياضية للتوزيع المركب ويبل - باريتو مضاعف البتر ودراسة خصائصه الإحصائية ، وتضمن أيضاً إستعمال أربع طرائق للتقدير وهي (طريقة الإمكان الأعظم ، طريقة العزوم ، طريقة المقدرات التجزيئية ،و طريقة العزوم في حالة التحيز) وكذلك تم توضيح الصيغة النهائية لدالة الإنتروبي العامة الموزونة لتوزيع ويبل- باريتو مضاعف البتر . وخُصص الفصل الثالث للجانبين التجريبي والتطبيقي، ففي الجانب التجريبي تم توظيف إسلوب المحاكاة لتقدير معلمات التوزيع المركب ويبل - باريتو مضاعف البتر والمقارنة بين هذه المقدرات بإستعمال متوسط مربعات الخطأ **(MSE)** وإختيار الطريقة الأفضل في التقدير بإستعمال الرتب الجزئية والكلية، وإستعمال هذه المقدرات لتقدير دالة الإنتروبي العامة الموزونة ولكل فترة من فترات البتر ، أما في الجانب التطبيقي فقد تضمن تطبيق التوزيع المركب (ويبل- باريتو) قبل البتر وبعد البتر المضاعف على البيانات الحقيقية، إذ تم إستعمال بَعض معايير المفاضلة لتحديد التوزيع الأفضل الذي يمثل البيانات المدروسة ومن ثم تقدير دالة الإنتروبي العامة الموزونة لها . أما الفصل الرابع فقد شمِل أهم الأستنتاجات والتوصيات التي توصل اليها الباحث بالإعتماد على الجانبين التجريبي والتطبيقي وقد اُلحِقت الرسالة بمجوعة من الملاحِق .

1-2 مشكلة الرسالة Problem of the thesis

تكمن المشكلة في ضرورة إجراء البتر المضاعف للتوزيع الإحتمالي الذي يمثل البيانات المدروسة وخاصة عند دراسة وتحليل جزء من هذه البيانات بعد إستبعاد بعض القيم المتطرفة أو إقتطاع البيانات ضمن فترة محددة، وكذلك لمعرفة ولتحديد التغير الحاصل في عدم التأكد (الإنتروبي) في النظام بصورة دقيقة من حيث الزيادة والنقصان فإن الأمر يتطلب تطبيق مقياس الإنتروبي العامة الموزونة الذي يكون أكثر حساسية لأشكال مختلفة من التوزيعات لوجود المعلمات المضافة لدالة الإنتروبي .

1-3 هدف الرسالة Aim of the thesis:

تهدف الرسالة الى تحقيق الأمورالآتية :

1- إقتراح التوزيع المركب ويبل –باريتو مضاعف البتر (**Double Truncated Weibull Pareto Distribution**) ودراسة خصائصه .

2- تقدير معلمات التوزيع المركب مضاعف البتربإستعمال أربع طرائق للتقدير وهي (طريقة الإمكان الأعظم ، طريقة العزوم ، طريقة المقدرات التجزيئية ، طريقة العزوم في حالة التحيز) والحصول على أفضل طريقة من طرائق التقدير بإستعمال الرتب المقابلة لاقل متوسط مربعات الخطأ وكما موضح في جانب المحاكاة **(simulation)**.

3- ومن ثم إستعمال هذه المقدرات لتقدير دالة الإنتروبي العامة الموزونة من الدرجة(α , β) لمعرفة التغير الحاصل في عدم التأكد الموجود في التوزيع المركب المضاعف البترعند تغير قيم البتر .

1-4 الإستعراض المرجعي Review of literature

تُعد دالة شانون إنتروبي **(Shannon Entropy)** واحدة من أهم المقاييس لعدم التأكد التي وضعها العالم شانون عام **(1948)** ، وقد إستعمل الباحثون دالة الإنتروبي في العديد من دراساتهم سواء مع التوزيعات المبتورة وغير المبتورة وفيما يأتي أهم الدراسات التي لها علاقة بموضوع الرسالة :

- **في عام (1988) إستعمل كلا من (Dallas & Winge)** البتر المضاعف لتوزيع ويبل وذلك لدراسة الجودة أوالموثوقية عند الفترة **(L,T)** إذ وضّح الباحثان بعض الخصائص الأحصائية للتوزيع المبتور كالعزم من الدرجة **(r^{th})** والوسط الحسابي والتباين وإستعمل الباحثان طريقة الإمكان الأعظم لتقدير معلمات التوزيع المبتور.

[Dallas & Winge: 1988]

- **في عام (1993) قدّر الباحث (Shalaby)** دالة المعولية لتوزيع ويبل مضاعف البتر عند النقطة **(t_1)** من اليسار وعند النقطة **(t_2)** من اليمين وبإستعمال طريقة بيز وعند دالة خسارة تربيعية . **[Shalaby:1993]**
- **في عام (1996) نشر(Ebrahimi)** دراسة وضّح فيها إستعمال دالة شانون إنتروبي لقياس عدم التأكد في العمرالمتبقي من وقت الحياة ، (**Residual life time**) إذ بيّن الباحث أهميتها في دراسة خصائص توزيعات الفشل ولاسيما عند دراسة التناقص في دالة المعولية أوالتزايد في دالة المخاطرة **[Ebrahimi:1996]**

- **في عام(2000) قدّم الباحثان (Asadi & Ebrahimi)** دراسة تناولت خصائص جديدة لمقياس عدم التأكد للعمر المتبقي مع الإحصاءات المرتبة كالتزايد والتناقص وكذلك وضح الباحثان خصائص الإنتروبي المتبقية لتوزيع باريتو المعمم.

[Asadi & Ebrahimi:2000]

- **في عام (2002) قدم كلا من (DI Crescenzo &Longobardl)** دراسة لقياس عدم التأكد في الوقت السابق للنظام ولغاية الزمن (t) والذي يمثل زمن فشل النظام إذ سميت بالإنتروبي الماضية **(past entropy)** وكذلك وضح الباحثان العلاقة مع الإنتروبي المتبقة **(Residual entropy)** من حيث الرتابة والتزايد والتناقص .

[Di Crescenzo, & Longobardi:2002]

- **في عام (2007) وضح الباحثان (DI Crescenzo &Longobardl)** بعض الأمثلة التي تبين تحيز دالة الإنتروبي لذا إقترح الباحثان إستعمال دالة الإنتروبي الموزونة **(weighted entropy)** للتخلص من التحيز والحصول على معلومات دقيقة إذ تم توضيح الصيغة الموزونة للإنتروبي الماضية والإنتروبي المتبقية وكذلك تم توضيح دالة الإنتروبي الموزونة لبعض التوزيعات كالتوزيع الأسي والتوزيع المنتظم وتوزيع كاما وبيتا . **[Di Crescenzo & Longobardi :2007]**

- **في عام (2009) قام الباحثان (Baig & Dar)** بتوضيح مفهوم الإنتروبي العامة من الدرجة **(α,β)** للعمر المتبقي من توزيعات الحياة *، **Residual Generalized Entropy** وقد بين الباحثان خصائص الإنتروبي العامة مع بعض التوزيعات كالتوزيع الأسي وتوزيع باريتو والتوزيع المنتظم [**Baig & Dar:2009]**

- **وفي عام (2009) نفسة قام الباحثان (Jeevanand & Sathar)** بتقدير الإنتروبي المتبقية **(residual entropy)** للتوزيع الأسي وبإستعمال طريقتين للتقدير الأولى طريقة التقديرالبيزي إذ إفترض الباحثان أن التوزيع الأولي يتبع توزيع كاما وبإستعمال دالة الخسارة التربيعية والثانية طريقة الإمكان الأعظم إذ أثبتت نتائج المحاكاة أن طريقة بيز في التقدير كانت أفضل.

[Jeevanand & Sathar:2009]

* توزيعات الحياة: هي التوزيعات التي تحاكي معدل الفشل في النظام [16].

- **في عام (2011) قام الباحثان (Misagh &Yari)** بدراسة خصائص الفترة الإنتروبية الموزونة لدالة شانون مع التوزيعات مضاعفة البتر بصورة عامة وعدّ الباحثان هذه الدراسة هي مكملة لما نشره **(DI Crescenzo)** عام **(2007)** وقد وضح الباحثان صيغة الإنتروبي الموزون للتوزيع الاسي والتوزيع المنتظم .

[Misagh &Yari:2011]

- **في عام (2015) وضّح الباحثان (Okasha & Matter)** دالة البقاء لتوزيع **(Burr Type XII)** ذي ثلاث معالم إذ إستعمل الباحثان بيانات تمثل فترة البقاء لمرضى سرطان الثدي في قطاع غزة ومن ثم قام الباحثان بدراسة دالة البقاء للتوزيع نفسه ولكن بعد بتر القيم المتطرفة من جهة اليسار عند النقطة **(a)** ومن جهة اليمين عند النقطة **(b)** وقد توصل الباحثان الى أن متوسط الوقت المتوقع للبقاء عند إستعمال التوزيع المضاعف البتر يعطي نتائج اكثر دقة من التوزيع الأصلي . **[Okasha & Matter :2015]**

- **في عام(2016) قام الباحث (Salah)** بدراسة البترالمضاعف لتوزيع فريچت **(Fréchet)** عند الفترة **(c ,d)** إذ وضح الباحث الدالة التراكمية لتوزيع فريجت المبتور ودالة الخسارة والعزوم من الدرجة **(r^{th})** والإلتواء والتفلطح ودالة شانون إنتروبي وإستعمل الباحث طريقة الإمكان الأعظم وطريقة العزوم وطريقة المقدرات التجزيئية وطريقة المربعات الصغرى وطريقة المربعات الصغرى الموزونة لتقدير المعلمات وعن طريق المحاكاة توصل الباحث الى أفضلية طريقة المقدرات التجزيئية في حالة العينات الصغيرة وفي حالة العينات الكبيرة فإن طريقة الإمكان الأعظم كانت أفضل .

[Abid, S.H:2016]

- **في عام (2017) اقترح الباحثان (Nourbakhsh & &Yari)** إستعمال الوزن لدالة ريني إنتروبي **(weighted Renyi's entropy)** التي تعد من التعميمات المهمة لدالة شانون إذ ناقش الباحثان بعض الخصائص لدالة ريني أنتروبي المتبقية والماضية الموزونة للتوزيعات المبتورة من جهة اليسار أو جهة اليمين.

[Nourbakhsh & Yari: 2017]

- **في عام (2018) قام الباحث (Aydin)** بدراسة البتر المضاعف لتوزيع معكوس ويبل الموسع عند الفترة **(t_0,t_1)** إذ وضح الباحث الدالة المولدة للعزوم والوسط الحسابي والتباين وإستعمل الباحث طريقة الإمكان الأعظم وطريقة المربعات الصغرى وطريقة المربعات

الصغرى الموزونة لتقدير معلمات التوزيع المبتور وعن طريق المحاكاة توصل الباحث الى أفضلية طريقة الإمكان الأعظم في التقدير . **[Aydin :2018]**

- **في عام (2019) قام كلا من (Akomolafe &Maradesa)** بنشر دراسة تضمنت البتر المضاعف للتوزيع المركب اسي باريتو (Exponential-Pareto) عند النقطة **(A)** من اليسار وعند النقطة **(B)** من اليمين إذ تم إثبات خصائص التوزيع الجديد كالوسط الحسابي والتباين والعزوم ودالة ريني إنتروبي وقد إستعمل الباحثان طريقة الإمكان الأعظم لتقدير معلمات التوزيع المبتور .

[Akomolafe &Maradesa:2019]

- **وفي العام نفسه قام كلا من (Iqbal)** وأخرون بدراسة البترالمضاعف لتوزيع فريچت المحول **(Transmuted Fréchet)** عند الفترة **(g,m)** إذ قام الباحثون بتوضيح بعض الخصائص الإحصائية فضلاًعن دالة المعولية ودالة ريني إنتروبي والإحصاءات المرتبة للتوزيع المبتور وإستعمل الباحثون طريقة الإمكان الأعظم لتقدير المعلمات وأثبتت نتائج المحاكاة ان توزيع فرچت المحول المضاعف البتر يكون أكثر مرونة من توزيع فريچت ومن توزيع فريچت المحول غير مبتور . **[Iqbal & et al :2019]**

- **كذلك في عام (2019) قام الباحثان (Singh & Kundu)** بإعمام النتائج التي تم التوصل اليها (لدالة ريني الموزونة مع التوزيعات المبتورة من جهة واحدة) وإستعمالها مع التوزيعات مضاعفة البتر لدراسة المعولية أولتحليل دالة البقاء وقد بين الباحثان بإن دالة ريني إنتروبي الموزونة **(weighted Renyi's entropy)** توضح معلومات كمية ونوعيه عن طبيعة النظام ولاسيما حالات الفشل التي تكون بين نقطتين و قد إستعمل الباحثان المحاكاة لتوضيح اداء التقديرات للمقياس الجديد المقترح مع التوزيع الأسي مضاعف البتر . **[Singh & Kundu: 2019]**

- **في عام (2020) قام الباحثان (Hassaneen & Kareema)** ببناء إنموذج إحتمالي مركب يتكون من توب ليون المعمم والتوزيع الاسي (**generalization Topp Leone-Exponential**) إذ وضح الباحثان الخصائص الأحصائية للتوزيع الجديد وإستعمل الباحثان طريقة الإمكان الأعظم وطريقة العزوم لتقدير المعلمات وكذلك عمل الباحثان على توضيح خصائص التوزيع الجديد في حالة البتر من جهة اليسار وفي حالة البتر من جهة اليمين وفي حالة البتر المضاعف.

- **وفي عام (2020) قام الباحثان (Singh & Kundu) أيضاً** بنشر دراسة تضمنت إستعمال مقياس عدم التأكد مع التوزيعات مضاعفة البتر والمسمى بالإنتروبي العامة الموزونة **(weighted generalized entropy)** ،إذ قام الباحثان بإثبات خصائص الإنتروبي العامة الموزونة وكذلك إستعمل المحاكاة لتوضيح أداء التقديرات للإنتروبي العامة الموزونة مع التوزيع الأسي مضاعف البتر إذ أثبتت النتائج ان مقدار التحيز ومتوسط مربعت الخطأ للتقديرات يقل بزيادة حجم العينة حتى تكون غير متحيزة في حجوم العينات الكبيرة وكذلك إستعمل الباحثان الإنتروبي العامة الموزونة لدراسة بيانات حقيقية تمثل الأعطال المتلاحقة لنظام التبريد في الطائرات .

[Singh & Kundu:2020]

- **في عام (2021) قام الباحثان (Nanda & Chowdhury)** بعمل مراجعة للبحوث الخاصة بالانتروبي وأهم إعماماتها خلال العقود السبعة الأخيرة حيث أحصى الباحثان (84) دراسة منشورة بعد العام (2000) وركز الباحثان في هذه الدراسة على استخدام دالة الإنتروبي في مجال الإحصاء وخاصة في الاستدلال الاحصائي .

(Nanda & Chowdhury:2021)

نلحظ من الدراسات السابقة وعلى حد علم الباحث ندرة الدراسات العربية التي تناولت الإنتروبي الموزون وأن أكثرية الدراسات الأجنبية قد تناولت دالة الإنتروبي العامة الموزونة مع التوزيع الأسي مضاعف البتر فقط وبمعلمة واحدة ، وكذلك لم يتم التطرق الى البتر المضاعف للتوزيع المركب (ويبل – باريتو) لذا فإن مايميز هذا الدراسة هو إستعمال دالة الإنتروبي العامة الموزونة **(weighted Generalized Entropy)** من الدرجة **(α,β)** ، للتوزيع المركب ويبل باريتو مضاعف البتر **Double Truncated Weibull Pareto Distribution** ذي ثلاث معالم وهي معلمة القياس **(θ)** ومعلمتي الشكل **(δ,λ)** وقد تم تقدير هذه المعلمات بإستعمال أربع طرائق للتقدير ومن ثم تم إستعمال هذه التقديرات لايجاد دالة الإنتروبي العامة الموزونة للتوزيع المركب المضاعف المبتور والتي سيرمز لها **(WGE)** وذلك لدراسة التغير في عدم التأكد(الإنتروبي) عند اختلاف قيم البتر إذ تم تطبيق الدراسة على البيانات الحقيقية ، وبذلك تكون هذه الرسالة إستكمالاً فضلاًعن الجهود العلمية التي بذلها الباحثون وكما تم عرضه في الدراسات السابقة المذكورة آنفاً.

الفصل الثاني

الجانب النظري

2-1 تمهيد Preface:

يتضمن هذا الفصل توضيح لمفهوم الإنتروبي **(Entropy)** مع بيان بعض خصائصه ولاسيما مع التوزيعات المبتورة ، وبما ان التوزيعات المركبة **(Compound Distribution)** تكون أكثر مرونة من التوزيعات القياسية في نمذجة الظواهر المختلفة ولاسيما فيما يتعلق في نمذجة بيانات الفشل وتحليل أوقات البقاء لذا سنتناول في هذا الفصل البتر المضاعف لتوزيع مركب يتكون من (ويبل – باريتو) وذلك لنمذجة البيانات الواقعة بين نقطتي فشل إذ يكون التوزيع المقترح **(Double Truncated Weibull Pareto Distribution)** وسنرمز له اختصارا **(DTWPD)** مع بيان خصائص التوزيع الجديد كالوسط الحسابي والتباين ودالة المعولية مع توضيح لطرائق التقدير المستعملة في تقدير معالم التوزيع المركب المبتور وهي (طريقة الامكان الأعظم **(MLE)**، طريقة العزوم **(MOM)**، طريقة المقدرات التجزيئية **(PEM)**، وطريقة العزوم في حالة التحيز MOM-LB) ، ومن جانبٍ آخر فان حساب الإنتروبي يُعد من التقنيات الفعالة والمهمة لمعرفة كمية المعلومات المتوفرة في الدالة الإحتمالية ، لذلك فقد تم حساب الإنتروبي العام الموزون من الدرجة **(α,β)** لقياس التغير الحاصل في عدم التأكد الموجود في التوزيع المقترح في الدراسة .

2-2 مفاهيم أساسية (Basic concepts) .

في هذه الفقرة سنوضح خلاصة مركزة عن بعض المفاهيم الأساسية التي تخص البحث مع بيان الصيغ الرياضية لكل نوع وهذه المفاهيم هي كالآتي :

2-2-1 بتر التوزيعات (Truncated Distributions) :

قد يتطلب الامر احيانا وحسب طبيعة البيانات الى بتر التوزيع وذلك لوجود بعض المشاهدات المتطرفة إذ نستنتج توزيعاً جديداً من التوزيع الأصلي له خواص الدالة الإحتمالية وإن عينة البحث ستأخذ التوزيع المبتورفقط ، لذا فان التوزيع المبتورهو توزيع إحتمالي يمتلك خصائص جديدة وهو جزء من التوزيع غير المبتور وإن عملية البتر تكون من طرف واحد أو من طرفين **[الأمير:2012]**

2-2-2 أنواع البتر Types of Truncation :

1- بتر من اليمين واليسار Left and Right Truncation :

يستعمل البتر من الطرفين (اليمين واليسار) في حالة إذا كانت البيانات المطلوب دراستها واقعة بين نقطتين ثابتتين وهو الحالة العامة للبتر فإذا كانت (x) متغيراً عشوائياً يمتلك دالة

إحتمالية $f(x)$ وان $x \in R$ ، Ω يمثل فضاء العينة لكل القيم الممكنة لـ(x)، Ω^* يمثل فضاء العينة للأنموذج المبتور ضمن الفترة (a, b) وإن أي قيمة خارج الفترة تُهمل $\Omega^* = [\, x : a \le x \le b \,]$ فان الصيغة الرياضية للبتر.

$$f(x|a \le x \le b) = \frac{f(x)}{F(b) - F(a)} \qquad a, b \in \Omega \qquad\qquad (2-1)$$

ولاثبات الصيغة آنفاً نفرض أن $[a,b]$عددان معرفان في Ω ، ويمثلان النقاط التي تم عندها بتر التوزيع ،و لتكن c ثابت إذ أن $c > 0$:

$$\int_a^b c\, f(x)dx = c\int_a^b f(x)dx = c\left(\int_{-\infty}^b f(x)dx - \int_{-\infty}^a f(x)dx \right) = c\big(F(b) - F(a)\big)$$

الدالة المبتورة تحقق خواص الدوال الإحتمالية لذا يجب ان يكون تكامل الدالة يساوي واحداً .

$$c\int_a^b f(x)dx = 1$$

$$c\big(F(b) - F(a)\big) = 1$$

$$c = \big(F(b) - F(a)\big)^{-1}$$

$$f(x|a \le x \le b) = \big(F(b) - F(a)\big)^{-1} f(x)$$

إذن الدالة الجديدة هي عبارة عن الدالة الاصلية مقسومة على إحتمال الفترة (a, b).

[الأمير:2012]

2- البترمن طرف واحد

a- البتر من اليمين Right Truncated:

غالبا مايستعمل الباحثون اسلوب البتر من اليمين ولاسيما إذا كانت البيانات تمتلك حداً أعلى لايمكن تجاوزه كما في شركات التأمين مثلاً اذ توجد قيمة عليا للتأمين لايمكن تجاوزها كذلك يستعمل البتر من جهة اليمين عند توقف التجربة عند حد معين وهكذا فإذا كان (X) متغيرعشوائي قيمهُ معرفة على الفترة $(-\infty, b]$ إذ ان b تمثل النقطة التي يتم عندها بتر الدالة من الأعلى وأي قيمة بعد (b) تهمل فعند إجراء الخطوات السابقة نفسها نتوصل الى:

$$f^*(x) = \big(F(b) - F(-\infty)\big)^{-1}$$

$$f\,(x|-\infty \le x \le b) = \frac{f(x)}{F(b)} \qquad b \in \Omega \qquad\qquad (2-2)$$

وذلك لان $F(-\infty) = 0$

[الأمير:2012]

b- البتر من اليسار Left Truncated:

نستعمل البتر من جهة اليسار عندما تبدأ البيانات عند نقطة ثابتة معينة وغالبا مايتم البتر من اليسار عند دراسة نماذج المعولية إذ يتم بتر القيم السالبة للإنموذج ،فإذا كان (x) متغيرعشوائي قيمه معرفة على الفترة([a,∞ إذ أن أي قيمة قبل a تهمل وهي تمثل النقطة التي يتم عندها بتر الدالة من الأسفل وعند إجراء الخطوات السابقة نفسها نتوصل الى:

$$\mathbf{f}\left((\mathbf{x}|\boldsymbol{a} \le \boldsymbol{x} \le \infty)\right) = \left(\boldsymbol{F}(\infty) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{a})\right)^{-\mathbf{1}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

$$\mathbf{f}^{*}(\mathbf{x}) = \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\mathbf{1}-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a})} \qquad (2-3)$$

وذلك لأن : $(\mathbf{F}(\infty) = \mathbf{1})$

[الأمير:2012]

2-2-3 مفهوم الإنتروبي Concept Entropy :

إن أو ل من إستعمل مصطلح الإنتروبي **(Rudolf Clausius)** عام **(1864)** إقترح دالة لقياس بعض الاحداث الكلية ولم يعتمد على الأُسُس الإحتمالية لذا سميت بالإنتروبي التقليدية **(Classical Entropy)** وبعد ثماني سنوات **(1872)** قدم **(Boltzman)** مقياساً أو مفهوماً للإنتروبي في الديناميكية الحرارية، وفي عام **(1948)** عرف الباحث **(Claude Shannon)** دالة الإنتروبي كمقياس لعدم التأكد **(uncertainty)** إذ وضع إنموذج رياضي لقياس كمية المعلومات الموجودة في الرسائل المشفرة في مجال الإتصالات معتمدا على أُسس النظرية الإحتمالية ومنطلقا من حقيقة مفادها إن كمية المعلومات تكون مساوية لإزالة عدم التأكد وقد سمي هذا النوع **(Shannon Entropy)** لذا تُعد نظرية المعلومات **(Information theory)** فرعا من فروع النظرية الإحتمالية. **[باسم شليبة :2013]**

اما **التعريف الاحصائي للإنتروبي** يعرف الإنتروبي على انه التقنية التي يمكن إستعمالها لتقدير النتائج الإحتمالية بشكل أكثر عمومية بعبارة أُخرى يُعد الإنتروبي مقياسا لكمية المعلومات **(Information)** التي توفرها الدالة الإحتمالية . **[اسيل صالح :2012]**

وفي دراستنا سنهتم بالنوع الثاني من الإنتروبي الذي يعتمد على أُسُس النظرية الإحتمالية، إذ سيتم عرض دالة شانون وأهم الإعمامات لدالة شانون وهي دالة ريني **(Renyi's Entropy)** من الدرجة **(α)** والإنتروبي العام **(Generalized Entropy)** من الدرجة **(α ,β)**.

2-2-4 دالة انتروبي شانون (Shannon Entropy) :

لقياس كمية المعلومات الواصلة في النظام لمشاهدة واحدة فقط من المتغير العشوائي **(x)**
إستعمل (Shannon) لوغاريتم مقلوب الاحتمال (أي سالب لوغاريتم الاحتمال) :-

$$\mathbf{I(x_i) = \log\left(\frac{1}{P_i}\right) = -\log(P_i)} \qquad (2\text{-}4)$$

[باسم شليبة :2013]

(p_i) هي عبارة عن الإحتمال للمشاهدة **(x_i)** ، وان **(i=1,2,……..n)**، **(log= log $_2$)** إذ وضح **(Shannon)** بإن الصيغة آنفاً هي الوحيدة التي تحقق الشروط الآنية **:**

1- إن قيمة المعلومات لمتغيرين هي أعلى من قيمة المعلومات لمتغير واحد.

2- إن قيمة المعلومات لأي متغير هي قيمة غير سالبة **$I(x_i) \geq 0$** .

3- ان قيمة المعلومات لمتغيرين مستقلين هي عبارة عن حاصل جمع **I (x ,y) = I(x)+I(y).**

وبفرض توفر دالة الكتلة الإحتمالية **Probability mass function** للمتغير العشوائي المتقطع (X) إذا أن $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, $P_i \geq 0$ ومن ثّم يمكن كتابة دالـة **(Shannon Entropy)** كالاتي:

$$\mathbf{H_{(x)} = H_n(P_1, P_2, \ldots\ldots, P_n) = E[I(x_i)]}$$

$$\mathbf{H_{(x)} = E[-\log(P_i)] = -\sum_{i=1}^{n} P_i \log(P_i)} \qquad (2-5)$$

وفي حالة المتغيرات المستمرة تكون دالة شانون كالاتي

$$\mathbf{H_{(x)} = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log f(x) dx} \qquad (2\text{-}6)$$

[Misagh and Yari: 2011] ، [باسم شليبة :2013]

2-2-5خصائص دالة إنتروبي شانون (Properties of Shannon Entropy):

تتميز دالة إنتروبي شانون ببعض الخصائص أهمها :

1- الإنتروبي كمية موجبة دائما **$H_{(x)} \geq 0$** .

2- الإنتروبي للاحداث المستقلة عبارة عن حاصل جمع **H(x ,y) =H(x)+H(y).**

3- إذا كانت **(p=0)** أو **(p=1)** فان الإنتروبي يساوي صفراً أي أن الإحتمال المستحيل لايحتوي على إنتروبي (عدم اليقين) وكذلك الإحتمال المؤكد لايحتوي على إنتروبي .

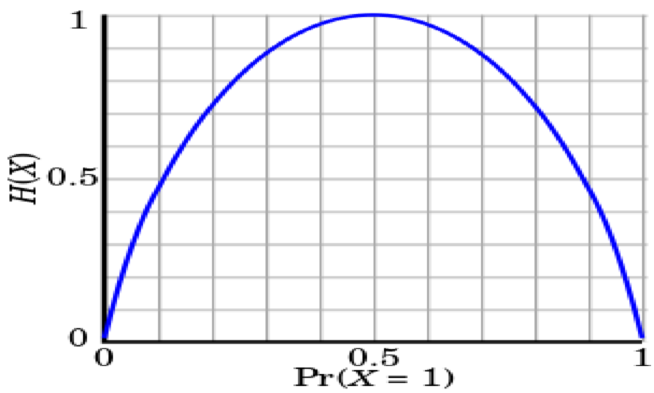
4- اكبـــر قيمـــة لدالـــة الإنتروبـــي تكـــون فـــي الإحتمـــالات المتســـاوية أي عنـــدما
$$p = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$$

5- قيمة الإنتروبي تكون محصورة بين $0 \leq H(n) \leq \log(n)$ وتحصل المساواة مع الصفر في حالـة إذا كـان **(p=0)** أو **(p=1)** وتحصـل المسـاواة مـع **log (n)** فـي حالـة إذا كانـت جميع الاحتمالات عبارة $(\frac{1}{n})$

6- إذا كانت c ثابت فان الإنتروبي لحاصل ضرب المتغير في الثابت يكون كما يأتي :
$$H(cx) = \log|c| + H(x)$$

7- وكذلك الإنتروبي لحاصل جمع المتغيرمع الثابت (c): **H(x + c) = H(x)**.

[Misagh and Yari: 2011] ، [بلعوط: 2016]



شكل (2-1) يوضح بعض خصائص دالة الإنتروبي [23] .

2-2-6 الإنتروبي الموزون (Weighted Entropy) :

لنفرض ان (x) متغير عشوائي يسلك وفق دالة إحتمالية معينة وأن **(c)** هو ثابت. ولنفرض **(y)** متغيرعشوائي ايضاً إذ ان **(y=x +c)** وإعتماداًعلى الخاصية رقم **(7)** التي مرّ ذكرها سابقاً فإن:

$$H(y) = H(x + c) \Rightarrow H(y) = H(x)$$

نلحظ أن الإنتروبي **(x)** تكون مساوية للإنتروبي **(y)** وكذلك لو فرضنا أن المتغير العشوائي (x) يتـوزع وفقـا للتوزيـع المنـتظم بـالفترة **(a,b)** فـان الإنتروبـي يكـون ثابتـا ايضـا فـي الفتـرة **(a+ c , b +c)** أي أن دالة الإنتروبي تبقى ثابتة عند إضافة ثابت وللتعرف على أمثلة إكثر يمكن مراجعة المصادر **[35], [26] ,[17],** ومما تقدم نجد ان مقياس الإنتروبي في هذه الحالات قد يكون غير مرغوب فيه ولاسيما عند دراسة المعولية والدراسات الطبية والبايولوجية لذا فقد

إقترح كلا من (Belis and Guiasu) عام (1968) مفهوم الإنتروبي الموزون وتبعهم (Di Crescenzo and Longobardi) عام (2007) الذي وضح مفهوم الوزن لمختلف دوال الإنتروبي . وعلى فرض إن (x) يمثل متغير عشوائي مستمر يمتلك دالة إحتمالية (pdf) فان الإنتروبي الموزون لدالة شانون تكون كما يأتي:

$$\mathbf{H^{w}}_{\mathbf{x}} = -\mathbf{E}[\mathbf{x}\mathbf{log}\,\mathbf{f}(\mathbf{x})] = -\int_{0}^{\infty} \mathbf{x}\,\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{logf}(\mathbf{x})\,\,\mathbf{dx} \qquad (2-7)$$

.[Di Crescenzo. and Longobardi:2007]

2-2-7 ريني إنتروبي Renyi's Entropy :

في عام (1961) نشر العالم (Alfred Renyi) في مؤتمربركلي الرابع (fourth Berkeley Symposium) للرياضيات والاحصاء والاحتمالات، إنموذج آخرللإنتروبي وهو الى حد ما عبارة عن إعمام لإنموذج شانون وذلك بإضافة معلمة الى دالة شانون والصيغة الرياضية تكون كالاتي:

$$\mathbf{H}_{\alpha}\,(\mathbf{X}) = -\mathbf{log}\,(\mathbf{Ren}_{\alpha}(\mathbf{X}))$$

$$\mathbf{Ren}_{\alpha}\,(\mathbf{X}) = \left(\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} (\mathbf{P_i})^{\alpha}\right)^{\frac{\mathbf{1}}{\alpha-\mathbf{1}}}$$

$$\mathbf{H}_{\alpha}\,(\mathbf{X}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}-\alpha}\mathbf{log}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} (\mathbf{P_i})^{\alpha} \qquad , \quad \mathbf{0} < \alpha \neq \mathbf{1} \qquad (2-8)$$

وفي حالة المتغيرات المستمرة تكون دالة (**Renyi's Entropy**):

$$\mathbf{H}_{\alpha}\,(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}-\alpha}\mathbf{log}\int_{0}^{\infty} (\mathbf{f}(\mathbf{x}))^{\alpha}\mathbf{dx} \qquad ;\mathbf{for}\ \mathbf{0} < \alpha \neq \mathbf{1} \qquad (\mathbf{2-9})$$

إذ ان (α) تمثل المعلمة المضافة لدالة شانون وتسمى الصيغ (2-8), (2-9) المذكورة آنفاً (**Renyi's entropy of order α**).

[Rényi.:1961] , [Nanda, and Chowdhury:2021]

[Fehr and Berens: 2014]

2-2-8 خصائص دالة ريني إنتروبي (Properties of Renyi's Entropy)

تشترك دالة ريني مع أهم الخصائص لدالة شانون إذ انها أكبر من الصفر وأنها تبلغ اعلى قيمة لها في الاحتمالات المتساوية وكذلك في حالة المتغيرات المستقلة فإنها عبارة عن حاصل جمع ومن أهم مميزات دالة ريني مايأتي :

1- إنها دالة ناتجة بالإضافة (أي بإضافة معلمة لدالة شانون) .

[Amigó & et al : 2018]

2- عندما تكون $(\alpha = 1)$ فإننا نحصل على دالة شانون انتروبي ويمكن إثبات ذلك بإستعمال قاعدة لوبيتال وكالاتي:

$$\lim_{\alpha \to 1} H_\alpha(x) = \frac{1}{1-\alpha} log \sum_{i=1}^{n} (P_i)^\alpha$$

عند تطبيق الغاية فان الناتج يكون $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ لذا نستعمل قاعدة لوبيتال :

$$\lim_{\alpha \to 1} H_\alpha(x) = -\frac{\sum_{i=1}^{n} (P_i)^\alpha log(P_i)}{\sum_{i=1}^{n} (P_i)^\alpha}$$

$$\lim_{\alpha \to 1} H_\alpha(x) = -\sum_{i=1}^{n} P_i \, log(P_i)$$

$$\lim_{\alpha \to 1} H_\alpha(x) = H(x)$$

[Macedo: 2013]

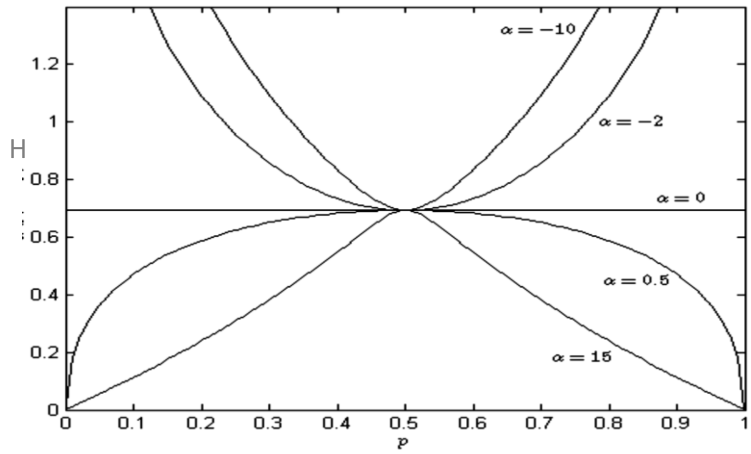
3- دالة ريني هي عبارة عن متوسط الاحتمالات مرفوعة للقوة (α) بدلا من متوسط اللوغارتم الموضح في دالة شانون .

