



جمهورية العراق  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
جامعة كربلاء  
كلية الادارة والاقتصاد  
قسم الاحصاء

## التقدير البيزي لدالة البقاء لتوزيع ليندلي ذو ثلاثة معلمات مع تطبيق عملي

رسالة مقدمة الى مجلس كلية الادارة والاقتصاد في جامعة كربلاء  
وهي جزء من متطلبات نيل درجة الماجستير في علوم الاحصاء  
تقدم بها

كرم ناصر حسين العبادي

بإشراف

**أ.د. عواد كاظم شعلان الخالدي**

2021 م

1443 هـ

كربلاء المقدسة



﴿وَقُلْ أَعْمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُمْ وَرَسُولُهُ وَالْمُؤْمِنُونَ﴾

صَدَقَ اللَّهُ الْعَلِيُّ الْعَظِيمُ

سورة التوبة: الآية 105

# الإهداء

إلى...

التي لاتراه العيون ولايوصفه الواصفون ولايعده العادون ولايغفل عن ذكره الذاكرون  
الله جل وعلا...

بسمه الزمان وضياء الكائنات البحر الزاخر والعلم الظاهر رسول الهدى  
محمد وآله الأطهار...

قدوتي في الحكمة صاحب القلب الكبير معلمي وملهمي أبي العزيز رحمه الله..  
صاحبة أجمل الكلمات واصدق الدعوات وغايتي رضاها  
أمي الحبيبة ...

من غرس حب العلم ومنه تعلمت أن لا مستحيل في سبيل الابداع والرقى  
وأن سر التميز هو الثبات على الهدف  
أ.د. عواد كاظم شعلان الخالدي

أحبائي إخوتي وأخواتي وكل من دعا لي بالخير  
اهدي ثمرة جهدي...

كرم



# شكر وتقدير

بسم الله الرحمن الرحيم

## ﴿لَئِنْ شَكَرْتُمْ لَأَزِيدَنَّكُمْ﴾

صدق الله العلي العظيم

{ سورة ابراهيم: الآية 7 }

بعد التوجه بالحمد والشكر للعلي القدير التي وفقني لإنجاز هذه الرسالة يسرني وأنا أقدم عملي هذا أن أتقدم بعظيم شكري وامتناني إلى أستاذي الفاضل (الأستاذ الدكتور عواد كاظم شعلان الخالدي) لقبوله الاشراف على هذه الرسالة والتي كان لتوجيهاته القيمة وملاحظاته السديدة الأثر العميق في تذليل الكثير من الصعوبات، وفقه الله وجزاه خير الجزاء.

كما أتقدم بجزيل الشكر والتقدير الى أساتذتي الكرام رئيس لجنة المناقشة وأعضائها لتفضلهم بالموافقة على مناقشة هذه الرسالة وتقويمها.

وأتوجه بوافر شكري وامتناني إلى السيدة رئيسة قسم الإحصاء وكافة أساتذتي الأجلاء في قسم الإحصاء لما قدموه لي من علم وعون كريمين، والى كل زملائي وزميلاتي وكل من أعان بنصحٍ ببناء شكري وتقديري.

ومن الله التوفيق ...

الباحث

## قائمة المحتويات

رقم الصفحة	عنوان الفقرة	
أ	الآية القرآنية	
ب	الاهداء	
ج	الشكر والامتنان	
ز-د	قائمة المحتويات	
ط-ح	قائمة الجداول	
ل-ط	قائمة الاشكال	
م-ل	قائمة الرموز والمختصرات	
1-2	المستخلص	
3-4	المقدمة	
6-14	الفصل الأول : منهجية الرسالة وبعض الدراسات السابقة	
6	تمهيد	1-1
6	مشكلة الرسالة	1-2
7	هدف الرسالة	1-3
7-14	الأستعراض المرجعي	1-4
16-73	الفصل الثاني: الجانب النظري	
16	تمهيد	2-1

16	دالة الكثافة الاحتمالية للفشل	2-2
16-17	دالة الكثافة التجميعية للفشل	2-3
17-19	دالة البقاء	2-4
19	دالة المخاطرة	2-5
19-24	توزيع ليندلي ذي الثلاث معلمات	2-6
24-25	أسلوب بيز في التقدير	2-7
25-26	دوال الخسارة	2-7-1
26-27	دوال الكثافة الاحتمالية المسبقة	2-7-2
27-28	دوال الكثافة الاحتمالية غير المعلوماتية	2-7-1-1
28	دوال الكثافة الاحتمالية الأولية المعلوماتية	2-7-1-2
28	دوال الكثافة الاحتمالية الأولية المعتمدة على عينة سابقة	2-7-1-3
29	دوال الكثافة الاحتمالية المرافقة الطبيعية	2-7-1-4
29	مقدر بيز القياسي المعلوماتي	2-8
30-33	مقدر بيز القياسي المعلوماتي في ظل دالة خسارة تربيعية	2-8-1
34-35	مقدر بيز القياسي المعلوماتي في ظل دالة خسارة انتروبي العامة	2-8-2
35-36	مقدر توقع بيز	2-9
37	مقدر توقع بيز في ظل دالة خسارة تربيعية	2-9-1
37-38	مقدر توقع بيز في ظل دالة خسارة انتروبي العامة	2-9-1
38-39	مقدر بيز الهرمي	2-10

39-40	مقدر بيز الهرمي في ظل دالة خسارة تربيعية	2-10-1
40-41	مقدر بيز الهرمي في ظل دالة خسارة انتروبي العامة	2-10-2
41-42	اختبار حسن المطابقة	2-11
41	معايير المقارنة والدقة	2-12
42	معييار أكايكي	2-12-1
42	معييار بيز أكايكي	2-12-2
43	معييار أكايكي المتسق	2-12-3
43-73	تقريب ليندلي	2-113
75-118	الفصل الثالث: الجانب التجريبي	
75	تمهيد	3-1
75-76	مفهوم المحاكاة	3-2
76	وصف مراحل تجارب المحاكاة	3-3
65-77	المرحلة الاولى : تحديد القيم الافتراضية	3-3-1
77-79	المرحلة الثانية : توليد الأرقام العشوائية	3-3-2
79-80	المرحلة الثالثة : أيجاد التقديرات	3-3-3
80	المرحلة الرابعة : المقارنة بين الطرائق	3-3-4
80-118	تحليل نتائج المحاكاة	3-4
120-128	الفصل الرابع : الجانب التطبيقي	
120	تمهيد	4-1