4- عند إستعمال صيغة الوزن التي تم توضيحها سابقا في المعادلة (2-7) فاننا نحصل دالة ريني إنتروبي الموزونة **(weighted Renyi's entropy)** إذ تكون الصيغة كما يأتي.

$$H_\alpha^w(x) = \frac{1}{1-\alpha} \log \int_0^\infty \left(x\, f(x)\right)^\alpha dx \qquad ; for 0 < \alpha \neq 1 \qquad (2.10)$$

[Nourbakhsh, &Yari : 2017]

5- إن قيمة المعلمة (α) عندما تكون سالبة فان شكل دالة ريني لايكون محدباً كما في دالة شانون لذا يجب ان تكون قيمة (α) موجبة دائما حتى يكون مقياس (ريني أنتروبي) صحيحا كما موضحة بالشكل الآتي:



شكل (2-2) يوضح دالة ريني مع قيم مختلفة لـ (α) وكما هو واضح من الشكل ان دالة ريني إنتروبي لاتكون صالحة عندما تأخذ (α) قيم سالبة [23]

2.2.9 الإنتروبي العامة Generalized Entropy:

قدم **(Varma entropy)** **(1967)** واحدة من أهم الإعمامات لدالة ريني إنتروبي (**Renyi entropy**) والتي تستند الى إضافة معلمتين الى دالة شانون انتروبي (**Shannon Entropy**) فإذاكانت المعلمات(**α, β**) فتسمى دالة الإنتروبي في هذه الحالة بدالة الإنتروبي العامة. **generalized entropy of order (α, β).**

$$\mathbf{H_{\alpha,\beta}\ (x) = \frac{1}{\beta-\alpha}\log\int_0^\infty (\ f(x))^{\alpha+\beta-1}dx\ \ ;for\ \ \beta-1\ <\alpha<\beta\,,\beta\geq 1}$$

$$\mathbf{\alpha+\beta<\ (>)2}$$

(2-11)

وتُعد الإنتروبي العامة (**generalized entropy**) واحدة من أهم المقاييس لعدم التأكد والتي تكون أكثر مرونة وأكثر حساسية لأشكال مختلفة من التوزيعات لوجود المعلمات ،إذ يتم مراعاة بعض العوامل غير ملموسة والتي لايمكن اخذها بنظر الإعتبار في غياب المعلمات. والإنتروبي المعممة تستعمل في مختلف المجالات كالفيزياء والالكترونيات والهندسة ، وإن من أهم خصائص الإنتروبي العامة انه عندما **(β=1)** فأننا نحصل على دالة ريني إنتروبي التي تم توضيحها في المعادلة (2-9) وكذلك عند اضافة المعامل (x) الى الطرف الايمن من المعادلة (2-11) نحصل على الإنتروبي العامة الموزونة **weighted Generalized Entropy**

$$\mathbf{H^{w}_{\alpha,\beta}\ (x) = \frac{1}{\beta-\alpha}\log\int_0^\infty (\ xf(x))^{\alpha+\beta-1}dx\ \ ;for\ \ \beta-1\ <\alpha<\beta,\beta\geq 1}$$

$$\mathbf{\alpha+\beta<\ (>)2}$$

(2-12)

[Kundu & Singh: 2020]

2-2-10 خصائص الإنتروبي العامة للتوزيعات المبتورة :

1- إذا كان (x) متغير عشوائي له دالة إحتمالية $\mathbf{f(x|t_1 \le x \le t_2)} = \frac{f(x)}{F(t_2)-F(t_1)}$ فأن دالة الإنتروبي تسمى بدالة الإنتروبي العامة للتوزيعات مضاعفة البتر (**Double Truncated generalized entropy**) والتي تستعمل لقياس عدم التأكد بين نقطتين متتاليتين ويرمز لها بالرمز ($\mathbf{H_{\alpha,\beta}}\ (x; \mathbf{t_1}, \mathbf{t_2})$ وتكون حسب التعريف في الصيغة (2-11) كما يأتي :

$$\mathbf{H_{\alpha,\beta}}\ (x; \mathbf{t_1}, \mathbf{t_2}) = \frac{1}{\beta-\alpha} \log \int_{t1}^{t2} \left(\frac{f(x)}{F(t_2)-F(t_1)}\right)^{\alpha+\beta-1} dx\ ,$$

$$for\ \ \beta-1 < \alpha < \beta\ \ , \beta \ge 1\ ,\ \alpha + \beta < (>) 2 \qquad (2\text{-}13)$$

[Singh, & Kundu: 2020]

2- وإذا كان **(x)** متغيرعشوائي له دالة إحتمالية $\mathbf{f(x|t \le x \le \infty)} = \frac{f(x)}{1-F(t)}$ فأن الدالة ستكون مبتورة من جهة اليسار فقط عند النقطة (t) إذ نحصل على دالة **الإنتروبي العامة المتبقية (residual generalized entropy)** والتي تستعمل لقياس التأكد للعمر المتبقي للنظام ويرمز لها بالرمز $H_{\alpha,\beta}$ **(x ; t)** وتكون كما يأتي **:**

$$\mathbf{H_{\alpha,\beta}}\,(x;t) = \frac{1}{\beta-\alpha} \log \int_t^{\infty} \left(\frac{f(x)}{\bar{F}(t)}\right)^{\alpha+\beta-1} dx \qquad t \le x \le \infty \qquad (2-14)$$

$$\bar{F}(t) = 1 - F(t)$$

[Baig, & :2009]

-3 أما إذا كان المتغيرعشوائي (x) له دالة إحتمالية $\mathbf{f(x|0 \le x \le} t) = \frac{f(x)}{F(t)}$ فأن الدالة ستكون مبتورة من جهة اليمين فقط عند النقطة (t) إذ تسمى الإنتروبي في هذه الحالة **بالإنتروبي العامة السابقة أو الماضية (past generalized entropy)** والتي تستعمل لقياس عدم اليقين أو كمية المعلومات في المدة الماضية من عمل النظام الى الزمن (t) ويرمز لها بالرمز $\bar{\mathbf{H}}_{\alpha,\beta}$ (x ;t) وكما يأتي:

$$\bar{\mathbf{H}}_{\alpha,\beta}\,(\mathbf{x};\mathbf{t}) = \frac{1}{\beta-\alpha} \log \int_0^{t} \left(\frac{f(x)}{F(t)}\right)^{\alpha+\beta-1} dx \quad 0 \le x \le t \qquad (2-15)$$

[Baig, & :2009]

4- عندما تكون $\alpha+\beta > 2$ فإن دالة الإنتروبي العامة الموزونة تزداد بزيادة قيمة **(t_1)** وثبات قيمة (t_2) ، وتتناقص في حالة زيادة قيمة **(t_2)** وثبات قيمة **(t_1)** .،

5- وكذلك عندما تكون $\boldsymbol{\alpha + \beta < 2}$ فإن دالة ألإنتروبي العامة الموزونة تتزايد بزيادة قيم **(t_1,t_2)** ولجميع فترات البتر ،

وكلما ازدادت قيمة الإنتروبي فإن ذلك يجعل التوزيع أقل تحيزاً حسب مبدأ أعظم أنتروبي للعالم **(Jaynes)** .

[العبيدي: (2016)]

6-عند وضع المعامل (x) في الجانب الايمن من المعادلة (2.13) فإننا نحصل على الإنتروبي العامة الموزونة للتوزيعات مضاعفة البتر من الدرجة **(α,β)**

Double Truncated distribution of weighted generalized entropy (α,β)order

والتي يرمز لها بالرمز $\mathbf{H}^{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{\alpha},\beta}\ (\boldsymbol{x}\colon \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$ وكما يأتي :

$$\mathbf{H}^{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{\alpha},\beta}\ (\boldsymbol{x}\colon \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{log} \int_{\mathbf{0}}^{\infty} \left(\boldsymbol{x}\ \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\mathbf{F}(\mathbf{t}_2) - \mathbf{F}(\mathbf{t}_1)} \right)^{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}-\mathbf{1}} \boldsymbol{dx}$$

$$\boldsymbol{for}\ \ \boldsymbol{\beta} - \mathbf{1} < \boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\beta}\ \ ,\boldsymbol{\beta} \geq \mathbf{1}\ ,\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} < (>)\mathbf{2} \qquad (\mathbf{2-16})$$

والصيغة في المعادلة (2-16) سيتم إستعمالها في دراستنا الحالية وسنرمز لها اختصـاراً **(WGE)** وذلك لمعرفة التغير الحاصل في الإنتروبي من حيث الزيادة والنقصان عند قيم مختلفة من البتر

[Singh, & Kundu: 2020] [Singh & Kundu: 2019]

2-3 التوزيعات المركبة (Compound Distributions):

وهي توزيعات ناتجة من دمج توزيعين أو أكثر مثل (بيتا- ويبل، الاسي- ويبل، كاما –ويبل) وغيرها إذ تعدهذه التوزيعات أكثر مرونة من التوزيعات التقليدية وخاصة في حقل الموثوقية ، وفي هذه الرسالة سيتم دراسة التوزيع المركب (ويبل –باريتو) ذو ثلاث معالم وصيغة التركيب ستكون كالآتي :

$$\mathbf{F_{WP}} = \int_{\mathbf{0}}^{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1-F^*(X)}}} \mathbf{f^*(x)\ \ dx}$$

حيث أن$\mathbf{F_{WP}}$: تمثل دالة التجميعية للتوزيع المركب (ويبل – باريتو).

$F^*(X)$: دالة التوزيع التجميعية لتوزيع باريتو.

$f^*(x)$: :تمثل دالة الكثافة الإحتمالية لتوزيع ويبل .

2-4 توزيع ويبل Weibull distribution :

توزيع ويبل(Weibull distribution) هو توزيع إحتمالي مستمر(continuous) وهوأحد التوزيعات الشائعة الإستعمال في دراسة نماذج المعولية (Reliability) وإختبارات الحياة (LifeTesting) كدراسة دالة البقاء ودالة الفشل.

فالمتغير العشوائي X نقول انه يتبع توزيع ويبل إذا كانت دالة كثافته الإحتمالية عبارة عن:

$$\mathbf{f(x; P, \Phi) = p\Phi x^{p-1}\, e^{-(\Phi x)^{p}} \quad X > 0, \quad \Phi, p > 0 \quad (2-17)}$$

Φ تمثل معلمة القياس وp معلمة الشكل.أما دالة التوزيع التراكمي لمتغير عشوائي يتبع توزيع ويبل تعطى بالصيغة الآتية :

$$\mathbf{F}_{x}(x) = \mathbf{1} - e^{-\Phi x^{p}} \quad x > \mathbf{0} \quad \Phi, p > \mathbf{0} \qquad (\mathbf{2-18})$$

[Nasiru & Luguterah: 2015:p2]

2-5 توزيع باريتو (Pareto distribution) :

توزيع باريتو توزيع احتمالي مستمر(continuous probability distribution) سُمي تيمناً بإسم المهندس المدني الإيطالي فيلنريدو باريتو. وهو التوزيع الاحتمالي الذي تكون أبرز إستعمالاته في تمثيل الظواهر الاجتماعية، والعلمية، والجيوفيزيائية، توزيع باريتو ذو معلمتان، هما (θ)معلمة القياس، ومعلمة الشكل (k).

تعرف دالة الكثافة الإحتمالية لتوزيع باريتو(Pareto distribution) ذي المعلمتين (θ,k) بالمعادلة $(\mathbf{2-19})$ والتي تعطى بالشكل الآتي :

$$\mathbf{f(x;\ \theta, p) = \frac{k\theta^{k}}{x^{k+1}} \qquad \theta, k > 0 \qquad (2-19)}$$

وكذلك تعرف دالة التوزيع التراكمي لتوزيع باريتو عن طريق المعادلة الاتية :

$$\mathbf{F}_{x}(x) = \mathbf{1} - \left(\frac{\theta}{x}\right)^{k} \qquad \theta, k > \mathbf{0} \qquad (\mathbf{2-20})$$

[مهدي وهاب نعمة:2015]

2-6 التوزيع المركب ويبل- باريتو :

ان التوزيع المركب ويبل– باريتو **(Weibull-Pareto distribution)** هو توزيع إحتمالي مركب مستمر يتكون من توزيعين هما توزيع ويبل **(Weibull distribution)** وتوزيع باريتو **(Pareto distribution)** ففي عام **(2015)** قام كلا من **(Nasiru & Luguterah)** بنشر دراسة بعنوان**(New Weibull Pareto)** وتم التوصل الى أن الدالة التجميعية **(cdf)** للتوزيع المركب الجديد :

$$\mathbf{F_{WP}(x) = 1 - e^{-\delta\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\lambda}}} \qquad \mathbf{x > 0 \ , \theta \ , \delta, \lambda > 0} \qquad \mathbf{(2-21)}$$

ومنها تم إشتقاق صيغة pdf للتوزيع المركب ويبل– باريتو (NWP)

$$\mathbf{f(x: \delta, \lambda, \theta,) = \frac{\delta\lambda}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\lambda-1} e^{-\delta\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\lambda}}} \qquad \mathbf{0 < x < \infty} \qquad \mathbf{(2-22)}$$

$\boldsymbol{\lambda > 0 \ , \delta > 0}$ **,and,** $\boldsymbol{\theta > 0 \quad \delta = \Phi^{p}, \ \lambda = Pk}$

إذ أن : **($\boldsymbol{\delta, \lambda}$)** تمثل معلمتي الشكل **,θ** تمثل معلمة القياس

[Nasiru & Luguterah: 2015]

2-7 إشتقاق الصيغة العامة لتوزيع ويبل- باريتو مضاعف البتر(التوزيع الجديد):

Deriving The New Double Truncated Weibull-Pareto Distribution

لغرض دراسة وتحليل البيانات الواقعة بين نقطتين (وخاصةً فيما يتعلق بالبيانات التي تم دراستها في الرسالة) فقد إقترح الباحث إستعمال توزيع مركب (ويبل –باريتو) مبتور من الاسفل أو الجهة اليسرى (Left Truncated) عند النقطة (t_1) ومبتور من الاعلى أو الجهة اليمنى (Right Truncated) عند النقطة (t_2) اي ان (t_1,t_2) تمثل نقاط ثابتة ومعرفة في فضاء العينة للتوزيع المركب إذ نضع الصيغة التي تم التوصل اليها (2.22) في الصيغة (2.1) وكما يأتي :

$$\mathbf{g(x|t_1 \le x \le t_2) = \frac{\boldsymbol{f(x: \delta, \lambda, \theta,)}}{F(t_2) - F(t_1)}} \qquad \mathbf{(2-23)}$$

نجد المقام أو لا:

$$F\,(t_1) = \int_0^{t_1} \frac{\delta\lambda}{\theta}\left(\frac{X}{\theta}\right)^{\lambda-1} e^{-\delta\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\lambda}}\, dx$$

$$F\,(t_1) = \frac{\delta\lambda}{\theta^{\lambda}}\int_0^{t_1} x^{\lambda-1} e^{-\delta\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\lambda}}\, dx$$

$$\text{let } z = \delta\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\lambda} \Rightarrow \left(\frac{z}{\delta}\right)^{\frac{1}{\lambda}} = \frac{x}{\theta}$$

$$x = \theta\left(\frac{z}{\delta}\right)^{\frac{1}{\lambda}} \Rightarrow \quad dx = \frac{\theta}{\lambda}\left(\frac{z}{\delta}\right)^{\frac{1}{\lambda}-1}\frac{1}{\delta}dz$$

$$F\,(t_1) = \frac{\delta\lambda}{\theta^{\lambda}}\int_0^{\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}} \theta^{\lambda-1}\left(\frac{z}{\delta}\right)^{1-\frac{1}{\lambda}} e^{-z} \quad \frac{\theta}{\lambda}\left(\frac{z}{\delta}\right)^{\frac{1}{\lambda}-1}\frac{1}{\delta}dz$$

$$F\,(t_1) = \frac{\delta\lambda}{\theta^{\lambda}}\int_0^{\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}} \frac{\theta^{\lambda}}{\delta\lambda}\left(\frac{z}{\delta}\right)^{1-\frac{1}{\lambda}} e^{-z} \quad \left(\frac{z}{\delta}\right)^{\frac{1}{\lambda}-1} dz$$

$$F\,(t_1) = \int_0^{\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}} \left(\frac{z}{\delta}\right)^{1-\frac{1}{\lambda}} \quad \left(\frac{z}{\delta}\right)^{\frac{1}{\lambda}-1} e^{-z}dz$$

$$F\,(t_1) = \int_0^{\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}} e^{-z}dz$$

$$F\,(t_1) = -[e^{-z}]_0^{\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}$$

$$F\,(t_1) = -\left[e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}} - 1\right]$$

$$F\,(t_1) = 1 - e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}} \qquad (2-24)$$

وبإجراء الخطوات السابقة نفسها نتوصل الى:

$$F\,(t_2) = 1 - e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}} \qquad (2-25)$$

$$g(x{:}\,\delta,\lambda,\theta|t_1 \le x \le t_2) = \frac{\frac{\delta\lambda}{\theta}\left(\frac{X}{\theta}\right)^{\lambda-1} e^{-\delta\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\lambda}}}{\left(1-e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)-\left(1-e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)}$$

$$\boxed{g(x{:}\,\delta,\lambda,\theta|t_1 \le x \le t_2) = \frac{\frac{\delta\lambda}{\theta}\left(\frac{X}{\theta}\right)^{\lambda-1} e^{-\delta\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\lambda}}}{e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}} - e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}}\;, t_1 \le x \le t_2,\;\; \delta,\lambda,\theta > 0 \qquad (2\text{-}26)}$$

الصيغة (2-26) آنفاً تمثل الإنموذج المقترح في الدراسة (**ويبل – باريتو مضاعف البتر**) **(Double Truncated Weibull Pareto Distribution)** والذي سنرمز له اختصارا **(DTWPD)** والذي عن طريقه سوف يتم نمذجة بيانات الفشل الواقعة بين النقطة ($\mathbf{t_1}$) والنقطة ($\mathbf{t_2}$) للبيانات الحقيقية والإنموذج المبتور يجب ان يحقق خواص الدالة الإحتمالية ولإثبات أن الإنموذج **(DTWPD)** هو دالة إحتمالية نعمل على تكامل الإنموذج خلال الفترة ($\mathbf{t_1}$) الى ($\mathbf{t_2}$) إذ يكون ناتج التكامل يساوي واحد أي أن :

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{f(x:\delta,\lambda,\theta)}{F(t_2)-F(t_1)}\,dx = 1 \qquad (2-27)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\frac{\delta\lambda}{\theta}\left(\frac{X}{\theta}\right)^{\lambda-1} e^{-\delta\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\lambda}}}{e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}} - e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}}\,dx$$

$$= \frac{1}{\left(\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}} - e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)\right)} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\delta\lambda}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\lambda-1} e^{-\delta\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\lambda}}\,dx$$

$$= \frac{1}{\left(\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}} - e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)\right)} \frac{\delta\lambda}{\theta^{\lambda}} \int_{t_1}^{t_2} x^{\lambda-1} e^{-\delta\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\lambda}}\,dx$$

$$\text{let } z = \delta\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\lambda} \Rightarrow \left(\frac{z}{\delta}\right)^{\frac{1}{\lambda}} = \frac{x}{\theta}$$

$$x = \theta\left(\frac{z}{\delta}\right)^{\frac{1}{\lambda}} \Rightarrow \quad dx = \frac{\theta}{\lambda}\left(\frac{z}{\delta}\right)^{\frac{1}{\lambda}-1} \frac{1}{\delta}\,dz$$

$$= \frac{1}{\left(\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}} - e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)\right)} \frac{\delta\lambda}{\theta^{\lambda}} \int_{\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}^{\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}} \theta^{\lambda-1}\left(\frac{z}{\delta}\right)^{1-\frac{1}{\lambda}} e^{-z} \quad \frac{\theta}{\lambda}\left(\frac{z}{\delta}\right)^{\frac{1}{\lambda}-1} \frac{1}{\delta}\,dz$$

$$= \frac{1}{\left(\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}} - e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)\right)} \frac{\delta\lambda}{\theta^{\lambda}} \int_{\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}^{\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}} \frac{\theta^{\lambda}}{\delta\lambda}\left(\frac{z}{\delta}\right)^{1-\frac{1}{\lambda}} e^{-z} \quad \left(\frac{z}{\delta}\right)^{\frac{1}{\lambda}-1} dz$$

$$= \frac{1}{\left((e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}} - e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)} \int_{\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}^{\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}} \left(\frac{z}{\delta}\right)^{1-\frac{1}{\lambda}} \quad \left(\frac{z}{\delta}\right)^{\frac{1}{\lambda}-1} e^{-z} dz$$

$$= \frac{\int_{\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}^{\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}} e^{-z} dz}{e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}} - e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}}$$

$$\frac{-\left[e^{-z}\ \right]_{\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}^{\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}}{e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}} - e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}}$$

$$\frac{-\left[e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}} - e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}\right]}{e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}} - e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}}$$

$$\frac{e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}} - e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}}{e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}} - e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}} = 1$$

وكذلك عمل الباحث على ايجاد الدالة التراكمية للتوزيع المقترح (DTWPD).

$$G(x:\delta,\lambda,\theta) = \int_{t_1}^{X} \frac{\frac{\delta\lambda}{\theta}\left(\frac{U}{\theta}\right)^{\lambda-1} e^{-\delta\left(\frac{U}{\theta}\right)^{\lambda}}}{e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}} - e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}}\, dU$$

$$G(x:\delta,\lambda,\theta) = \frac{\int_{t_1}^{X} \frac{\delta\lambda}{\theta}\left(\frac{U}{\theta}\right)^{\lambda-1} e^{-\delta\left(\frac{U}{\theta}\right)^{\lambda}} dU}{e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}} - e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}}$$

$$\text{let } z = \delta \left(\frac{U}{\theta}\right)^{\lambda} \Rightarrow \left(\frac{z}{\delta}\right)^{\frac{1}{\lambda}} = \frac{U}{\theta}$$

$$U = \theta \left(\frac{z}{\delta}\right)^{\frac{1}{\lambda}} \Rightarrow \quad dU = \frac{\theta}{\lambda}\left(\frac{z}{\delta}\right)^{\frac{1}{\lambda}-1} \frac{1}{\delta} dz$$

وبتطبيق الخطوات السابقة نفسها في المعادلة (**2-27**) نتوصل الى :

$$G(x:\delta,\lambda,\theta)=\frac{\int_{e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}}^{e^{-\delta\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\lambda}}} e^{-z}dz}{e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}-e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}}$$

$$G(x:\delta,\lambda,\theta)=\frac{-\left[e^{-z}\right]_{e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}}^{e^{-\delta\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\lambda}}}}{e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}-e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}}$$

$$G(x:\delta,\lambda,\theta)=\frac{-\left[e^{-\delta\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\lambda}}-e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}\right]}{e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}-e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}}$$

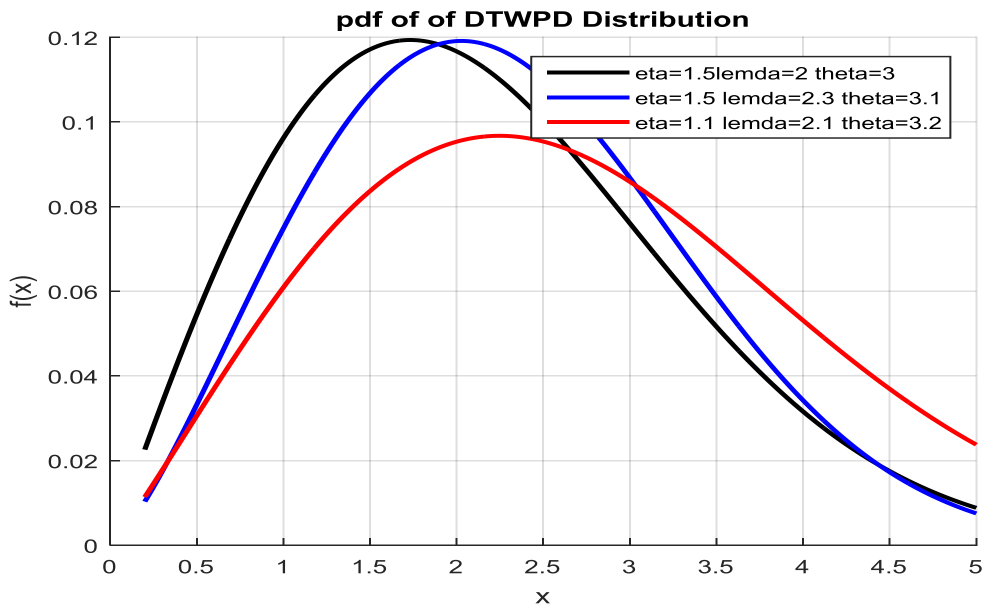
$$\boxed{G(x:\delta,\lambda,\theta)=\frac{e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}-e^{-\delta\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\lambda}}}{e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}-e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}}\quad ,t_1\le X\le t_2\ ,\delta,\lambda,\theta\ >0 \qquad (2\text{-}28)}$$

الصيغة (**2-28**) آنفاً تمثل دالة التراكمية لتوزيع (**DTWPD**) والتي تكون حدودها مابين الصفر والواحد .

$$\lim_{x\to t_1} G(x:\delta,\lambda,\theta)=\lim_{x\to t_1}\frac{e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}-e^{-\delta\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\lambda}}}{e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}-e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}}=0$$

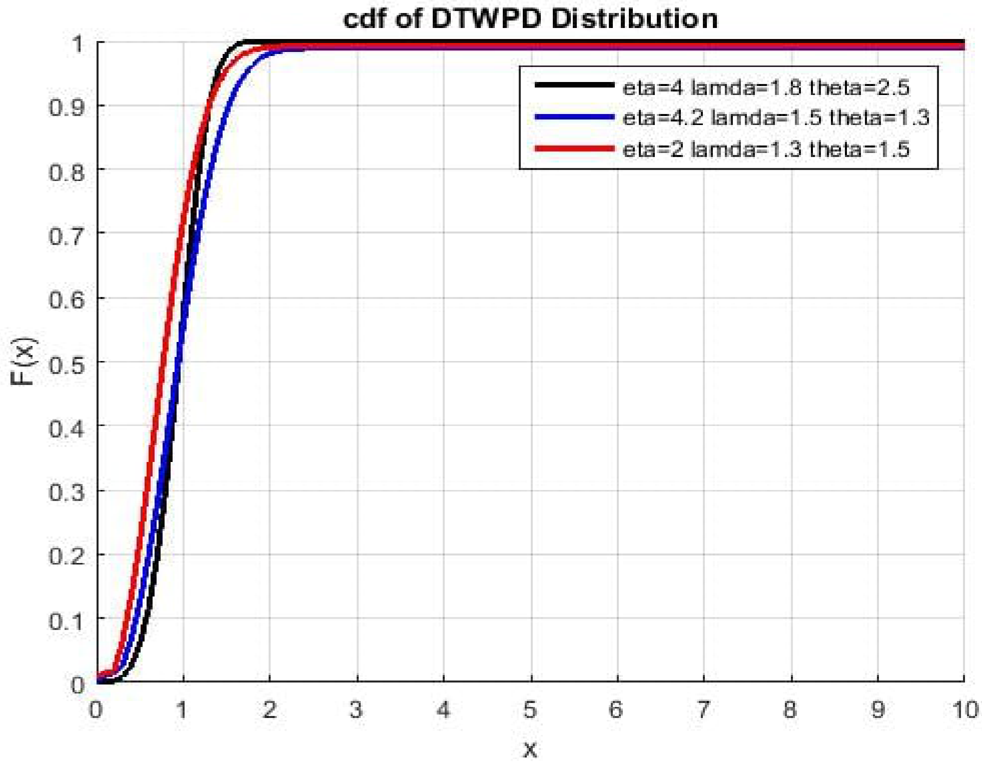
$$\lim_{x\to t_2} G(x:\delta,\lambda,\theta)=\lim_{x\to t_2}\frac{e^{-\lambda\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}-e^{-\lambda\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\lambda}}}{e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}-e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}}=1$$

$$0\le G(\,x:\delta,\lambda,\theta)\ \le 1$$



شكل (2-3)

يوضح دالة (pdf) للتوزيع المركب ويبل – باريتومضاعف البتر عند قيم مختلفة للمعلمات



شكل (2−4)

يوضح دالة CDF للتوزيع المركب ويبل – باريتو مضاعف البتر عند قيم مختلفة للمعلمات

تم رسم شكل (2-3) والشكل (2-4) من قبل الباحث بإستعمال برنامج الماتلاب

2-8 خصائص الإنموذج Some properties of the(DTWPD) :

2-8-1 العزم اللامركزي حول نقطة الاصل ذو الرتبة (r)

$$E(x^r) = \int_{t_1}^{t_2} x^r \, g(x:\delta,\lambda,\theta) \; dx$$

$$E(x^r) = \int_{t_1}^{t_2} x^r \frac{\frac{\delta\lambda}{\theta}\left(\frac{X}{\theta}\right)^{\lambda-1} e^{-\delta\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\lambda}}}{e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}} - e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}} \; dx$$

$$E(x^r) = \frac{1}{e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}} - e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}} \int_{t_1}^{t_2} x^r \frac{\delta\lambda}{\theta}\left(\frac{X}{\theta}\right)^{\lambda-1} e^{-\delta\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\lambda}} \; dx$$

$$E(x^r) = \frac{1}{e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}} - e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}} \frac{\delta\lambda}{\theta^{\lambda}} \int_{t_1}^{t_2} (x)^{r+\lambda-1} \; e^{-\delta\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\lambda}} \; dx$$

$$\text{let } z = \delta \left(\frac{x}{\theta}\right)^{\lambda} \Rightarrow \left(\frac{z}{\delta}\right)^{\frac{1}{\lambda}} = \frac{x}{\theta}$$

$$x = \theta\left(\frac{z}{\delta}\right)^{\frac{1}{\lambda}} \Rightarrow \quad dx = \frac{\theta}{\lambda}\left(\frac{z}{\delta}\right)^{\frac{1}{\lambda}-1} \frac{1}{\delta} dz$$

$$E(x^r) = \frac{1}{e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}} - e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}} \frac{\delta\lambda}{\theta^{\lambda}} \int_{\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}^{\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}} \left(\theta\left(\frac{z}{\delta}\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right)^{r+\lambda-1} e^{-\delta\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\lambda}} \; dx$$

$$E(x^r) = \frac{1}{\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}} - e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)} \frac{\delta\lambda}{\theta^{\lambda}} \int_{\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}^{\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}} \theta^{r+\lambda-1} \left(\frac{z}{\delta}\right)^{\frac{r}{\lambda}+1-\frac{1}{\lambda}} e^{-z} \; \frac{\theta}{\lambda}\left(\frac{z}{\delta}\right)^{\frac{1}{\lambda}-1} \frac{1}{\delta} dz$$

$$E(x^r) = \frac{1}{\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}} - e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)} \frac{\delta\lambda}{\theta^{\lambda}} \int_{\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}^{\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}} \frac{\theta^{r+\lambda}}{\delta\lambda}\left(\frac{z}{\delta}\right)^{1-\frac{1}{\lambda}} e^{-z} \left(\frac{z}{\delta}\right)^{\frac{1}{\lambda}-1} dz$$

$$E(x^r) = \frac{1}{\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}} - e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)} \theta^{r} \int_{\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}^{\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}} \left(\frac{z}{\delta}\right)^{\frac{r}{\lambda}+1-\frac{1}{\lambda}} \left(\frac{z}{\delta}\right)^{\frac{1}{\lambda}-1} e^{-z} dz$$

$$E(x^r)=\frac{1}{\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}-e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)}\theta^r\int_{\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}^{\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\left(\frac{z}{\delta}\right)^{\frac{r}{\lambda}}\ e^{-z}dz$$

$$E(x^r)=\frac{1}{\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}-e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)}\frac{\theta^r}{\delta^{\frac{r}{\lambda}}}\int_{\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}^{\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}z^{\frac{r}{\lambda}}\ e^{-z}dz$$

$$\int_{\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}^{\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}z^{\frac{r}{\lambda}}\ e^{-z}dz=\left[\Gamma\left(\frac{r+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{r+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]$$

وذلك على وفق دالة كاما غير التامة (**Incomplete Gamma Function**) وأن دالة كاما غير التامة العليا(**Upper incomplete Gamma Function**) هي

$$\Gamma(S,x)=\int_x^{\infty}t^{s-1}\ e^{-t}\,dt$$

وإن دالة كاما غير التامة الدنيا (**Lower incomplete Gamma Function**) هي :

$$\gamma(s,x)=\int_0^x t^{s-1}\ e^{-t}\ dt$$

$$\int_u^v t^{s-1}\ e^{-t}\ dt=\Gamma(s,u)-\Gamma(s,v)\qquad(2-29)$$

$$E(x^r)=\frac{\theta^r}{\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}-e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)\delta^{\frac{r}{\lambda}}}\left[\Gamma\left(\frac{r+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{r+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]$$

(2-30)

في المعادلة (2-30) عندما (r=1) فإننا نحصل على الوسط الحسابي لتوزيع (DTWPD) فتكون صيغة الوسط الحسابي كالاتي :

$$E(x)=\frac{\theta}{\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}-e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)\delta^{\frac{1}{\lambda}}}\left[\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]\qquad(2\text{-}31)$$

2-8-2 العزم المركزي الرائي حول الوسط الحسابي.

The rth moment about mean for(DTWPD)

$$E(x-m)^r = \int_{t_1}^{t_2} (x-m)^r\, g(x)\; dx$$

$$E(x-m)^r = \int_{t_1}^{t_2} (x-m)^r \frac{\frac{\delta\lambda}{\theta}\left(\frac{X}{\theta}\right)^{\lambda-1} e^{-\delta\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\lambda}}}{e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}} - e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}}\; dx$$

$$E(x-m)^r = \frac{1}{\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}} - e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)} \frac{\delta\lambda}{\theta^{\lambda}} \int_{t_1}^{t_2} (x-m)^r\; (X)^{\lambda-1} e^{-\delta\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\lambda}}\; dx$$

$$(x-m)^r = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (-m)^i x^{r-i}$$

$$E(x-m)^r = \frac{1}{\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}} - e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)} \frac{\delta\lambda}{\theta^{\lambda}} \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (-m)^i \int_{t_1}^{t_2} (X)^{r-i+\lambda-1} e^{-\delta\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\lambda}}\; dx$$

$$\text{let } z = \delta \left(\frac{x}{\theta}\right)^{\lambda} \Rightarrow \left(\frac{z}{\delta}\right)^{\frac{1}{\lambda}} = \frac{x}{\theta}$$

$$x = \theta\left(\frac{z}{\delta}\right)^{\frac{1}{\lambda}} \Rightarrow \quad dx = \frac{\theta}{\lambda}\left(\frac{z}{\delta}\right)^{\frac{1}{\lambda}-1} \frac{1}{\delta} dz$$

$$E(x-m)^r = \frac{1}{\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}} - e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)} \frac{\delta\lambda}{\theta^{\lambda}} \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (-m)^i \int_{\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}^{\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}} \left(\theta\left(\frac{z}{\delta}\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right)^{r-i+\lambda-1} e^{-z}\, \frac{\theta}{\lambda}\left(\frac{z}{\delta}\right)^{\frac{1}{\lambda}-1} \frac{1}{\delta} dz$$

$$= \frac{1}{\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}} - e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)} \frac{\delta\lambda}{\theta^{\lambda}} \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (-m)^i \int_{\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}^{\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}} \theta^{r-i+\lambda-1} \left(\frac{z}{\delta}\right)^{\frac{r}{\lambda}-\frac{i}{\lambda}+1-\frac{1}{\lambda}} e^{-z} \quad \frac{\theta}{\lambda}\left(\frac{z}{\delta}\right)^{\frac{1}{\lambda}-1} \frac{1}{\delta} dz$$

$$= \frac{1}{\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}} - e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)} \frac{\delta\lambda}{\theta^{\lambda}} \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (-m)^i \int_{\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}^{\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}} \frac{\theta^{r-i+\lambda}}{\delta\lambda} \left(\frac{z}{\delta}\right)^{\frac{r}{\lambda}-\frac{i}{\lambda}+1-\frac{1}{\lambda}} e^{-z} \quad \left(\frac{z}{\delta}\right)^{\frac{1}{\lambda}-1} dz$$

$$= \frac{1}{\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}} - e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)} \theta^{r-i} \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (-m)^i \int_{\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}^{\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}} \left(\frac{z}{\delta}\right)^{\frac{r}{\lambda}-\frac{i}{\lambda}+1-\frac{1}{\lambda}} e^{-z} \quad \left(\frac{z}{\delta}\right)^{\frac{1}{\lambda}-1} dz$$

$$E(x-m)^r = \frac{1}{\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}} - e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)} \theta^{r-i} \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (-m)^i \int_{\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}^{\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}} \left(\frac{z}{\delta}\right)^{\frac{r}{\lambda}-\frac{i}{\lambda}} e^{-z} \quad dz$$

$$E(x-m)^r=\frac{1}{\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}-e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)}*\frac{\theta^{(r-i)}}{\delta^{\left(\frac{r}{\lambda}-\frac{i}{\lambda}\right)}}\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}(-m)^i\int_{\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}^{\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}} z^{\left(\frac{r}{\lambda}-\frac{i}{\lambda}\right)}e^{-z}\,dz$$

ووفقا للصيغة (2-29)فإن الدالة $\int_{\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}^{\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}} z^{\left(\frac{r}{\lambda}-\frac{i}{\lambda}\right)}e^{-z}\,dz$ تمثل تكامل دالة كاما الناقصة.

$$\int_{\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}^{\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}} z^{\left(\frac{r}{\lambda}-\frac{i}{\lambda}\right)}e^{-z}\,dz=\left[\Gamma\left(\frac{r-i+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{r-i+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]$$

$$E(x-m)^r=\frac{\theta^{(r-i)}}{\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}-e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)\delta^{\left(\frac{r}{\lambda}-\frac{i}{\lambda}\right)}}\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}(-m)^i\left[\Gamma\left(\frac{r-i+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{r-i+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]$$

(2-32)

وللحصول على صيغة التباين لأنموذج (DTWPD) فإننا نعوض عنr=2 في المعادلـة (2-32) المذكورة آنفاً نحصل على:

$$E(x-m)^2=\frac{\theta^{(2-i)}}{\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}-e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)\delta^{\left(\frac{2}{\lambda}-\frac{i}{\lambda}\right)}}\sum_{i=0}^{2}\binom{2}{i}(-m)^i\left[\Gamma\left(\frac{2-i+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{2-i+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]$$

(2-33)

2-8-3 معامل الإلتواء Coefficient of Skewnes of (DTWPD):

$$C.S=\frac{E(x-\mu)^3}{\sigma^3} \qquad (2-34)$$

من المعادلة **(2-32)** نعوض **(r=3)** لاستخراج $E(x-\mu)^3$

$$E(x-m)^3=\frac{\theta^{(3-i)}}{\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}-e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)\delta^{\left(\frac{3}{\lambda}-\frac{i}{\lambda}\right)}}\sum_{i=0}^{3}\binom{3}{i}(-m)^i\left[\Gamma\left(\frac{3-i+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{3-i+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]$$

$$\sigma^3=[\,E(x-m)^2]^{\frac{3}{2}}$$

$$=\left[\frac{\theta^{(2-i)}}{\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}-e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)\delta^{\left(\frac{2}{\lambda}-\frac{i}{\lambda}\right)}}\sum_{i=0}^{2}\binom{2}{i}(-m)^i\left[\Gamma\left(\frac{2-i+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{2-i+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]\right]^{\frac{3}{2}}$$