120	نبذة مختصرة عن مرض فايروس كورونا المستجد	4-2
120-121	نشأة المرض	4-2-1
121	أعراض المرض	4-2-2
121	انتقال المرض	4-2-3
121	الأساليب العلاجية	4-2-4
122-123	وصف البيانات التطبيقية المتعلقة بالرسالة	4-3
124-128	تحليل البيانات الحقيقية	4-4
<b>الفصل الخامس: الأستنتاجات والتوصيات</b>		
130-131	الأستنتاجات	5-1
131-132	التوصيات	5-2
<b>المصادر</b>		
134	المصادر العربية	
134-139	المصادر الأجنبية	
<b>الملاحق</b>		
141-142	طريقة الأماكن الأعظم	الملحق (1)
A	Abstract	

## قائمة الجداول

الصفحة	عنوان لجدول	رقم الجدول
24	بعض الخصائص لتوزيع ليندلي ذي الثلاث معالمات	2-1
76-77	النماذج المقترحة والقيم الافتراضية لتجارب المحاكاة	3-1
82-84	القيم الحقيقية والتقديرية لدالة البقاء بجميع طرائق التقدير وقيم متوسط مربعات الخطاء التكاملي (IMSE) عند كل حجم عينة للأنموذج الاول	3-2
86-88	القيم الحقيقية والتقديرية لدالة البقاء بجميع طرائق التقدير وقيم متوسط مربعات الخطاء التكاملي (IMSE) عند كل حجم عينة للأنموذج الثاني	3-3
90-92	القيم الحقيقية والتقديرية لدالة البقاء بجميع طرائق التقدير وقيم متوسط مربعات الخطاء التكاملي (IMSE) عند كل حجم عينة للأنموذج الثالث	3-4
94-96	القيم الحقيقية والتقديرية لدالة البقاء بجميع طرائق التقدير وقيم متوسط مربعات الخطاء التكاملي (IMSE) عند كل حجم عينة للأنموذج الرابع	3-5
98-100	القيم الحقيقية والتقديرية لدالة البقاء بجميع طرائق التقدير وقيم متوسط مربعات الخطاء التكاملي (IMSE) عند كل حجم عينة للأنموذج الخامس	3-6
102-104	القيم الحقيقية والتقديرية لدالة البقاء بجميع طرائق التقدير وقيم متوسط مربعات الخطاء التكاملي (IMSE) عند كل حجم عينة للأنموذج السادس	3-7
106-107	القيم الحقيقية والتقديرية لدالة البقاء بجميع طرائق التقدير وقيم متوسط مربعات الخطاء التكاملي (IMSE) عند كل حجم عينة للأنموذج السابع	3-8
110-111	القيم الحقيقية والتقديرية لدالة البقاء بجميع طرائق التقدير وقيم متوسط مربعات الخطاء التكاملي (IMSE) عند كل حجم عينة للأنموذج الثامن	3-9
113-115	القيم الحقيقية والتقديرية لدالة البقاء بجميع طرائق التقدير وقيم متوسط مربعات الخطاء التكاملي (IMSE) عند كل حجم عينة للأنموذج التاسع	3-10
117	نسب الافضلية لكل طريقة من طرائق التقدير عند كل حجم من أحجام العينات	3-11
122	يمثل أوقات البقاء لمرضى المصابين بفيروس كورونا	4-1
123	نتائج اختبار حسن المطابقة	4-2

123	يبين معايير المفاضلة بين توزيع ليندلي ذي معلمتين وتوزيع ليندلي ذي الثلاث معالمات في تمثيل البيانات الحقيقية	4-3
124-127	جدول مقدرات طريقة التوقع البيزي وبيز الهرمي في ظل دالة خسارة انتروبي العامة لدالة البقاء والدوال المرتبطة بها بعد ترتيب البيانات الخاصة بأوقات البقاء تصاعديا	4-4

### قائمة الاشكال

الصفحة	عنوان الشكل	رقم الشكل
19	منحني دالة الكثافة التجميعية للفشل	2-1
17	المنحني العام لدالة البقاء	2-2
21	سلوك دالة الكثافة الاحتمالية (p.d.f) لتوزيع ليندلي ذي الثلاث معلمات	2-3
22	سلوك دالة الكثافة التجميعية (C.D.F) لتوزيع ليندلي ذي الثلاث معلمات	2-4
22	سلوك دالة البقاء $s(t)$ لتوزيع ليندلي ذي الثلاث معلمات	2-5
23	سلوك دالة المخاطرة $h(t)$ لتوزيع ليندلي ذي الثلاث معلمات	2-6
85	دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة $(n=10)$ للأنموذج الأول	3-1
85	دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة $(n=25)$ للأنموذج الاول	3-2
85	دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة $(n=50)$ للأنموذج الاول	3-3
85	دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة $(n=75)$ للأنموذج الاول	3-4
86	دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة $(n=100)$ للأنموذج الاول	3-5
89	دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة $(n=10)$ للأنموذج الثاني	3-6
89	دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة $(n=25)$ للأنموذج الثاني	3-7

89	دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n=50) للأنموذج الثاني	3-8
89	دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n=75) للأنموذج الثاني	3-9
90	دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n=100) للأنموذج الثاني	3-10
93	دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n=10) للأنموذج الثالث	3-11
93	دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n=25) للأنموذج الثالث	3-12
93	دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n=50) للأنموذج الثالث	3-13
93	دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n=75) للأنموذج الثالث	3-14
94	دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n=100) للأنموذج الثالث	3-15
97	دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n=10) للأنموذج الرابع	3-16
97	دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n=25) للأنموذج الرابع	3-17
97	دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n=50) للأنموذج الرابع	3-18
97	دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n=75) للأنموذج الرابع	3-19
98	دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n=100) للأنموذج الرابع	3-20
101	دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n=10) للأنموذج الخامس	3-21

101	دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n=25) للأنموذج الخامس	3-22
101	دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n=50) للأنموذج الخامس	3-23
101	دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n=75) للأنموذج الخامس	3-24
102	دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n=100) للأنموذج الخامس	3-25
105	دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n=10) للأنموذج السادس	3-26
105	دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n=25) للأنموذج السادس	3-27
105	دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n=50) للأنموذج السادس	3-28
105	دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n=75) للأنموذج السادس	3-29
106	دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n=100) للأنموذج السادس	3-30
108	دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n=10) للأنموذج السابع	3-31
108	دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n=25) للأنموذج السابع	3-32
109	دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n=50) للأنموذج السابع	3-33
109	دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n=75) للأنموذج السابع	3-34
109	دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n=100) للأنموذج السابع	3-35

112	دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n=10) للأنموذج الثامن	3-36
112	دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n=25) للأنموذج الثامن	3-37
112	دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n=50) للأنموذج الثامن	3-38
112	دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n=75) للأنموذج الثامن	3-39
113	دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n=100) للأنموذج الثامن	3-40
116	دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n=10) للأنموذج التاسع	3-41
116	دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n=25) للأنموذج التاسع	3-42
116	دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n=50) للأنموذج التاسع	3-43
116	دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n=75) للأنموذج التاسع	3-44
117	دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n=100) للأنموذج التاسع	3-45
127	منحنى دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير	4-1

### قائمة الرموز والمختصرات

الرمز	المصطلح باللغة العربية
S (t)	دالة البقاء
h (t)	دالة المخاطرة
f (x, α, β, θ)	دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ليندلي ذي الثلاث معالم
F (x, α, β, θ)	الدالة التراكمية لتوزيع ليندلي ذي الثلاث معالم

معلمة الشكل لتوزيع ليندلي ذي الثلاث معالمات	$\alpha$
معلمة القياس لتوزيع ليندلي ذي الثلاث معالمات	$\theta$
معلمة الشكل لتوزيع ليندلي ذي الثلاث معالمات	$\beta$
مقدر بيز القياسي في ظل دالة خسارة تربيعية	SBSEL
مقدر بيز القياسي في ظل دالة خسارة انتروبي العامة	SBEL
مقدر توقع بيز في ظل دالة خسارة تربيعية	EBSEL
مقدر توقع بيز في ظل دالة خسارة انتروبي العامة	EBEL
مقدر بيز الهرمي في ظل دالة خسارة تربيعية	HBSEL
مقدر بيز الهرمي في ظل دالة خسارة انتروبي العامة	HBEL
معيار أكايكي للمعلومة	AIC
معيار أكايكي المتسق	CAIC
معيار بيز أكايكي	BIC
متوسط مربعات الخطأ التكاملية	IMSE

**المستخلص :**

**(Abstract)**

تعد عملية تقدير دالة البقاء من الموضوعات المهمة التي ركزت عليها البحوث والدراسات الأحصائية، وأن هذه الدراسات تختلف باختلاف الأساليب المتبعة سواء أكانت الأساليب تقليدية أم بيزية بهدف الحصول على مقدرات ذات مستوى عالي من الكفاءة.

في هذه الرسالة تم التركيز على الطرائق البيزية لأيجاد قيم المقدرات الخاصة بدالة البقاء وبعض لتوزيع ليندلي ذي الثلاث معلمات في حالة توافر معلومات أولية عن المعلمات بشكل دالة احتمالية أولية لكل من معلمتي الشكل ومعلمة القياس بأستعمال ثلاثة طرائق بيزية ، وهي كل من طريقة بيز القياسية المعلوماتية (Standard Bayes method) و طريقة التوقع البيزي (Expected Bayesian method) وطريقة بيز الهرمي (Hierarchical Bayesian method)، إذ تم اشتقاق طرائق التقدير هذه بغية التوصل الى صيغ مقدراتها بأستعمال دالة خسارة تربيعية (Squared Error Loss Function) متماثلة ودالة خسارة انتروبي العامة (General Entropy Loss Function) غير متماثلة وبسبب صعوبة العمليات الحسابية الخاصة بحساب مقدرات دالة البقاء بأستعمال الطرائق البيزية فقد تم أستعمال الأسلوب التقريبي التي أقره الباحث (Lindley) عام (1980)م.

تم توظيف أسلوب المحاكاة بأستعمال طريقة (مونت – كارلو) لتوليد البيانات العشوائية لعينة مكونة من خمسة أحجام (10-25-50-75-100) تتبع توزيع ليندلي ذي الثلاث معلمات وكذلك تم تحديد قيم أفتراضية للمعلمات  $(\alpha, \beta, \theta)$  بواقع تسعة أنموذجات بهدف الحصول على مقدرات جديدة وذات دقة عالية تحمل الصفات المطلوب توفرها في المقدر المثالي التي يعتمد عليه في عملية التقدير، وبالاعتماد على نتائج المحاكاة وبأستعمال المعيار الاحصائي متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) كمعيار احصائي للمفاضلة ظهرت افضلية مقدر توقع بيز في ظل دالة خسارة انتروبي العامة بالنسبة لحجوم العينات المتوسطة لتقدير دالة البقاء على طرائق التقدير الأخرى .

إجريت الدراسة على عينة حقيقية بحجم (50) مشاهدة تمثل أوقات البقاء بالساعات تحت العلاج لحين الوفاة للمصابين بمرض فايروس (COVID-19) والتي تم الحصول عليها من قسم الحميات في مستشفى الحسين التعليمي في محافظة كربلاء للمدة بين (2020/5/8) ولغاية (2020/7/17) أستعملت طريقة توقع بيز وطريقة بيز الهرمي في ظل دالة خسارة انتروبي العامة بالنسبة على عينة الدراسة (مرضى فايروس كورونا)، توصلت الدراسة ان طرائق التقدير المستعملة

## المستخلص

في الجانب التطبيقي تعطي مقدرات ملائمة ودقيقة لبيانات الدراسة وتتفق ما تم التوصل اليه الباحث في الجانب التجريبي.

المقدمة:**( Introduction)**

أخذت دراسة دوال تحليل البقاء على قيد الحياة حيزاً كبيراً لدى الباحثين، خصوصاً في السنوات الأخيرة، وذلك لأنها تؤدي دوراً رئيساً في كثير من مجالات الحياة مثل الطب، والمجالات الحيوية، ولما تشكل من أهمية كبيرة في دراسة بقاء الكائنات الحية على قيد الحياة، بعد مدة محددة من الزمن (t)، ويؤدي تحليل دوال البقاء دوراً مهماً، في تحديد عوامل الخطر في المجالات الطبية الحيوية، والصناعية.

ونظراً للأهتمام الكبير التي حظي به موضوع دالة البقاء ، من لدن الباحثين ، أصبحت هذه الدراسات مقررات دراسية تدرس لمختلف مستويات الدراسة، حيث افرد كل من (Charles) ، (Lewis)، (Harold)، (pugh) فصولاً لها ، وبذلك أصبحت دوال تحليل البقاء علماً مستقلاً يؤدي دوراً أساسياً في ،تحليل الحدث، والتقدير ، والتنبؤ ، والأمثلية .

تعود الكتابات الأولى لتحليل البقاء الى القرن السابع عشر عندما نشر (John Grunt) ، اول إحصائية للوفيات في لندن عام (1662)م حول التغير في عدد وفيات وباء الطاعون التي تسبب بها لكافة الاعمار من سنة الى أخرى، وكان (John Grunt) مهتما في إيجاد الفرق بين معدلات الوفيات بين الجنسين ،في المدينة والمناطق النائية وتعتبر الاحصائيات التي قام بها (John Grunt) ، مصدر احصائيات الوفيات والتي صممت لرصد الوفيات ونشر جدول الحياة لأول مرة عام (1830) م من قبل (Edmond Halley) .