فمعامل الإلتواءلأنموذج (DTWPD) يكون كما يأتي :

$$c.s=\frac{\frac{\theta^{(3-i)}}{\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}-e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)\delta^{\left(\frac{3}{\lambda}-\frac{i}{\lambda}\right)}}\sum_{i=0}^{3}\binom{3}{i}(-m)^{i}\left[\Gamma\left(\frac{3-i+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{3-i+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]}{\left[\frac{\theta^{(2-i)}}{\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}-e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)\delta^{\left(\frac{2}{\lambda}-\frac{i}{\lambda}\right)}}\sum_{i=0}^{2}\binom{2}{i}(-m)^{i}\left[\Gamma\left(\frac{2-i+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{2-i+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (2\text{-}35)$$

2-8-4 معامل التفلطح :Coefficient of Kurtosis of(DTWPD)

$$C.K=\frac{E(x-\mu)^4}{\sigma^4} \qquad (2-36)$$

كذلك من المعادلة **(2-32)** نعوض **(r=4)** لإستخراج $E(x-\mu)^4$

$$E(x-\mu)^4=\frac{\theta^{(4-i)}}{\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}-e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)\delta^{\left(\frac{4}{\lambda}-\frac{i}{\lambda}\right)}}\sum_{i=0}^{4}\binom{4}{i}(-m)^{i}\left[\Gamma\left(\frac{4-i+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{4-i+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]$$

$$\sigma^4=\left[\frac{\theta^{(2-i)}}{\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}-e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)\delta^{\left(\frac{2}{\lambda}-\frac{i}{\lambda}\right)}}\sum_{i=0}^{2}\binom{2}{i}(-m)^{i}\left[\Gamma\left(\frac{2-i+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{2-i+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]\right]^{2}$$

اذن معامل التفلطح لأنموذج (DTWPD) يكون كالأتي :

$$C.K=\frac{\frac{\theta^{(4-i)}}{\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}-e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)\delta^{\left(\frac{4}{\lambda}-\frac{i}{\lambda}\right)}}\sum_{i=0}^{4}\binom{4}{i}(-m)^{i}\left[\Gamma\left(\frac{4-i+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{4-i+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]}{\left[\frac{\theta^{(2-i)}}{\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}-e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)\delta^{\left(\frac{2}{\lambda}-\frac{i}{\lambda}\right)}}\sum_{i=0}^{2}\binom{2}{i}(-m)^{i}\left[\Gamma\left(\frac{2-i+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{2-i+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]\right]^{2}} \quad (2\text{-}37)$$

2-8-5 معامل الإختلاف Coefficient of Variation for(DTWPD)

$$C.V=\frac{\sigma}{\mu} \qquad (2-38)$$

$$\sigma=\sqrt{E(x-\mu)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{\theta^{(2-i)}}{\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}-e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)\delta^{\left(\frac{2}{\lambda}-\frac{i}{\lambda}\right)}}\sum_{i=0}^{2}\binom{2}{i}(-m)^i\left[\Gamma\left(\frac{2-i+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{2-i+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]}$$

$$\mu=E(x)=\frac{\theta}{\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}-e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)\delta^{\frac{1}{\lambda}}}\left[\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]$$

فيكون معامل الإختلاف لإنموذج (DTWPD) كالآتي :

$$C.V=\frac{\sqrt{\frac{\theta^{(2-i)}}{\left(e^{-\delta\left(\frac{t1}{\theta}\right)^{\lambda}}-e^{-\delta\left(\frac{t2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)\delta^{\left(\frac{2}{\lambda}-\frac{i}{\lambda}\right)}}\sum_{i=0}^{2}\binom{2}{i}(-m)^i\left[\Gamma\left(\frac{2-i+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{2-i+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]}}{\frac{\theta}{\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}-e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)\delta^{\frac{1}{\lambda}}}\left[\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]}$$

(2-39)

2-8-6 دالة المعولية Reliability Function:

وهي احتمال عدم عطل الجهاز أو الوحدة الى الزمن **(t)** إذ **(t>0)** ويرمز لها بالرمز **(Rt)**

$$R(t)=1-F(t) \qquad (2-40)$$

اذن دالة المعولية لإنموذج **(DTWPD)** تكون كمايأتي :

$$R(x)=1-G(x:\delta,\lambda,\theta)=1-\frac{e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}-e^{-\delta\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\lambda}}}{e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}-e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}}$$

$$R(x)=\frac{e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}-e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}}{e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}-e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}}-\frac{e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}-e^{-\delta\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\lambda}}}{e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}-e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}}$$

$$R(x)=\frac{e^{-\delta\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\lambda}}-e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}}{e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}-e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}} \qquad (2-41)$$

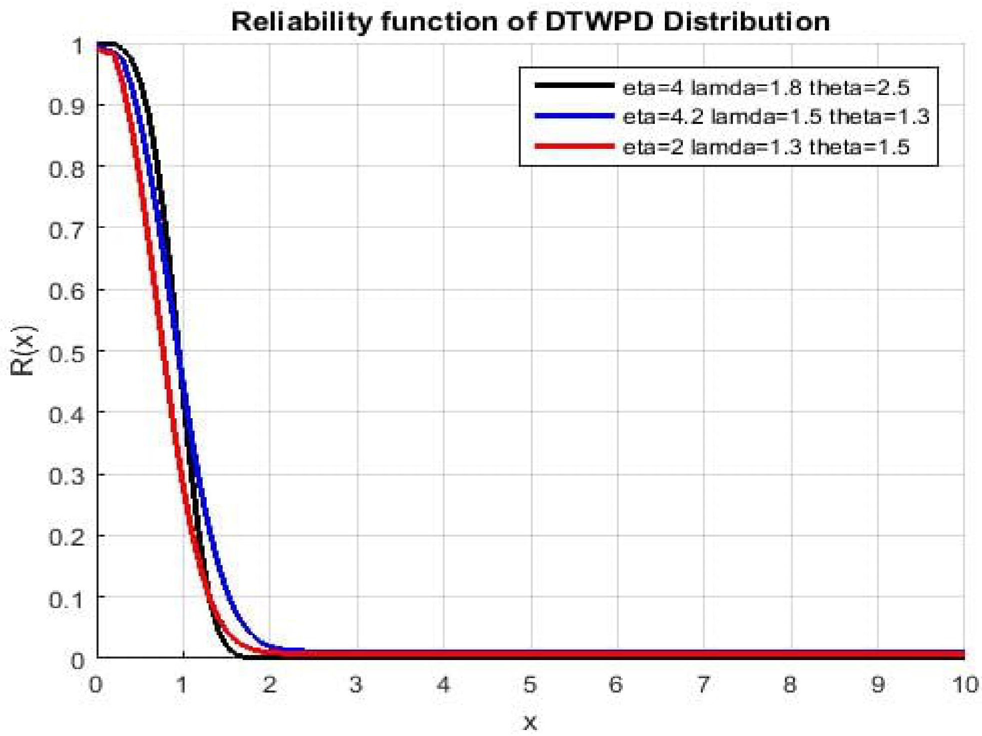
وكذلك فإن الإنموذج المقترح يحقق الخصائص الاساسية لدالة المعولية وهي الخاصيتين الآتيتين

$$1-\lim_{x\to t_1} R(x)=1$$

$$2-\lim_{x\to t_2} R(x)=0$$

$$\lim_{x\to t_1} R(x)=\lim_{x\to t_1}\frac{e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}-e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}}{e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}-e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}}=1$$

$$\lim_{x\to t_2} R(x)=\lim_{x\to t_2}\frac{e^{-\delta\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\lambda}}-e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}}{e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}-e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}}=0\ , \qquad 0\le R(x)\le 1$$



شكل (2-5)

يوضح منحى دالة المعولية للتوزيع المركب (ويبل- باريتو) مضاعف البترلعدد من المعلمات تم رسم الشكل آنفاً من قبل الباحث بإستخدام برنامج الماتلاب

2-9 الإنتروبي العامة الموزونة Weighted Generalized Entropy (WGE):

لحساب (WGE) للتوزيع المركب ويبل- باريتومضاعف البتر نعوض المعادلة (2-26) التي تمثل صيغة التوزيع المبتور في المعادلة (2-12) وكالاتي :

$$H^{w}_{\alpha,\beta}(x:t_1,t_2)=\frac{1}{\beta-\alpha}\log\int_{t_1}^{t_2}\left(x\,\frac{\frac{\delta\lambda}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\lambda-1}e^{-\delta\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\lambda}}}{e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}-e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}}\right)^{\alpha+\beta-1}dx \quad (2-42)$$

$$for\ \ \beta-1<\alpha<\beta,\ \beta\ge 1$$

$$=\frac{1}{\beta-\alpha}\log\left[\left(\frac{\delta\lambda}{\theta^{\lambda}}\right)^{\alpha+\beta-1}\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{x^{\lambda}e^{-\delta\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\lambda}}}{e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}-e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}}\right)^{\alpha+\beta-1}dx\right]$$

$$=\frac{1}{\beta-\alpha}\log\left[\left(\frac{\delta\lambda}{\theta^{\lambda}\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}-e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)}\right)^{\alpha+\beta-1}\int_{t_1}^{t_2}x^{\lambda(\alpha+\beta-1)}e^{-\delta(\alpha+\beta-1)\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\lambda}}dx\right]$$

نفرض ان :

$$x^{\lambda}=y\quad ,x=y^{\frac{1}{\lambda}}\quad ,\quad dx=\frac{1}{\lambda}y^{\frac{1}{\lambda}-1}dy$$

$$=\frac{1}{\beta-\alpha}\log\left[\left(\frac{\delta\lambda}{\theta^{\lambda}\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}-e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)}\right)^{\alpha+\beta-1}\frac{1}{\lambda}\int_{t_1^{\lambda}}^{t_2^{\lambda}}y^{(\alpha+\beta-1)+\frac{1}{\lambda}-1}e^{-\frac{\delta(\alpha+\beta-1)}{\theta^{\lambda}}y}dy\right]$$

نفرض ان :

$$u=\frac{\delta(\alpha+\beta-1)}{\theta^{\lambda}}y\qquad ,\ y=\frac{u\theta^{\lambda}}{\delta(\alpha+\beta-1)}$$

$$dy=\frac{\theta^{\lambda}}{\delta(\alpha+\beta-1)}du$$

$$=\frac{1}{\beta-\alpha}\log\left[\left(\frac{\delta\lambda}{\theta^{\lambda}\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}-e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)}\right)^{\alpha+\beta-1}\frac{1}{\lambda}\int_{\frac{\delta(\alpha+\beta-1)}{\theta^{\lambda}}t_1^{\lambda}}^{\frac{\delta(\alpha+\beta-1)}{\theta^{\lambda}}t_2^{\lambda}}\left(\frac{u\theta^{\lambda}}{\delta(\alpha+\beta-1)}\right)^{(\alpha+\beta-1)+\frac{1}{\lambda}-1}e^{-u}\,\frac{\theta^{\lambda}}{\delta(\alpha+\beta-1)}du\right]$$

$$=\frac{1}{\beta-\alpha}\log\left[\left(\frac{\delta\lambda}{\theta^{\lambda}\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}-e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)}\right)^{\alpha+\beta-1}\frac{\theta^{\lambda}\theta^{\lambda(\alpha+\beta-1)+1-\lambda}}{\lambda\delta(\alpha+\beta-1)(\delta(\alpha+\beta-1))^{(\alpha+\beta-1)+\frac{1}{\lambda}-1}}\int_{\frac{\delta(\alpha+\beta-1)}{\theta^{\lambda}}t_1^{\lambda}}^{\frac{\delta(\alpha+\beta-1)}{\theta^{\lambda}}t_2^{\lambda}}u^{(\alpha+\beta-1)+\frac{1}{\lambda}-1}e^{-u}du\right]$$

$$=\frac{1}{\beta-\alpha}log\left[\left(\frac{\delta\lambda}{\theta^{\lambda}\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}-e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)}\right)^{\alpha+\beta-1}\frac{\theta^{\lambda(\alpha+\beta-1)+1}}{\lambda\delta(\alpha+\beta-1)^{(\alpha+\beta-1)+\frac{1}{\lambda}}}\int_{\frac{\delta(\alpha+\beta-1)}{\theta^{\lambda}}t_1{}^{\lambda}}^{\frac{\delta(\alpha+\beta-1)}{\theta^{\lambda}}t_2{}^{\lambda}}u^{(\alpha+\beta-1)+\frac{1}{\lambda}-1}e^{-u}\,du\right] \quad (2\text{-}43)$$

$$\int_{\frac{\delta(\alpha+\beta-1)}{\theta^{\lambda}}t_1{}^{\lambda}}^{\frac{\delta(\alpha+\beta-1)}{\theta^{\lambda}}t_2{}^{\lambda}}u^{(\alpha+\beta-1)+\frac{1}{\lambda}-1}e^{-u}\,du=$$

$$\left[\Gamma\left((\alpha+\beta-1)+\frac{1}{\lambda},\frac{\delta(\alpha+\beta-1)}{\theta^{\lambda}}t_1{}^{\lambda}\right)-\left[\Gamma\left((\alpha+\beta-1)+\frac{1}{\lambda},\frac{\delta(\alpha+\beta-1)}{\theta^{\lambda}}t_2{}^{\lambda}\right)\right]\right]$$

نعوض ناتج التكامل آنفاً في المعادلة (2-43)

$$H^{w}_{\alpha,\beta}(x:t_1,t_2)=$$

$$\frac{1}{\beta-\alpha}log\left[\left(\frac{\delta\lambda}{\theta^{\lambda}\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}-e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)}\right)^{\alpha+\beta-1}\frac{\theta^{\lambda(\alpha+\beta-1)+1}}{\lambda\delta(\alpha+\beta-1)^{(\alpha+\beta-1)+\frac{1}{\lambda}}}\left[\Gamma\left((\alpha+\beta-1)+\frac{1}{\lambda},\frac{\delta(\alpha+\beta-1)}{\theta^{\lambda}}t_1{}^{\lambda}\right)-\Gamma\left((\alpha+\beta-1)+\frac{1}{\lambda},\frac{\delta(\alpha+\beta-1)}{\theta^{\lambda}}t_2{}^{\lambda}\right)\right]\right] \quad (2-44)$$

والصيغة في المعادلة (2-44) تمثل الإنتروبي العامة الموزونة (WGE) من الدرجة (α,β) للتوزيع المركب ويبل –باريتومضاعف البتر

2-10 طرائِق تقدير المعلمات (δ,λ,θ) :

لتقديرمعلمات توزيع ويبل –باريتومضاعف البتر سنستعمل أربع طرائق للتقديروهي :

١. طريقة الإمكان الاعظم (**Maximum Likelihood Method**).

٢. طريقة العزوم (**Moment Method**) .

٣. طريقة المقدرات التجزيئية (**Percentiles Estimators Method**).

٤. طريقة العزوم في حالة التحيز(**Moment of Length- biased Method**).

2-10-1 طريقة الإمكان الأعظم (Maximum Likelihood Method MLE)

تم إستعمال إصطلاح دالة الإمكان الأعظم لأو ل مرة من الباحث **[Fisher]** عام (1922م) تُعد هذه الطريقة من الطرائق المهمة في التقدير لأنها تمتلك خصائص جيدة كثيرة ، مقارنة مع طرائق التقدير الأخرى ، وإن مبدأ هذه الطريقة يكمن في إيجاد قيمة تقديرية لمعلمة ما تجعل دالة الإمكان في نهايتها العظمى. **[Hanaa:2014]**

فإذا كانت لدينا عينة عشوائية (x_1 , x_2, ...,x_n) من التوزيع المعرف بالمعادلة (2−26) التوزيع المقترح فإن دالة الإمكان الأعظم والتي يرمز لها بالرمز (L)ستكون عبارةعن:

$$\boldsymbol{L\left(x_1, x_2 \dots\dots\dots x_{n,} \delta, \lambda, \theta\right) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \delta, \lambda, \theta)}$$

$$\boldsymbol{L = \frac{\left(\frac{\delta\lambda}{\theta^{\lambda}}\right)^{n} \prod_{i=1}^{n} Xi^{\lambda-1}\, e^{-\delta \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{xi}{\theta}\right)^{\lambda}}}{\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}} - e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)^{n}}} \qquad \boldsymbol{(2-45)}$$

نأخذ اللوغاريتم الطبيعي لطرفي المعادلة (2−45) آنفاً:

$$\boldsymbol{lnL = nln\delta + nln\lambda - n\lambda\, ln\,\theta + (\lambda - 1)\sum_{i=1}^{n} ln\,(Xi) - \delta\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{xi}{\theta}\right)^{\lambda} - n\,ln\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}} - e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)}$$

(2−46)

نأخذ المشتقة الجزئية الأولى للصيغة (2-46) بالنسبة $(\boldsymbol{\delta, \lambda, \theta,})$ ومساواتها الى الصفر نحصل على :

$$\boldsymbol{\frac{\partial}{\partial\delta} LnL(\delta,\lambda,\theta) = \frac{n}{\hat{\delta}} - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{Xi}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}} - \frac{n\left(\left(\frac{t_2}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}} e^{-\hat{\delta}\left(\frac{t_2}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}} - \left(\frac{t_1}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}} e^{-\hat{\delta}\left(\frac{t_1}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}}\right)}{e^{-\hat{\delta}\left(\frac{t_1}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}} - e^{-\hat{\delta}\left(\frac{t_2}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}}}}$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial}{\partial\delta} LnL(\delta,\lambda,\theta,) = 0}$$

$$\boldsymbol{\frac{n}{\hat{\delta}} - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{Xi}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}} - \frac{n\left(\left(\frac{t_2}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}} e^{-\hat{\delta}\left(\frac{t_2}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}} - \left(\frac{t_1}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}} e^{-\hat{\delta}\left(\frac{t_1}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}}\right)}{e^{-\hat{\delta}\left(\frac{t_1}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}} - e^{-\hat{\delta}\left(\frac{t_2}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}}} = 0}$$

(2-47)

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\boldsymbol{LnL}(\delta,\boldsymbol{\lambda},\theta)=\frac{n}{\boldsymbol{\lambda}}-n\ln\theta+\sum_{i=1}^{n}\ln(Xi)-\delta\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{Xi}{\theta}\right)^{\lambda}\ln\left(\frac{Xi}{\theta}\right)-\frac{n\begin{pmatrix}\delta\left(\frac{\mathbf{t}_2}{\theta}\right)^{\lambda}\ln\left(\frac{\mathbf{t}_2}{\theta}\right)e^{-\delta\left(\frac{\mathbf{t}_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\\-\delta\left(\frac{\mathbf{t}_1}{\theta}\right)^{\lambda}\ln\left(\frac{\mathbf{t}_1}{\theta}\right)e^{-\delta\left(\frac{\mathbf{t}_1}{\theta}\right)^{\lambda}}\end{pmatrix}}{\mathbf{e}^{-\delta\left(\frac{\mathbf{t}_1}{\theta}\right)^{\lambda}}-\mathbf{e}^{-\delta\left(\frac{\mathbf{t}_2}{\theta}\right)^{\lambda}}}$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\boldsymbol{LnL}(\delta,\boldsymbol{\lambda},\theta,)=\mathbf{0}$$

$$\frac{n}{\lambda^{\wedge}}-n\ln\theta^{\wedge}+\sum_{i=1}^{n}\ln(Xi)-\delta^{\wedge}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{Xi}{\theta^{\wedge}}\right)^{\lambda^{\wedge}}\ln\left(\frac{Xi}{\theta^{\wedge}}\right)-\frac{n\begin{pmatrix}\delta^{\wedge}\left(\frac{\mathbf{t}_2}{\theta^{\wedge}}\right)^{\lambda^{\wedge}}\ln\left(\frac{\mathbf{t}_2}{\theta^{\wedge}}\right)e^{-\delta^{\wedge}\left(\frac{\mathbf{t}_2}{\theta^{\wedge}}\right)^{\lambda^{\wedge}}}\\-\delta^{\wedge}\left(\frac{\mathbf{t}_1}{\theta^{\wedge}}\right)^{\lambda^{\wedge}}\ln\left(\frac{\mathbf{t}_1}{\theta^{\wedge}}\right)e^{-\delta^{\wedge}\left(\frac{\mathbf{t}_1}{\theta^{\wedge}}\right)^{\lambda^{\wedge}}}\end{pmatrix}}{\mathbf{e}^{-\delta^{\wedge}\left(\frac{\mathbf{t}_1}{\theta^{\wedge}}\right)^{\lambda^{\wedge}}}-\mathbf{e}^{-\delta^{\wedge}\left(\frac{\mathbf{t}_2}{\theta^{\wedge}}\right)^{\lambda^{\wedge}}}}=\mathbf{0}$$

(2-48)

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\boldsymbol{LnL}(\delta,\lambda,\theta)=-\frac{n\beta}{\theta}+\lambda\delta\frac{\sum_{i=1}^{n}Xi^{\lambda}}{\theta^{\lambda+1}}-\frac{n\begin{pmatrix}\lambda\delta\frac{\mathbf{t}_1{}^{\lambda}}{\theta^{\lambda+1}}e^{-\delta\left(\frac{\mathbf{t}_1}{\theta}\right)^{\lambda}}\\-\lambda\delta\frac{\mathbf{t}_2{}^{\lambda}}{\theta^{\lambda+1}}e^{-\delta\left(\frac{\mathbf{t}_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\end{pmatrix}}{\mathbf{e}^{-\delta^{\wedge}\left(\frac{\mathbf{t}_1}{\theta^{\wedge}}\right)^{\lambda^{\wedge}}}-\mathbf{e}^{-\delta^{\wedge}\left(\frac{\mathbf{t}_2}{\theta^{\wedge}}\right)^{\lambda^{\wedge}}}}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\boldsymbol{LnL}(\delta,\lambda,\theta)=\mathbf{0}$$

$$-\frac{n\lambda^{\wedge}}{\theta^{\wedge}}+\frac{\lambda\delta^{\wedge}\sum_{i=1}^{n}Xi^{\lambda^{\wedge}}}{\theta^{\wedge\lambda^{\wedge}+1}}-\frac{n\begin{pmatrix}\lambda^{\wedge}\delta^{\wedge}\frac{\mathbf{t}_1{}^{\lambda^{\wedge}}}{\theta^{\wedge B^{\wedge}+1}}e^{-\delta^{\wedge}\left(\frac{\mathbf{t}_1}{\theta^{\wedge}}\right)^{\lambda^{\wedge}}}\\-\lambda^{\wedge}\delta^{\wedge}\frac{\mathbf{t}_2{}^{\lambda^{\wedge}}}{\theta^{\wedge\lambda^{\wedge}+1}}e^{-\delta^{\wedge}\left(\frac{\mathbf{t}_2}{\theta^{\wedge}}\right)^{\lambda^{\wedge}}}\end{pmatrix}}{\mathbf{e}^{-\delta^{\wedge}\left(\frac{\mathbf{t}_1}{\theta^{\wedge}}\right)^{\lambda^{\wedge}}}-\mathbf{e}^{-\delta^{\wedge}\left(\frac{\mathbf{t}_2}{\theta^{\wedge}}\right)^{\lambda^{\wedge}}}}=\mathbf{0}\qquad(\mathbf{2-49})$$

ونظرا لصعوبة حل المعادلات (2-47) و (2-48) و(2-49) آنفاً عليه سوف يتم إستعمال الدالة **(F solve)** ببرنامج الماتلاب والتي تعتبر إحدى طرائق التحليل العددي (**Numerical Analysis**) وكما موضح في الملحق (c)

2-10-2 طريقة العزوم (Moment Method MOM) :

تعد طريقة العزوم من طرائق التقدير المهة التي تمتاز بسهولتها وفكرة هذه الطريقة هي تقدير عزوم المجتمع المجهولة بواسطة عزوم العينة **[Hanaa:2014]**

ويمكن كتابة العزم ذي الرتبة (r) كالاتي:

$$\boldsymbol{m_r}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{x_i}^{\boldsymbol{r}}}{\boldsymbol{n}}\qquad \text{(العينة)}$$

$$\boldsymbol{\mu_r}=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x^r})\qquad \text{(المجتمع)}$$

ووفقا لهذه الطريقة نجعل عزوم المجتمع مساوية لعزوم العينة

$$\boldsymbol{\mu_r}=\boldsymbol{m_r}\qquad(\mathbf{2-50})$$

فإذا كانت لدينا عينة عشوائية $(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n)$ تتوزع وفقا للإنموذج المعرف في المعادلة **(2.26)** ، $X \sim DTWPD(\delta, \lambda, \theta)$ فعند تطبيق التعريف آنفاً تتكون لدينا ثلاث معادلات :

$$\mathbf{m_1 = \frac{\sum_i^n x_i}{n} = E(x)} \qquad (2-51)$$

$$\mathbf{m_2 = \frac{\sum x_i^2}{n} = E(x)^2} \qquad (2-52)$$

$$\mathbf{m_3 = \frac{\sum x_i^3}{n} = E(x)^3} \qquad (2-53)$$

ووفقا للمعادلة (2-32) التي توضح العزم الرائي حول نقطة الأصل للإنموذج المقترح في الدراسة فإن :

١- إذا(r=1) نحصل على $E(x)$ ووفقا للمعادلة (2-51) نحصل على :

$$\mathbf{E}(x) = \frac{\theta}{\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}} - e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)\delta^{\frac{1}{\lambda}}}\left[\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda}, \delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right) - \Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda}, \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right] = \frac{\sum_i^n x_i}{n} = \bar{X}$$

(2-54)

٢- إذاكانت r=2 نحصل على $\mathbf{E}(x^2)$ ووفقا للمعادلة (2-52) نحصل على :

$$\mathbf{E}(x^2) = \frac{\theta^2}{\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}} - e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)\delta^{\frac{2}{\lambda}}}\left[\Gamma\left(\frac{2+\lambda}{\lambda}, \delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right) - \Gamma\left(\frac{2+\lambda}{\lambda}, \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right] = \frac{\sum_i^n x_i^2}{n}$$

(2-55)

٣- إذاكانت r=3 نحصل على$\mathbf{E}(x^3)$ ووفقا للمعادلة (2-53) نحصل على :

$$\mathbf{E}(x^3) = \frac{\theta^3}{\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}} - e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)\delta^{\frac{3}{\lambda}}}\left[\Gamma\left(\frac{3+\lambda}{\lambda}, \delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right) - \Gamma\left(\frac{3+\lambda}{\lambda}, \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right] = \frac{\sum_i^n x_i^3}{n}$$

(2-56)

لحل المعادلات (2-54) و (2-55) و(2-56) آنفاً نستعمل إحدى طرائق التحليل العددي (Numerical Analysis) والمتمثلة بالدالة **(F solve)** ببرنامج الماتلاب والتي تم برمجتها في الملحق (c)

2.10.3 طريقة المقدرات التجزيئية Percentiles Estimation Method (PEM)

طريقة المقدرات التجزئية **(PEM)** إقترحت هذه الطريقة لأو ل مرة من العالم الإنجليزي (Kao 1958-1959) (لتقدير معالم التوزيع الأسي المعمم وتوزيع ويبل).

[Hanaa:2014]

وفكرة هذه الطريقة هي تقدير دالة التوزيع التراكمية بطريقة لامعلمية:

فإذا كانت $(x_1 , x_2, \ldots\ldots\ldots,x_n)$ تتوزع وفق توزيع معين **G (.)** ،

$X(1) < X(2) < \cdots < X(n)$ ، تمثل الاحصاءات المرتبة للعينة ،

Wi =F(x) ، إذ ان Wi : هو مقدر لامعلمي يأخذ عدة صيغ منها:

$$\mathbf{Wi} = \frac{\mathbf{i}}{\mathbf{n+1}} \qquad (2-57)$$

$$\mathbf{Wi} = \frac{\mathbf{i}-\frac{3}{8}}{\mathbf{n}+\frac{1}{4}} \qquad (2-58)$$

وعند تطبيق الطريقة المذكورة آنفاً فإن

$$\mathbf{Wi} = \mathbf{G}(\mathbf{x}: \delta, \boldsymbol{\lambda}, \theta) \qquad (2-59)$$

$$\mathbf{Wi} = \frac{e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}} - e^{-\delta\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\lambda}}}{e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}} - e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}} \qquad (2-60)$$

وبأخذ اللوغارتم الطبيعي لطرفي المعادلة (2-60) آنفاً ومساواتها الى الصفر :

$$\ln \mathbf{Wi} = \ln\left[\frac{e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}} - e^{-\delta\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\lambda}}}{e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}} - e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}}\right]$$

$$\ln \mathbf{Wi} = \ln\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}} - e^{-\delta\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\lambda}}\right) - \ln\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}} - e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)$$

$$\ln \mathbf{Wi} - \ln\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}} - e^{-\delta\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\lambda}}\right) + \ln\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}} - e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right) = 0 \qquad (2-61)$$

وبأخذ التربيع والمجموع للمعادلة (2-61):

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\ln \mathbf{Wi} - \ln\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}} - e^{-\delta\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\lambda}}\right) + \ln\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}} - e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)\right]^2 \qquad (2-62)$$

وللحصول على مقدر (δ_{PEM}) نشتق المعادلة(2-62)بالنسبة الى δ ونساويها الى الصفروكما يأتي :

$$\frac{\partial PEM}{\partial \delta}=\sum_{i=1}^{n}2\left[\ln \mathrm{Wi}-\ln\left(e^{-\hat{\delta}\left(\frac{t_1}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}}-e^{-\hat{\delta}\left(\frac{x}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}}\right)+\ln\left(e^{-\hat{\delta}\left(\frac{t_1}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}}-e^{-\hat{\delta}\left(\frac{t_2}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}}\right)\right]$$
$$-\left(\frac{\left(\frac{x}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}e^{-\hat{\delta}\left(\frac{x}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}}-\left(\frac{t_1}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}e^{-\hat{\delta}\left(\frac{t_1}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}}}{e^{-\hat{\delta}\left(\frac{t_1}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}}-e^{-\hat{\delta}\left(\frac{x}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}}}\right)+\left(\frac{\left(\frac{t_2}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}e^{-\hat{\delta}\left(\frac{t2}{\hat{\theta}}\right)^{\lambda}}-\left(\frac{t_1}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}e^{-\hat{\delta}\left(\frac{t_1}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}}}{e^{-\hat{\delta}\left(\frac{t_1}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}}-e^{-\hat{\delta}\left(\frac{t_2}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}}}\right)$$

(2-63)

$$\frac{\partial PEM}{\partial \hat{\delta}}=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}2\left[\ln \mathrm{Wi}-\ln\left(e^{-\hat{\delta}\left(\frac{t_1}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}}-e^{-\hat{\delta}\left(\frac{x}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}}\right)+\ln\left(e^{-\hat{\delta}\left(\frac{t_1}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}}-e^{-\hat{\delta}\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\hat{\lambda}}}\right)\right]$$
$$-\left(\frac{\left(\frac{x}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}e^{-\hat{\delta}\left(\frac{x}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}}-\left(\frac{t_1}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}e^{-\hat{\delta}\left(\frac{t_1}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}}}{e^{-\hat{\delta}\left(\frac{t_1}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}}-e^{-\hat{\delta}\left(\frac{x}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}}}\right)+\left(\frac{\left(\frac{t_2}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}e^{-\hat{\delta}\left(\frac{t_2}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}}-\left(\frac{t_1}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}e^{-\hat{\delta}\left(\frac{t_1}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}}}{e^{-\hat{\delta}\left(\frac{t1}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}}-e^{-\hat{\delta}\left(\frac{t_2}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}}}\right)=0$$

(2-64)

وكذلك للحصول على مقدر ($\hat{\lambda}_{PEM}$) نشتق المعادلة(2-62)بالنسبة الى λ ونساويها الى الصفر وكما يأتي:

$$\frac{\partial PEM}{\partial \lambda}=\sum_{i=1}^{n}2\left[\ln \mathrm{Wi}-\ln\left(e^{-\hat{\delta}\left(\frac{t_1}{\hat{\theta}}\right)^{\lambda}}-e^{-\hat{\delta}\left(\frac{x}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}}\right)+\ln\left(e^{-\hat{\delta}\left(\frac{t_1}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}}-e^{-\hat{\delta}\left(\frac{t_2}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}}\right)\right]$$
$$-\left(\frac{\hat{\delta}\left(\frac{x}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}\ln\left(\frac{x}{\hat{\theta}}\right)e^{-\hat{\delta}\left(\frac{x}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}}-\hat{\delta}\left(\frac{t_1}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}\ln\left(\frac{t_1}{\hat{\theta}}\right)e^{-\hat{\delta}\left(\frac{t_1}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}}}{e^{-\hat{\delta}\left(\frac{t_1}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}}-e^{-\hat{\delta}\left(\frac{x}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}}}\right)+\left(\frac{\hat{\delta}\left(\frac{t_2}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}\ln\left(\frac{t_2}{\hat{\theta}}\right)e^{-\hat{\delta}\left(\frac{t_2}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}}-\hat{\delta}\left(\frac{t_1}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}\ln\left(\frac{t_1}{\hat{\theta}}\right)e^{-\hat{\delta}\left(\frac{t_1}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}}}{e^{-\hat{\delta}\left(\frac{t_1}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}}-e^{-\hat{\delta}\left(\frac{t_2}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}}}\right)$$

(2-65)

$$\frac{\partial PEM}{\partial \lambda}=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}2\left[\ln \mathrm{Wi}-\ln\left(e^{-\hat{\delta}\left(\frac{t_1}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}}-e^{-\hat{\delta}\left(\frac{x}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}}\right)+\ln\left(e^{-\hat{\delta}\left(\frac{t_1}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}}-e^{-\hat{\delta}\left(\frac{t_2}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}}\right)\right]$$
$$-\left(\frac{\hat{\delta}\left(\frac{x}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}\ln\left(\frac{x}{\hat{\theta}}\right)e^{-\hat{\delta}\left(\frac{x}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}}-\hat{\delta}\left(\frac{t_1}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}\ln\left(\frac{t_1}{\hat{\theta}}\right)e^{-\hat{\delta}\left(\frac{t_1}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}}}{e^{-\hat{\delta}\left(\frac{t_1}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}}-e^{-\hat{\delta}\left(\frac{x}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}}}\right)+\left(\frac{\hat{\delta}\left(\frac{t_2}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}\ln\left(\frac{t_2}{\hat{\theta}}\right)e^{-\hat{\delta}\left(\frac{t_2}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}}-\hat{\delta}\left(\frac{t_1}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}\ln\left(\frac{t_1}{\hat{\theta}}\right)e^{-\hat{\delta}\left(\frac{t_1}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}}}{e^{-\hat{\delta}\left(\frac{t_1}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}}-e^{-\hat{\delta}\left(\frac{t_2}{\hat{\theta}}\right)^{\hat{\lambda}}}}\right)=0$$

(2-66)

وكذلك للحصول على مقدر($\hat{\theta}_{PEM}$) نشتق المعادلة(2-62)بالنسبة الى θ ونساويها الى الصفروكما يأتي :

$$\frac{\partial PEM}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^{n} 2\left[\ln Wi - \ln\left(e^{-\hat\delta\left(\frac{t_1}{\hat\theta}\right)^{\hat\lambda}} - e^{-\hat\delta\left(\frac{x}{\hat\theta}\right)^{\hat\lambda}}\right) + \ln\left(e^{-\hat\delta\left(\frac{t_1}{\hat\theta}\right)^{\hat\lambda}} - e^{-\hat\delta\left(\frac{t_2}{\hat\theta}\right)^{\hat\lambda}}\right)\right] - \left(\frac{\hat\lambda\hat\delta\,\frac{t_1^{\hat\lambda}}{\hat\theta^{\hat\lambda+1}}\, e^{-\hat\delta\left(\frac{t_1}{\hat\theta}\right)^{\hat\lambda}} - \hat\lambda\hat\delta\,\frac{x^{\hat\lambda}}{\hat\theta^{\hat\lambda+1}}\, e^{-\hat\delta\left(\frac{x}{\hat\theta}\right)^{\hat\lambda}}}{e^{-\hat\delta\left(\frac{t_1}{\hat\theta}\right)^{\hat\lambda}} - e^{-\hat\delta\left(\frac{x}{\hat\theta}\right)^{\hat\lambda}}} \right) + \left(\frac{\hat\lambda\hat\delta\,\frac{t_1^{\hat\lambda}}{\hat\theta^{\hat\lambda+1}}\, e^{-\hat\delta\left(\frac{t_1}{\hat\theta}\right)^{\hat\lambda}} - \lambda\delta\,\frac{t_1^{\lambda}}{\theta^{\lambda+1}}\, e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}}{e^{-\hat\delta\left(\frac{t_1}{\hat\theta}\right)^{\hat\lambda}} - e^{-\hat\delta\left(\frac{t_2}{\hat\theta}\right)^{\hat\lambda}}} \right) \qquad (2-67)$$

$$\frac{\partial PEM}{\partial \hat\theta} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} 2\left[\ln Wi - \ln\left(e^{-\hat\delta\left(\frac{t_1}{\hat\theta}\right)^{\hat\lambda}} - e^{-\hat\delta\left(\frac{x}{\hat\theta}\right)^{\hat\lambda}}\right) + \ln\left(e^{-\hat\delta\left(\frac{t_1}{\hat\theta}\right)^{\hat\lambda}} - e^{-\hat\delta\left(\frac{t_2}{\hat\theta}\right)^{\hat\lambda}}\right)\right] - \left(\frac{\hat\lambda\hat\delta\,\frac{t_1^{\hat\lambda}}{\hat\theta^{\hat\lambda+1}}\, e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\hat\theta}\right)^{\hat\lambda}} - \hat\lambda\hat\delta\,\frac{x^{\hat\lambda}}{\hat\theta^{\hat\lambda+1}}\, e^{-\delta\left(\frac{x}{\hat\theta}\right)^{\hat\lambda}}}{e^{-\hat\delta\left(\frac{t_1}{\hat\theta}\right)^{\hat\lambda}} - e^{-\hat\delta\left(\frac{x}{\hat\theta}\right)^{\hat\lambda}}} \right) + \left(\frac{\hat\lambda\hat\delta\,\frac{t_1^{\lambda}}{\hat\theta^{\hat\lambda+1}}\, e^{-\hat\delta\left(\frac{t_1}{\hat\theta}\right)^{\hat\lambda}} - \hat\lambda\hat\delta\,\frac{t_1^{\lambda}}{\hat\theta^{\hat\lambda+1}}\, e^{-\hat\delta\left(\frac{t_2}{\hat\theta}\right)^{\hat\lambda}}}{e^{-\hat\delta\left(\frac{t_1}{\hat\theta}\right)^{\hat\lambda}} - e^{-\hat\delta\left(\frac{t_2}{\hat\theta}\right)^{\hat\lambda}}} \right) = 0$$

(2-68)

لحل المعادلات **(2-64)** ، **(2-66)**، **(2-68)** المذكورة آنفاً نستعمل الدالة **(F solve)** الموضحة في الملحق (c) .