تتشترك نظرية البقاء (Survival Theory)، ونظرية المعولية (Reliability Theory) في قياس طول مدة البقاء أذ تستعمل الاولى للكائنات الحية، وتستعمل الثانية للأنظمة والمكائن، الآن اوجه الاختلاف بين النظريتين تتركز في امثلية نظام المعولية في الانظمة ذات الاجزاء المتعددة وذلك لسهولة إيجاد البدائل السريعة ومعالجتها، على العكس من نظرية البقاء التي تكمن صعوبتها في التعامل مع الكائنات الحية، وترتيب أجزائه مما يجعلها تفتقر الى الأمثلية.

يسلط علم الاحصاء الضوء على دراسة الظواهر الحيوية ذات السلوك العشوائي التي تكون ذات أهمية في حياة الكائن والمجتمع بصورة عامة لذلك لابد لنا من دراسة تلك الظواهر ومعرفة التوزيعات الاحتمالية (probability distribution) التي تتبعها لكي يتم دراسة سلوكها العشوائي التي يرتبط بدراسة التوزيعات الاحتمالية وما تؤول اليه من نتائج احتمالية، وهناك عدد من المشاكل التي يتوجب على الباحث دراستها ، وأن أحد أهم هذه المشاكل تلك المتعلقة

بتقدير معلمات التوزيعات الاحصائية ودقة الأساليب المستعملة في التقدير، حيث تدير طرائق تقدير المعلمات في اتجاهين رئيسيين ،الاتجاه الاول المتمثل بالطرائق التقليدية(Classical method) التي تمتاز بأن مقدراتها وحيدة وتفترض أن المعلمات المراد تقديرها كميات ثابتة ، على العكس من الاتجاه الثاني المتمثل بالطرائق البيزية (Bayesian method) التي تفترض أن المعلمات المراد تقديرها عبارة عن متغيرات عشوائية ،حيث تعتمد الطريقة البيزية على المعلومات المسبقة المتوفرة لدى الباحث ،والتي يمكن صياغتها بشكل توزيع احتمالي اولي والتي بدوره يُدمج مع معلومات العينة المتوفرة ،للحصول على التوزيع اللاحق ، تعتمد المدرسة البيزية بصورة رئيسية على دالة الكثافة الاحتمالية الأولية ،ودالة الخسارة وفي هذه الرسالة سوف نركز على المحور الثاني المتمثل بمقارنة بعض الطرائق البيزية لتقدير دالة البقاء والدوال المرتبطة بها لتوزيع ليندلي ذي الثلاث معلمات .

أشتملت الرسالة على خمسة فصول تضمنت .

**الفصل الاول** تضمن المقدمة هدف ومشكلة الرسالة والأستعراض المرجعي لبعض الدراسات السابقة ذات العلاقة بالموضوع. في حين تضمن **الفصل الثاني** الجانب النظري المتعلق بدالة البقاء وبعض خواصها، وبعض الدوال المرتبطة بها والتوزيع الاحتمالي المستعمل، وطرائق التقدير المستعملة في هذه الرسالة. اما **الفصل الثالث** فقد تم تخصيصه للجانب التجريبي التي تم فيه استخدام أسلوب المحاكاة وكيفية توليد الاعداد العشوائية والمعيار الإحصائي التي وصف للمقارنة بين طرائق التقدير المستعملة في تقدير دالة البقاء لتوزيع ليندلي ذي الثلاث معلمات. وتضمن **الفصل الرابع** الجانب التطبيقي حيث تم استخدام بيانات حقيقية بحجم (50) من قسم الحميات في مستشفى الحسين التعليمي محافظة كربلاء المقدسة المتمثلة بأوقات البقاء (lifetimes) بالساعات تحت العلاج لحين الوفاة للمصابين بمرض فيروس كورونا (COVID-19) وتطبيقها على كل من طريقة توقع بيز وطريقة بيز الهرمي في ظل دالة خسارة انتروبي العامة التي ظهرت أفضليتها في الجانب التجريبي. وأخيراً تضمن **الفصل الخامس** أهم الأستنتاجات التي حصلنا عليها من الفصول السابقة والتوصيات التي نراها ضرورية عندما يأتي ببعض الدراسات، المماثلة وكذلك مقارنة بالجهة المستفيدة من البحث.

الفصل الأول

منهجية الدراسة

**(Preface)****1-1 تمهيد :**

يسلط علم الاحصاء الضوء على دراسة الظواهر الحيوية ذات السلوك العشوائي التي تكون ذات أهمية في حياة الكائن والمجتمع ، والتي لا بد لنا من دراسة تلك الظواهر ومعرفة التوزيعات الاحتمالية (Probability Distributions) التي تتبعها لكي يتم دراسة سلوكها العشوائي. أذ أن دراسة الظواهر يكون مرتبطاً بدراسة التوزيعات الاحتمالية وما تؤول اليه من نتائج احتمالية. ففي نظرية أزمنة البقاء، يتم دراسة عمر نظام أو مكون أو فرد والتي يمكن أن يكون جهازاً كهربائياً أو إلكترونياً أو ميكانيكياً أو كيميائياً أو كائناً حياً، فهناك العديد من الأنظمة الطبيعية مثل البشر والنباتات والحيوانات وما إلى ذلك والتي يتم تضمينها في تحليل أزمنة البقاء. لذلك يعد تحليل ونمذجة بيانات أزمنة البقاء من الامور المهمة للغاية في العلوم التطبيقية مثل الهندسة والصحة والعلوم والدراسات الطبية الحيوية والديموغرافيا ودراسة البقاء، يوجد العديد من توزيعات أزمنة البقاء في الأدبيات الإحصائية مثل التوزيعات الأسية وتوزيع وييل وكاما والتوزيعات اللوغاريتمية الطبيعية وغيرها من التوزيعات التي أستعملت لنمذجة أزمنة البقاء لكن لكل من هذه التوزيعات مزايا وعيوب اعتماداً على عدد المعلمات المتضمنة فيها، أو على شكل التوزيع، أو دالة المخاطرة أو دالة البقاء.

لذا جاءت هذه الرسالة لدراسة دالة البقاء لواحد من التوزيعات المهمة في نمذجة أزمنة البقاء وهو توزيع ليندلي بثلاث معلمات (Three Parameters Lindely Distribution) أستعمل الطرائق البيزية في تقدير دالة البقاء لتوزيع وهي طريقة بيز القياسية المعلوماتية (Informative Standard Baysain) وطريقة توقع بيز (Expectation Bayesian) وطريقة بيز الهرمي (Hierarchical Bayesian)، بأستعمال نوعين من دوال الخسارة وهي دالة خسارة تربيعية (Squared Error Loss function) ودالة خسارة انتروبي العامة (General Entropy Loss Function).