2-10-4 طريقة العزوم في حالة التحيز:

The moments of Length biased Method

أقتُرحت هذه الطريقة من قبل **(Nareerat and Winai 2014)** ومبدأ هذه الطريقة هو إيجاد العزم الذي يمثل طول التحيز**(Length biased)** ، $E_L(x^r)$ وذلك عن طريق الصيغة الاتية :

$$E_L(x^r) = \frac{E(x^{r+1})}{E(x)} \qquad r = 1, 2, 3, \dots \dots \qquad (2-69)$$

إن الصيغة المذكورة آنفاً تستعمل لايجاد عدة مقاييس إحصائية كالوسط الحسابي والتباين ومعامل الالتواء ومعامل التفلطح والحصول على أفضل ملائمة **(fitting)** من خلال مقارنة عدة مجموعات مختلفة لقيم المعلمات المراد تقديرها ، وإختيار المقدرات التي تحقق أصغر قيمة لمعامل الالتواء والتفلطح **[Nanuwong and Bodhisuwan: 2014]**

[مهدي وهاب نعمة:2015]

إذ أن $\mathbf{E(x^{r+1})}$ هو العزم ذو الرتبة(r+1) :

$$E(x^{r+1}) = \int_{t_1}^{t_2} x^{r+1}\, g(x)\; dx$$

$$\mathrm{E}(x^{r+1}) = \int_{t_1}^{t_2} x^{r+1} \frac{\frac{\delta\lambda}{\theta}\left(\frac{X}{\theta}\right)^{\lambda-1} e^{-\delta\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\lambda}}}{\mathrm{e}^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}} - \mathrm{e}^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}}\; dx$$

$$\mathrm{E}(x^{r+1}) = \frac{1}{\mathrm{e}^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}} - \mathrm{e}^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}} \int_{t_1}^{t_2} x^{r+1}\, \frac{\delta\lambda}{\theta}\left(\frac{X}{\theta}\right)^{\lambda-1} e^{-\delta\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\lambda}}\; dx$$

$$\mathrm{E}(x^{r+1}) = \frac{1}{\mathrm{e}^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}} - \mathrm{e}^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}} \frac{\delta\lambda}{\theta^{\lambda}} \int_{t_1}^{t_2} (x)^{r+\lambda}\; e^{-\delta\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\lambda}}\; dx$$

$$\text{let } \mathrm{w} = \delta \left(\frac{x}{\theta}\right)^{\lambda} \Rightarrow \left(\frac{\mathrm{w}}{\delta}\right)^{\frac{1}{\lambda}} = \frac{\mathrm{x}}{\theta}$$

$$x = \theta\left(\frac{\mathrm{w}}{\delta}\right)^{\frac{1}{\lambda}} \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{\theta}{\lambda}\left(\frac{\mathrm{w}}{\delta}\right)^{\frac{1}{\lambda}-1} \frac{1}{\delta}\mathrm{dw}$$

$$\mathrm{E}(x^{r+1}) = \frac{1}{\mathrm{e}^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}} - \mathrm{e}^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}} \frac{\delta\lambda}{\theta^{\lambda}} \int_{\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}^{\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}} \left(\theta\left(\frac{\mathrm{w}}{\delta}\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right)^{r+\lambda} e^{-w}\; \frac{\theta}{\lambda}\left(\frac{\mathrm{w}}{\delta}\right)^{\frac{1}{\lambda}-1} \frac{1}{\delta}\mathrm{dw}$$

$$\mathrm{E}(x^{r+1}) = \frac{1}{\left(\mathrm{e}^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}} - \mathrm{e}^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)} \frac{\delta\lambda}{\theta^{\lambda}} \int_{\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}^{\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}} \theta^{r+\lambda}\left(\frac{\mathrm{w}}{\delta}\right)^{\frac{r}{\lambda}+1} e^{-w}\; \frac{\theta}{\lambda}\left(\frac{\mathrm{w}}{\delta}\right)^{\frac{1}{\lambda}-1} \frac{1}{\delta}\mathrm{dw}$$

$$\mathrm{E}(x^{r+1}) = \frac{1}{\left(\mathrm{e}^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}} - \mathrm{e}^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)} \frac{\delta\lambda}{\theta^{\lambda}} \int_{\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}^{\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}} \frac{\theta^{r+\lambda+1}}{\delta\lambda}\left(\frac{\mathrm{w}}{\delta}\right)^{\frac{r}{\lambda}+1} e^{-w}\left(\frac{\mathrm{w}}{\delta}\right)^{\frac{1}{\lambda}-1} \mathrm{dw}$$

$$\mathrm{E}(x^{r+1}) = \frac{1}{\left(\mathrm{e}^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}} - \mathrm{e}^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)} \theta^{r+1} \int_{\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}^{\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}} \left(\frac{\mathrm{w}}{\delta}\right)^{\frac{r+1}{\lambda}} e^{-w}\mathrm{dw}$$

$$\mathrm{E}(x^{r+1}) = \frac{1}{\left(\mathrm{e}^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}} - \mathrm{e}^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)} \frac{\theta^{r+1}}{\delta^{\frac{r+1}{\lambda}}} \int_{\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}^{\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}} \mathrm{w}^{\frac{r+1}{\lambda}}\; e^{-w}\mathrm{dw}$$

$$\int_{\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}^{\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}} w^{\frac{r+1}{\lambda}} \quad e^{-w}dw = \left[\Gamma\left(\frac{r+\lambda+1}{\lambda},\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right) - \Gamma\left(\frac{r+\lambda+1}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]$$

$$E(x^{r+1}) = \frac{\theta^{r+1}}{\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}} - e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)\delta^{\frac{r+1}{\lambda}}}\left[\Gamma\left(\frac{r+\lambda+1}{\lambda},\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right) - \Gamma\left(\frac{r+\lambda+1}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]$$

(2-70)

ومن المعادلة (2-30) لدينا $E(x)$ وهو يساوي :

$$E(x) = \frac{\theta}{\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}} - e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)\delta^{\frac{1}{\lambda}}}\left[\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right) - \Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]$$

ونعوض في المعادلة (69-2) المذكورة آنفاً

$$E_L(x^r) = \frac{\dfrac{\theta^{r+1}}{\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}} - e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)\delta^{\frac{r+1}{\lambda}}}\left[\Gamma\left(\frac{r+\lambda+1}{\lambda},\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right) - \Gamma\left(\frac{r+\lambda+1}{\lambda},\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]}{\dfrac{\theta}{\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}} - e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)\delta^{\frac{1}{\lambda}}}\left[\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right) - \Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]}$$

$$E_L(x^r) = \frac{\theta^r \left[\Gamma\left(\frac{r+\lambda+1}{\lambda},\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right) - \Gamma\left(\frac{r+\lambda+1}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]}{\delta^{\frac{r}{\lambda}} \left[\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right) - \Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]}$$

(2-71)

وفقاً للمعادلة (2-71) آنفاً فإننا نحصل على خصائص جديدة لتوزيع ويبل باريتو مضاعف البتر أكثر أهمية من الخصائص التي تم دراستها عن طريق العزوم من الدرجة r.

في المعادلة (2-71) عندما (r=1) فإننا نحصل على الوسط الحسابي و كالآتي :

$$E_{L(mean)}(x) = \frac{\theta \left[\Gamma\left(\frac{2+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right) - \Gamma\left(\frac{2+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]}{\delta^{\frac{1}{\lambda}} \left[\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right) - \Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]} \qquad (2-72)$$

وكذلك في المعادلة (2-71) عندما (r=2) فاننا نحصل على$E_L(x^2)$ و كالاتي :

$$E_L(x^2)=\frac{\theta^2\ \left[\Gamma\left(\frac{3+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{3+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]}{\delta^{\frac{2}{\lambda}}\ \left[\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]}\qquad(2-73)$$

ولأستخراج التباين نستعمل الصيغة الآنية :

$$\sigma_L{}^2=E_L(x^2)-\left(E_L(x)\right)^2\qquad(2-74)$$

نعوض المعادلة (72 -2) والمعادلة (73-2) في المعادلة (74-2) لإيجاد التباين

$$\sigma_L{}^2=\frac{\theta^2\ \left[\Gamma\left(\frac{3+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{3+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]}{\delta^{\frac{2}{\lambda}}\ \left[\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]}-\left[\frac{\theta\ \left[\Gamma\left(\frac{2+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{2+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]}{\delta^{\frac{1}{\lambda}}\ \left[\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]}\right]^2$$

(2-75)

اما معامل الالتواء حسب طريقة العزوم في حالة التحيز

$$C.S_L=\frac{E_L(x-\mu)^3}{\sigma_L{}^3}\qquad(2-76)$$

$$E_L(x-\mu)^3=$$

$$\frac{\theta^3}{\delta^{\frac{3}{\lambda}}}\left[\left(\frac{\left[\Gamma\left(\frac{4+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{4+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]}{\left[\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]}\right)-3\left(\frac{\left[\Gamma\left(\frac{3+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{3+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]}{\left[\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]}\ \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]}{\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}-e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)}\right)+\right.$$

$$\left.3\left(\frac{\left[\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]^2}{\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}-e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)^2}\ \frac{\left[\Gamma\left(\frac{2+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{2+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]}{\left[\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]}\right)-\left(\frac{\left[\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]^3}{\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}-e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)^3}\right)\right]$$

$$E_L(x-\mu)^3 = \frac{\theta^3}{\delta^{\frac{3}{\lambda}}}\left[\left(\frac{\left[\Gamma\left(\frac{4+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{4+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]}{\left[\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]}\right) - 3\left(\frac{\left[\Gamma\left(\frac{3+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{3+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]}{\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}-e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)}\right) + \right.$$

$$\left. 3\left(\frac{\left[\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]\left[\Gamma\left(\frac{2+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{2+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]}{\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}-e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)^2}\right) - \left(\frac{\left[\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]^3}{\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}-e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)^3}\right)\right] \tag{2-77}$$

$$.\ \sigma_L{}^3 = \left\{\frac{\theta^2\left[\Gamma\left(\frac{3+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{3+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]}{\delta^{\frac{2}{\lambda}}\left[\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]} - \left[\frac{\theta\left[\Gamma\left(\frac{2+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{2+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]}{\delta^{\frac{1}{\lambda}}\left[\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]}\right]^2\right\}^{\frac{3}{2}} \tag{2-78}$$

وعن طريق قسمة المعادلة (2-77) على المعادلة (2-78) نحصل على معامل الإلتواء$\mathbf{C.S}_L$ في حالة التحيز

معامل التفلطح (coefficient of Kurtosis):

$$\mathbf{C.K}_L = \frac{(x-\mu)^4}{\sigma_L^4}$$

$$E(x-\mu)^4 = \frac{\theta^4\left[\Gamma\left(\frac{5+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{5+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]}{\delta^{\frac{4}{\lambda}}\left[\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]} -$$

$$4\frac{\theta^3\left[\Gamma\left(\frac{4+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{4+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]}{\delta^{\frac{3}{\lambda}}\left[\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]}\frac{\theta\left[\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]}{\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}-e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)\delta^{\frac{1}{\lambda}}} +$$

$$6\frac{\theta^2\left[\Gamma\left(\frac{3+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{3+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]}{\delta^{\frac{2}{\lambda}}\left[\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]}\frac{\theta^2\left[\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]^2}{\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}-e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)^2\delta^{\frac{2}{\lambda}}} -$$

$$4\frac{\theta\left[\Gamma\left(\frac{2+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{2+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]}{\delta^{\frac{1}{\lambda}}\left[\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]}\frac{\theta^3\left[\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]^3}{\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}-e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)^3\delta^{\frac{3}{\lambda}}} +$$

$$\frac{\theta^4\left[\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]^4}{\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}-e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)^4\delta^{\frac{4}{\lambda}}}$$

$$E(x-\mu)^4=\frac{\theta^4}{\delta^{\frac{4}{\lambda}}}\left\{\frac{\left[\Gamma\left(\frac{5+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{5+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]}{\left[\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]}-4\frac{\left[\Gamma\left(\frac{4+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{4+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]}{\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}-e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)}+\right.$$

$$6\frac{\left[\Gamma\left(\frac{3+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{3+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]\left[\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]}{\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}-e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)^2}+$$

$$\left.4\frac{\left[\Gamma\left(\frac{2+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{2+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]\left[\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]^3}{\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}-e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)^3}+\frac{\left[\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]^4}{\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}-e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)^4}\right\}$$

(2-79)

$$\sigma_L^4=\left\{\frac{\theta^2\left[\Gamma\left(\frac{3+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{3+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]}{\delta^{\frac{2}{\lambda}}\left[\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]}-\left[\frac{\theta\left[\Gamma\left(\frac{2+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{2+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]}{\delta^{\frac{1}{\lambda}}\left[\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]}\right]^2\right\}^2$$

(2-80)

وعن طريق قسمة المعادلة (2-79) على المعادلة (2-80) نحصل على معامل التفلطح $\mathbf{C.K}_L$ في حالة التحيز:

معامل الاختلاف **Coefficients of Variation**

$$\mathbf{C.V}_L=\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{\mu}} \qquad (2-81)$$

$$\sigma_L=\sqrt{\boldsymbol{\sigma}_L{}^2}$$

$$\mathbf{C.V}_L=\frac{\left\{\frac{\theta^2\left[\Gamma\left(\frac{3+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{3+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]}{\delta^{\frac{2}{\lambda}}\left[\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]}-\left[\frac{\theta\left[\Gamma\left(\frac{2+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{2+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]}{\delta^{\frac{1}{\lambda}}\left[\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]}\right]^2\right\}^{1/2}}{\frac{\theta}{\left(e^{-\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}}-e^{-\delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}}\right)\delta^{\frac{1}{\lambda}}}\left[\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\delta\left(\frac{t_1}{\theta}\right)^{\lambda}\right)-\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{\lambda},\ \delta\left(\frac{t_2}{\theta}\right)^{\lambda}\right)\right]}$$

(2-82)

2-11 المعايير المُستعملة للمفاضلة بين التوزيعات .

في هذه الفقرة سنستعرض بعض المعايير الإحصائية المستعملة للمفاضلة بين التوزيعات والتي تم إستعمالها في الجانب التطبيقي من هذه الدراسة عند تحليل البيانات وهي :

1- إختبار أكيكي (AIC) Akaike's Test :

عام (1973) أقترح الباحث الياباني (Akaike) صيغة تستعمل للمفاضلة بين التوزيعات إذ أن التوزيع الذي يمتلك أقل قيمة للـ**(AIC)** يكون أفضل والصيغة العامة للأختبار كالآتي:

$$\mathbf{AIC = -2L}\boldsymbol{og}\mathbf{(L) + 2p} \qquad (\mathbf{2-83})$$

إذ أن :

L: دالة الإمكان الأعظم للتوزيع .

P :تمثل عدد معلمات التوزيع .

2- إختبار أكيكي المصحح (AIC_C) correct Akaike's Test :

عام (1993) إقترح كلاً من (Brockwell and Davis) صيغة رياضية لتصحيح التحيز في إختبار أكيكي (AIC) وذلك بإضافة المقدار $\frac{\mathbf{2np}}{\mathbf{n-p-1}}$ فتكون الصيغة الرياضية للإختبار كالآتي :

$$\mathbf{AIC}_C = \mathbf{AIC} + \frac{\mathbf{2np}}{\mathbf{n-p-1}} \qquad (\mathbf{2-84})$$

إذ إن n تمثل حجم العينة .

3-إختبار بيز اكيكي Bayes Akaike's Test :

في عام (1978) إقترح العالم (Schwarz) معياراً آخرللمفاضلة بين التوزيعات الإحتمالية ويرمز له إختصاراً (BIC) إذ يكون التوزيع الذي يمتلك أقل قيمة لـ (BIC) هو الأفضل ، وأن صيغة هذا الاختبار كما يأتي :

$$\mathbf{BIC = -2L}\boldsymbol{og}\mathbf{(L) + plog(n)} \qquad (2\text{-}85)$$

[مطر ، واخرون: 2011]

الفصل الثالث

الجانب التجريبي

و التطبيقي

الفصـــــــل الثالث
الجانب التجريبي والتطبيقي

3-1 الجانب التجريبي

3-1-1 توطئة :

في الفصل السابق تم إستعمال بعض الطرائق لتقدير معالم توزيع (ويبل - باريتو) مضاعف البتر وفي هذا الجزء سنوضح بصورة مبسطه مفهوم المحاكاة والطريقة التي تم بها توليد البيانات العشوائية وإستعمالها في تقديرمعلمات التوزيع المبتور وحسب الطرائق المذكورة سابقا والتي بواسطتها تم تقدير دالة الإنتروبي العامة الموزونة وتفسيرالنتائج وإختيار أفضل طريقة للتقدير .

3-1-2 مفهوم المحاكاة Simulation concept:

المحاكاة simulation وهي عبارة عن تشبيه تقريبي للنظام الحقيقي الذي يصعب الحصول على بياناته الحقيقية وذلك عن طريق مجموعة من الفرضيات التي تكون على شكل علاقات رياضية أو منطقية أو رمزية موضوعة ضمن برامج الكومبيوتر المختلفة .

وهنالك عدة طرائق في المحاكاة كالطريقة المختلطة Mixed procedure والطريقة التناظرية Analog procedure وطريقة مونت كارلو Monte Carlo، وقد تم إعتماد طريقة مونت كارلو لكونها تُعد من أشهر الطرائق وأكثرها إستعمالاً. إذ تمتاز بمرونتها العالية في توليد بيانات عشوائية مختلفة في كل تجربة إذ تكون سلسلة الارقام العشوائية في كل تجربة مستقلة عن الاخرى ،فضلا عن تكرار التجربة أكثر من مرة مع تغيير قيم المدخلات وبذلك فهي تعطي شرحا وافيا عن طبيعة الظاهرة المدروسة وتوفرالجهد والوقت والمال للباحث.

وبذلك فإن المحاكاة توفر للباحث قاعدة تجريبية فضلاً عن القاعدة النظرية لإختيار الطريقة والاسلوب الملائم في تحليل بيانات الظاهرة المدروسة عن طريق مطابقة خصائص هذه البيانات مع الانواع التي اُجريت عليها المحاكاة

[مهدي وهاب نعمة:2015]

3-1-3 وصف مراحل تجربة المحاكاة Describe Simulation Experiment:

تم كتابة برنامج المحاكاة المرفق في الملحق (C) بإستعمال برنامج (Matlab) إذ تضمن البرنامج أربعة مراحل لتقدير معلمتي الشكل ومعلمة القياس ودالة الإنتروبي للتوزيع المركب (ويبل - باريتو) مضاعف البتر وهي على الترتيب الآتي :

المرحلة الأولى :

أولاً : تعيين القيم الإفتراضية للمعلمات .

وتُعد هذه المرحلة من المراحل المهمة والأساسية التي تعتمد عليها المراحل اللآحقة إذ تم تعيين القيم الإفتراضية للمعلمات وفقا لما يأتي :

1- فيما يخص معلمتي الشكل ومعلمة القياس للتوزيع المركب المبتور فقد تم إختيار قيم مختلفة لها لغرض إعطاء فكرة عن المقدرات ونمط سلوكها إذ تم تحددبد النماذج الآتية (لأنها كانت الأفضل من بقية النماذج التي تم تجريبها):

جدول (1- 3)

القيم الإفتراضية للمعلمات

Model	Parameter		
	δ	λ	θ
A	4	4	4
B	2.5	4.5	3.5
C	4	5	4
D	6	4	4
E	5	6	3
F	8	7	5

2- تم تحديد ثلاث فترات للبتر وهي :

جدول (2- 3)

القيم الإفتراضية لفترات البتر

(t_1, t_2)
(1,5)
(2,5)
(2,10)

ثبات قيمة t_2

ثبات قيمة t_1

وبإستعمال القيم المفترضة في " 1 " مع فترات البتر في " 2 " يتكون لدينا الجدول أدناه والذي يمثل النماذج حسب فترات البتر والذي سيستعمل لمعرفة الطريقة الأفضل لتقدير معلمات التوزيع المركب مضاعف البتر.

جدول (3- 3)

القيم الإفتراضية للمعلمات وحسب فترات البتر

Truncated	Model	δ	λ	θ
$(t_1 = 1, t_2 = 5)$	A	4	4	4
	B	2.5	4.5	3.5
	C	4	5	4
	D	6	4	4
	E	5	6	3
	F	8	7	5
$(t_1 = 2, t_2 = 5)$	A	4	4	4
	B	2.5	4.5	3.5
	C	4	5	4
	D	6	4	4
	E	5	6	3
	F	8	7	5
$(t_1 = 2, t_2 = 10)$	A	4	4	4
	B	2.5	4.5	3.5
	C	4	5	4
	D	6	4	4
	E	5	6	3
	F	8	7	5

3- أما بالنسبة الى المعلمات الخاصة بدالة ألإنتروبي العامة الموزونة وهي (α, β) سيتم إختيارها وفقاً للشروط الخاصة بدالة ألإنتروبي والموضحة في المعادلة (12-2) إذ يجب أن تكون كالآتي:

a) $\beta \geq 1$

b) $\beta - 1 < \alpha < \beta$

c) $\alpha + \beta < (>) 2$

ولمعرفة سلوك دالة الإنتروبي للتوزيع المركب مضاعف البتر فقد تم تنفيذ تجربتين فقط التجربة ألاولى عندما تكون $\alpha + \beta > 2$ والثانية عندما تكون $\alpha + \beta < 2$ وكل تجربة ستنفذ بثلاثة أنواع من البتر وكل نوع من البتر سيأخذ جميع النماذج المفترضة.

ثانياً: إختيار حجم العينة (n):

تم إختيار خمسة حجوم للعينات لمعرفة مدى تأثير حجم العينة على دقة النتائج المستحصلة من طرائق التقدير المختلفة والمستعملة في الدراسة وهي **(15,30,50,100,150)**

ثالثاً:تكرار التجربة

كررت كل تجربة (1000) مرة وذلك للوصول الى تقديرات متجانسة

<u>المرحلة الثانية :</u> مرحلة توليد البيانات .

في هذه المرحلة تم توليد بيانات عشوائية تتبع التوزيع المنتظم في الفترة (0,1) ثم تحويلها الى التوزيع المركب (ويبل – باريتو) بتطبيق طريقة التحويل المعكوس عن طريق إستعمال دالة التوزيع التجميعية للتوزيع المركب (ويبل – باريتو) كما في الصيغة الآتية :

$$\mathbf{F\,(x) = 1 - e^{-\delta\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\lambda}}}$$

وبفرض أن $\mathbf{F\,(x)} = \boldsymbol{u}$

$$\mathbf{u = 1 - e^{-\delta\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\lambda}}}$$

$$\mathbf{e^{-\delta\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\lambda}} = 1 - u}$$

$$\mathbf{-\delta\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\lambda} = \ln(1-u)}$$

$$\mathbf{\delta\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\lambda} = \frac{1}{\ln(1-u)}}$$

$$\mathbf{\delta x^{\lambda}\ln(1-u) = \theta^{\lambda}}$$

$$\mathbf{x = \theta\left(\frac{\delta}{\ln(1-u)}\right)^{\frac{1}{\lambda}}} \qquad \mathbf{(3-1)}$$

المعادلة (1 -3) تستعمل لتوليد بيانات عشوائية تتبع التوزيع المركب (ويبل – باريتو).

إذ أن (u) هو متغير عشوائي يتبع التوزيع المنتظم بالفترة (0,1)

وبعد توليد البيانات يتم تحديد فترات البتر من اليمين ومن اليسار وحسب القيم الإفتراضية لفترات البتر في الجدول (2-3) وبذلك تكون البيانات العشوائية المتولدة تتبع التوزيع المركب مضاعف البتر .

المرحلة الثالثة : مرحلة التقدير.

في هذه المرحلة سيتم تقدير معلمات التوزيـع المركب المبتور ودالـة ألإنتروبـي بإستعمال الطرائق المذكورة في الجانب النظري وهي :

1- طريقة ألإمكان الأعظم (**MLE**).

2- طريقة العزوم (**MOM**) .

3- طريقة المركبات التجزيئية **(PEM)**.

4- طريقة العزوم في حالة التحيز **(MOMLB)**.

المرحلة الرابعة: المقارنة بين طرائق التقدير.

المرحلـة الأخيـرة مـن مراحـل المحاكـاة هـي المقارنـة بـين طرائـق التقـدير المختلفـة وفقـاً للمعيـار الأحصائي متوسط مربعات الخطـأ (MSE) إذ كلمـا كـان أقل كـان المقدر أفضـل وحسـب الصـيغة الآتية :

$$\boldsymbol{MSE(\theta^{\wedge}) = \frac{1}{R}\sum_{i=1}^{r}(\theta_i^{\wedge} - \theta)^2} \qquad (3-2)$$

إذ أن :

R: تمثل عدد التكرارات لكل تجربة والبالغة (1000) .

$\boldsymbol{\theta_i^{\wedge}}$**:** تمثل المعلمة المقدرة .

$\boldsymbol{\theta}$ **:** تمثل قيمة المعلمة وفقاً للقيم الابتدائية . **[مهدي وهاب نعمة:2015]**

3-1-4 الرتب الجزئية والكلية partial and overall ranks

سيتم تحديد الطريقة الأفضل في التقدير بالإعتماد على الرتب الجزئية والكلية إذ تم وضع رتبة لكل قيمـة مـن قيم (MSE) وكمـا موضـح فـي الملحـق (A) أمـا فـي الجـدول (3-4 ,3-5 , 3-6) الاتيـة فـإن كـل صـف يمثـل الرتـب الكليـة لقيم (MSE) للمعلمـات المقدّرة عنـد حجـوم العينـات المختلفة ومجموع هذه الرتب يمثل مجموع الرتب الكلية والطريقة التـي تمتلك أقل مجمـوع للرتـب الكلية تُعد هي الأفضل.

[Al-Mofleh and et al:2020]

3-1-5 تحليل نتائج تجربة المحاكاة (Analysis of Simulation Result):

في هذا الجزء سنقوم بعرض ومناقشة نتائج المحاكاة للطرائق المستعملة في تقدير معلمات التوزيـع المركب ويبل – باريتو مضاعف البتر وتقديردالة ألإنتروبي وكما في الجداول ادناه:

جدول(3-4) يوضح الرتب الكلية لجميع طرائق التقدير عند **فترة البتر الأولى** **(t_1=1,t_2=5)** عند حجم عينة (15,30,50,100,150) ولجميع النماذج المفروضة وكما يأتي :

Truncated (1-5)					
Parameter	n	Method			
		MLE	Mom	Per	MomlB
$\delta = 4, \lambda = 4, \theta = 4$	15	3	4	2	1
	30	2	4	3	1
	50	1	4	3	2
	100	1	4	3	2
	150	1	4	3	2
$\delta = 2.5, \lambda = 4.5, \theta = 3.5$	15	3	4	2	1
	30	1	4	3	2
	50	1	4	3	2
	100	1	4	3	2
	150	1	4	2.5	2.5
$\delta = 4, \lambda = 5, \theta = 4$	15	3	4	2	1
	30	3	4	2	1
	50	1	4	3	2
	100	1	4	3	2
	150	1	4	3	2
$\delta = 6, \lambda = 4, \theta = 4$	15	3	4	2	1
	30	3	4	1	2
	50	1	4	2.5	2.5
	100	1	4	3	2
	150	1	4	3	2
$\delta = 5, \lambda = 6, \theta = 3$	15	3.5	3.5	2	1
	30	3	4	2	1
	50	1	4	2.5	2.5
	100	1	4	3	2
	150	1	4	3	2
$\delta = 8, \lambda = 7, \theta = 5$	15	3	4	2	1
	30	3	4	2	1
	50	1	4	2	3
	100	1	4	2	3
	150	1	4	3	2
∑Ranks		51.5	119.5	75.5	53.5
Overall rank		1	4	3	2
∑Ranks	n=15	18.5	23.5	12	6
Overall rank		4	3	2	1
∑Ranks	n=30	15	24	13	8
Overall rank		4	3	2	1
∑Ranks	n=50	6	24	16	14
Overall rank		1	4	3	2
∑Ranks	n=100	6	24	17	13
Overall rank		1	4	3	2
∑Ranks	n=150	6	24	17.5	12.5
Overall rank		1	4	3	2

جدول(3-5) يوضح الرتب الكلية لجميع طرائق التقدير عند **فترة البتر الثانية** $(t_1=2, t_2=5)$ عند حجم عينة (15,30,50,100,150) ولجميع النماذج المفروضة وكما يأتي :

Truncated (2-5)					
Parameter	n	Method			
		MLE	Mom	Per	MomlB
$\delta = 4, \lambda = 4, \theta = 4$	15	3	4	2	1
	30	2.5	4	2.5	1
	50	1	4	3	2
	100	1	4	3	2
	150	1	4	3	2
$\delta = 2.5, \lambda = 4.5, \theta = 3.5$	15	3.5	3.5	2	1
	30	3	4	2	1
	50	1	4	3	2
	100	1	4	3	2
	150	1	4	3	2
$\delta = 4, \lambda = 5, \theta = 4$	15	4	3	2	1
	30	3	4	1	2
	50	1	4	2.5	2.5
	100	1	4	3	2
	150	1	4	3	2
$\delta = 6, \lambda = 4, \theta = 4$	15	3	4	2	1
	30	2	4	1	3
	50	1	4	3	2
	100	1	4	3	2
	150	1	4	3	2
$\delta = 5, \lambda = 6, \theta = 3$	15	2.5	4	2.5	1
	30	3	4	2	1
	50	1	4	2	3
	100	1	4	2	3
	150	1	4	3	2
$\delta = 8, \lambda = 7, \theta = 5$	15	3	4	2	1
	30	3	4	2	1
	50	1	4	2	3
	100	1	4	3	2
	150	1	4	3	2
∑Ranks		53.5	118.5	73.5	54.5
Overall rank		1	4	3	2
∑Ranks	n=15	19	22.5	12.5	6
Overall rank		3	4	2	1
∑Ranks	n=30	16.5	24	10.5	9
Overall rank		3	4	2	1
∑Ranks	n=50	6	24	15.5	14.5
Overall rank		1	4	3	2
∑Ranks	n=100	6	24	17	13
Overall rank		1	4	3	2
∑Ranks	n=150	6	24	18	12
Overall rank		1	4	3	2

جدول(3-6) يوضح الرتب الكلية لجميع طرائق التقدير عند **فترة البتر الثالثة** $(t_1=2,t_2=10)$ عند حجم عينة (15,30,50,100,150) ولجميع النماذج المفروضة وكما يأتي :

Truncated (2-10)					
Parameter	n	Method			
		MLE	Mom	Per	MomlB
$\delta = 4, \lambda = 4, \theta = 4$	15	3	4	1.5	1.5
	30	2	4	1	3
	50	1	4	3	2
	100	1	4	3	2
	150	1	4	3	2
$\delta = 2.5, \lambda = 4.5, \theta = 3.5$	15	3	4	2	1
	30	2.5	4	2.5	1
	50	1	4	2.5	2.5
	100	1	4	2.5	2.5
	150	1	4	2	3
$\delta = 4, \lambda = 5, \theta = 4$	15	3.5	2	3.5	1
	30	2	4	3	1
	50	1	4	2	3
	100	1	4	3	3
	150	1	4	3	2
$\delta = 6, \lambda = 4, \theta = 4$	15	2.5	2	3.5	1
	30	3	4	1	2
	50	1	4	3	2
	100	1	4	3	2
	150	1	4	3	2
$\delta = 5, \lambda = 6, \theta = 3$	15	4	3	2	1
	30	2.5	4	2.5	1
	50	1	4	2	3
	100	1	4	3	2
	150	1	4	2	3
$\delta = 8, \lambda = 7, \theta = 5$	15	3	4	2	1
	30	3	4	2	1
	50	2	4	1	3
	100	1	4	3	2
	150	1	4	3	2
∑Ranks		53	115	73.5	58.5
Overall rank		1	4	3	2
∑Ranks	n=15	19	19	14.5	6.5
Overall rank		3.5	3.5	2	1
∑Ranks	n=30	15	24	12	9
Overall rank		3	4	2	1
∑Ranks	n=50	7	24	13.5	15.5
Overall rank		1	4	3	2
∑Ranks	n=100	6	24	17.5	13.5
Overall rank		1	4	3	2
∑Ranks	n=150	6	24	16	14
Overall rank		1	4	3	2

أظهرت مخرجات الجداول (3-4) و(3-5) و(3-6) السابقة مايأتي :

1- تفوق طريقة الإمكان الأعظم **(MLE)** لتقدير معلمات التوزيع المركب (ويبل – باريتو) مضاعف البتر على كافة الطرائق الاخرى وعند جميع فترات البتر لانها كانت مقابلة لأقل مجموع رتب لمتوسط مربعات الخطأ وبمقدار (53- 53.5 - 51.5) على الترتيب .

2- تُعد طريقة العزوم في حالة التحيز **(MomlB)** في المرتبة الأولى كطريقة لتقدير معلمات توزيع (ويبل – باريتو) مضاعف البتر عند حجم عينة (15) وحجم عينة (30) وجاءت بالمرتبة الثانية عند حجوم العينات (50,100,150).

3-طريقة المقدرات التجزيئية **(Per)** جاءت في المرتبة الثانية عند حجم عينة (15) وحجم عينة (30) وجاءت بالمرتبة الثالثة عند حجوم العينات (50,100,150).

4- تُعد طريقة الإمكان الأعظم **(MLE)** هي الأفضل عند حجم عينة (100) وحجم عينة (150).

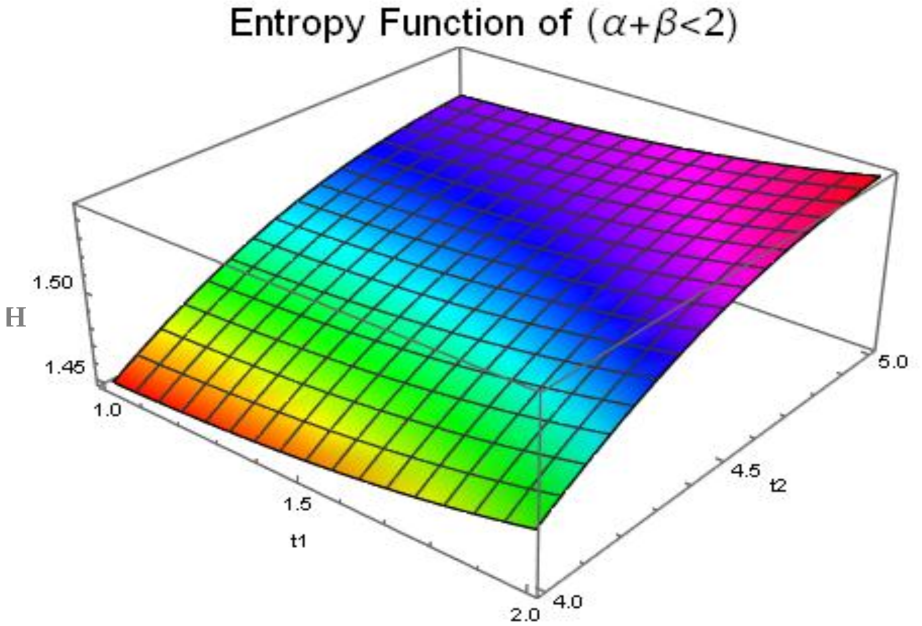
وبالإعتماد على النتائج آنفاً سنقوم بإستعمال طريقة الأمكان الأعظم (MLE) لتقدير دالة ألإنتروبي العامة الموزونة لتوزيع (ويبل – باريتو) مضاعف البتر عندما تكون $\alpha + \beta > 2$ و عندما تكون $\alpha + \beta < 2$ وكما في الجدوال الآتية :

جدول (3-7) يوضح تقدير دالة ألإنتروبي $\hat{H}^{w}_{\alpha,\beta}$ عندما تكون $\alpha + \beta > 2$ ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) عند فترات البتر وحجوم العينات المختلفة.

$\beta = 2 , \alpha = 1.5$												
Model	Truncated	$H^{w}_{\alpha,\beta}$ Real	n									
			15		30		50		100		150	
			$\hat{H}^{w}_{\alpha,\beta}$	MSE	$\hat{H}^{w}_{\alpha,\beta}$	MSE	$\hat{H}^{w}_{\alpha,\beta}$	MSE	$\hat{H}^{w}_{\alpha,\beta}$	MSE	$\hat{H}^{w}_{\alpha,\beta}$	MSE
$\delta = 4 , \lambda = 4, \theta = 4$	(1,5)	6.53584	6.4081	0.0163	6.4334	0.0105	6.4341	0.0104	6.4389	0.0094	6.44517	0.0082
	(2,5)	7.65345	8.3471	0.4817	8.0382	0.1483	8.0170	0.1324	8.0142	0.1304	7.99895	0.1196
	(2,10)	7.65308	8.0126	0.1290	7.9579	0.0927	7.9526	0.0895	7.9038	0.0627	7.84135	0.0353
$\delta = 2.5, \lambda = 4.5$ $\theta = 3.5$	(1,5)	5.18438	5.1346	0.0025	5.1380	0.0021	5.1412	0.0019	5.1419	0.0018	5.1476	0.0014
	(2,5)	6.10807	6.7962	0.4736	6.4951	0.1498	6.4229	0.0991	6.3973	0.0837	6.3645	0.0657
	(2,10)	6.10805	6.5095	0.1611	6.4227	0.0990	6.4029	0.0869	6.3272	0.0480	6.2315	0.0152
$\delta = 4, \lambda = 5, \theta = 4$	(1,5)	7.15743	7.0018	0.0242	7.0563	0.0102	7.0631	0.0089	7.0767	0.0065	7.0783	0.0063
	(2,5)	7.74348	7.8862	0.0204	7.8815	0.0190	7.8422	0.0098	7.8345	0.0083	7.8321	0.0079
	(2,10)	7.74345	7.8759	0.0175	7.8318	0.0078	7.8320	0.0078	7.8304	0.0076	7.8271	0.0070
$\delta = 6, \lambda = 4, \theta = 4$	(1,5)	7.79018	7.3590	0.1859	7.5413	0.0620	7.62581	0.02702	7.67278	0.01378	7.8117	0.0005
	(2,5)	9.433604	9.2884	0.0211	9.5469	0.0128	9.3600	0.0054	9.4178	0.00025	9.44781	0.00020
	(2,10)	9.433601	9.0406	0.1545	9.2967	0.0188	9.3372	0.0093	9.4095	0.0006	9.4310	0.00001
$\delta = 5, \lambda = 6, \theta = 3$	(1,5)	7.819499	7.250929	0.32327	7.95951	0.01960	7.72389	0.00914	7.82016	0.0000004	7.81365	0.00003
	(2,5)	8.942225	8.85418	0.00775	8.95227	0.00199	8.90203	0.00162	8.90269	0.00156	8.97949	0.00139
	(2,10)	8.907719	8.38010	0.27838	8.73293	0.03055	8.81756	0.01554	8.86882	0.00151	8.89880	0.00008
$\delta = 8, \lambda = 7, \theta = 5$	(1,5)	10.68695	10.40360	0.08029	10.42389	0.06920	10.52072	0.02763	10.6182	0.00473	10.6551	0.00099
	(2,5)	10.75057	10.6492	0.01028	10.65281	0.00956	10.7832	0.00106	10.7232	0.00066	10.7522	0.00001
	(2,10)	10.74887	10.33427	0.17190	10.56692	0.03311	10.61328	0.01839	10.7182	0.00105	10.7608	0.000102

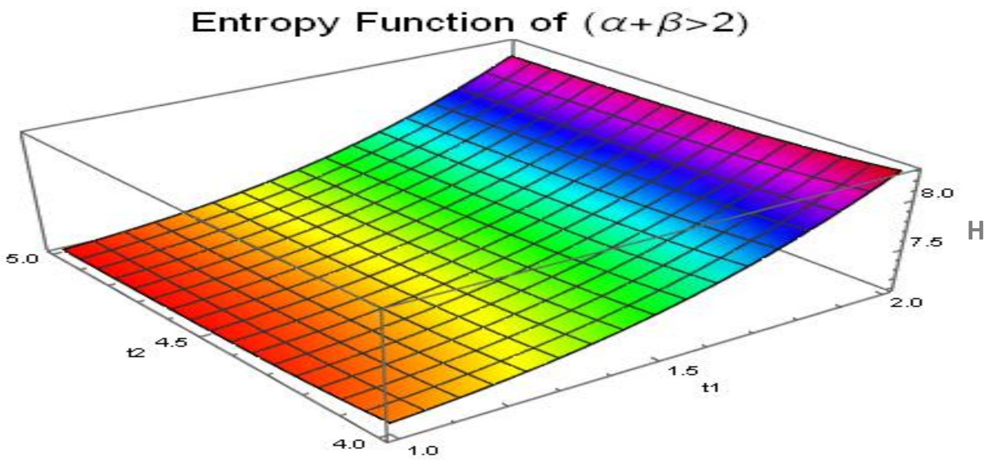
جدول (3-8) يوضح تقدير دالة ألإنتروبي $\hat{H}^{w}_{\alpha,\beta}$ عندما تكون $\alpha + \beta < 2$ ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) عند فترات البتر وحجوم العينات المختلفة.

$\beta = 1.2 , \alpha = 0.5$												
Model	Truncated	$H^{w}_{\alpha,\beta}$ Real	n									
			15		30		50		100		150	
			$\hat{H}^{w}_{\alpha,\beta}$	MSE	$\hat{H}^{w}_{\alpha,\beta}$	MSE	$\hat{H}^{w}_{\alpha,\beta}$	MSE	$\hat{H}^{w}_{\alpha,\beta}$	MSE	$\hat{H}^{w}_{\alpha,\beta}$	MSE
$\delta = 4 , \lambda, 4, \theta = 4$	(1,5)	0.76319	0.6050	0.0250	0.6678	0.0091	0.6756	0.0077	0.6854	0.0060	0.7063	0.0032
	(2,5)	0.93008	0.8888	0.0017	0.8898	0.0016	0.8925	0.0014	0.8939	0.0013	0.9067	0.0006
	(2,10)	0.93020	0.8903	0.0016	0.8914	0.0015	0.8933	0.0014	0.8973	0.0011	0.9187	0.0001
$\delta = 2.5, \lambda = 4.5$ $\theta = 3.5$	(1,5)	0.75720	0.6652	0.0085	0.6738	0.0070	0.6747	0.0068	0.6855	0.0051	0.6874	0.0049
	(2,5)	0.893877	0.8385	0.0031	0.8446	0.0024	0.8481	0.0021	0.8576	0.0013	0.8617	0.0010
	(2,10)	0.89388	0.8480	0.0021	0.84901	0.0020	0.8494	0.0020	0.8579	0.0013	0.8677	0.0007
$\delta = 4, \lambda = 5, \theta = 4$	(1,5)	0.72967	0.6152	0.0131	0.6343	0.0091	0.6412	0.0078	0.6508	0.0062	0.6544	0.0057
	(2,5)	0.81620	0.7605	0.0031	0.7696	0.0022	0.77120	0.0020	0.7770	0.0015	0.7821	0.0012
	(2,10)	0.81621	0.7638	0.0027	0.77134	0.0020	0.7748	0.001 7	0.7797	0.0013	0.7852	0.0010
$\delta = 6, \lambda = 4, \theta = 4$	(1,5)	0.595222	0.52357	0.00513	0.53499	0.00363	0.57364	0.00047	0.58663	0.00007	0.60132	0.000037
	(2,5)	0.837200	0.71694	0.01446	0.78021	0.00325	0.82530	0.00014	0.83009	0.00005	0.83282	0.00002
	(2,10)	0.837201	0.94556	0.01174	0.87086	0.00113	0.84636	0.00008	0.83772	0.0000003	0.83699	0.0000001
$\delta = 5, \lambda = 6, \theta = 3$	(1,5)	0.1964706	0.22335	0.00072	0.17442	0.00049	0.21474	0.000334	0.18755	0.000079	0.20352	0.00005
	(2,5)	0.4709010	0.39670	0.00551	0.45648	0.00021	0.46193	0.00008	0.46726	0.000013	0.46856	0.000005
	(2,10)	0.4709017	0.44116	0.00088	0.49182	0.00044	0.48722	0.00027	0.48560	0.00022	0.48231	0.00013
$\delta = 8, \lambda = 7, \theta = 5$	(1,5)	0.69027	0.62114	0.00478	0.64355	0.00218	0.71425	0.00057	0.68412	0.000038	0.68934	0.000001
	(2,5)	0.69950	0.63945	0.00367	0.65775	0.00179	0.66228	0.00143	0.69386	0.00003	0.69642	0.00001
	(2,10)	0.70007	0.64609	0.00285	0.67967	0.00039	0.68011	0.00040	0.70492	0.00003	0.69845	0.000001



شكل (2-6)

يوضح سلوك دالة الإنتروبي العامة الموزونة عندما تكون $\boldsymbol{\alpha + \beta < 2}$ إذ يحتوي الشكل على ثلاثة أبعاد يمثل البعد الأول قيم t_1 والبعد الثاني يمثل قيم t_2 والبعد الثالث يمثل دالة الانتروبي H اذ نلحظ من الشكل أنفاً أن الانتروبي تزداد بزيادة قيم (t_1, t_2) حيث ترتفع للأعلى .



شكل (2-7)

يوضح سلوك دالة الإنتروبي العامة الموزونة عندما تكون $\boldsymbol{\alpha + \beta > 2}$ إذ يحتوي الشكل على ثلاثة أبعاد أيضاً قيم t_1 تمثل البعد الأول ،وقيم t_2 تمثل البعد الثاني، أما البعد الثالث يمثل دالة الانتروبي H ،اذ نلحظ من الشكل أنفاً ان قيمة الانتروبي تزداد بزيادة قيم t_1 وثبات t_2 اذ ترتفع دالة الانتروبي للأعلى ، وتتناقص قيمة الانتروبي بزيادة قيم t_2 وثبات t_1 اذ تنخفض قيمة الانتروبي نحو الاسفل كما موضح عند القيمة الاخيرة من قيم t_2 إذ تكون أكثر إنطباقاًعلى القاعدة من القيمة الاولى

أظهرت مخرجات الجدول (3-7) و جدول (3-8) مايأتي :

1- أن قيم دالة الإنتروبي التقديرية تقترب من القيم الحقيقة لدالة الإنتروبي وتكون اكثر إقتراباً عند حجوم العينات الكبيرة ولجميع فترات البتر .

-1 عندما تكون $\boldsymbol{\alpha+\beta>2}$ فإن دالة الإنتروبي العامة الموزونة تكون كالآتي :

a) تزداد دالة ألإنتروبي بزيادة قيمة (t_1) وثبات قيمة (t_2) وكما موضح في فترة البتر الاولى والثانية .

b) وتتناقص دالة ألإنتروبي عند ثبات قيمة (t_1) وزيادة قيمة (t_2) وكما موضح في فترة البتر الثانية والثالثة .

-2 عندما تكون $\boldsymbol{\alpha+\beta<2}$ فإن دالة ألإنتروبي العامة الموزونة تتزايد بالنسبة الى (t_1,t_2) ولجميع فترات البتر**.**

-3 تناقص متوسط مربعات الخطأ لدالة ألإنتروبي العامة الموزونة بزيادة حجم العينة وهذا يتفق مع النظرية ألإحصائية .

3-2 الجانب التطبيقي :

في هذا الجزء من الفصل سيتم إستعراض للبيانات الحقيقة التي تم الحصول عليها من وزارة الصحة العراقية / دائرة صحة بابل / مستشفى الإمام الصادق (ع) ومن سجلات شعبة الهندسة وحدة الصيانة التي تم فيها تبويب بيانات التوقف (العطل) لجهاز الرنين المغناطيسي (MRI) إذ أن هذه البيانات تمثل أوقات العمل لحين الفشل ممثلة بالشهور ، وذلك بهدف تطبيقها على التوزيع المركب ويبل- باريتو قبل البتر وبعد البتر المضاعف للتوزيع المركب نفسه ومن ثم تقدير دالة ألإنتروبي العامة الموزونة من الدرجة (α, β) بإستعمال طريقة الإمكان ألاعظم (MLE) والتي أظهرت نتائج المحاكاة أفضليتها على باقي الطرائق إذ تم إستعمال برنامج كتب بلغة (Matlab) المبين في الملحق (c) .

3-2-1 نبذة عامة عن جهاز الرنين المغناطيسي (MRI):

تم أختراع هذا الجهاز من قبل العالم الدكتور رايموند **(Raymond Damadian)** إذ عمِل على تصنيع آلة قادرة على إجراء مسح للجسم بإستعمال المغانط ، وبسبب عدم رغبة أي شخص في أن يكون أول من يدخل الى الجهاز فقد تطوع هو ليكون أول من يدخل الى هذه الآلة الغريبة في وقتها، وقد أُجري أَول إختبار للأنسان في (1977/7/3) إذ تتطلب الأمر (5) ساعات لإنتاج صورة واحدة، تطور جهاز الرنين كثيراً في السنوات الأخيرة وأصبح الأطباء يعتمدون على مسح الرنين المغناطيسي في تشخيص العديد من الأمراض كتصلب الشرايين ،والأورام ،وتمزق الأربطة، والسكتات الدماغية وغيرها كثير. **[www.nasainarabic.net/r/a/1007]**

3-2-2 مكونات جهاز الرنين المغناطيسي (MRI) :

يُعد المغناطيس من أكبر وأهم مكونات أجهزة الرنين المغناطيسي ويحتوي هذا المغناطيس على تجويف في الوسط يبلغ قطرة مايقارب (60 cm) يتم إدخال المريض عن طريقه الى الجهاز وتبلغ قوة هذا المغناطيس مايقارب (5000-20000) ألف كاوس ويمكن تخيل قوة هذا المغناطيس إذا علمنا أن الحقل المغناطيسي للأرض يبلغ مايقارب (0.5) كاوس فقط ، ويحتوي هذا المغناطيس على العديد من الملفات التي يجري بداخلها تيار كهربائي يؤدي الى نشوء هذا الحقل مغناطيسي الكبير، وللحفاظ على الحقل المغناطيسي المتولد يتطلب الأمر وجود كمية كبيرة من الطاقة والتي تعتمد بالأساس على وجود أسلاك تكون مقاومتها معدومة أو قريبة من الصفروكذلك تكون هذه الأسلاك مغمورة بسائل (الهليوم) تحت درجات عالية البرودة تصل الى (269) درجة مئوية تحت الصفر وتُعزل هذه البرودة بالاعتماد على الفراغ ، وعلى الرغم من أن هذه المغانط تكون كلفتها عالية جداً إلا أن الحقل المغناطيسي الشديد الناتج يسمح بالحصول على صور عالية الجودة ، إذ يحتوي جهاز الرنين على ملفات ترسل أمواجا راديوية التردد الى جسم المريض و

توجد أنواع مختلفة من هذه الملفات تكون مخصصة لأجزاء الجسم المختلفة كالركبتين، والمعاصم، والأكتاف ، والرأس والعنق وغيرها كذلك يرتبط الجهاز بحاسوب قوي وطاولة تستعمل لإدخال المريض الى الجهاز ويًحدد دخول المريض الى الجهازبدءاً من رأسه أو قدمه بالأعتماد على نوع المسح المطلوب. **[www.nasainarabic.net/r/a/1007]**

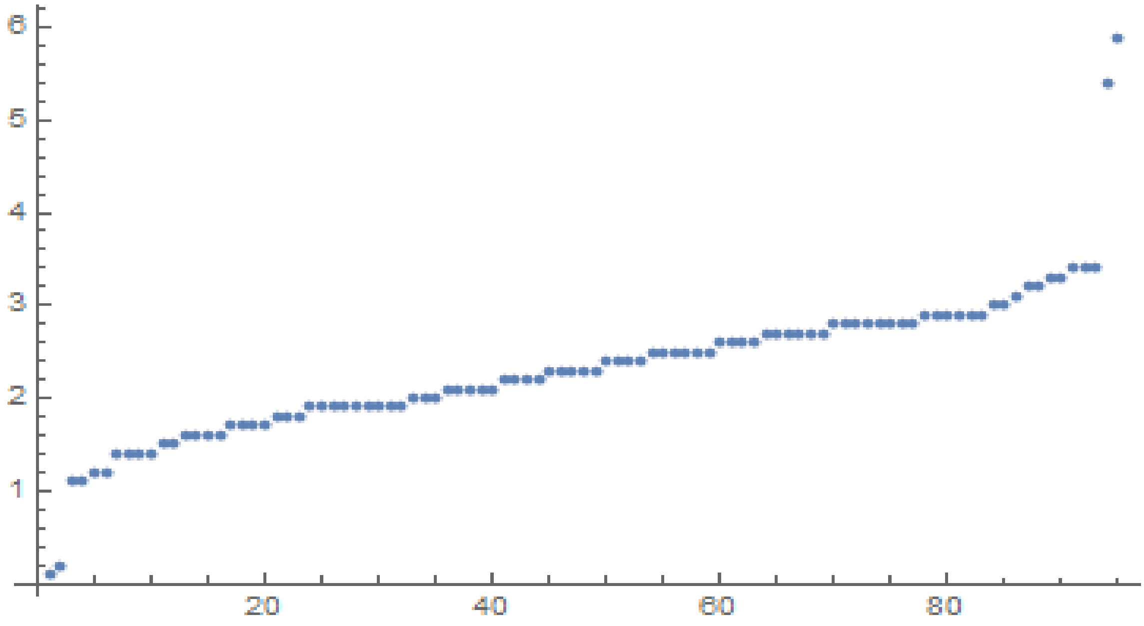
3-2-3 البيانات التطبيقية

تم جمع البيانات الخاصة بالدراسة من شعبة الهندسة وحدة الصيانة التابع لمستشفى الامام الصادق (ع) في محافظة بابل إذ يوجد في المستشفى جهاز رنين واحد وأن الحد الاقصى لعدد المرضى الذين يتم إستقبالهم يوميا حسب النظام العالمي هو (15) مريضاً، وذلك لتقليل الزخم والمحافظة على استمرارية عمل الجهاز عند مستوى معين من الضغط ، إذ يوجد في الجهاز مؤشراً للضغط يجب عدم تجاوزه ، ففي حال ارتفاع الضغط في الجهازفأن ذلك يُنذر بضرورة إيقافه عن العمل الى أن يستقر الضغط ويعود الى حالته الطبيعية، ويذكرالعاملون على الجهاز أن رجوع ضغط الجهاز الى حالته الطبيعية قد يستغرق بعض الوقت يصل الى (10) أيام أحياناً .

وهنالك بعض التوقفات التي تكون لأغراض الصيانة ، وفي حالة توقف الجهاز عن العمل يتم تحويل المرضى الى مستشفىً آخر ، إذ تم جمع (95) مشاهدة تمثل أوقات العمل لحين الفشل لجهاز الرنين المغناطيسي (MRI) ممثلة بالشهور (والارقام بعد الفارزة العشرية تمثل جزء من الشهر) أذ تم جمع البيانات من سجلات القسم وللمدة من إفتتاح المستشفى في 2016 ولغاية 1-4- 2021 وكما موضحة في الجدول أدناه :

الجدول (3-9) يبين أوقات العمل لحين الفشل ممثلة بالشهور لـ(جهاز الرنين المغناطيسي (MRI) مرتبة تصاعديا

i	t_i	i	t_i	i	t_i	i	t_i	i	t_i	i	t_i	i	t_i
1	0.1	15	1.6	29	1.9	43	2.2	57	2.5	71	2.8	85	3
2	0.2	16	1.6	30	1.9	44	2.2	58	2.5	72	2.8	86	3.1
3	1.1	17	1.7	31	1.9	45	2.3	59	2.5	73	2.8	87	3.2
4	1.1	18	1.7	32	1.9	46	2.3	60	2.6	74	2.8	88	3.2
5	1.2	19	1.7	33	2	47	2.3	61	2.6	75	2.8	89	3.3
6	1.2	20	1.7	34	2	48	2.3	62	2.6	76	2.8	90	3.3
7	1.4	21	1.7	35	2	49	2.3	63	2.6	77	2.8	91	3.4
8	1.4	22	1.8	36	2.1	50	2.4	64	2.7	78	2.9	92	3.4
9	1.4	23	1.8	37	2.1	51	2.4	65	2.7	79	2.9	93	3.4
10	1.4	24	1.8	38	2.1	52	2.4	66	2.7	80	2.9	94	5.4
11	1.5	25	1.9	39	2.1	53	2.4	67	2.7	81	2.9	95	5.9
12	1.5	26	1.9	40	2.1	54	2.5	68	2.7	82	2.9		
13	1.6	27	1.9	41	2.2	55	2.5	69	2.7	83	2.9		
14	1.6	28	1.9	42	2.2	56	2.5	70	2.8	84	3		



شكل (3-1) يوضح انتشار البيانات الحقيقية

من الشكل (3-1) آنفاً نلحظ وجود بعض القيم المتطرفة من جهة اليسار ومن جهة اليمين

3-2-4 تحليل البيانات Analyses The Data .

في هذه الفقرة سنقوم بتحليل البيانات الحقيقية إذ سنضع البيانات التي تم جمعها ضمن جدول تكراري مكون من فئات تمثل فترة العمل خلال الشهر إذ سيتم حساب الإنتروبي لكل فئة من فئات الجدول أدناه.

جدول (3-10) يبين الجدول التكراري لأوقات العمل لحين الفشل لجهاز الرنين المغناطيسي

classes	frequencies
أقل من 1	2
1-2	30
2-3	51
3-4	10
فأكثر -4	2
المجموع	95

3-2-5البتر المضاعف للبيانات الحقيقة .

نلحظ من الشكل (3-1) آنفاً أن أغلب بيانات الفشل تتركز عند الفئة الثانية والثالثة والرابعة ولغرض تحليل البيانات سنستبعد التكرارات الصغيرة جداً والمتمثلة بالفئة الاولى وكذلك نستبعد تكرارات الفئة الاخيرة إذ تكون هذه الفئات متطرفة مقارنةً بالفئات الاخرى إذ يصبح حجم العينة بعد البتر (91) مشاهدة.

جدول (3-11) يوضح بعض المؤشرات الأحصائية للعينة الكلية التي تتضمن (95) مشاهدة :

Statistic	Value
Sample Size	95
Range	5.8
Mean	2.3223
Variance	0.6633
Std. Deviation	0.81398
Std. Error of Mean	0.08361
Mode	1.9
Median	2.4
Maximum	5.9

جدول (3-12) يوضح بعض المؤشرات الأحصائية للعينة بعد البتر والتي تتضمن (91) مشاهدة :

Statistic	Value
Sample Size	91
Range	2.3
Mean	2.2945
Variance	0.34164
Std. Deviation	0.5845
Std. Error of Mean	0.06127
Mode	1.9
Median	2.3
Maximum	3.4

عند مقارنة الجدول (3-11) مع الجدول (3-12) نلحظ تأثير البيانات المتطرفة على كافة مؤشرات العينة و كذلك نلحظ أن التباين يصبح أقل بعد استبعاد البيانات المتطرفة من العينة الاصلية .

3-2-6إختبار حُسن المطابقة Goodness of Fit :

و لغرض التأكد من أن البيانات الحقيقية في جدول (3-10) بعد بتر تكرارات الفئة الاولى والثانية ، تتبع توزيع ويبل – باريتو مضاعف البتر أم لا تم إستعمال إختبار Chi-square لحسن المطابقة وحسب الفرضية الآتية:

H_0:The data have DTWP distribution.

H_1:The data don't have DTWP distribution.

H_0: البيانات تتوزع توزيع (ويبل – باريتو مضاعف البتر).

H_1:البيانات لاتتوزع توزيع (ويبل – باريتو مضاعف البتر).

سيتم إحتساب قيمة إحصاءة χ^2 لإختبار الفرضية آنفاً وحسب الصيغة الآتية:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \sim \chi^2{}_{(k-m-1)} \qquad (3-3)$$

إذ أن :

O_i يمثل تكرار المشاهدة

E_i يمثل التكرار المتوقع

إذ تم إحتساب إحصاءة χ_c^2 في برنامج (MatLab) وبخوارزمية كتبت في البرنامج موضحة في الملحق (c)، وكانت نتائج الاختبار كما في الجدول الآتي :

جدول (3-13) نتائج اختبار حسن المطابقة

Distribution	χ_c^2	$P\text{–}Value$	Decision
DTWP	1.9308	0.16	we don't reject H_0
WP	2.3109	0.13	we don't reject H_0

نلحظ من الجدول(3-13) آنفاً أن قيمة (P – Value) أكبر من (0.05) و لكلا التوزيعين ، إذن لا نرفض فرضية العدم أي أن البيانات الحقيقة تتوزع وفقاً للتوزيع المركب ويبل- باريتو مضاعف البتر .

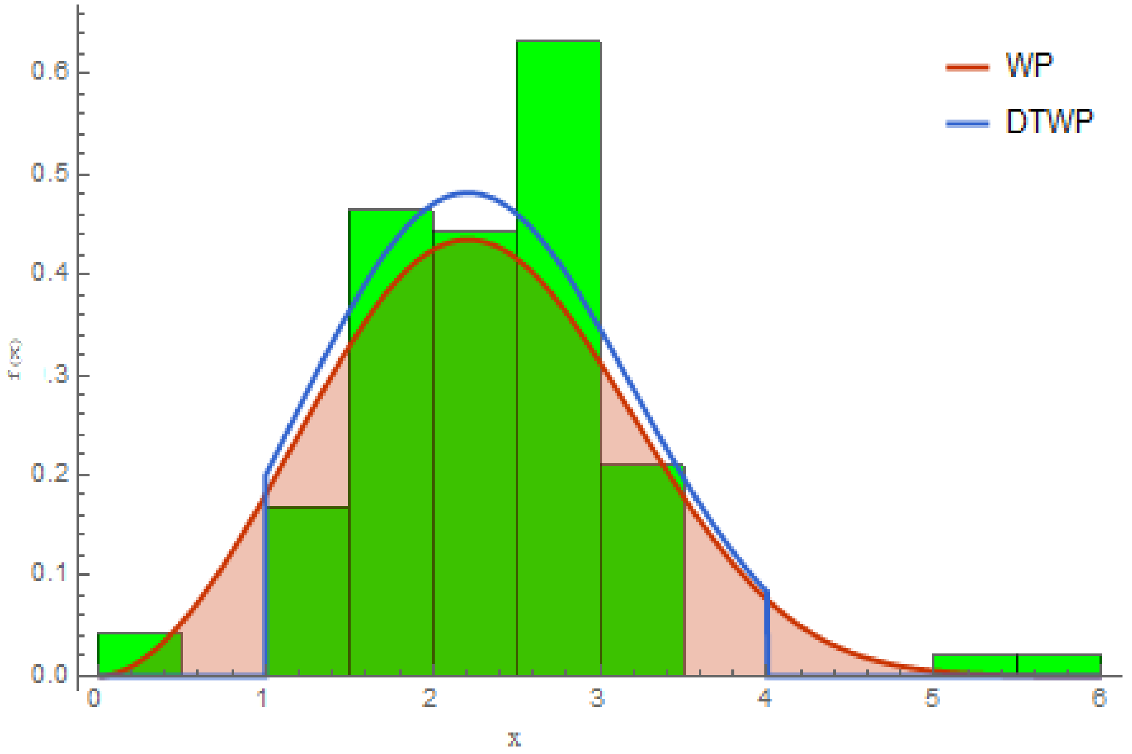
3-2-7 معايير المفاضلة بين التوزيعين .

في هذه المرحلة سنستعمل المعايير الثلاثة التي تم التطرق إليها في الجانب النظري لغرض تحديد التوزيع الأفضل والذي يمثل البيانات أفضل تمثيل بإستعمال برنامج (Matlab) الموضح في الملحق (c) إذ كانت النتائج كما في الجدول أدناه .

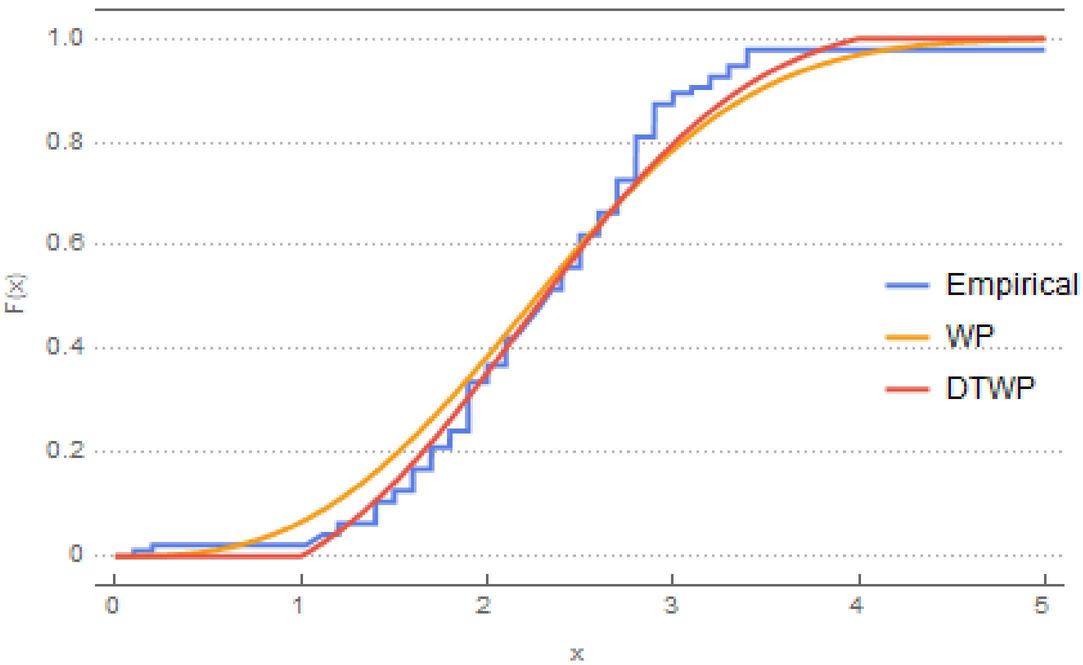
جدول (3-14) يوضح المعايير المستخدمة للمفاضلة بين التوزيعين .

Distribution	Parameters estimation			AIC	AIC_C	BIC
	δ	λ	θ			
DTWP	5.58	4.13	3.86	739.342	739.34	731.729
WP	5.84	2.84	4.80	895.434	895.51	902.967

نلحظ من الجدول (3-14) أن توزيع وبيل - باريتو مضاعف البتر يمتلك أقل قيمة بالنسبة للمعايير الثلاثة السابقة وبذلك يُعد هو التوزيع الأفضل في تمثيل البيانات المدروسة .



شكل (2-3) يوضح دالة pdf للتوزيع المركب ويبل باريتو مضاعف البتر مقارنة مع التوزيع نفسه قبل البتر للبيانات الحقيقية



شكل (3-3) يوضح دالة cdf للتوزيع المركب ويبل باريتو مضاعف البتر مقارنة مع التوزيع نفسه قبل البتر للبيانات الحقيقية للبيانات الحقيقية

يظهر من الشكل (2-3) و(3-3) آنفاً أن التوزيع المركب ويبل باريتو مضاعف البتر يكون هو الأفضل والأقرب في تمثيل البيانات الحقيقة.

3-2-8 نتائج البيانات التطبيقية .

أظهرت مخرجات الجانب التجريبي أفضلية طريقة الإمكان الأعظم في التقدير لذا سيتم تقدير معلمات توزيع ويبل- باريتو مضاعف البتر بطريقة (MLE) ومن ثم إستعمال المقدرات الناتجة لإستخراج دالة ألإنتروبي العامة الموزونة من الدرجة (α,β) عند فترات بتر مختلفة بإستعمال برنامج (Matlab) الموضح في الملحق (c) إذ كانت النتائج كما في الجداول أدناه .

جدول(3-15) يوضح دالة الإنتروبي العامة الموزونة وقيمة p-value وبعض المعايير الاحصائية للبيانات التطبيقية عند قيم مختلفة من البتر .

truncated		n	p-value	Distribution	AIC	AIC_C	BIC	$H^{w}_{\alpha,\beta}$ Real $\beta = 2$ $\alpha = 1.5$	$H^{w}_{\alpha,\beta}$ Real $\beta = 1.2$ $\alpha = 0.5$
ثبات قيمة t_1	1-2	30	0.09	DTWP	752.523	752.52	744.846	7.5431	0.4274
				WP	918.179	918.26	925.777		
	1-3	81	0.06	DTWP	745.958	745.96	738.313	6.1531	0.4451
				WP	906.781	906.86	914.346		
	1-4	91	0.16	DTWP	739.342	739.34	731.729	5.8733	0.6078
				WP	895.434	895.51	902.967		
ثبات قيمة t_2	1-3	81	0.06	DTWP	745.958	745.96	738.313	6.1531	0.4451
				WP	906.781	906.86	914.346		
	2.5-3	51	0.26	DTWP	943.913	943.91	937.896	8.9819	0.6770
				WP	954.056	954.13	961.685		

نلحظ من جدول (3-15) مايأتي

- عندما تكون $\alpha + \beta > 2$ فإن دالة الإنتروبي العامة الموزونة من الدرجة (α , β) تزداد عند تزايد قيمة (t1) وثبات قيمة (t2) وتناقص عند تزايد قيمة (t2) وثبات قيمة (t1) .
- عندماتكون $\alpha + \beta < 2$ فإن دالة الإنتروبي العامة الموزونة من الدرجة (α , β) تزداد بصورة عامة عند تزايد قيم (t_1) أو(t_2).

وهذا ينطبق مع خصائص دالة الإنتروبي التي تم ذكرها في الجانب النظري والنتائج التي تم التوصل اليها في الجانب التجريبي من الرسالة .

الفصل الرابع

الإستنتاجات والتوصيات

4-1 توطئة:

إستناداً الى ما تم بحثه في الجانب التجريبي (**Simulation**) والجانب التطبيقي توصل الباحث الى جملة من الإستنتاجات والتوصيات سيتم ذكرها في هذا الفصل .

4-2 الإستنتاجات (Conclusion):

1- تفوق طريقة الإمكان الأعظم (**MLE**) لتقدير معلمات التوزيع المركب (ويبل – باريتو) مضاعف البتر على كافة الطرائق الاخرى وعند جميع فترات البتر وذلك لانها كانت تقابل أقل مجموع للرتب لمتوسط مربعات الخطأ وخاصة عند حجوم العينات الكبيرة (150-100) وكذلك فإن المؤشرالإحصائي لمتوسط مربعات الخطأ يتناقص تدريجاً بزيادة حجم العينة**.**

2-أوضحت الرتب الجزئية والكلية المبينة في الجانب التجريبي أن طريقة العزوم في حالة التحيز أفضل من باقي الطرائق عند حجم عينة (15) لانها تمتلك أقل متوسط مربعات خطأ.

3- تقارب دالة الإنتروبي العامة الموزونة من الدرجة (α,β) المقدرة بموجب طريقة الامكان الاعظم مع دالة الانتروبي الحقيقية بإزدياد حجم العينة ولجميع النماذج المفترضة ولجميع فترات البتر .

4- عندما تكون $\alpha+\beta>2$ فإن دالة الإنتروبي العامة الموزونة من الدرجة (α ,β) تزداد عند تزايد قيمة البتر من جهة اليسار والممثلة بالنقطة (t_1) وثبات قيمة البتر من جهة اليمين والممثلة بالتقطة (t_2) .

5- عندما تكون $\alpha+\beta>2$ تناقص دالة الإنتروبي العامة الموزونة بتزايد قيمة البتر من جهة اليمين والممثلة بالتقطة (t_2) و ثبات قيمة البتر من جهة اليسار والممثلة بالنقطة (t_1)

6-عندما تكون $\alpha+\beta<2$ فإن دالة دالة الإنتروبي العامة الموزونة من الدرجة (α ,β) تتزايد بصورة عامة عند تزايد قيم (t_1) أو(t_2) .

7- أظهرت نتائج اختبار أفضل توزيع للبيانات الحقيقية أن التوزيع المركب ويبل - باريتو مضاعف البتر أفضل في تمثيل البيانات الحقيقية من التوزيع المركب ويبل- باريتو قبل البتر .

4-3 التوصيات (Recommendations) :

إستناداً الى ماتوصل اليه الباحث من إستنتاجات نوصي بالآتي:

1- إستعمال طريقة الإمكان الأعظم في تقدير معلمات توزيع ويبل –باريتو مضاعف البتر عند حجوم العينات الكبيرة (n>50) .

2- توسيع نطاق البحث ليشمل أنواع أُخرى من الإنتروبي ولاسيما الإنتروبي المتبقية **(residual entropy)** سواء مع التوزيعات الميتورة أو غير المبتورة لما لها من أهمية في معرفة كمية عدم اليقين المتبقية في النظام ولاسيماعتد دراسة المعولية .

3- يمكن الإستفادة من الخصائص التي تم التوصل اليها في هذه الرسالة في دراسة بعض المؤشرات الإحصائية المهمة كدالة المعولية أو دالة البقاء .

4- إستعمال المنهج البيزي في تقدير معلمات التوزيع المركب ويبل –باريتو مضاعف البتر والمقارنة مع الطرائق المستعملة في الرسالة.

5- بالإعتماد على خصائص دالة الإنتروبي العامة الموزونة يمكن زيادة دقة التوزيع أو الحصول على توزيع أكثر ملائمة للبيانات عن طريق زيادة فترات البتر .

6- إعتماد نتائج الدراسة لدى وزارة الصحة لدراسة أوقات الفشل المتلاحقة لأنظمة أخرى عن طريق إستعمال التوزيع المركب (ويبل –باريتو) مضاعف البتر .