**(Problem of Thesis)****1-2 مشكلة الرسالة:**

تمثلت مشكلة الرسالة بظهور جائحة كورونا (كوفيد-19) التي أنتشرت عبر القارات بسرعة هائلة وخلفت مئات الملايين من الإصابات والأف الوفيات في مدة زمنية قصيرة، ما سبب الخوف والهلع لدى المجتمعات الإنسانية، وعرقلة عجلة الاقتصاد العالمي، ما أوجب القيام بالبحوث والدراسات، لتفسير سلوك هذه الجائحة، ومحاولة السيطرة عليها قدر الأمكان.

### 1-3 هدف الرسالة:

### (Aim of Thesis)

تهدف الرسالة الى تقدير دالة البقاء للأشخاص المصابين بفيروس كورونا (كوفيد-19) من خلال أخضاع سلوكها الى توزيعات احتمالية متعددة ذات الثلاث معالم مع الاخذ بنظر الاعتبار مقارنة أفضلية هذه التوزيعات عند اقترانها بدوال خسارة مختلفة، وأشتقاق دالة البقاء وفقاً لطرائق التقدير البيزية.

### 1-4 الاستعراض المرجعي :

### (Review of Literature)

يتضمن هذا المبحث استعراضاً مرجعياً لأهم الدراسات والبحوث التي أهتمت بتوزيع ليندلي ذات العلاقة بموضوع الرسالة بدءاً بطرائق التقدير والتطبيقات العملية لها وأهم التوزيعات الشائعة في هذه التطبيقات منذ عام (1958) وانتهاءً بأحدث ما تمكنا الحصول عليه لغاية (2020) للاستفادة من هذه المعلومات لأغناء موضوع الرسالة وكالاتي.

❖ **في عام (1958) قدم الباحث ليندلي (D.V. Lindley) [32]** توزيعاً ذي معلمة وأحد سمي توزيع ليندلي نسبة الى العالم التي اقترحه عبر إجراء عدد من دراسات حول بناء لأحصاء البيزية، كما درس خصائصه وعلاقته بتوزيعات أوقات الحياة الأخرى، ودوره في نمذجة بيانات أوقات الانتظار كبديل للتوزيع الاسي وتوزيع كاما.

❖ **في عام (1970) قدم الباحث (M. Sankaran) [41]** الأنموذج المضاف ليندلي – بواسون، إذ أستمدت الإضافة المتقطعة من توزيع بواسون وتوزيع ليندلي ، درس بعض الخصائص الاحصائية له ومنها دوال الكثافة والمخاطرة والعزوم والاحصاءات المرتبة والبقاء ووظف الباحث النموذج المقترح في بناء أنموذج عمليات العد.

❖ **وفي عام (2009) أقترح الباحثان (H. Zakerzadeh & A. Dolati) [49]** توزيع ليندلي العام ذي الثلاث معالم وهو خليط من توزيع كاما  $(\alpha, \theta)$  وتوزيع كاما الثاني  $(\alpha + 1, \theta)$  ، وقدر الباحثان معالم الأنموذج ودالة البقاء بأستعمال طريقة الأماكن الأعظم ، وقارنوا أداء التوزيع المقترح مع توزيعات أخرى كتوزيع (ليندلي العمومي- كاما- وييل-التوزيع اللوغاريتمي الطبيعي) عن طريق أستعمال المعايير – سميرنوف كولمكروف ( $2 \ln L$ ) لمجموعتين من البيانات الحقيقية ، وتوصلوا الى أن توزيع ليندلي العام يعطي ملائمة أفضل من بقية التوزيعات في نمذجة أوقات الحياة ، كما أقترح الباحثان خوارزمية لتوليد

الأرقام العشوائية لهذا التوزيع واخير توصل الباحثان أن هذا التوزيع يحقق اكثر مرونة من توزيعات أوقات الحياة الأخرى.

❖ في عام (2010) أقترح الباحث (P.Jodrá) [25] خوارزمية لتوليد الارقام او البيئات العشوائية لعائلة توزيعات ليندلي، بأستعمال دالة خاصة تسمى (Lambert W function) ،أذ تم أستخدام عدد من الأنموذجات الشائعة ضمن عائلة ليندلي منها توزيع ليندلي ذا معلمة والتوزيع المركب (Poisson- Lindley) وتوصل الباحث الى أهمية الدراسة بالنسبة للعلماء ،وان الخوارزمية المقترحة تعطي نتائج دقيقة فضلاً عن توفر الدالة المشار اليها في حزم برامج الحاسوب وتتميز بسرعة تنفيذها وبذلك توفر الكثير من الوقت والجهد للباحثين.

❖ في عام (2011) قدم الباحثان (J.Mazucheli & J. A. Achcar) [37] دراسة تناولت أستخدام صيغة ليندلي العامة ودوره في دراسة المخاطرة المتنافسة لتحليل بيانات أوقات الحياة المأخوذة من دالة معدل الوفيات لتوزيع ليندلي لمجموعة من الأشخاص المصابين بمرض السرطان ،أذ أعطت الدراسة هيكلاً مشتركاً للمخاطرة المتنافسة وتفسيراً لجميع عوامل الخطر للأنموذج المستخدم وتوصل الباحثان توزيع ليندلي يتميز بمجموعة من الخصائص التي تجعله بديلاً ناجحاً للتوزيع الاسي وتوزيع ويبيل لدراسة المخاطرة المتنافسة .

❖ في العام نفسه قارن (H.Krishna & K. Kapil) [28] التقدير البيزي والكلاسيكي لتقدير معلمة ودالة المعولية بأستخدام بيانات مراقبة من النوع الثاني لتوزيع ليندلي ذا معلمة وتم افتراض أن المعلومات الاولية للمعلمات تخضع لتوزيع كاما، أذ تم اشتقاق مقدرات بيز لمعلمات ودالة المعولية لتوزيع ليندلي بالاعتماد على دالتي خسارة، وتم أستخدام تقريب ليندلي للحصول على تلك القيم ، وقدرت ايضاً بطريقة الأماكن الأعظم كطريقة كلاسيكية تمتاز بالثبات، وبعد الاشتقاق للصيغ الرياضية لتلك المقدرات تمت الأستعانة بأسلوب المحاكاة لإجراء المقارنة، بالاعتماد على معيار متوسط مربعات الخطأ (MSE) لمقارنة بين أفضلية الطرائق المستعملة في عملية التقدير ، وتم تطبيقها على بيانات حقيقية خاضعة للرقابة تتمثل بأوقات الانتظار في أحد المصارف أذ تم تحليلها لغرض التوضيح وتوصل الباحثان الى أن طرائق التقدير المستعملة تعطي مقدرات جيدة وغير متحيزة.