المصادر والمراجع

المراجع:-

القرآن الكريم

المـصـــادر The References:-

اولا : المصادر العربية References Arab :-

١. الامير، ثائرة نجم عبد الله، (2012)،" إستعمال بعض النماذج الاحتمالية المنفردة والمركبة المبتورة لتحديد خصائص التعويضات الصحية في شركة التامين العراقية"، رسالة ماجستير في علوم الإحصاء، كلية الادراة والإقتصاد، جامعة بغداد .

٢. بلعوط ، حامد حران ، (2016) " إستخدام طرائق دالة الانتروبي وانحدار الحرف في تقدير معلمات انموذج الانحدار الخطي بوجود مشكلة التعدد الخطي "، رسالة ماجستير في علوم الإحصاء، كلية الادراة والإقتصاد، جامعة بغداد.

٣. صالح، أسيل نوري ، (2012)، " بناء توزيع احتمالي لوقت الفشل المستغرق باستعمال تحويل انتروبي لتوزيع Burr Type-XII" رسالة ماجستير في علوم الإحصاء، كلية الادراة والإقتصاد، جامعة بغداد .

٤. العبيدي، رغدة زياد طارق، (2016)، " استعمال الانتروبي مع طرائق اخرى في تقدير دالة بقاء توزيع كاما العام للسكان في العراق" رسالة ماجستير في علوم الإحصاء، كلية الادراة والإقتصاد، جامعة بغداد

٥. مسلم ، باسم شليبة ، (2013)، " مقارنة مقياسي الارتباط الانتروبي مع بعض المقاييس الشائعة لقياس الارتباط في جداول التوافق من درجة KxK"، مجلة الكوت للعلوم الاقتصادية والادارية، المجلد 1، العدد 9 (340-359).

٦. مطر، ظافر رمضان ، واخرون، 2011 (دراسة مقارنة كفاءة عدد من معايير المعلومات في إختيارنماذج السلاسل الزمنية من الرتب الدنيا)المجلة العراقية للعلوم الاحصائية22 (71-100).

٧. نعمة ، مهدي وهاب ، (2015)، "بناء توزيع أسي باريتو الموزون مع تطبيق عملي "اطروحة دكتوراه ، كلية الادارة والاقتصاد ،قسم الاحصاء ، جامعة بغداد .

Reference Foreigns :- ثانيا :المصادر الاجنبية:-

8. Abid, S.H., 2016. "Properties of doubly-truncated Fréchet distribution". American Journal of Applied Mathematics and Statistics, 4(1), pp.9-15.
9. Abu-Zinadah, Hanaa. H., 2014. "Six method of estimations for the shape parameter of exponentiated Gompertz distribution". Applied Mathematical Sciences, 8(88), pp.4349-4359
10. Akomolafe, A.A. and Maradesa, A., 2019. "On the Doubly Truncated Exponential Pareto Distribution". Volume 20. Number 1. May 2019
11. Aljabar, H.A , Kadim,K.A,2020. " Construction Continuous Probability Distribution with Reliability Estimation", thesis , collage of Education for Pure Sciences, University of Babylon, for Pure Sciences
12. Al-Mofleh, H., Afify, A.Z. and Ibrahim, N.A., 2020." A new extended two-parameter distribution: Properties, estimation methods, and applications in medicine and geology".Mathematics, 8(9), p.1578.
13. Amigó, J.M., Balogh, S.G. and Hernández, S., 2018." A brief review of generalized entropies". Entropy, 20(11), p.813.
14. Asadi, M. and Ebrahimi, N., 2000." Residual entropy and its characterizations in terms of hazard function and mean residual life function". Statistics & probability letters, 49(3), pp.263-269.
15. Aydin, D., 2018. "The doubly-truncated exponentiated inverse Weibull distribution". Anadolu Üniversitesi Bilim Ve Teknoloji Dergisi-B Teorik Bilimler, 6(1), pp.55-74.
16. Baig, M.A.K. and Dar, J.G., 2009. "Generalized residual entropy function and its applications". European Journal of Pure and Applied Mathematics, vol, 1,no.(4) pp, (30-40).

17. Bhat, B.A. and Baig, M.A.K., 2020. "A New Two Parametric Weighted Generalized Entropy for Lifetime Distributions". Journal of Modern Applied Statistical Methods, 18(2), p.17.

18. Di Crescenzo, A. and Longobardi, M., 2002. "Entropy-based measure of uncertainty in past lifetime distributions". Journal of Applied probability, pp.434-440.

19. Di Crescenzo, A. and Longobardi, M., 2007. "On weighted residual and past entropies". arXiv preprint math ,Scientiae Mathematicae Japonicae Online, pp679-690.

20. Ebrahimi, N., 1996. "How to measure uncertainty in the residual life time distribution". *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series A*, pp.48-56.

21. Fehr, S. and Berens, S., 2014. "On the conditional Rényi entropy". Master thesis *IEEE Transactions on Information Theory*, *60*(11), pp.6801-6810

22. Iqbal, M.Z., Arshad, M.Z., Ahmad, M., Ahmad, I., Iqbal, T. and Bhatti, M.A., 2019. "Double Truncated Transmuted Fréchet Distribution": Properties and Applications. Mathematical Theory and Modeling Vol.9, No.3,

23. Jeevanand, E.S. and Abdul-Sathar, E.I., 2009. "Estimation of residual entropy function for exponential distribution from censored samples". In ProbStat Forum. Vol, 02, pp 68-77

24. Kundu, C. and Singh, S., 2020. "On generalized interval entropy". Communications in Statistics-Theory and Methods, 49(8), pp.1989-2007.

25. Macedo, P.F.P., 2013. "Contributions to the theory of maximum entropy estimation for ill-posed models (Doctoral dissertation, Universidade de Aveiro (Portugal)

26. Misagh, F. and Yari, G.H., 2011. "On weighted interval entropy". Statistics & probability letters, 81(2), pp.188-194.

27. Nanda, A.K. and Chowdhury, S., 2021. "Shannon's Entropy and Its Generalisations Towards Statistical Inference in Last Seven Decades". International Statistical Review, 89(1), pp.167-185
28. Nanuwong, N. and Bodhisuwan, W., 2014. Length biased beta-pareto distribution and its structural properties with application. Journal of Mathematics and Statistics, 10(1), p.49.
29. Nasiru, S. and Luguterah, A., 2015. The new weibull-pareto distribution. Pakistan Journal of Statistics and Operation Research, pp.103-114.
30. Nourbakhsh, M. and Yari, G., 2017. Weighted Renyi's entropy for lifetime distributions. Communications in Statistics-Theory and Methods, 46(14), pp.7085-7098.
31. Okasha, M.K. and Matter, M.Y., 2015. "On the three-parameter Burr type XII distribution and its application to heavy tailed lifetime data". Journal: Journal of Advances in Mathematics, 10(4), pp.3429-3442.
32. Rényi, A., 1961. "On measures of entropy and information". In Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Volume 1: Contributions to the Theory of Statistics. The Regents of the University of California
33. Shalaby, O.A., 1993." Bayesian analysis of the parameters of a doubly truncated Weibull distribution". *Microelectronics* Reliability, 33(8), pp.1199-1211.
34. Singh, S. and Kundu, C., 2019. "On weighted Renyi’s entropy for double-truncated distribution". Communications in Statistics-Theory and Methods, 48(10), pp.2562-2579.
35. Singh, S. and Kundu, C., 2020. "On Weighted Generalized Entropy for Double Truncated Distribution". arXiv preprint arXiv:2004.04267

36. Wingo, D.R., 1988. "Parametric point estimation for a doubly-truncated Weibull distribution". Microelectronics Reliability, 28(4), pp.613-617.
37. www.nasainarabic.net/r/a/1007

الملاحق

ملحق A جداول المحاكاة الخاصة بطرائق التقدير .

جدول (1)يوضح متوسط مربعات الخطأ(MSE) لجميع طرائق التقدير وعند حجوم العينات المختلفة لإنموذج (A) $\delta = 4 , \lambda = 4, \theta = 4$ عند فترة البتر الاولى $(t_1=1,t_2=5)$

Size	Method	Parameter EST	$\hat{\delta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\theta}$	$\sum$Ranks
15	MLE	Parameter	3.30167	4.30727	3.90204	
		MSE	0.31508(3)	0.93678 (3)	0.42378 (2)	8(3)
	Mom	Parameter	2.37344	6.38165	3.19395	
		MSE	0.8059 (4)	0.68401(4)	0.92753 (4)	12(4)
	Per	Parameter	3.92300	3.69346	4.15348	
		MSE	0.05119(2)	0.88076(2)	0.44679(3)	7(2)
	MomlB	Parameter	4.07958	3.91333	3.67992	
		MSE	0.01321(1)	0.01566(1)	0.21369(1)	3(1)
30	MLE	Parameter	3.87814	4.64737	3.76539	
		MSE	0.16927(3)	0.04176(2)	0.15683(2)	7(2)
	Mom	Parameter	2.80851	6.22035	3.37110	
		MSE	0.83429(4)	0.51518 (4)	0.74601(4)	12(4)
	Per	Parameter	3.98330	4.31891	4.01963	
		MSE	0.01287(2)	0.04637(3)	0.20799(3)	8(3)
	MomlB	Parameter	4.04476	3.95131	3.82037	
		MSE	0.00514(1)	0.00609(1)	0.08282(1)	3(1)
50	MLE	Parameter	4.06812	3.92594	3.72692	
		MSE	0.00555(1)	0.00656(1)	0.08927(1)	3(1)
	Mom	Parameter	4.08387	6.70575	3.47588	
		MSE	0.7993(4)	0.86766(4)	0.44659(4)	12(4)
	Per	Parameter	3.95043	3.92604	4.12586	
		MSE	0.01516(2)	0.79840(3)	0.16360(3)	8(3)
	MomlB	Parameter	3.79814	4.02913	3.93831	
		MSE	0.40592(3)	0.11565(2)	0.09734 2)	7(2)
100	MLE	Parameter	4.05782	3.93715	3.76833	
		MSE	0.00381(1)	0.00451(1)	0.06123(1)	3(1)
	Mom	Parameter	2.67721	6.51355	3.27793	
		MSE	0.86985(4)	0.73769(4)	0.70016(4)	12(4)
	Per	Parameter	3.94602	3.83314	4.17343	
		MSE	0.01040(2)	0.23429(3)	0.10578(3)	8(3)
	MomlB	Parameter	3.98966	4.17025	3.98817	
		MSE	0.33058(3)	0.13345(2)	0.08551(2)	7(2)
150	MLE	Parameter	4.05572	3.93944	3.96449	
		MSE	0.00340(1)	0.00401(1)	0.02616(1)	3(1)
	Mom	Parameter	2.63096	6.71562	3.36276	
		MSE	0.40852(4)	0.89065(4)	0.54822(4)	12(4)
	Per	Parameter	3.95845	3.87106	4.15569	
		MSE	0.00431(2)	0.18525(3)	0.06333(3)	8(3)
	MomlB	Parameter	3.85174	4.12520	3.77679	
		MSE	0.14413(3)	0.06765(2)	0.05453(2)	7(2)

جدول (2) يوضح متوسط مربعات الخطأ(MSE) لجميع طرائق التقدير وعند حجوم العينات

المختلفة لإنموذج (B) $\delta = 2.5 , \lambda = 4.5 , \theta = 3.5$ عند فترة البتر الاولى $(t_1=1,t_2=5)$

Size	Method	Parameter EST	$\hat{\delta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\theta}$	∑Ranks
15	MLE	Parameter	2.26779	5.01871	3.37879	
		MSE	0.60941$^{(3)}$	0.49805$^{(3)}$	0.19375$^{(3)}$	9$^{(3)}$
	Mom	Parameter	1.61039	6.20239	3.08374	
		MSE	0.6922$^{(4)}$	0.47358$^{(4)}$	0.38176$^{(4)}$	12$^{(4)}$
	Per	Parameter	2.46445	4.33173	3.55452	
		MSE	0.01408$^{(2)}$	0.09392$^{(2)}$	0.011017$^{(2)}$	6$^{(2)}$
	MomlB	Parameter	2.56645	4.47452	3.28567	
		MSE	0.00704$^{(1)}$	0.00104$^{(1)}$	0.07334$^{(1)}$	3$^{(1)}$
30	MLE	Parameter	2.35513	4.80962	3.37595	
		MSE	0.22491$^{(3)}$	0.05668$^{(2)}$	0.04414$^{(1)}$	6$^{(1)}$
	Mom	Parameter	1.45078	6.11194	3.05430	
		MSE	0.36338$^{(4)}$	0.8653$^{(4)}$	0.26917$^{(4)}$	12$^{(4)}$
	Per	Parameter	2.54146	4.48411	3.64691	
		MSE	0.00433$^{(1)}$	0.00064$^{(1)}$	0.18061$^{(3)}$	5$^{(3)}$
	MomlB	Parameter	2.42575	4.49357	3.36638	
		MSE	0.03738$^{(2)}$	0.52893$^{(3)}$	0.04497$^{(2)}$	7$^{(2)}$
50	MLE	Parameter	2.56181	4.47632	3.48607	
		MSE	0.00492$^{(1)}$	0.00072$^{(1)}$	0.04204$^{(1)}$	3$^{(1)}$
	Mom	Parameter	2.96091	6.53151	3.18401	
		MSE	0.8704$^{(4)}$	0.61225$^{(4)}$	0.38620$^{(4)}$	12$^{(4)}$
	Per	Parameter	2.47448	4.48383	3.54886	
		MSE	0.00790$^{(2)}$	0.87388$^{(3)}$	0.06338$^{(3)}$	8$^{(3)}$
	MomlB	Parameter	2.27041	4.81477	3.30090	
		MSE	0.15061$^{(3)}$	0.31752$^{(2)}$	0.05106$^{(2)}$	7$^{(2)}$
100	MLE	Parameter	2.47217	4.47698	3.57808	
		MSE	0.00262$^{(1)}$	0.00055$^{(1)}$	0.02136$^{(1)}$	3$^{(1)}$
	Mom	Parameter	2.40260	6.34628	3.22323	
		MSE	0.57955$^{(4)}$	0.74500$^{(4)}$	0.29933$^{(4)}$	12$^{(4)}$
	Per	Parameter	2.12300	4.48341	3.54711	
		MSE	0.08220$^{(3)}$	0.01612$^{(3)}$	0.03004$^{(3)}$	9$^{(3)}$
	MomlB	Parameter	2.48160	4.69535	3.36058	
		MSE	0.00346$^{(2)}$	0.00598$^{(2)}$	0.02266$^{(2)}$	6$^{(2)}$
150	MLE	Parameter	2.54332	4.68247	3.49803	
		MSE	0.00219$^{(1)}$	0.00032$^{(1)}$	0.01525$^{(1)}$	3$^{(1)}$
	Mom	Parameter	2.77710	6.25410	3.22532	
		MSE	0.0821$^{(4)}$	0.55946$^{(4)}$	0.38861$^{(3)}$	11$^{(4)}$
	Per	Parameter	2.48675	4.29215	3.49542	
		MSE	0.09146$^{(3)}$	0.31071$^{(3)}$	0.02255$^{(2)}$	8$^{(2.5)}$
	MomlB	Parameter	2.56012	4.52949	3.30647	
		MSE	0.00375$^{(2)}$	0.14280$^{(2)}$	0.03887$^{(4)}$	8$^{(2.5)}$

جدول (3) يوضح متوسط مربعات الخطأ(MSE) لجميع طرائق التقدير وعند حجوم العينات المختلفة لإنموذج (C) $\delta = 4 , \lambda = 5, \theta = 4$ عند فترة البتر الاولى(t_1=1,t_2=5).

Size	Method	Parameter EST	$\hat{\delta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\theta}$	∑Ranks
15	MLE	Parameter	2.64245	7.02127	3.59530	
		MSE	$0.51723^{(3)}$	$0.46029^{(2)}$	$0.23265^{(3)}$	$8^{(3)}$
	Mom	Parameter	4.07896	7.37796	3.80250	
		MSE	$0.090583^{(4)}$	$0.96636^{(4)}$	$0.26340^{(4)}$	$12^{(4)}$
	Per	Parameter	3.98537	5.88159	4.03416	
		MSE	$0.00809^{(2)}$	$0.85091^{(3)}$	$0.17092^{(2)}$	$7^{(2)}$
	MomlB	Parameter	4.01061	4.98962	3.94668	
		MSE	$0.00213^{(1)}$	$0.00203^{(1)}$	$0.05333^{(1)}$	$3^{(1)}$
30	MLE	Parameter	3.22353	6.03226	3.74760	
		MSE	$0.49532^{(4)}$	$0.39714^{(3)}$	$0.21587^{(3)}$	$10^{(3)}$
	Mom	Parameter	4.90315	7.97452	4.10231	
		MSE	$0.2074^{(3)}$	$0.90728^{(4)}$	$0.09292^{(2)}$	$9^{(4)}$
	Per	Parameter	3.97087	5.56052	4.03096	
		MSE	$0.02408^{(2)}$	$0.09059^{(2)}$	$0.23292^{(4)}$	$8^{(2)}$
	MomlB	Parameter	4.02712	4.97352	3.86424	
		MSE	$0.00121^{(1)}$	$0.00115^{(1)}$	$0.03026^{(1)}$	$3^{(1)}$
50	MLE	Parameter	4.03764	4.96324	3.93899	
		MSE	$0.00161^{(1)}$	$0.00154^{(1)}$	$0.03856^{(1)}$	$3^{(1)}$
	Mom	Parameter	6.01558	7.74606	3.83054	
		MSE	$0.85675^{(4)}$	$0.80899^{(4)}$	$0.18439^{(4)}$	$12^{(4)}$
	Per	Parameter	3.95428	4.76199	4.18228	
		MSE	$0.00565^{(2)}$	$0.92720^{(3)}$	$0.10480^{(3)}$	$8^{(3)}$
	MomlB	Parameter	3.76812	5.27169	4.04649	
		MSE	$0.41357^{(3)}$	$0.44557^{(2)}$	$0.06362^{(2)}$	$7^{(2)}$
100	MLE	Parameter	4.03219	4.96479	3.83886	
		MSE	$0.00144^{(1)}$	$0.00145^{(1)}$	$0.03604^{(1)}$	$3^{(1)}$
	Mom	Parameter	7.53831	7.48615	4.04371	
		MSE	$0.8068^{(4)}$	$0.77546^{(4)}$	$0.28239^{(4)}$	$12^{(4)}$
	Per	Parameter	3.97172	4.81525	4.11349	
		MSE	$0.00451^{(2)}$	$0.68451^{(3)}$	$0.09528^{(3)}$	$8^{(3)}$
	MomlB	Parameter	4.10411	5.29284	3.81158	
		MSE	$0.32638^{(3)}$	$0.20671^{(2)}$	$0.04048^{(2)}$	$7^{(2)}$
150	MLE	Parameter	4.01741	4.96857	3.90338	
		MSE	$0.00110^{(1)}$	$0.00137^{(1)}$	$0.03289^{(1)}$	$3^{(1)}$
	Mom	Parameter	4.56727	7.65120	3.78937	
		MSE	$0.62598^{(4)}$	$0.73716^{(4)}$	$0.14111^{(4)}$	$12^{(4)}$
	Per	Parameter	3.69495	5.42195	3.88168	
		MSE	$0.23625^{(3)}$	$0.43737^{(3)}$	$0.03667^{(2)}$	$8^{(3)}$
	MomlB	Parameter	4.03606	4.95660	3.81951	
		MSE	$0.00152^{(2)}$	$0.020222^{(2)}$	$0.03815^{(3)}$	$7^{(2)}$

جدول (4) يوضح متوسط مربعات الخطأ(MSE) لجميع طرائق التقدير وعند حجوم العينات المختلفة لإنموذج (D) $\delta = 6, \lambda = 4, \theta = 4$ عند فترة البتر الاولى $(t_1=1,t_2=5)$.

Size	Method	Parameter EST	$\hat{\delta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\theta}$	∑Ranks
15	MLE	Parameter	6.05933	4.36847	4.03621	
		MSE	$0.25567^{(3)}$	$0.68491^{(3)}$	$0.37613^{(2)}$	$8^{(3)}$
	Mom	Parameter	5.87080	7.11769	3.20593	
		MSE	$0.9118^{(4)}$	$0.72229^{(4)}$	$0.98954^{(4)}$	$12^{(4)}$
	Per	Parameter	5.81401	4.27450	4.33976	
		MSE	$0.14567^{(2)}$	$0.32425^{(2)}$	$0.48655^{(3)}$	$7^{(2)}$
	MomlB	Parameter	6.04847	3.89135	3.70788	
		MSE	$0.00465^{(1)}$	$0.02340^{(1)}$	$0.16938^{(1)}$	$3^{(1)}$
30	MLE	Parameter	6.09334	4.02509	3.85970	
		MSE	$0.08783^{(3)}$	$0.39238^{(2)}$	$0.38456^{(3)}$	$8^{(3)}$
	Mom	Parameter	4.74314	6.93157	3.16879	
		MSE	$0.91079^{(4)}$	$0.90231^{(4)}$	$0.80139^{(4)}$	$12^{(4)}$
	Per	Parameter	6.00990	3.84878	3.86891	
		MSE	$0.00735^{(1)}$	$0.03003^{(1)}$	$0.24314^{(2)}$	$4^{(1)}$
	MomlB	Parameter	5.85765	4.05226	3.59356	
		MSE	$0.05630^{(2)}$	$0.43442^{(3)}$	$0.21726^{(1)}$	$6^{(2)}$
50	MLE	Parameter	6.06747	3.99263	3.70834	
		MSE	$0.00597^{(1)}$	$0.04806^{(1)}$	$0.09226^{(2)}$	$4^{(1)}$
	Mom	Parameter	5.05277	6.85205	3.31062	
		MSE	$0.72191^{(4)}$	$0.81829^{(4)}$	$0.55131^{(4)}$	$12^{(4)}$
	Per	Parameter	5.97770	3.99871	4.07763	
		MSE	$0.00488^{(2)}$	$0.06940^{(2)}$	$0.19207^{(3)}$	$7^{(2.5)}$
	MomlB	Parameter	5.23886	4.30794	3.72662	
		MSE	$0.70259^{(3)}$	$0.26738^{(3)}$	$0.07234^{(1)}$	$7^{(2.5)}$
100	MLE	Parameter	6.04852	3.89136	3.72908	
		MSE	$0.00255^{(1)}$	$0.01280^{(2)}$	$0.01450^{(1)}$	$4^{(1)}$
	Mom	Parameter	2.66818	6.55127	3.00798	
		MSE	$0.80538^{(4)}$	$0.72237^{(4)}$	$0.11859^{(4)}$	$12^{(4)}$
	Per	Parameter	5.98223	3.95500	4.07066	
		MSE	$0.00321^{(3)}$	$0.030962^{(3)}$	$0.03052^{(3)}$	$9^{(3)}$
	MomlB	Parameter	6.04214	3.90567	4.02197	
		MSE	$0.00287^{(2)}$	$0.00939^{(1)}$	$0.02526^{(2)}$	$5^{(2)}$
150	MLE	Parameter	6.04509	3.89907	3.74682	
		MSE	$0.00206^{(1)}$	$0.01034^{(1)}$	$0.01262^{(1)}$	$3^{(1)}$
	Mom	Parameter	3.91580	6.89557	3.17090	
		MSE	$0.88456^{(4)}$	$0.93241^{(4)}$	$0.76611^{(4)}$	$12^{(4)}$
	Per	Parameter	5.98360	3.92380	4.06589	
		MSE	$0.00308^{(2)}$	$0.20097^{(3)}$	$0.08635^{(3)}$	$8^{(3)}$
	MomlB	Parameter	5.80220	4.06601	3.92573	
		MSE	$0.04769^{(3)}$	$0.05906^{(2)}$	$0.05474^{(2)}$	$7^{(2)}$

جدول (5) يوضح متوسط مربعات الخطأ(MSE) لجميع طرائق التقدير وعند حجوم العينات المختلفة لإنموذج (E) $\delta = 5, \lambda = 6, \theta = 3$ عند فترة البتر الاولى (t_1=1,t_2=5).

Size	Method	Parameter EST	$\hat{\delta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\theta}$	∑Ranks
15	MLE	Parameter	3.729530	7.804224	2.708358	
		MSE	$0.39211^{(3)}$	$0.636257^{(3)}$	$0.222106^{(4)}$	$10^{(3.5)}$
	Mom	Parameter	3.896302	7.899112	2.755718	
		MSE	$0.79096^{(4)}$	$0.64696^{(4)}$	$0.090826^{(2)}$	$10^{(3.5)}$
	Per	Parameter	4.998959	6.469584	2.964774	
		MSE	$0.00113^{(2)}$	$0.303059^{(2)}$	$0.102061^{(3)}$	$7^{(2)}$
	MomlB	Parameter	5.013586	5.982543	2.863773	
		MSE	$0.00057^{(1)}$	$0.000947^{(1)}$	$0.057592^{(1)}$	$3^{(1)}$
30	MLE	Parameter	5.47028	5.73720	3.08749	
		MSE	$0.01165^{(3)}$	$0.051023^{(2)}$	$0.05836^{(2)}$	$7^{(3)}$
	Mom	Parameter	7.12153	7.51544	2.94574	
		MSE	$0.87461^{(4)}$	$0.51298^{(4)}$	$0.11344^{(4)}$	$12^{(4)}$
	Per	Parameter	4.98018	5.98280	3.13696	
		MSE	$0.00215^{(2)}$	$0.00037^{(1)}$	$0.11197^{(3)}$	$6^{(2)}$
	MomlB	Parameter	5.01339	5.38051	2.86600	
		MSE	$0.00022^{(1)}$	$0.26177^{(3)}$	$0.02224^{(1)}$	$5^{(1)}$
50	MLE	Parameter	5.01193	5.98468	2.89435	
		MSE	$0.00016^{(1)}$	$0.00026^{(1)}$	$0.01461^{(1)}$	$3^{(1)}$
	Mom	Parameter	6.87520	7.88073	2.93486	
		MSE	$0.89032^{(4)}$	$0.80988^{(3)}$	$0.12349^{(4)}$	$11^{(4)}$
	Per	Parameter	4.99351	6.14884	3.04861	
		MSE	$0.00044^{(2)}$	$0.98863^{(4)}$	$0.04099^{(2)}$	$8^{(2.5)}$
	MomlB	Parameter	4.72152	6.47609	2.97482	
		MSE	$0.23716^{(3)}$	$042877^{(2)}$	$0.05742^{(3)}$	$8^{(2.5)}$
100	MLE	Parameter	5.01056	5.98644	3.00537	
		MSE	$0.00015^{(1)}$	$0.00024^{(1)}$	$0.00900^{(1)}$	$3^{(1)}$
	Mom	Parameter	5.05527	7.45720	2.91199	
		MSE	$0.83946^{(3)}$	$0.80710^{(4)}$	$0.08236^{(4)}$	$11^{(4)}$
	Per	Parameter	4.99123	5.76407	3.07931	
		MSE	$0.00042^{(2)}$	$0.61632^{(3)}$	$0.03536^{(2)}$	$7^{(2)}$
	MomlB	Parameter	5.071137	6.02889	3.02462	
		MSE	$0.90833^{(4)}$	$0.55502^{(2)}$	$0.03917^{(3)}$	$9^{(3)}$
150	MLE	Parameter	5.00702	5.99098	2.92971	
		MSE	$0.00009^{(1)}$	$0.00015^{(1)}$	$0.00898^{(1)}$	$3^{(1)}$
	Mom	Parameter	3.16000	7.50111	2.74203	
		MSE	$0.51126^{(4)}$	$0.62698^{(4)}$	$0.10901^{(4)}$	$12^{(4)}$
	Per	Parameter	4.99451	5.84774	3.04066	
		MSE	$0.00026^{(2)}$	$0.57985^{(3)}$	$0.02111^{(3)}$	$8^{(3)}$
	MomlB	Parameter	5.05796	5.94529	2.88065	
		MSE	$0.24134^{(3)}$	$0.15148^{(2)}$	$0.01573^{(2)}$	$7^{(2)}$

جدول (6) يوضح متوسط مربعات الخطأ(MSE) لجميع طرائق التقدير وعند حجوم العينات المختلفة لإنموذج (F) $\delta = 8, \lambda = 7, \theta = 5$ عند فترة البتر الاولى (t_1=1,t_2=5).

Size	Method	Parameter EST	$\hat{\delta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\theta}$	∑Ranks
15	MLE	Parameter	7.24874	7.75311	4.74972	
		MSE	0.91171(4)	0.57142(3)	0.25632(3)	10(3)
	Mom	Parameter	8.64588	9.61253	4.66354	
		MSE	0.23148(3)	0.62027(4)	0.26039(4)	11(4)
	Per	Parameter	8.00536	7.49391	4.86371	
		MSE	0.00194(2)	0.18040(2)	0.24083(2)	6(2)
	MomlB	Parameter	8.02018	6.95186	4.77360	
		MSE	0.00071(1)	0.00405(1)	0.08955(1)	3(1)
30	MLE	Parameter	7.26195	7.51955	4.73067	
		MSE	0.87249(3)	0.27357(2)	0.22280(3)	8(3)
	Mom	Parameter	5.56235	9.33510	4.45191	
		MSE	0.95602(4)	0.96743(4)	0.37368(4)	12(4)
	Per	Parameter	8.01368	7.26969	4.83056	
		MSE	0.00081(2)	0.94620(3)	0.10146(2)	7(2)
	MomlB	Parameter	8.02275	6.94574	4.74491	
		MSE	0.00067(1)	0.00383(1)	0.08465(1)	3(1)
50	MLE	Parameter	8.01103	6.97369	4.98134	
		MSE	0.00020(1)	0.00113(1)	0.01797(1)	3(1)
	Mom	Parameter	5.16790	9.30392	4.57118	
		MSE	0.64950 (4)	0.97803(4)	0.30893(4)	12(4)
	Per	Parameter	7.99930	7.53110	4.99621	
		MSE	0.00024(2)	0.13928(2)	0.02020(2)	6(2)
	MomlB	Parameter	7.07227	7.82966	4.87073	
		MSE	0.48538(3)	0.90634(3)	0.07181(3)	9(3)
100	MLE	Parameter	8.00351	6.99162	4.96061	
		MSE	0.00013(1)	0.00076(1)	0.01683(1)	3(1)
	Mom	Parameter	6.09950	9.23232	4.60809	
		MSE	0.66384(4)	0.927839(4)	0.25914(4)	12(4)
	Per	Parameter	7.98202	6.67544	5.16805	
		MSE	0.00104(2)	0.08133(2)	0.10015(3)	7(2)
	MomlB	Parameter	7.87216	7.08732	4.87634	
		MSE	0.37962(3)	0.15361(3)	0.02497(2)	8(3)
150	MLE	Parameter	8.00847	6.97980	4.90508	
		MSE	0.00009(1)	0.00052(1)	0.01146(1)	3(1)
	Mom	Parameter	6.00756	9.55730	4.82539	
		MSE	0.63386(4)	0.93949(4)	0.24715(4)	12(4)
	Per	Parameter	7.99354	7.08148	5.06149	
		MSE	0.00041(2)	0.72894(3)	0.04899(3)	8(3)
	MomlB	Parameter	7.61619	7.27732	4.94552	
		MSE	0.56526(3)	0.26251(2)	0.01802(2)	7(2)

جدول (7) يوضح متوسط مربعات الخطأ(MSE) لجميع طرائق التقدير وعند حجوم العينات المختلفة لإنموذج (A) $\delta=4$,$\beta= 4,\theta=4$ عند فترة البتر الثانية ($t_1=2,t_2=5$).

Size	Method	Parameter EST	$\hat{\delta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\theta}$	∑Ranks
15	MLE	Parameter	3.43899	4.67291	3.80092	
		MSE	$0.33346^{(3)}$	$0.86165^{(3)}$	$0.63661^{(3)}$	$9^{(3)}$
	Mom	Parameter	3.27181	6.25514	3.45958	
		MSE	$0.81937^{(4)}$	$0.97597^{(4)}$	$0.44703^{(2)}$	$10^{(4)}$
	Per	Parameter	4.05868	4.14854	4.30878	
		MSE	$0.00453^{(1)}$	$0.09317^{(2)}$	$0.83761^{(4)}$	$7^{(2)}$
	MomlB	Parameter	3.80289	3.93621	3.76482	
		MSE	$0.19244^{(2)}$	$0.00535^{(1)}$	$0.07274^{(1)}$	$4^{(1)}$
30	MLE	Parameter	3.15001	4.73983	4.03621	
		MSE	$0.16669^{(4)}$	$0.80648^{(2)}$	$0.05136^{(2)}$	$8^{(2.5)}$
	Mom	Parameter	3.94094	6.77992	3.53338	
		MSE	$0.02792^{(3)}$	$0.82025^{(4)}$	$0.35997^{(4)}$	$11^{(4)}$
	Per	Parameter	4.00283	4.51618	3.95274	
		MSE	$0.00701^{(2)}$	$0.37329^{(3)}$	$0.01338^{(3)}$	$8^{(2.5)}$
	MomlB	Parameter	4.05229	3.94315	3.79034	
		MSE	$0.00488^{(1)}$	$0.00577^{(1)}$	$0.07844^{(1)}$	$3^{(1)}$
50	MLE	Parameter	4.06565	3.92864	3.80587	
		MSE	$0.00452^{(1)}$	$0.00534^{(1)}$	$0.04388^{(1)}$	$3^{(1)}$
	Mom	Parameter	3.49001	7.33840	3.50307	
		MSE	$0.80758^{(4)}$	$0.9628^{(4)}$	$0.32462^{(4)}$	$12^{(4)}$
	Per	Parameter	3.96093	4.12952	4.10821	
		MSE	$0.01301^{(2)}$	$0.87558^{(3)}$	$0.16983^{(3)}$	$8^{(3)}$
	MomlB	Parameter	3.88593	4.20400	4.01909	
		MSE	$0.07978^{(3)}$	$0.35932^{(2)}$	$0.13972^{(2)}$	$7^{(2)}$
100	MLE	Parameter	4.06466	3.92972	3.66584	
		MSE	$0.00441^{(1)}$	$0.00521^{(1)}$	$0.01709^{(1)}$	$3^{(1)}$
	Mom	Parameter	2.26989	6.38435	3.30879	
		MSE	$0.45443^{(4)}$	$0.63900^{(4)}$	$0.53084^{(4)}$	$12^{(4)}$
	Per	Parameter	3.93573	3.69493	4.20186	
		MSE	$0.01115^{(2)}$	$0.30972^{(3)}$	$0.11306^{(3)}$	$8^{(3)}$
	MomlB	Parameter	4.05611	3.98461	3.73695	
		MSE	$0.26671^{(3)}$	$0.09028^{(2)}$	$0.07257^{(2)}$	$7^{(2)}$
150	MLE	Parameter	4.04847	3.94733	3.96265	
		MSE	$0.00273^{(1)}$	$0.00323^{(1)}$	$0.00503^{(1)}$	$3^{(1)}$
	Mom	Parameter	3.89075	6.93925	3.40473	
		MSE	$0.0343^{(4)}$	$0.91434^{(4)}$	$0.50991^{(4)}$	$12^{(4)}$
	Per	Parameter	3.95203	3.78377	4.15965	
		MSE	$0.00853^{(2)}$	$0.35117^{(3)}$	$0.01023^{(3)}$	$8^{(3)}$
	MomlB	Parameter	3.91132	4.06458	3.74094	
		MSE	$0.02260^{(3)}$	$0.00726^{(2)}$	$0.07077^{(2)}$	$7^{(2)}$

جدول (8) يوضح متوسط مربعات الخطأ(MSE) لجميع طرائق التقدير وعند حجوم العينات المختلفة لإنموذج (B) $\delta = 2.5 , \lambda = 4.5, \theta = 3.5$ عند فترة البتر الثانية $(t_1=2,t_2=5)$.