❖ في العام نفسه قام الباحثون (M. E. Ghitany & et al) [17] بتقديم توزيع ليندلي الموزون ذي معلمتين، ويعد هذا الأنموذج عبارة عن توسعة لتوزيع ليندلي ذي معلمة وأحدة ، أذ قام الباحثون بدراسة بعض خصائصه المتعلقة بدالة المخاطرة ،والعزوم أذ تم تقدير معلمات ودالة

البقاء لتوزيع ليندلي الموزون عندما تكون معلمة الشكل معلومة بأستعمال طريقة الأماكن الأعظم كما قام الباحثون بتطبيقه على مجموعتين من البيانات الحقيقية تمثل أوقات البقاء لمجموعة من الخزائير المصابة بنوع من الفايروسات المعدية ، كما تم مقارنة اداء التوزيع المقترح مع كل من توزيع ليندلي ذي معلمة واحدة وتوزيع ويبيل ، وتوصل الباحثون الى أن التوزيع ليندلي الموزون مرن عندما استعماله لنمذجة بيانات البقاء وبيانات أوقات الانتظار،و لذلك يعتبر منافس قوي بالمقارنة مع توزيع ليندلي ذي معلمة واحدة وتوزيع ويبيل .

❖ في عام (2012) قدم الباحثون (H. Zakerzadeh & et al) [50] توزيع Lindley-geometric التي هو خليط من توزيع ليندلي والتوزيع الهندسي ، وناقش بعض خصائصه المختلفة مثل المخاطرة العزوم ، والدوال الاحتمالية ، والإحصاء المرتبة دالة البقاء ، وكذلك تم الحصول على مقدرات المعلمات ودالة البقاء بطريقة الأماكن الأعظم ، وخيراً وأظهرت تطبيقها على مجموعة من البيانات الحقيقية تبين أن التوزيع المقترح هو منافس جيد ويحقق أكثر مرونة وسهل التعامل معه بالمقارنة مع توزيعات أوقات الحياة الأخرى .

❖ في عام (2013) قام الباحثون (S. Ali & et al) [7] بالتقدير البيزي لدالة المعولية لتوزيع ليندلي ذي المعلمتين على فرض الاولي حدد بالاعتماد على عدت صيغ مختلفة ، وتم أستعمال دوال خسارة متماثلة وأخرى غير متماثلة ، إذ تم الحصول على مقدرات بيز للمعلمات ودوال المعولية والمخاطرة والفترات الاحتمالية لها ، ونتيجة العمليات الحسابية المعقدة تم أستخدام التقريب التي أقرحه الباحث ليندلي لتسهيل حل المعادلات الغير خطية والمعقدة، كما استعمل محاكاة (Monte-Carlo) للمقارنة بين أفضلية المقدرات وبالاعتماد على معيار متوسط مربعات الخطأ (MSE) ، واوصى الباحث بأستعمال بيانات خاضعة للرقابة لتطوير الدراسة.

❖ في العام نفسه قام الباحثان (جاسم فراس منذر) [4] بدراسة مقارنة في تقدير دالة المعولية للأنموذج ليندلي الإجهاد- والمتانة(stress-strength Model) الذي يصف الأنظمة التي تتألف من مجتمعات غير متجانسة ، بافتراض أن متغيري الأجهاد والمتانة مستقلين ويتبعان توزيع ليندلي ذا معلمة ، إذ استعمل طريقة بيز القياسية كطريقة معتمدة على المعلومات الأولية للمعلمات المجهولة التي تخضع لتوزيع كاما ، وبالاعتماد على دالتي خسارة مربع الخطأ ودالة خسارة انتروبي العامة إذ تم أستقاق مقدرات بيز لمعلمات ودالة المعولية لتوزيع ليندلي ، وتمت الاستعانة بأسلوب محاكاة مونت-كارلو لأجراء المقارنة مع مقدرات أحد الطرائق المهمة وهي

طريقة الأماكن الأعظم، وأخيراً توصل الباحثان الى أن مقدر بيز القياسي في تقدير المعلمات ودالة المعولية هي لأفضل مقارنة بطريقة الأماكن الأعظم المستعملة لأنه يحقق اقل تباين من خلال استخدام المعيار الاحصائي (MSE) للمقارنة بين الأفضلية للمقدرات.

❖ في عام (2015) قام الباحثون (M.Dube & et al) [16] بتقدير معلمة الشكل ودالة المعولية لتوزيع ليندلي ذا معلمة واحدة، بأستعمال بيانات مراقبة تدرجية من النوع الأول، أذ أستعمل الباحثون التحليل البيزي لتوزيع ليندلي حيث حصل على مقدرات لمعلمة ودالة المخاطرة والمعولية، وتم التقدير بطريقة الأماكن الأعظم كطريقة كلاسيكية، بأستعمال طريقة محاكاة (مونت- كارلو) قورنت طرائق التقدير، واستعمال الطريقة الأفضل لغرض تطبيقها على بيانات حقيقية والتي توزعت كما كتوزيع اولي وتم تحليل البيانات لغرض التوضيح .

❖ في عام (2016) قام الباحثون (F. Metiri & et al) [36] بأستعمال التحليل البيزي لتوزيع ليندلي ذا معلمة واحدة، أذ تم اشتقاق مقدراته وذلك بأستعمال دالة خسارة خطية غير متماثلة (Linx Loss Function) على فرض أن التوزيع السابق (prior distribution) تم تحديده بالاعتماد على عدة أساليب، أسلوب غير معلوماتي (the extension of Jeffrey's prior) واسلوب معلوماتي (inverted gamma prior)، وبأستخدام تقنيات معينة تم استخراج التوزيع اللاحق للمعلمات وبتوظيف أسلوب المحاكاة بالاعتماد على المعيار الاحصائي متوسط مربعات الخطأ (MSE) حيث تبين نتائج (Jeffreys) السابقة أكثر دقة من نتائج (Gamma).

❖ في العام نفسه قدم الباحثون (A. Asgharzadeh & et al) [8] أنموذجاً جديداً لتوزيع ليندلي العام. أذ ناقش الباحثون بعض الخصائص التوزيعية المهمة مثل الدالة المولدة للعزوم والدالة التراكمية والاحصاءات المرتبة، وبعض خصائص المعولية مثل دالة البقاء ودالة معدل المخاطرة وتم تقدير المعلمات بطريقة الأماكن الأعظم، واخيراً تم تطبيق الأنموذج على مجموعات بيانية حقيقية ومقارنة أداء التوزيع المقترح مع عدة توزيعات أخرى مرتبطة بالزمن أظهرت البيانات الحقيقية المطبقة مرونة الأنموذج المستخدم.