Size	Method	Parameter EST	$\hat{\delta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\theta}$	∑Ranks
15	MLE	Parameter	2.35819	4.63601	3.44219	
		MSE	$0.72611^{(3)}$	$0.63702^{(4)}$	$0.14113^{(3)}$	$10^{(3.5)}$
	Mom	Parameter	1.66834	6.24918	3.13171	
		MSE	$0.22742^{(4)}$	$0.28217^{(2)}$	$0.19998^{(4)}$	$10^{(3.5)}$
	Per	Parameter	2.42696	4.70401	3.31712	
		MSE	$0.03674^{(2)}$	$0.33748^{(3)}$	$0.08785^{(1)}$	$6^{(2)}$
	MomlB	Parameter	2.55663	4.47826	3.61000	
		MSE	$0.00843^{(1)}$	$0.00124^{(1)}$	$0.14046^{(2)}$	$4^{(1)}$
30	MLE	Parameter	2.50810	5.11443	3.52858	
		MSE	$0.40625^{(3)}$	$0.45788^{(3)}$	$0.09731^{(3)}$	$9^{(3)}$
	Mom	Parameter	2.09929	6.13127	2.94252	
		MSE	$0.2790^{(4)}$	$0.80816^{(4)}$	$0.55036^{(4)}$	$12^{(4)}$
	Per	Parameter	2.47914	4.35858	3.54654	
		MSE	$0.01107^{(2)}$	$0.05867^{(2)}$	$0.01028^{(1)}$	$5^{(2)}$
	MomlB	Parameter	2.55814	4.47771	3.31260	
		MSE	$0.00564^{(1)}$	$0.00083^{(1)}$	$0.05864^{(2)}$	$4^{(1)}$
50	MLE	Parameter	2.47706	4.47320	3.53962	
		MSE	$0.00468^{(1)}$	$0.00078^{(1)}$	$0.04206^{(1)}$	$3^{(1)}$
	Mom	Parameter	2.69000	6.18304	3.35808	
		MSE	$0.73570^{(4)}$	$0.65989^{(4)}$	$0.16828^{(4)}$	$12^{(4)}$
	Per	Parameter	2.44500	4.06110	3.64953	
		MSE	$0.00772^{(2)}$	$0.57007^{(3)}$	$0.06107^{(3)}$	$8^{(3)}$
	MomlB	Parameter	2.57152	4.44911	3.31468	
		MSE	$0.13673^{(3)}$	$0.19819^{(2)}$	$0.04235^{(2)}$	$7^{(2)}$
100	MLE	Parameter	2.55755	4.47795	3.49946	
		MSE	$0.00408^{(1)}$	$0.00060^{(1)}$	$0.03818^{(1)}$	$3^{(1)}$
	Mom	Parameter	3.30159	6.20381	3.39930	
		MSE	$0.2591^{(4)}$	$0.87401^{(4)}$	$0.24721^{(4)}$	$12^{(4)}$
	Per	Parameter	2.47054	4.29931	3.57733	
		MSE	$0.00527^{(2)}$	$0.50760^{(3)}$	$0.04050^{(3)}$	$8^{(3)}$
	MomlB	Parameter	2.47360	4.57164	3.30370	
		MSE	$0.09860^{(3)}$	$0.16213^{(2)}$	$0.03998^{(2)}$	$7^{(2)}$
150	MLE	Parameter	2.56098	4.47665	3.48322	
		MSE	$0.00386^{(1)}$	$0.00057^{(1)}$	$0.01924^{(1)}$	$3^{(1)}$
	Mom	Parameter	1.87579	6.03212	3.13387	
		MSE	$0.94161^{(4)}$	$0.49189^{(4)}$	$0.25861^{(4)}$	$12^{(4)}$
	Per	Parameter	2.51376	4.19634	3.56200	
	MomlB	MSE	$0.07570^{(3)}$	$0.37501^{(3)}$	$0.04189^{(2)}$	$8^{(3)}$
		Parameter	2.56994	4.45558	3.27475	
		MSE	$0.00532^{(2)}$	$0.14278^{(2)}$	$0.05524^{(3)}$	$7^{(2)}$

جدول (9) يوضح متوسط مربعات الخطأ(MSE) لجميع طرائق التقدير وعند حجوم العينات المختلفة لإنموذج (C) $\delta = 4, \lambda = 5, \theta = 4$ عند فترة البتر الثانية $(t_1=2, t_2=5)$.

Size	Method	Parameter EST	$\hat{\delta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\theta}$	∑Ranks
15	MLE	Parameter	3.88942	5.19336	4.15766	
		MSE	$0.87515^{(4)}$	$0.74460^{(2)}$	$0.35631^{(4)}$	$10^{(4)}$
	Mom	Parameter	4.25200	7.54921	3.68454	
		MSE	$0.69984^{(3)}$	$0.94737^{(4)}$	$0.16170^{(2)}$	$9^{(3)}$
	Per	Parameter	3.92645	4.35781	4.16542	
		MSE	$0.02973^{(2)}$	$0.91741^{(3)}$	$0.27109^{(3)}$	$8^{(2)}$
	MomlB	Parameter	4.05877	4.94257	3.70524	
		MSE	$0.00553^{(1)}$	$0.00528^{(1)}$	$0.13918^{(1)}$	$3^{(1)}$
30	MLE	Parameter	4.60120	4.69300	3.92167	
		MSE	$0.76932^{(3)}$	$0.49352^{(2)}$	$0.14604^{(3)}$	$8^{(3)}$
	Mom	Parameter	6.40014	7.82619	3.76278	
		MSE	$0.82120^{(4)}$	$0.97108^{(4)}$	$0.24111^{(4)}$	$12^{(4)}$
	Per	Parameter	4.04836	4.95277	3.75777	
		MSE	$0.00306^{(1)}$	$0.00292^{(1)}$	$0.07689^{(1)}$	$3^{(1)}$
	MomlB	Parameter	3.95950	4.58119	4.13586	
		MSE	$0.00827^{(2)}$	$0.87754^{(3)}$	$0.13921^{(2)}$	$7^{(2)}$
50	MLE	Parameter	4.03487	4.96595	3.82998	
		MSE	$0.00160^{(1)}$	$0.00153^{(1)}$	$0.03475^{(1)}$	$3^{(1)}$
	Mom	Parameter	6.90310	7.99836	3.90468	
		MSE	$0.85781^{(4)}$	$0.96394^{(4)}$	$0.11312^{(3)}$	$11^{(4)}$
	Per	Parameter	3.94566	4.92425	4.16724	
		MSE	$0.02636^{(2)}$	$0.09917^{(2)}$	$0.32777^{(4)}$	$8^{(2.5)}$
	MomlB	Parameter	3.79617	5.21444	3.93888	
		MSE	$0.36680^{(3)}$	$0.29174^{(3)}$	$0.05066^{(2)}$	$8^{(2.5)}$
100	MLE	Parameter	4.03397	4.96683	3.98757	
		MSE	$0.00139^{(1)}$	$0.00132^{(1)}$	$0.02445^{(1)}$	$3^{(1)}$
	Mom	Parameter	6.79985	7.49936	3.92055	
		MSE	$0.86179^{(4)}$	$0.94015^{(4)}$	$0.31433^{(4)}$	$12^{(4)}$
	Per	Parameter	3.99320	5.09296	4.01348	
		MSE	$0.00211^{(2)}$	$0.59112^{(3)}$	$0.05277^{(3)}$	$8^{(3)}$
	MomlB	Parameter	3.95462	5.08861	3.82543	
		MSE	$0.10235^{(3)}$	$0.08396^{(2)}$	$0.04017^{(2)}$	$7^{(2)}$
150	MLE	Parameter	4.03354	4.96725	4.00891	
		MSE	$0.00137^{(1)}$	$0.00130^{(1)}$	$0.01040^{(1)}$	$3^{(1)}$
	Mom	Parameter	4.85975	7.35037	3.76696	
		MSE	$0.8886^{(4)}$	$0.69653^{(4)}$	$0.25122^{(4)}$	$12^{(4)}$
	Per	Parameter	3.96602	4.71241	4.15235	
		MSE	$0.00228^{(2)}$	$0.32525^{(3)}$	$0.04898^{(3)}$	$8^{(3)}$
	MomlB	Parameter	3.98427	5.04103	3.83212	
		MSE	$0.04704^{(3)}$	$0.04671^{(2)}$	$0.03422^{(2)}$	$7^{(2)}$

جدول (10) يوضح متوسط مربعات الخطأ(MSE) لجميع طرائق التقدير وعند حجوم العينات المختلفة لإنموذج (D) $\delta = 6, \lambda = 4, \theta = 4$ عند فترة البتر الثانية (t_1=2,t_2=5).

Size	Method	Parameter EST	$\hat{\delta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\theta}$	∑Ranks
15	MLE	Parameter	5.73268	4.12820	3.93756	
		MSE	0.88107(4)	0.01747(2)	0.10716(3)	9(3)
	Mom	Parameter	4.76093	6.64220	3.25310	
		MSE	0.49685(3)	0.76869(4)	0.69742(4)	11(4)
	Per	Parameter	5.84753	3.82909	4.46137	
		MSE	0.09441(2)	0.56982(3)	0.07774(2)	7(2)
	MomlB	Parameter	6.03916	3.91228	3.76439	
		MSE	0.00270(1)	0.01355(1)	0.09782(1)	3(1)
30	MLE	Parameter	6.26286	3.97349	4.09882	
		MSE	0.48159(3)	0.01277(2)	0.20094(2)	7(2)
	Mom	Parameter	4.56744	6.89590	3.14882	
		MSE	0.61869(4)	0.91720 (4)	0.89386(4)	12(4)
	Per	Parameter	6.04135	3.90741	3.75144	
		MSE	0.00222(1)	0.01115(1)	0.08040(1)	3(1)
	MomlB	Parameter	5.89203	3.83321	4.36828	
		MSE	0.04401(2)	0.32116(3)	0.83245(3)	8(3)
50	MLE	Parameter	6.04128	3.89120	3.75189	
		MSE	0.00217(1)	0.01260(1)	0.07857(1)	3(1)
	Mom	Parameter	3.21306	6.88846	3.15891	
		MSE	0.93923(4)	0.871418(4)	0.75289(4)	12(4)
	Per	Parameter	5.96352	3.81789	4.16383	
		MSE	0.00553(2)	0.28476(3)	0.13409(3)	8(3)
	MomlB	Parameter	5.99271	4.04294	4.00429	
		MSE	0.63534(3)	0.09638(2)	0.07971(2)	7(2)
100	MLE	Parameter	6.04859	3.90758	3.70793	
		MSE	0.00251(1)	0.01090(1)	0.09082(1)	3(1)
	Mom	Parameter	5.97909	7.31378	3.29985	
		MSE	0.50291(4)	0.61865(3)	0.58682(4)	11(4)
	Per	Parameter	5.89299	3.57364	4.41884	
		MSE	0.03845(2)	0.66288(4)	0.56494(3)	9(3)
	MomlB	Parameter	5.81081	4.07307	3.91120	
		MSE	0.10888(3)	0.13939(2)	0.13077(2)	7(2)
150	MLE	Parameter	5.99911	3.91579	4.03061	
		MSE	0.00137(1)	0.00832(1)	0.03038(1)	3(1)
	Mom	Parameter	5.37001	6.55943	3.42354	
		MSE	0.98739(4)	0.68607(4)	0.47419(4)	12(4)
	Per	Parameter	6.01453	4.06987	3.99455	
		MSE	0.20092(3)	0.11196(3)	0.04917(2)	8(3)
	MomlB	Parameter	6.03762	4.02344	3.77397	
		MSE	0.00166(2)	0.02724(2)	0.05995(3)	7(2)

جدول (11) يوضح متوسط مربعات الخطأ(MSE) لجميع طرائق التقدير وعند حجوم العينات المختلفة لإنموذج (E) $\delta = 5, \lambda = 6, \theta = 3$ عند فترة البتر الثانية $(t_1=2, t_2=5)$.

Size	Method	Parameter EST	$\hat{\delta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\theta}$	∑Ranks
15	MLE	Parameter	4.64584	6.40359	3.01813	
		MSE	$0.50756^{(3)}$	$0.97092^{(3)}$	$0.09793^{(2)}$	$8^{(2.5)}$
	Mom	Parameter	5.96099	7.73441	2.99132	
		MSE	$0.80162^{(4)}$	$0.88863^{(4)}$	$0.13058^{(3)}$	$11^{(4)}$
	Per	Parameter	4.95253	5.60859	3.33686	
		MSE	$0.00646^{(2)}$	$0.55966^{(2)}$	$0.28387^{(4)}$	$8^{(2.5)}$
	MomlB	Parameter	5.00036	5.99953	2.99631	
		MSE	$0.00010^{(1)}$	$0.00017^{(1)}$	$0.01025^{(1)}$	$3^{(1)}$
30	MLE	Parameter	4.67596	6.93843	2.94194	
		MSE	$0.15302^{(3)}$	$0.49902^{(2)}$	$0.03494^{(3)}$	$8^{(3)}$
	Mom	Parameter	4.66557	7.39090	2.83799	
		MSE	$0.73856^{(4)}$	$0.87862^{(4)}$	$0.14233^{(4)}$	$12^{(4)}$
	Per	Parameter	4.99244	5.81104	3.06508	
		MSE	$0.00032^{(2)}$	$0.70374^{(3)}$	$0.02618^{(2)}$	$7^{(2)}$
	MomlB	Parameter	5.01021	5.98688	2.89777	
		MSE	$0.00021^{(1)}$	$0.00035^{(1)}$	$0.02104^{(1)}$	$3^{(1)}$
50	MLE	Parameter	5.01055	5.98645	2.89436	
		MSE	$0.00021^{(1)}$	$0.00035^{(1)}$	$0.02105^{(1)}$	$3^{(1)}$
	Mom	Parameter	3.33681	7.63416	2.79050	
		MSE	$0.80819^{(4)}$	$0.76947^{(4)}$	$0.05682^{(4)}$	$12^{(4)}$
	Per	Parameter	4.97996	5.33077	3.16907	
		MSE	$0.00064^{(2)}$	$0.14859^{(2)}$	$0.04292^{(3)}$	$7^{(2)}$
	MomlB	Parameter	5.29808	5.90499	3.07322	
		MSE	$0.09887^{(3)}$	$0.57910^{(3)}$	$0.03786^{(2)}$	$8^{(3)}$
100	MLE	Parameter	5.01117	5.98565	2.89432	
		MSE	$0.00015^{(1)}$	$0.00023^{(1)}$	$0.01361^{(1)}$	$3^{(1)}$
	Mom	Parameter	2.26566	7.33452	2.64583	
		MSE	$0.84977^{(4)}$	$0.92301^{(4)}$	$0.18540^{(4)}$	$12^{(4)}$
	Per	Parameter	4.99625	5.91061	3.03543	
		MSE	$0.00018^{(2)}$	$0.37092^{(3)}$	$0.01451^{(2)}$	$7^{(2)}$
	MomlB	Parameter	4.92619	6.09471	2.98588	
		MSE	$0.33222^{(3)}$	$0.22878^{(2)}$	$0.01662^{(3)}$	$8^{(3)}$
150	MLE	Parameter	5.01117	5.98644	3.02696	
		MSE	$0.00014^{(1)}$	$0.00022^{(1)}$	$0.01332^{(1)}$	$3^{(1)}$
	Mom	Parameter	4.68640	7.72692	2.85956	
		MSE	$0.86994^{(4)}$	$0.81966^{(4)}$	$0.05657^{(4)}$	$12^{(4)}$
	Per	Parameter	4.99436	5.77403	3.04718	
		MSE	$0.00022^{(2)}$	$0.33742^{(3)}$	$0.01873^{(3)}$	$8^{(3)}$
	MomlB	Parameter	5.12483	5.91136	2.88821	
		MSE	$0.23041^{(3)}$	$0.11913^{(2)}$	$0.01352^{(2)}$	$7^{(2)}$

جدول (12)يوضح متوسط مربعات الخطأ(MSE) لجميع طرائق التقدير وعند حجوم العينات المختلفة لإنموذج (F) عند $\delta = 8, \lambda = 7, \theta = 5$ فترة البتر الثانية (t_1=2,t_2=5).

Size	Method	Parameter EST	$\hat{\delta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\theta}$	∑Ranks
15	MLE	Parameter	8.19838	7.35724	5.06438	
		MSE	0.05377(3)	0.55826(3)	0.22173(4)	10(3)
	Mom	Parameter	9.97144	9.43018	4.78260	
		MSE	0.74826(4)	0.912187(4)	0.20490(3)	11(4)
	Per	Parameter	7.97972	6.48890	5.18743	
		MSE	0.00169(2)	0.24182(2)	0.18856(2)	6(2)
	MomlB	Parameter	8.00916	6.97816	4.89720	
		MSE	0.00053(1)	0.00303(1)	0.06691(1)	3(1)
30	MLE	Parameter	7.98178	7.13029	5.03098	
		MSE	0.02692(3)	0.34569(3)	0.17585(2)	8(3)
	Mom	Parameter	9.90787	9.58245	4.82147	
		MSE	0.85269(4)	0.56224(4)	0.21958(3)	11(4)
	Per	Parameter	8.01162	6.97228	5.49176	
		MSE	0.00026(1)	0.00146(1)	0.66911(4)	6(2)
	MomlB	Parameter	7.93295	6.11619	4.86973	
		MSE	0.01355(2)	0.21392(2)	0.03219(1)	5(1)
50	MLE	Parameter	8.01199	6.97140	4.86558	
		MSE	0.00025(1)	0.00144(1)	0.03187(1)	3(1)
	Mom	Parameter	8.28107	10.16622	4.65679	
		MSE	0.52259(4)	0.85054(4)	0.20274(4)	12(4)
	Per	Parameter	7.96890	6.29116	5.29030	
		MSE	0.00197(2)	0.44603(2)	0.17097(3)	7(2)
	MomlB	Parameter	7.63795	7.28477	4.92632	
		MSE	0.35926(3)	0.65116(3)	0.03939(2)	8(3)
100	MLE	Parameter	8.01415	6.96626	4.90835	
		MSE	0.00022(1)	0.00127(1)	0.02679(1)	3(1)
	Mom	Parameter	7.31293	9.56058	4.66430	
		MSE	0.87251(4)	0.719807(4)	0.22557(4)	12(4)
	Per	Parameter	7.99271	6.82413	5.05976	
		MSE	0.00062(2)	0.51400(3)	0.06327(3)	8(3)
	MomlB	Parameter	7.68223	7.17122	4.84146	
		MSE	0.45476(3)	0.17606(2)	0.02804(2)	7(2)
150	MLE	Parameter	8.01278	6.96951	4.85673	
		MSE	0.00019(1)	0.00106(1)	0.02340(1)	3(1)
	Mom	Parameter	8.08633	9.56385	4.70912	
		MSE	0.08519(4)	0.76124(4)	0.16881(4)	12(4)
	Per	Parameter	7.99289	6.88032	5.05736	
		MSE	0.00069(2)	0.60370(3)	0.06937(3)	8(3)
	MomlB	Parameter	7.94319	7.05289	4.98336	
		MSE	0.01561(3)	0.31363(2)	0.03846(2)	7(2)

جدول (13)يوضح متوسط مربعات الخطأ(MSE) لجميع طرائق التقدير وعند حجوم العينات المختلفة لإنموذج (A) $\delta=4$,$\beta= 4$,$\theta=4$ عند فترة البتر الثالثة ($t_1=2,t_2=10$)

Size	Method	Parameter EST	$\hat{\delta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\theta}$	∑Ranks
15	MLE	Parameter	3.70108	6.38165	3.36769	
		MSE	$0.45632^{(2)}$	$0.97089^{(4)}$	$0.68530^{(3)}$	$9^{(3)}$
	Mom	Parameter	1.95853	6.43728	3.22272	
		MSE	$0.75825^{(4)}$	$0.93869^{(3)}$	$0.82846^{(4)}$	$11^{(4)}$
	Per	Parameter	3.95993	5.14431	3.88372	
		MSE	$0.06719^{(1)}$	$0.63563^{(2)}$	$0.20795^{(2)}$	$5^{(1.5)}$
	MomlB	Parameter	2.40055	3.95239	3.82410	
		MSE	$0.74307^{(3)}$	$0.01030^{(1)}$	$0.14057^{(1)}$	$5^{(1.5)}$
30	MLE	Parameter	4.04370	4.15612	3.76819	
		MSE	$0.00868^{(1)}$	$0.19229^{(2)}$	$0.16105^{(2)}$	$5^{(2)}$
	Mom	Parameter	3.57599	7.05828	3.45620	
		MSE	$0.5317^{(4)}$	$0.9495^{(4)}$	$0.51982^{(4)}$	$12^{(4)}$
	Per	Parameter	4.08433	3.90827	3.66158	
		MSE	$0.00921^{(2)}$	$0.01091^{(1)}$	$0.14862^{(1)}$	$4^{(1)}$
	MomlB	Parameter	3.97477	4.14556	3.98358	
		MSE	$0.02131^{(3)}$	$0.49201^{(3)}$	$0.24503^{(3)}$	$9^{(3)}$
50	MLE	Parameter	4.08565	3.90685	3.79412	
		MSE	$0.00837^{(1)}$	$0.00990^{(1)}$	$0.11618^{(1)}$	$3^{(1)}$
	Mom	Parameter	3.72926	6.55890	3.45630	
		MSE	$0.63419^{(4)}$	$0.78288^{(4)}$	$0.42051^{(4)}$	$12^{(4)}$
	Per	Parameter	4.00742	4.18754	3.90283	
		MSE	$0.01678^{(2)}$	$0.68084^{(3)}$	$0.21370^{(3)}$	$8^{(3)}$
	MomlB	Parameter	3.67002	4.19725	3.65644	
		MSE	$0.45344^{(3)}$	$0.16548^{(2)}$	$0.13473^{(2)}$	$7^{(2)}$
100	MLE	Parameter	4.07134	3.92245	3.73740	
		MSE	$0.00542^{(1)}$	$0.00640^{(1)}$	$0.07370^{(1)}$	$3^{(1)}$
	Mom	Parameter	2.57988	6.42697	3.40708	
		MSE	$0.41617^{(4)}$	$0.94978^{(4)}$	$0.42041^{(4)}$	$12^{(4)}$
	Per	Parameter	3.92023	3.63141	4.25248	
		MSE	$0.01454^{(2)}$	$0.40332^{(3)}$	$0.15081^{(3)}$	$8^{(3)}$
	MomlB	Parameter	4.20050	3.91671	4.09912	
		MSE	$0.41147^{(3)}$	$0.10289^{(2)}$	$0.09186^{(2)}$	$7^{(2)}$
150	MLE	Parameter	4.06554	3.92877	3.93012	
		MSE	$0.00459^{(1)}$	$0.00542^{(1)}$	$0.02782^{(1)}$	$3^{(1)}$
	Mom	Parameter	5.93819	6.73721	3.71399	
		MSE	$0.8301^{(4)}$	$0.87019^{(4)}$	$0.28990^{(4)}$	$12^{(4)}$
	Per	Parameter	4.00259	4.08048	3.96385	
		MSE	$0.00669^{(2)}$	$0.25530^{(3)}$	$0.09328^{(3)}$	$8^{(3)}$
	MomlB	Parameter	3.88452	4.03295	3.71409	
		MSE	$0.09918^{(3)}$	$0.02775^{(2)}$	$0.08703^{(2)}$	$7^{(2)}$

جدول (14) يوضح متوسط مربعات الخطأ(MSE) لجميع طرائق التقدير وعند حجوم العينات المختلفة لإنموذ (B) $\theta = 3.5$, $\lambda = 4.5$, $\delta = 2.5$ عند فترة البتر الثالثة (t_1=2,t_2=10) .

Size	Method8	Parameter EST	$\hat{\delta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\theta}$	∑Ranks
15	MLE	Parameter	1.90327	4.87868	3.27752	
		MSE	0.79976$^{(3)}$	0.052294$^{(2)}$	0.22240$^{(3)}$	8$^{(3)}$
	Mom	Parameter	1.61028	6.49330	3.08611	
		MSE	0.96574$^{(4)}$	0.856001$^{(4)}$	0.29265$^{(4)}$	12$^{(4)}$
	Per	Parameter	2.45235	5.10903	3.55560	
		MSE	0.02263$^{(2)}$	0.62587$^{(3)}$	0.12111$^{(2)}$	7$^{(2)}$
	MomlB	Parameter	2.53776	4.48551	3.37816	
		MSE	0.00582$^{(1)}$	0.00086$^{(1)}$	0.06045$^{(1)}$	3$^{(1)}$
30	MLE	Parameter	2.73689	5.87037	3.54866	
		MSE	0.48179$^{(3)}$	0.406154$^{(3)}$	0.05794$^{(1)}$	7$^{(2.5)}$
	Mom	Parameter	3.55626	6.64561	3.36173	
		MSE	0.9327$^{(4)}$	0.90384$^{(4)}$	0.16901$^{(4)}$	12$^{(4)}$
	Per	Parameter	2.47775	4.38872	3.48652	
		MSE	0.01590$^{(2)}$	0.02786$^{(2)}$	0.12401$^{(3)}$	7$^{(2.5)}$
	MomlB	Parameter	2.58503	4.46736	3.22535	
		MSE	0.01160$^{(1)}$	0.00171$^{(1)}$	0.12130$^{(2)}$	4$^{(1)}$
50	MLE	Parameter	2.48144	4.47218	3.40831	
		MSE	0.00443$^{(1)}$	0.00083$^{(1)}$	0.03166$^{(1)}$	3$^{(1)}$
	Mom	Parameter	1.98075	6.09053	2.97385	
		MSE	0.58786$^{(4)}$	0.90513$^{(4)}$	0.41447$^{(4)}$	12$^{(4)}$
	Per	Parameter	2.46139	4.59042	3.61374	
		MSE	0.00455$^{(2)}$	0.39327$^{(2)}$	0.04511$^{(3)}$	7$^{(2.5)}$
	MomlB	Parameter	2.32260	4.33001	3.50491	
		MSE	0.16798$^{(3)}$	0.52125$^{(3)}$	0.03486$^{(2)}$	7$^{(2.5)}$
100	MLE	Parameter	2.48405	4.47450	3.43377	
		MSE	0.00328$^{(1)}$	0.00069$^{(1)}$	0.01566$^{(1)}$	3$^{(1)}$
	Mom	Parameter	2.92662	7.06654	3.23522	
		MSE	0.06871$^{(4)}$	0.727539$^{(4)}$	0.24668$^{(4)}$	12$^{(4)}$
	Per	Parameter	2.53319	4.19398	3.54862	
		MSE	0.004965$^{(3)}$	0.31219$^{(3)}$	0.03754$^{(2)}$	7$^{(2.5)}$
	MomlB	Parameter	2.57260	4.43010	3.26616	
		MSE	0.00565$^{(2)}$	0.10787$^{(2)}$	0.05867$^{(3)}$	7$^{(2.5)}$
150	MLE	Parameter	2.52845	4.48909	3.48101	
		MSE	0.00305$^{(1)}$	0.00045$^{(1)}$	0.01378$^{(1)}$	3$^{(1)}$
	Mom	Parameter	1.55561	6.27051	3.05203	
		MSE	0.58808$^{(4)}$	0.97337$^{(4)}$	0.32769$^{(4)}$	12$^{(4)}$
	Per	Parameter	2.56658	4.32219	3.54501	
		MSE	0.00471$^{(2)}$	0.20145$^{(3)}$	0.02904$^{(2)}$	7$^{(2)}$
	MomlB	Parameter	2.41642	4.57221	3.28561	
		MSE	0.02779$^{(3)}$	0.04252$^{(2)}$	0.04885$^{(3)}$	8$^{(٣)}$

جدول (15) يوضح متوسط مربعات الخطأ(MSE) لجميع طرائق التقدير وعند حجوم العينات المختلفة لإنموذج (C) $\delta = 4 , \lambda = 5, \theta = 4$ عند فترة البتر الثالثة $(t_1=2,t_2=10)$.

Size	Method	Parameter EST	$\hat{\delta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\theta}$	∑Ranks
15	MLE	Parameter	4.11629	5.85814	4.03253	
		MSE	$0.41935^{(3)}$	$0.839553^{(2)}$	$0.64788^{(4)}$	$9^{(3.5)}$
	Mom	Parameter	6.01044	8.08099	3.82577	
		MSE	$0.920996^{(4)}$	$0.999404^{(3)}$	$0.10379^{(1)}$	$8^{(2)}$
	Per	Parameter	3.85667	4.69189	4.21380	
		MSE	$0.10863^{(2)}$	$0.323871^{(4)}$	$0.36641^{(3)}$	$9^{(3.5)}$
	MomlB	Parameter	4.05416	4.94706	3.72820	
		MSE	$0.00609^{(1)}$	$0.00581^{(1)}$	$0.15325^{(2)}$	$4^{(1)}$
30	MLE	Parameter	3.56525	5.53542	3.75706	
		MSE	$0.39075^{3)}$	$0.39225^{(2)}$	$0.16009^{(2)}$	$7^{(2)}$
	Mom	Parameter	7.23258	7.74747	3.86094	
		MSE	$0.6488^{(4)}$	$0.82947^{(4)}$	$0.16788^{(3)}$	$11^{(4)}$
	Per	Parameter	3.94132	4.80034	4.16018	
		MSE	$0.01720^{(2)}$	$0.59708^{(3)}$	$0.24488^{(4)}$	$9^{(3)}$
	MomlB	Parameter	4.05339	4.94785	3.73245	
		MSE	$0.00393^{(1)}$	$0.00375^{(1)}$	$0.09882^{(1)}$	$3^{(1)}$
50	MLE	Parameter	4.04722	4.95389	3.86358	
		MSE	$0.00243^{(1)}$	$0.00231^{(1)}$	$0.03094^{(1)}$	$3^{(1)}$
	Mom	Parameter	3.93938	7.78624	3.69952	
		MSE	$0.61389^{(4)}$	$0.81019^{(4)}$	$0.22867^{(4)}$	$12^{(4)}$
	Per	Parameter	3.96161	4.89765	4.16913	
		MSE	$0.00481^{(2)}$	$0.79379^{(2)}$	$0.09991^{(3)}$	$7^{(2)}$
	MomlB	Parameter	3.73157	5.33293	3.76356	
		MSE	$0.41788^{(3)}$	$0.46047^{(3)}$	$0.06086^{(2)}$	$8^{(3)}$
100	MLE	Parameter	4.03452	4.96629	3.99703	
		MSE	$0.00130^{(1)}$	$0.00124^{(1)}$	$0.03011^{(1)}$	$3^{(1)}$
	Mom	Parameter	6.75337	7.91463	3.86472	
		MSE	$0.8399^{(4)}$	$0.90331^{(4)}$	$0.07835^{(3)}$	$11^{(4)}$
	Per	Parameter	3.99676	4.98986	3.98554	
		MSE	$0.00453^{(2)}$	$0.57905^{(3)}$	$0.08870^{(4)}$	$9^{(3)}$
	MomlB	Parameter	3.94503	5.07511	3.94183	
		MSE	$0.23827^{(3)}$	$0.16673^{(2)}$	$0.06387^{(2)}$	$7^{(2)}$
150	MLE	Parameter	4.02725	4.97339	3.94124	
		MSE	$0.00123^{(1)}$	$0.00118^{(1)}$	$0.01724^{(1)}$	$3^{(1)}$
	Mom	Parameter	5.11287	7.35043	3.85392	
		MSE	$0.7950^{(4)}$	$0.74116^{(4)}$	$0.17848^{(4)}$	$12^{(4)}$
	Per	Parameter	3.97725	4.93677	4.08325	
		MSE	$0.00351^{(2)}$	$0.60625^{(3)}$	$0.06068^{(3)}$	$8^{(3)}$
	MomlB	Parameter	3.96059	4.99469	3.82722	
		MSE	$0.06315^{(3)}$	$0.05162^{(2)}$	$0.03248^{(2)}$	$7^{(2)}$

جدول (16) يوضح متوسط مربعات الخطأ(MSE) لجميع طرائق التقدير وعند حجوم العينات المختلفة لإنموذج (D) $\delta = 6, \lambda = 4, \theta = 4$ عند فترة البتر الثالثة $(t_1=2, t_2=10)$

Size	Method	Parameter EST	$\hat{\delta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\theta}$	∑Ranks
15	MLE	Parameter	5.40748	4.78300	3.77321	
		MSE	0.40533 (2)	0.92963(3)	0.83559(2)	7(2.5)
	Mom	Parameter	7.09389	6.85969	3.13014	
		MSE	0.75549(4)	0.953371(4)	0.62551(4)	12(4)
	Per	Parameter	5.61381	3.43805	4.81978	
		MSE	0.44727(3)	0.02439(1)	0.51739(3)	7(2.5)
	MomlB	Parameter	6.06464	3.85504	3.61007	
		MSE	0.00748(1)	0.03761(2)	0.27233(1)	4(1)
30	MLE	Parameter	6.43066	4.14466	4.21989	
		MSE	0.84770 (3)	0.70023(3)	0.08761(2)	8(3)
	Mom	Parameter	5.01108	6.82424	3.37176	
		MSE	0.94467 (4)	0.863831(4)	0.55412(4)	12(4)
	Per	Parameter	6.03871	3.91334	3.76737	
		MSE	0.00194(1)	0.00973(1)	0.07015(1)	3(1)
	MomlB	Parameter	5.98836	4.08027	3.97428	
		MSE	0.01404(2)	0.49486(2)	0.28042(3)	7(2)
50	MLE	Parameter	6.04438	3.90063	3.73323	
		MSE	0.00230(1)	0.01152(1)	0.08306(1)	3(1)
	Mom	Parameter	3.83719	6.92429	3.15765	
		MSE	0.26120(4)	0.95185 (4)	0.78477(4)	12(4)
	Per	Parameter	5.95355	3.96053	4.13399	
		MSE	0.02511(2)	0.48607(3)	0.43920(3)	8(3)
	MomlB	Parameter	5.80225	4.14272	3.93561	
		MSE	0.20626(3)	0.26547(2)	0.25807(2)	7(2)
100	MLE	Parameter	6.04586	3.89732	3.72435	
		MSE	0.00235(1)	0.01180(1)	0.08505(1)	3(1)
	Mom	Parameter	5.71065	7.30416	3.25566	
		MSE	0.44784(4)	0.74642(4)	0.65249(4)	12(4)
	Per	Parameter	5.98536	3.98756	4.04333	
		MSE	0.00481(2)	0.32060(3)	0.14416(3)	8(3)
	MomlB	Parameter	5.77940	4.11099	3.90389	
		MSE	0.73356(3)	0.12813(2)	0.09119(2)	7(2)
150	MLE	Parameter	6.03750	3.91606	3.77472	
		MSE	0.00157 (1)	0.007884(1)	0.05680(1)	3(1)
	Mom	Parameter	4.62737	7.44006	3.18122	
		MSE	0.80032(4)	0.94646(4)	0.74357(4)	12(4)
	Per	Parameter	5.97963	3.99136	4.08453	
		MSE	0.00378(2)	0.30555(3)	0.10993(3)	8(3)
	MomlB	Parameter	6.12779	3.99678	4.07487	
		MSE	0.73944(3)	0.07821(2)	0.09373(2)	7(2)

جدول (17) يوضح متوسط مربعات الخطأ(MSE) لجميع طرائق التقدير و عند حجوم العينات المختلفة لإنموذج (E) $\delta = 5, \lambda = 6, \theta = 3$ عند فترة البتر الثالثة $(t_1=2,t_2=10)$.

Size	Method	Parameter EST	$\hat{\delta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\theta}$	∑Ranks
15	MLE	Parameter	5.16279	8.60312	2.71726	
		MSE	$0.89769^{(3)}$	$0.86656^{(4)}$	$0.28085^{(4)}$	$11^{(4)}$
	Mom	Parameter	6.02613	8.03570	2.79141	
		MSE	$0.92089^{(4)}$	$0.81126^{(3)}$	$0.17747^{(3)}$	$10^{(3)}$
	Per	Parameter	4.99800	6.86857	2.96376	
		MSE	$0.00200^{(2)}$	$0.10416^{(2)}$	$0.13696^{(2)}$	$6^{(2)}$
	MomlB	Parameter	5.00921	5.98817	2.90770	
		MSE	$0.00037^{(1)}$	$0.00061^{(1)}$	$0.03679^{(1)}$	$3^{(1)}$
30	MLE	Parameter	3.56068	6.13588	3.05410	
		MSE	$0.70222^{(4)}$	$0.19806^{(2)}$	$0.09950^{(2)}$	$8^{(2.5)}$
	Mom	Parameter	4.64985	7.60620	2.87819	
		MSE	$0.15339^{(3)}$	$0.95972^{(4)}$	$0.12802^{(4)}$	$11^{(4)}$
	Per	Parameter	4.98060	5.69877	3.14372	
		MSE	$0.00174^{(2)}$	$0.89669^{(3)}$	$0.11877^{(3)}$	$8^{(2.5)}$
	MomlB	Parameter	5.00963	5.98762	2.90351	
		MSE	$0.00024^{(1)}$	$0.00040^{(1)}$	$0.02450^{(1)}$	$3^{(1)}$
50	MLE	Parameter	5.01303	5.98340	2.92846	
		MSE	$0.00018^{(1)}$	$0.00032^{(1)}$	$0.01919^{(1)}$	$3^{(1)}$
	Mom	Parameter	4.15707	7.53667	2.81575	
		MSE	$0.93404^{(4)}$	$0.91482^{(4)}$	$0.08258^{(4)}$	$12^{(4)}$
	Per	Parameter	5.00168	6.08062	2.97721	
		MSE	$0.00020^{(2)}$	$0.58908^{(2)}$	$0.01875^{(2)}$	$6^{(2)}$
	MomlB	Parameter	4.73543	6.31218	2.87069	
		MSE	$0.87822^{(3)}$	$0.88780^{(3)}$	$0.04277^{(3)}$	$9^{(3)}$
100	MLE	Parameter	5.01292	5.98327	3.00391	
		MSE	$0.00019^{(1)}$	$0.00031^{(1)}$	$0.01590^{(1)}$	$3^{(1)}$
	Mom	Parameter	3.41213	7.74004	2.78152	
		MSE	$0.70861^{(4)}$	$0.96194^{(4)}$	$0.07330^{(4)}$	$12^{(4)}$
	Per	Parameter	4.98062	5.27466	3.16370	
		MSE	$0.00073^{(2)}$	$0.84683^{(3)}$	$0.05294^{(3)}$	$8^{(3)}$
	MomlB	Parameter	5.07103	5.92553	2.86963	
		MSE	$0.37192^{(3)}$	$0.21606^{(2)}$	$0.01883^{(2)}$	$7^{(2)}$
150	MLE	Parameter	5.01060	5.98639	3.00114	
		MSE	$0.00012^{(1)}$	$0.00021^{(1)}$	$0.00674^{(1)}$	$3^{(1)}$
	Mom	Parameter	6.09888	8.47173	2.90457	
		MSE	$0.82381^{(4)}$	$0.80728^{(4)}$	$0.06539^{(4)}$	$12^{(4)}$
	Per	Parameter	4.99964	6.02139	2.98114	
		MSE	$0.00017^{(2)}$	$0.16256^{(2)}$	$0.01201^{(2)}$	$6^{(2)}$
	MomlB	Parameter	4.89558	6.10286	2.89397	
		MSE	$0.28435^{(3)}$	$0.20994^{(3)}$	$0.01246^{(3)}$	$9^{(3)}$

جدول (18) يوضح متوسط مربعات الخطأ(MSE) لجميع طرائق التقدير وعند حجوم العينات المختلفة لإنموذج (F) $\delta = 8, \lambda = 7, \theta = 5$ عند فترة البتر الثالثة (t_1=2,t_2=10).