❖ في عام (2017) أقترح (R. Shanker & et al) [43] صيغة جديدة لتوزيع ليندلي بمعلمتين وناقش بعض خصائصه مثل الدالة المولدة للعزوم والانحرافات المتوسطة و الاحصاءات المرتبة و منحنيات لورنز وبون فيروني (Lorenze & Bonferroni) ودالة ريني انتروبي (Renyi Entropy) ومعولية الاجهاد-المثانة، وقدر معلمات الأنموذج بأستعمال طريقة الأماكن الأعظم، وقارنوا توزيع ليندلي بمعلمتين مع توزيعات (ليندلي العمومي- كما- ويبل-

التوزيع اللوغاريتمي الطبيعي-ليندلي بمعلمة واحدة- الاسي بمعلمة واحدة) عن طريق أستعمال المعايير (AIC – 2lnL – سميرنوف كولمكروف) لمجموعتين من البيانات الحقيقية وتوصلوا الى أن توزيع ليندلي بمعلمتين يعطي ملائمة أفضل من بقية التوزيعات في نمذجة أوقات الحياة.

❖ **في العام نفسه قدم الباحثون (Shanker & et al) [42]** توزيع ليندلي ذي الثلاث معلمات (Three-Parameter Lindley Distribution) المتعلق بالرسالة، إذ تم دراسة الخصائص التوزيعية للنموذج وهو خليط من توزيع كاما الأول بالمعلمتين  $(2, \theta)$  والتوزيع الاسي بالمعلمة  $(\theta)$ ، تم تحديد خصائص المخاطرة وتقدير المعلمات الثلاث ودالة البقاء بأستعمال طريقة الأماكن الأعظم وطريقة العزوم تم الحصول على مقدرات معلمات التوزيع الثلاث ودالة البقاء والمخاطرة، وكذلك أقتراح الباحثون خوارزمية (algorithm) لتوليد المتغيرات العشوائية لهذا التوزيع وقارنوا توزيع ليندلي بمعلمة مع توزيع (generalized Lindley) عن طريق أستعمال المعايير (BIC – AICc – AIC) وتطبيقه على بيانات حقيقية، و أظهر التطبيق العملي التي قام به الباحثون أن التوزيع المقترح أكثر مرونة من توزيعات أوقات الحياة الأخرى مثل توزيع ليندلي العام ذي الثلاث معلمات .

❖ **وفي العام نفسه قام الباحثون (V. K. Sharma & et al) [44]** بأستعمال أسلوب بيز القياسي لدراسة توزيع ليندلي (Lindley distribution) ذي معلمة واحدة، بأستعمال نوعين من التوزيعات الأولية في حالة توفر معلومات أولية حول المعلمة الجهولة على انه توزيع (Gamma)، وعند عدم توفر معلومات تم أستعمال الأسلوب التي أقترحه الباحث (Jeffrey)، على فرض توفر نوعين من دوال الخسارة هي دالة خسارة تربيعية ودالة خسائر انتر وبي العامة غير متماثلة، و بأستخدام طريقة محاكاة MCMC لغرض المقارنة مع طريقة الأماكن الأعظم (maximum likelihood estimators) وطريقة المربعات الصغرى وقارنوا أداء توزيع ليندلي بمعلمة مع توزيعات (power Lindley - generalized Lindley - Gamma - generalized exponential) عن طريق أستعمال المعايير (AIC – 2lnL – سميرنوف كولمكروف) لمجموعتين من البيانات الحقيقية، وتوصلوا الى أن توزيع ليندلي بمعلمة يعطي ملائمة أفضل من بقية التوزيعات في نمذجة أوقات الحياة.

❖ **وفي عام نفسه أقتراح الباحثان (M. Mesfioui & A. Abouammoh) [35]** الأنموذج المضاف (Lindley-Pareto)، وهو توزيع ذي معلمتين، إذ قدم هذا التوزيع المركب

بأستعمال عائلة توزيع باريتو (Pareto) بمعلمة مع عائلة توزيع ليندلي (Lindley) بمعلمة ، وتم أيجاد الخصائص الاحصائية للأنموذج الجديد والعزوم والإحصاءات المرتبة ، واستعمل الباحثان طريقة الأماكن الأعظم والعزوم في تقدير المعلمات ودالة البقاء ودالة المخاطرة للنموذج وتم إجراء اختبار حسن المطابقة لبيان أفضلية أداء التوزيع على ثلاثة مجموعات من البيانات الحقيقية، ووصف الباحثان توزيع (Lindley-Pareto) بالتوزيع الناجح والمرن والتي يعتبر نموذج أكثر ملائمة لنمذجة أوقات الحياة.

❖ في العام (2018) درس الباحث (W. A. Hassanein) [19] مؤشر احصائي لتقييم أداء مدى الحياة لتوزيع ليندلي أستنادا إلى بيانات الفشل التقدمي الأول لتوزيع (Lindley) ، وبأستعمال بيانات مراقبة من النوع الأول والثاني تم تقدير مؤشر البقاء على قيد الحياة بطريقة الأماكن الأعظم (Maximum Likelihood) ، حيث تم تطبيق الأنموذج المقترح على بيانات حقيقية تمثل عينات من الدم لمستلمي الأعضاء البشرية، وتوصل الباحث الإجراء المقترح للاستدلال الإحصائي يتميز بسهولة تطبيقه يعطي نتائج مرضية تحقيق أهداف الاختبار .

❖ في العام نفسه قدم الباحثون (G. M. Cordeiro & et al) [13] توزيع (ليندلي-ويبل) وهو أحد توزيعات عائلة ليندلي ذي الثلاث معلمات وأستمد الأنموذج من مجموع معدل المخاطرة للتوزيعين ليندلي-ويبل التي يستخدم في نمذجة بينات أوقات الحياة ، ودرس بعض خصائصه الإحصائية منها دالة الكثافة التجميعية والدالة الاحتمالية والعزوم والإحصاءات المرتبة ، كما أقترح الباحثون خوارزمية لتوليد بيانات التوزيع المقترح بأستعمال دالة Lambert W – function ، وبأستعمال طريقة الأماكن الأعظم حصل على تقدير معلمات الأنموذج والمعولية والمخاطرة، وقارنوا أداء توزيع ليندلي بمعلمة مع توزيعات (power generalized Lindley -Lindley) عن طريق أستعمال المعايير (BIC – AICc – AIC – 2lnL) وتطبيقه على بيانات حقيقية ، وأخيراً أظهر التطبيق العملي التي قام به الباحثان أن توزيع (ليندلي – ويبل) هو من التوزيعات سهلة التعامل معا ويكون اكثر مرونة خصوصاً في التطبيقات الهندسية والموثوقية ، وبذلك يعد توزيع قوي ومنافس لتوزيعات أوقات الحياة الأخرى .