Size	Method	Parameter EST	$\hat{\delta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\theta}$	∑Ranks
15	MLE	Parameter	7.26072	7.68337	4.68287	
		MSE	0.64578(3)	0.89553(3)	0.68154(4)	10(3)
	Mom	Parameter	9.61129	10.00191	4.64091	
		MSE	0.85663(4)	0.955357(4)	0.53744(3)	11(4)
	Per	Parameter	7.90762	6.11864	5.49849	
		MSE	0.03487(2)	0.57968(2)	0.11346(1)	5(2)
	MomlB	Parameter	8.01834	6.95622	4.79375	
		MSE	0.00148(1)	0.00844(1)	0.18708(2)	4(1)
30	MLE	Parameter	6.75403	8.40539	4.86136	
		MSE	0.88125(4)	0.61796 (3)	0.12482(2)	9(3)
	Mom	Parameter	8.10159	9.50709	4.73411	
		MSE	0.59134(3)	0.89231(4)	0.14638(4)	11(4)
	Per	Parameter	7.98110	6.82989	5.15310	
		MSE	0.00183(2)	0.31822(2)	0.14000(3)	7(2)
	MomlB	Parameter	8.00929	6.97785	4.89588	
		MSE	0.00022(1)	0.00127(1)	0.02805(1)	3(1)
50	MLE	Parameter	7.98916	6.96620	5.10716	
		MSE	0.00050(2)	0.00163(1)	0.05170(2)	5(2)
	Mom	Parameter	7.99154	9.31884	4.71277	
		MSE	0.00153 (3)	0.81744(4)	0.16365(4)	11(4)
	Per	Parameter	8.01417	7.46666	4.84114	
		MSE	0.00029(1)	0.55351(2)	0.03596(1)	4(1)
	MomlB	Parameter	7.56358	6.64020	4.88450	
		MSE	0.14757(4)	0.63142(3)	0.12767(3)	10(3)
100	MLE	Parameter	8.01588	6.96212	4.82198	
		MSE	0.00028(1)	0.00158(1)	0.03482(1)	3(1)
	Mom	Parameter	5.84090	9.36016	4.44863	
		MSE	0.08315(4)	0.830128(4)	0.38185(4)	12(4)
	Per	Parameter	7.98404	6.53699	5.13095	
		MSE	0.00168(2)	0.66496(3)	0.12140(3)	8(3)
	MomlB	Parameter	8.15936	6.93068	5.00296	
		MSE	0.02622(3)	0.35755(2)	0.05256(2)	7(2)
150	MLE	Parameter	8.00817	6.98052	4.98679	
		MSE	0.00013 (1)	0.000743(1)	0.01562(1)	3(1)
	Mom	Parameter	9.27748	9.33154	4.82229	
		MSE	0.80852(4)	0.839942(4)	0.27368(4)	12(4)
	Per	Parameter	7.98756	6.87490	5.11996	
		MSE	0.00086(2)	0.58985(3)	0.09181(3)	8(3)
	MomlB	Parameter	7.79792	7.16336	4.90845	
		MSE	0.18294(3)	0.07455(2)	0.01640(2)	7(2)

```
%%%%%%%%%%%%%%%% drawing functions of DTWPD
Distribution%%%%
clc;
clear;
eta1=[1.5 1.5 1.1];
Lemda1=[2 2.3 2.1];
theta1=[3 3.1 3.2];
t1=0.2;
t2=5;
%%%%%%%%%%%%%%% pdf function of DTWPD Distribution%%%%%
x=t1:0.01: t2;
figure(1)
for j=1:3
eta=eta1(j);Lemda=Lemda1(j);theta=theta1(j);
pdf=((eta.*Lemda./theta). *(x./theta).^(Lemda-1).*exp(-
eta.*((x./theta....).^Lemda))./(exp(-
eta.*((t1./theta).^Lemda))-exp(-
eta.*((t2./theta).^Lemda)));
hold all
a=plot(x,pdf);
grid on;
if j==1
set(a,'color','black','linewidth',2)
end
if j==2
set(a,'color','blue','linewidth',2)
end
if j==3
set(a,'color','r','linewidth',2)
end
end
xlabel('x');
ylabel('f(x)');
title('pdf of of DTWPD Distribution')
legend('eta=1.5 Lemda=2 theta=3','eta=1.5 Lemda=2.3
theta=3.1','eta=1.1 Lemda=2.1 theta=3.2')
%%%%%%%%%%% cdf function of DTWPD Distribution%%%%%%%%%
figure(2)
for j=1:3
eta=eta1(j);Lemda=Lemda1(j);theta=theta1(j);
cdf=exp(-eta.*((t1./theta).^Lemda))-exp(-
eta.*((x./theta).^Lemda))./(exp(-eta.....
    *((t1./theta).^Lemda))-(exp(-eta.....
    *((t2./theta).^Lemda))))
hold all
a=plot(x,cdf);
grid on;
if j==1
set(a,'color','black','linewidth',2)
end
```

```
if j==2
set(a,'color','blue','linewidth',2)
end
if j==3
set(a,'color','r','linewidth',2)
end
end
xlabel('x');
ylabel('F(x)');
title('cdf of DTWPD Distribution')
legend('eta=1.5 Lemda=2 theta=3','eta=1.5 Lemda=2.3
theta=3.1','eta=1.1 Lemda=2.1 theta=3.2')
%%%%%%%% Reliability function of DTWPD Distribution %%%%%
figure(3)
for j=1:3
eta=eta1(j);Lemda=Lemda1(j);theta=theta1(j);
R=1-(exp(-eta.*((t1./theta).^Lemda))-exp(-
eta.*((x./theta).^Lemda))./(exp(-eta....
    .*((t1./theta).^Lemda))-(exp(-eta.....
    *((t2./theta).^Lemda)))));
hold all
a=plot(x,R);
grid on;
if j==1
set(a,'color','black','linewidth',2)
end
if j==2
set(a,'color','blue','linewidth',2)
end
if j==3
set(a,'color','r','linewidth',2)
end
end
xlabel('x');
ylabel('R(x)');
title('Reliability function of DTWPD Distribution')
legend('eta=1.5 Lemda=2 theta=3','eta=1.5 Lemda=2.3
theta=3.1','eta=1.1 Lemda=2.1 theta=3.2')
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% mode of  DTWPD Distribution
%%%%%%%%%%%
figure(4)
eta1=[1.5 1.9 1.1];
Lemda1=[1.5 1.5 2.1];
theta1=[3 2.5 3.2];
t1=0.3;
t2=1.1;
for j=1:3
eta=eta1(j);Lemda=Lemda1(j);theta=theta1(j);
pdf=((eta.*Lemda./theta)./theta).*(x./theta).^(Lemda-
1).*exp(-eta.*((x./theta)....
    .^Lemda))./(exp(-eta.*((t1./theta).^Lemda))-exp(-
eta.*((t2./theta).^Lemda)));
```

```
hold all
a=plot(x,pdf);
grid on;
if j==1
set(a,'color','black','linewidth',2)
mod1=theta.*(((Lemda-1)./(Lemda.*eta)).^(1./Lemda));
end
if j==2
set(a,'color','blue','linewidth',2)
mod2=theta.*(((Lemda-1)./(Lemda.*eta)).^(1./Lemda));
end
if j==3
set(a,'color','r','linewidth',2)
mod3=theta.*(((Lemda-1)./(Lemda.*eta)).^(1./Lemda));
end
end
xlabel('x');
ylabel('y=f(x)');
title('mode of DTWPD Distribution')
legend('eta=1.5 Lemda=1.5 theta=3','eta=1.9 Lemda=1.5
theta=2.5','eta=1.1 Lemda=2.1 theta=3.2')
%%%%%The coefficients of variation of EWF
Distribution%%%%%%
figure(5)
eta=[1:0.1:10];
Lemda=[1:0.1:10];
theta=[1:0.1:10];
t1=0.1;
t2=1.1;
for i=1:2
m=((theta./(exp(-eta.*((t1./theta).^Lemda))-exp(-
eta.*((t2./theta).^Lemda))))....

.*eta.^(1./Lemda)).*((gammainc(((1+Lemda)./Lemda),(eta.*(t1
./theta)....
    .^Lemda))-
gammainc(((1+Lemda)./Lemda),(eta.*(t2./theta).^Lemda))));
cv=real((sqrt(theta.^(2-i)./((exp(-
eta.*((t1./theta).^Lemda))-exp(-eta....
    .*((t2./theta).^Lemda)))).*eta.^((2./Lemda)-
(i./Lemda)).*(2./(factorial(i)....
    .*(factorial(2-i)).*((-m).^i))).*(gammainc(((2-
i+Lemda)./Lemda),(eta....
    .*(t1./theta).^Lemda))-gammainc(((2-
i+Lemda)./Lemda),(eta.*(t2./theta)....
    .^Lemda)))))./((theta./((exp(-
eta.*((t1./theta).^Lemda))-exp(-eta....

.*((t2./theta).^Lemda)))).*eta.^(1./Lemda).*((gammainc(((1+
Lemda)....
    ./Lemda),(eta.*(t1./theta).^Lemda))-
gammainc(((1+Lemda)./Lemda),(eta.*(t2....
```

```
    ./theta).^Lemda)))))));
end
a=plot(cv,'B','linewidth',3);
grid on;
xlabel('parameters');
ylabel('cv');
title('The coefficients of variation of DTWPD
Distribution')
%%%%%%%%%%% Skewness of DTWPD Distribution %%%%%%%%
figure(6)
eta=[1:0.1:10];
Lemda=[1:0.1:10];
theta=[1:0.1:10];
t1=0.1;
t2=1.9;
eta1=[1.5 1.5 1.1];
Lemda1=[2 2.3 2.1];
theta1=[3 3.1 3.2];
for j=1:3
eta=eta1(j);Lemda=Lemda1(j);theta=theta1(j);
pdf=((eta.*Lemda./theta)./theta).*(x./theta).^(Lemda-
1).*exp(-eta.*((x./theta)....
    .^Lemda))./(exp(-eta.*((t1./theta).^Lemda))-exp(-
eta.*((t2./theta).^Lemda)));
hold all
a=plot(x,pdf);
grid on;
for i=1:3;if j==1
set(a,'color','black','linewidth',2)
s1=real((theta.^(3-i)./((exp(-eta.*((t1./theta).^Lemda))-
exp(-eta.*((t2..../theta).^Lemda)))).*eta.^((3./Lemda)-
(i./Lemda)).*(6./(factorial(i).....*(factorial(3-i)).*((-
m).^i))).*(gammainc(((3-i+Lemda)./Lemda),(eta....
.*(t1./theta).^Lemda))-gammainc(((3-
i+Lemda)./Lemda),(eta.*(t2./theta).....^Lemda)))./((theta.
^(2-i)./((exp(-eta.*((t1./theta).^Lemda))-exp(-eta....
  .*((t2./theta).^Lemda)))).*eta.^((2./Lemda)-
(i./Lemda)).*(2./(factorial(i).....*(factorial(3-i)).*-
(m.^i))).*(gammainc(((2-i+Lemda)./Lemda),(eta.*(t1....
./theta).^Lemda))-gammainc(((2-
i+Lemda)./Lemda),(eta.*(t2./theta)....
  .^Lemda))))).^(2./3));
end
end
for i=1:3;if j==2
set(a,'color','blue','linewidth',2)
s2=real((theta.^(3-i)./((exp(-eta.*((t1./theta).^Lemda))-
exp(-eta.*((t2..../theta).^Lemda)))).*eta.^((3./Lemda)-
(i./Lemda)).*(6./(factorial(i).....*(factorial(3-i)).*((-
m).^i))).*(gammainc(((3-i+Lemda)./Lemda),(eta....
  .*(t1./theta).^Lemda))-gammainc(((3-
i+Lemda)./Lemda),(eta.*(t2./theta)....
```

```
.^Lemda)))) ./((theta.^(2-i)./((exp(-
eta.*((t1./theta).^Lemda))-exp(-
eta.....*((t2./theta).^Lemda)))).*eta.^((2./Lemda)-
(i./Lemda)).*(2./(factorial(i).....*(factorial(3-i)).*-
(m.^i))).*(gammainc(((2-i+Lemda)./Lemda),(eta.*(t1....
./theta).^Lemda))-gammainc(((2-
i+Lemda)./Lemda),(eta.*(t2./theta).....^Lemda))))).^(2./3))
;
end
end
for i=1:3;if j==3
set(a,'color','r','linewidth',2)
s3=real((theta.^(3-i)./((exp(-eta.*((t1./theta).^Lemda))-
exp(-eta.*((t2...../theta).^Lemda)))).*eta.^((3./Lemda)-
(i./Lemda)).*(6./(factorial(i).....*(factorial(3-i)).*((-
m).^i))).*(gammainc(((3-i+Lemda)./Lemda),(eta....
.*(t1./theta).^Lemda))-gammainc(((3-
i+Lemda)./Lemda),(eta.*(t2./theta).....^Lemda)))) ./((theta.
^(2-i)./((exp(-eta.*((t1./theta).^Lemda))-exp(-
eta.....*((t2./theta).^Lemda)))).*eta.^((2./Lemda)-
(i./Lemda)).*(2./(factorial(i)....
  .*(factorial(3-i)).*-(m.^i))).*(gammainc(((2-
i+Lemda)./Lemda),(eta.*(t1....
./theta).^Lemda))-gammainc(((2-
i+Lemda)./Lemda),(eta.*(t2./theta).....^Lemda))))).^(2./3))
end
end
end
xlabel('x');
ylabel('y=f(x)');
title('Skewenss of DTWPD Distribution')
legend('eta=1.5 Lemda=2 theta=3','eta=1.5 Lemda=2.3
theta=1.1','eta=1.1 Lemda=2.1 theta=3.2')
%%%%%%%%%%%%%%%% Kurtosis of DTWPD Distribution  %%%%%%%%%
figure(7)
eta=[1:0.1:10];
Lemda=[1:0.1:10];
theta=[1:0.1:10];
t1=0.1;
t2=1.9;;for i=1:4
Kurtosis=(theta.^(4-i)./((exp(-eta.*((t1./theta).^Lemda))-
exp(-eta.*((t2./theta).....^Lemda)))).*eta.^((4./Lemda)-
(i./Lemda)).*(24./(factorial(i).*(factorial(4-i)).....*((-
m).^i))).*(gammainc(((4-
i+Lemda)./Lemda),(eta.*(t1./theta)....
.^Lemda))-gammainc(((4-i+Lemda) ./Lemda)
,(eta.*(t2./theta).^Lemda))))....
./((theta.^(4-i)./((exp(-eta.*((t1./theta).^Lemda))-exp(-
eta.*((t2....
./theta).^Lemda)))).*eta.^((4./Lemda)-(i./Lemda))));
end
a=plot(Kurtosis,'b','linewidth',4);
```

```
grid on;
xlabel('parameters');
ylabel('Kurtosis');
title('Kurtosis of DTWPD Distributio')
```

الملحق (c)

```
%%%%%%  SIMULATION CODE of DTWPD Distribution%%%%%%%
clc
clear
eta=4;
Lemda=4;
theta=4;
Beta=2;% 1<=Beta>alpha & alpha>Beta-1%%%
alpha=1.5;
T=1000;
t1=1;
t2=5;
n=150;
for t=1:T
x=generate_sample(n,eta,Lemda,theta);
x(t1:t2)=[];
f1=pdf_DTWPD(sort(x),eta,Lemda,theta);
F=cdf_DTWPD(sort(x),eta,Lemda,theta);
R_Real=1-F;
%%                1-MLE
[par1 f]=fsolve(@(S) MLE(x,S),[eta Lemda theta]);
eta_mle(t)=par1(1);          Lemda_mle(t)=par1(2);
theta_mle(t)=par1(3);
eta_ml=mean(eta_mle);Lemda_ml=mean(Lemda_mle);theta_ml=mean
(theta_mle);
mle_parameters=[eta_ml Lemda_ml theta_ml];
f_mle=pdf_DTWPD(sort(x),eta_mle(t),Lemda_mle(t),theta_mle(t
));
F_mle=cdf_DTWPD(sort(x),eta_mle(t),Lemda_mle(t),theta_mle(t
));
R_mle=1-F_mle;
ks_mle(t)=max(abs(((n)/n)-F_mle));
mse_mle(t)=immse(f1,f_mle);
MSEMAX=mean(mse_mle);
%%             2-Momenst method
[par2 f]=fsolve(@(S) MOM_Method(x,S),[eta Lemda theta]);
eta_mom(t)=par2(1);          Lemda_mom(t)=par2(2);
theta_mom(t)=par2(3);
eta_mo=mean(eta_mom);Lemda_mo=mean(Lemda_mom);theta_mo=mean
(theta_mom);
mom_parameters=[eta_mo Lemda_mo theta_mo];
f_mom=pdf_DTWPD(sort(x),eta_mom(t),Lemda_mom(t),theta_mom(t
));
F_mom=cdf_DTWPD(sort(x),eta_mom(t),Lemda_mom(t),theta_mom(t
));
ks_mom(t)=max(abs(((n)/n)-F_mom));
R_mom=1-F_mom;
```

```
mse_mom(t)=mean((f1-f_mom).^2);
MSEMOM=mean(mse_mom);
%%           3-Percentile method
[par3 f]=fsolve(@(S) PER_Method(x,S),[eta Lemda theta]);
eta_per(t)=par3(1);        Lemda_per(t)=par3(2);
theta_per(t)=par3(3);
eta_pe=mean(eta_per);Lemda_pe=mean(Lemda_per);theta_pe=mean
(theta_per);
per_parameters=[eta_pe Lemda_pe theta_pe];
f_per=pdf_DTWPD(sort(x),eta_per(t),Lemda_per(t),theta_per(t
));
F_per=cdf_DTWPD(sort(x),eta_per(t),Lemda_per(t),theta_per(t
));
ks_per(t)=max(abs(((n)/n)-F_per));
R_per=1-F_per;
mse_per(t)=immse(f1,f_per);
MSEPER=mean(mse_per);
%%             4- Mom lenght
[par4 f]=fsolve(@(S) MOM_length(x,S),[eta Lemda theta]);
eta_moml(t)=par4(1);       Lemda_moml(t)=par4(2);
theta_moml(t)=par4(3);
eta_ml=mean(eta_moml);Lemda_ml=mean(Lemda_moml);theta_ml=me
an(theta_moml);
moml_parameters=[eta_ml Lemda_ml theta_ml];
f_moml=pdf_DTWPD(sort(x),eta_moml(t),Lemda_moml(t),theta_mo
ml(t));
F_moml=cdf_DTWPD(sort(x),eta_moml(t),Lemda_moml(t),theta_mo
ml(t));
ks_moml(t)=max(abs(((n)/n)-F_moml));
R_moml=1-F_moml;
mse_moml(t)=immse(f1,f_moml);
MSEMOMLE=mean(mse_moml);
%%%%%%%% Weighted Generalized Entropy
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
H_real=(1./(Beta-
alpha)).*log(((eta.*Lemda)./((theta.^Lemda).*(exp(-
eta.*(t1./theta).^Lemda)-exp(-
eta.*(t2./theta).^Lemda)))).^((alpha+Beta)-
1).*(theta.^(Lemda.*(alpha+Beta-
1)+1))./((Lemda.*eta).*(((alpha+Beta)-1).^((alpha+Beta)-
1)+(1./Lemda))).*(gammainc((((alpha+Beta)-
1)+(1./Lemda)),(eta.*(((alpha+Beta)-
1)./(theta.^Lemda)).*t1.^Lemda)-gammainc(((alpha+Beta)-
1+(1./Lemda)),(eta.*(((alpha+Beta)-
1)./(theta.^Lemda)).*t2.^Lemda)))));
%%%%%%%%H_ESTIMATED%%%%%%
H_mle=mean((1./(Beta-
alpha)).*log(((eta_mle.*Lemda_mle)./((theta_mle.^Lemda_mle)
.*(exp(-eta_mle.*(t1./theta_mle).^Lemda_mle)-exp(-
eta_mle.*(t2./theta_mle).^Lemda_mle)))).^((alpha+Beta)-
1).*(theta_mle.^(Lemda_mle.*(alpha+Beta-
1)+1))./((Lemda_mle.*eta_mle).*(((alpha+Beta)-
```

```
1).^((alpha+Beta)-
1)+(1./Lemda_mle))).*(gammainc((((alpha+Beta)-
1)+(1./Lemda_mle)),(eta_mle.*(((alpha+Beta)-
1)./(theta_mle.^Lemda_mle)).*t1.^Lemda_mle)-
gammainc(((alpha+Beta)-
1+(1./Lemda_mle)),(eta_mle.*(((alpha+Beta)-
1)./(theta_mle.^Lemda_mle)).*t2.^Lemda_mle))))));
H_mom=mean((1./(Beta-
alpha)).*log(((eta_mom.*Lemda_mom)./((theta_mom.^Lemda_mom)
.*(exp(-eta_mom.*(t1./theta_mom).^Lemda_mom)-exp(-
eta_mom.*(t2./theta_mom).^Lemda_mom)))).^((alpha+Beta)-
1).*(theta_mom.^(Lemda_mom.*(alpha+Beta-
1)+1))./((Lemda_mom.*eta_mom).*(((alpha+Beta)-
1).^((alpha+Beta)-
1)+(1./Lemda_mom))).*(gammainc((((alpha+Beta)-
1)+(1./Lemda_mom)),(eta_mom.*(((alpha+Beta)-
1)./(theta_mom.^Lemda_mom)).*t1.^Lemda_mom)-
gammainc(((alpha+Beta)-
1+(1./Lemda_mom)),(eta_mom.*(((alpha+Beta)-
1)./(theta_mom.^Lemda_mom)).*t2.^Lemda_mom))))));
H_per=mean((1./(Beta-
alpha)).*log(((eta_per.*Lemda_per)./((theta_per.^Lemda_per)
.*(exp(-eta_per.*(t1./theta_per).^Lemda_per)-exp(-
eta_per.*(t2./theta_per).^Lemda_per)))).^((alpha+Beta)-
1).*(theta_per.^(Lemda_per.*(alpha+Beta-
1)+1))./((Lemda_per.*eta_per).*(((alpha+Beta)-
1).^((alpha+Beta)-
1)+(1./Lemda_per))).*(gammainc((((alpha+Beta)-
1)+(1./Lemda_per)),(eta_per.*(((alpha+Beta)-
1)./(theta_per.^Lemda_per)).*t1.^Lemda_per)-
gammainc(((alpha+Beta)-
1+(1./Lemda_per)),(eta_per.*(((alpha+Beta)-
1)./(theta_per.^Lemda_per)).*t2.^Lemda_per))))));
H_moml=mean((1./(Beta-
alpha)).*log(((eta_moml.*Lemda_moml)./((theta_moml.^Lemda_m
oml).*(exp(-eta_moml.*(t1./theta_moml).^Lemda_moml)-exp(-
eta_moml.*(t2./theta_moml).^Lemda_moml)))).^((alpha+Beta)-
1).*(theta_moml.^(Lemda_moml.*(alpha+Beta-
1)+1))./((Lemda_moml.*eta_moml).*(((alpha+Beta)-
1).^((alpha+Beta)-
1)+(1./Lemda_moml))).*(gammainc((((alpha+Beta)-
1)+(1./Lemda_moml)),(eta_moml.*(((alpha+Beta)-
1)./(theta_moml.^Lemda_moml)).*t1.^Lemda_moml)-
gammainc(((alpha+Beta)-
1+(1./Lemda_moml)),(eta_moml.*(((alpha+Beta)-
1)./(theta_moml.^Lemda_moml)).*t2.^Lemda_moml))))));
end
mse_H_mle=mean((H_real-H_mle).^2);
mse_H_mom=mean((H_real-H_mom).^2);
mse_H_per=mean((H_real-H_per).^2);
mse_H_moml=mean((H_real-H_moml).^2);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
mse_eta_mle=mean((eta-eta_mle).^2);
mse_Lemda_mle=mean((Lemda-Lemda_mle).^2);
mse_theta_mle=mean((theta-theta_mle).^2);
mse_method_mle=[mse_eta_mle  mse_Lemda_mle mse_theta_mle];
mse_eta_mom=mean((eta-eta_mom).^2);
mse_Lemda_mom=mean((Lemda-Lemda_mom).^2);
mse_theta_mom=mean((theta-theta_mom).^2);
mse_method_mom=[mse_eta_mom  mse_Lemda_mom mse_theta_mom];
mse_eta_per=mean((eta-eta_per).^2);
mse_Lemda_per=mean((Lemda-Lemda_per).^2);
mse_theta_per=mean((theta-theta_per).^2);
mse_method_per=[mse_eta_per  mse_Lemda_per mse_theta_per];
mse_eta_moml=mean((eta-eta_moml).^2);
mse_Lemda_moml=mean((Lemda-Lemda_moml).^2);
mse_theta_moml=mean((theta-theta_moml).^2);
mse_method_moml=[mse_eta_moml  mse_Lemda_moml
mse_theta_moml];
MSE_f_mle=((f1-f_mle).^2)';
MSE_f_mom=((f1-f_mom).^2)';
MSE_f_per=((f1-f_per).^2)';
MSE_f_moml=((f1-f_moml).^2)';
Density=flipud(sort([ x'    f1'   f_mle' MSE_f_mle  f_mom'
MSE_f_mom  f_per'    MSE_f_per  f_moml'    MSE_f_moml]));
MSE_parameters=[mse_method_mle;mse_method_mom;mse_method_pe
r;mse_method_moml];
MSE_parameters_METHOD=[MSEMAX   MSEMOM    MSEPER
MSEMOMLE]';
%%%%%%%%%%%%%%%% Plots of curves %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
                 Plot   PDF
figure(1)
plot(sort(x),f1,'-o','linewidth',0.02)
hold on;
plot(sort(x),f_mle,'-o','linewidth',0.02)
plot(sort(x),f_mom,'-o','linewidth',0.02)
plot(sort(x),f_per,'-o','linewidth',0.02)
plot(sort(x),f_moml,'-o','linewidth',0.02)
legend('fff','f_mle','f_MOM','f_PER','MOML')
xlabel('x')
ylabel('f(x)')
title('PDF for DTWPD distrbution')
 %%                  Plot    CDF
figure(2)
plot(sort(x),F,'-o','linewidth',0.01)
hold on
plot(sort(x),F_mle,'-o','linewidth',0.01)
plot(sort(x),F_mom,'-o','linewidth',0.01)
plot(sort(x),F_per,'-o','linewidth',0.01)
plot(sort(x),F_moml,'-o','linewidth',0.01)
legend('true CDF','MLE','F_MOM','F_PER','MOML')
xlabel('x')
ylabel('F(x)')
title('CDF for DTWPD distrbution')
```

```
%%                  Plot  R
figure(3)
plot(sort(x),R_Real,'-o','linewidth',0.01)
hold on
plot(sort(x),R_mle,'-o','linewidth',0.01)
plot(sort(x),R_mom,'-o','linewidth',0.01)
plot(sort(x),R_per,'-o','linewidth',0.01)
plot(sort(x),R_moml,'-o','linewidth',0.01)
legend('true R','MLE','R_MOM','R_PER','MOML')
xlabel('t')
ylabel('R(t)')
title('Reliability for DTWPD distrbution')

%%%%%%  aplication CODE of DTWPD Distribution%%%%%%%
clc;
clear all;
filename = 'data';
xx=xlsread(filename);
eta=6;Lemda=4;theta=4;
T=1000;
n=length(xx);
%%%%%%%%%%%%%%%%% Data Fitting WPD %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
C=@(xx)  (1-exp(-eta.*(((xx./theta)).^Lemda)));
[h,p_value,stats]=chi2gof(xx,'cdf',C,'nparams',3);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%            MLE method %%%%
[par f]=fsolve(@(S) MLE(xx,S),[eta Lemda theta]);
eta_mle(t)=par(1);        Lemda_mle(t)=par(2);
theta_mle(t)=par(3);
f_mle=pdf_DTWPD(xx,eta_mle(t),Lemda_mle(t),theta_mle(t));
F_mle=cdf_DTWPD(xx,eta_mle(t),Lemda_mle(t),theta_mle(t));
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear all;
filename = 'data';
xx=xlsread(filename);
eta=6;Lemda=4;theta=4;
t1=1;
t2=4;
xx(t1:t2)=[];
T=1000;
n=length(xx);
%%%%%%%%%%%%%%%%% Data Fitting DTWPD %%%%%%%%%%%%%%%%%%
C=@(xx)  (1-exp(-eta.*(((xx./theta)).^Lemda)));
[h,p_value,stats]=chi2gof(xx,'cdf',C,'nparams',3)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%
L_DTWPD=n.*log(eta)+n.*log(Lemda)-n.*log(theta)+(Lemda-
1).*sum(log(xx))-eta.*sum((xx./Lemda).^Lemda)-n.*log(exp(-
eta.*((t1./theta).^Lemda))-exp(-eta.*((2./theta).^Lemda)));
AIC_DTWPD=abs((-2*L_DTWPD+2*3));AIC_DTWPD=min(AIC_DTWPD);
```

```
AICc_DTWPD=AIC_DTWPD+((2*3+1)/(n-3-1))
;AIC_DTWPD=min(AICc_DTWPD);
BIC_DTWPD=abs(-
2*L_DTWPD+3*log(n));BIC_DTWPD=min(BIC_DTWPD);
%%
L_WBARETOD=n.*log(Lemda)-n.*log(eta)-n.*log(theta)-
eta.*sum((xx./theta).^Lemda)+(Lemda-
1).*sum(log(xx./theta));
AIC_WBARETOD=(-
2*L_WBARETOD+2*3);AIC_WBARETOD=min(AIC_WBARETOD);
AICc_WBARETOD=AIC_WBARETOD+((2*3+1)/(n-3-
1));AICc_WBARETOD=min(AICc_WBARETOD);
BIC_WBARETOD=-
2*L_WBARETOD+3*log(n);BIC_WBARETOD=min(BIC_WBARETOD);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%
for t=1:T
 %%           MLE method %%%%
[par f]=fsolve(@(S) MLE(xx,S),[eta Lemda theta]);
eta_mle(t)=par(1);          Lemda_mle(t)=par(2);
theta_mle(t)=par(3);
f_mle=pdf_DTWPD(xx,eta_mle(t),Lemda_mle(t),theta_mle(t));
F_mle=cdf_DTWPD(xx,eta_mle(t),Lemda_mle(t),theta_mle(t));
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%
clc;
clear all;
filename = 'data';
xx=xlsread(filename);
eta=6;Lemda=4;theta=4;
Beta=2; % 1<=Beta>alpha & alpha>Beta-1%%%%
alpha=1.5;
t1=1;
t2=4;
n=length(xx);
xx(t1:t2)=[];
T=1000
for t=1:T
 %%           MLE method %%%%
[par f]=fsolve(@(S) MLE(xx,S),[eta Lemda theta]);
eta_mle(t)=par(1);          Lemda_mle(t)=par(2);
theta_mle(t)=par(3);
f_mle=pdf_DTWPD(xx,eta_mle(t),Lemda_mle(t),theta_mle(t));
F_mle=cdf_DTWPD(xx,eta_mle(t),Lemda_mle(t),theta_mle(t));
end
%%%%%%%% Weighted Generalized Entropy
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
H_real=(1./(Beta-
alpha)).*log(((eta.*Lemda)./(theta.^Lemda).*(exp(-
eta.*(t1./theta).^Lemda)-exp(-
eta.*(t2./theta).^Lemda))).^((alpha+Beta)-
```

```
1).*(theta.^(Lemda.*(alpha+Beta-
1)+1))./((Lemda.*eta).*(((alpha+Beta)-1).^((alpha+Beta)-
1)+(1./Lemda))).*(gammainc((((alpha+Beta)-
1)+(1./Lemda)),(eta.*(((alpha+Beta)-
1)./theta.^Lemda).*t1.^Lemda)-gammainc(((alpha+Beta)-
1+(1./Lemda)),(eta.*(((alpha+Beta)-
1)./theta.^Lemda).*t2.^Lemda)))));
%%%%%%%%H_ESTIMATED%%%%%%%
H_mle=mean((1./(Beta-
alpha)).*log(((eta_mle.*Lemda_mle)./(theta_mle.^Lemda_mle).
*(exp(-eta_mle.*(t1./theta_mle).^Lemda_mle)-exp(-
eta_mle.*(t2./theta_mle).^Lemda_mle))).^((alpha+Beta)-
1).*(theta_mle.^(Lemda_mle.*(alpha+Beta-
1)+1))./((Lemda_mle.*eta_mle).*(((alpha+Beta)-
1).^((alpha+Beta)-
1)+(1./Lemda_mle))).*(gammainc((((alpha+Beta)-
1)+(1./Lemda_mle)),(eta_mle.*(((alpha+Beta)-
1)./theta_mle.^Lemda_mle).*t1.^Lemda_mle)-
gammainc(((alpha+Beta)-
1+(1./Lemda_mle)),(eta_mle.*(((alpha+Beta)-
1)./theta_mle.^Lemda_mle).*t2.^Lemda_mle))))));
```

الدوال المرتبطة:

```
function [F]=MLE(xx,S)
n=length(xx);
eta=S(1);
Lemda=S(2);
theta=S(3);
s1=0;      s2=0;      s3=0;
for i=1:n
    s1=s1+(xx(i)./theta).^Lemda;
    s2=s2+((1-
eta.*(xx(i)./theta).^Lemda)).*log(xx(i)./theta);
    s3=s3+xx(i).^Lemda;
end
F=[(n/eta)-s1   n/Lemda+s2    -
n/theta+Lemda*eta/(theta^(Lemda+1))*s3+n*((1-
Lemda)/theta)];

function [f]=pdf_DTWPD(xx,eta,Lemda,theta)
n=length(xx);
a1=((eta.*Lemda./theta));
for i=1:n
      f(i)=a1.*(xx(i)./theta).^(Lemda-1).*exp(-
eta.*((xx(i)./theta).^Lemda));
end

function [F]=cdf_DTWPD(xx,eta,Lemda,theta)
n=length(xx);
for i=1:n
```

```
  F(i)=1-exp(-eta.*(((xx(i)./theta)).^Lemda));
end

function [E]=M_length(r,S)
eta=S(1);
Lemda=S(2);
theta=S(3);
a1=(theta.^(r+1).*eta.^(-
(r+1)./Lemda).*gamma((Lemda+r+1)./Lemda));
a2=(theta.^r).*eta.^(-r./Lemda).*gamma((Lemda+r)./Lemda);
E=a1/a2;
function [F]=MOM_Method(x,S)
n=length(x);%datastate
eta=S(1);
Lemda=S(2);
theta=S(3);
s1=0;      s2=0;
for i=1:n
    s1=s1+x(i).^2;
    s2=s2+x(i).^3;
end
m1=mean(x);
m2=s2./n;
m3=s2./n;
M1=theta.*eta.^(-1/Lemda).*gamma((Lemda+1)/Lemda);
M2=theta.^2.*eta.^(-2/Lemda).*gamma((Lemda+2)/Lemda);
M3=theta.^3.*eta.^(-3/Lemda).*gamma((Lemda+3)./Lemda);
F=[sqrt((M1-m1).^2)   sqrt((M2-m2).^2)   sqrt((M3-m3).^2)];

function [F]=PER_Method(x,S)
eta=S(1);
Lemda=S(2);
theta=S(3);
n=length(x);
for i=1:n
Q=((1:n)-(3/8))./(n+1/4);
Fc=cdf_DTWPD(sort(x),eta,Lemda,theta);
end
F=sum((log(Fc)-log(Q)).^2);
```

Abstract

The thesis aimed at estimating the weighted generalized entropy function of order (α, β). to measure the change of uncertainty for Double Truncated Weibull-Pareto Distribution ,with three parameters (δ, θ, λ,) , On the theoretical side studied the mathematical properties and methods of estimating its parameters **,**the experimental side, simulation using the Monte Carlo method was used to test the preference of the estimation methods, Different values were chosen for the shape parameter (δ, λ) and the scale parameter (θ) with six models, and the comparison between the estimation methods was done by using the partial and over ranks corresponding to the mean of the squares of error, the Maximum Likelihood Method showed It has the greatest advantage over the other methods because it corresponds to the lowest total of ranks, especially at large sample sizes. On the application side, the Maximum Likelihood Method was used to estimate weighted generalized entropy function of order (α, β), and study increase and decrease in this function at different values of truncation in a sample of (95) observations representing working hours Until the failure of the magnetic resonance device, of the Imam Al-Sadiq Hospital in the Health Department of Babylon, as the thesis led to results, the most important use Maximum Likelihood Method to estimate the parameters of Double Truncated Weibull-Pareto Distribution at large sample sizes, also, the entropy function increases with the increase in truncation values, which makes the distribution more fitting of the real data

Republic of Iraq .
Ministry of Higher Education and Scientific Research
University of Karbala
College of Administration and Economics
Department of Statistics

Weighted Generalized Entropy function for Double Truncated Weibull-pareto Distribution

A thesis Submitted to
College of Administration and Economic-Karbala University in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Master of Science in Statistics

By

Hazem Abed Al-Razaaq Abed Al-Amer

Under supervision

Prof. Dr. Mahdi Wahhab Neamah Naser Allah

1442 A. H . Holy Karbala 2021 A.D.