❖ في العام نفسه قدرت الباحثة (ثائرة وأخرون) [21] معلمة القياس لتوزيع ليندلي بأستعمال طريقة الأماكن الأعظم وطريقة بيز ، وقارنت بين الطريقتين بأستعمال المعيار الاحصائي متوسط مربعات الخطأ (MSE) من خلال تجارب محاكاة مونت-كارلو ، وتوصلت الى أفضلية طريقة بيز عند أحجام العينات الصغيرة وأفضلية طريقة الأماكن الأعظم عند أحجام العينات

المتوسطة والكبيرة، ومن ثم استثمرت المقدر الأفضل في دراسة وتحليل أوقات الانتظار لعملاء مصرف الرشيد/الجامعة المستنصرية، وأوصت الباحثة بتوظيف توزيع ليندلي في تقدير دالة المعولية ودالة البقاء للأنظمة غير المتجانسة.

❖ **في عام (2019) أقترح (C. Kumar & R. Jose) [46] صنف جديد من التوزيعات** اسمها توزيع ليندلي المزدوج (DLD) بثلاث معلمات  $(\theta, \mu, \sigma)$ ، أذا قاما باستخراج خصائص التوزيع المهمة كدوال دالة المخاطرة والبقاء وقدر معلمة الموقع للتوزيع الموسع (DLD) بأستعمال طريقة الأماكن الأعظم (MLE)، وعن طريق تجارب محاكاة مونت-كارلو قارنا التوزيع الموسع الجديد مع توزيع لابلاس بمعلمتين  $(\mu, \sigma)$  بأستعمال معايير المقارنة (كولمكروف سميرنوف-AIC- BIC- AICc) عند أحجام عينات  $(n=100,200,500)$ ، وتوصل الباحثان الى ان توزيع ليندلي المزدوج الجديد افضل من توزيع لابلاس وخاصة في حقل الأحصاء الهندسي.

❖ **وفي عام (2020) قدم (S. Aryuyuen & et al) [9] الأضافة المنفصلة توزيع (ليندلي- ويبيل)** خصائصه وتطبيقاته وهو توزيع ذي أربعة معلمات، في هذه الدراسة قدم الباحثون نسخة منفصلة للتوزيع المستمر (ليندلي- ويبيل)، التي قدمه الباحثون (Cordeiro & et al) في عام (2018)، أذا ناقش بعض الخصائص التوزيعية المهمة مثل الدالة الاحتمالية والدالة التراكمية والدالة المولدة للعزوم وكذلك الاحصاءات المرتبة وبعض خصائص المعولية مثل دالة البقاء ودالة معدل المخاطرة وتطبيقاته، وفي سيناريو كلاسيكي تم الحصول على مقدرات لمعاملات ودالة البقاء بأستعمال طريقة الأماكن الأعظم، بأستعمال معايير المقارنة (AIC- BIC- AICc) عند أحجام عينات مختلفة تم إجراء مقارنة أداء التوزيع مع توزيعات أخرى مركبة تشترك فيها عائلة ليندلي توصل الباحثون الى ان الأنموذج الجديد مفيد لنمذجة مجموعات البيانات ويحقق أكثر مرونة.

❖ **في العام نفسه قام (E. H. Hafez & et al) [24] بدراسة محاكاة وتطبيق بيانات حقيقية** تمثل بيانات مراقبة من النوع الثاني لتجربة صناعية على المصاييح أذا تم أستعمال اختبار (كولم كروف- سمير نوف) لغرض ملائمة البيانات وتبين أن لها توزيع ليندلي، وفي تجارب المحاكاة تم تقدير معلمات توزيع ليندلي بأستعمال طريقة الأماكن الأعظم وطريقة بيز في ظل دالة خسارة متماثلة، لكل من معلمات التوزيع. وتوصلوا بأن طريقة بيز في التقدير أفضل من طريقة الأماكن الأعظم في تقدير معلمات توزيع ليندلي بمعلمتين.

❖ وأخيراً من خلال الدراسات التي تم استعراضها نلاحظ أنها تناولت طرائق تقدير معلمات ودالة البقاء لبعض توزيعات عائلة ليندلي المرتبطة بالزمن وأبرز هذه الطرائق هي (الاعتيادية والبيزية)، أما في هذه الرسالة قدمت ثلاث طرائق بيزية لتقدير دالة البقاء للتوزيع الاحتمالي ليندلي ذي الثلاث معلمات بهدف الحصول على أفضل تقدير لدالة البقاء، وتعد هذه الدراسة الأولى من نوعها التي يتم فيها استخدام طريقة توقع بيز وطريقة بيز الهرمي لتوزيع احتمالي ذي الثلاث معلمات حسب علم الباحث وهي مكملة للجهود المبذولة من قبل الباحثين.

الفصل الثامن

الجانح والظرف

( Preface)

2-1 تمهيد:

أستعرض هذا الفصل بعض المفاهيم الأساسية المتعلقة بموضوع الرسالة ،منها مفهوم دالة البقاء (Survival Function) وبعض خصائصها والدوال المرتبطة بها كدالة الكثافة الاحتمالية للفشل ودالة الكثافة التجميعية للفشل ودالة المخاطرة . وكذلك تم عرض توزيع ليندلي ذي الثلاث معلمات فظلاً عن طرائق التقدير البيزية المستعملة وهي طريقة بيز القياسية المعلوماتية وطريقة توقع بيز وطريقة بيز الهرمي وبأستعمال دالتي خسارة هما دالة خسارة تربيعية متماثلة ودالة خسارة انتروبي العامة غير متماثلة لكل طريقة تقدير.

2-2 دالة الكثافة الاحتمالية للفشل: (Failure time function) [3] [40]

وهي احتمال الفشل عبر المدة الزمنية (t, t + Δt) بغض النظر عن صغر المدة (Δt) حيث (t<sub>i</sub> = t<sub>i-1</sub> + Δt<sub>i</sub>) ويطلق عليها نسبة الفشل الشرطية ويعبر عنها رياضياً بالصيغة الآتية :

$$f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{Pr(t \leq T \leq t + \Delta t)}{\Delta t} ; t \geq 0 \quad (2 - 1)$$

Δt: التغير في قيمة المتغير العشوائي (T) التي يشير الى وقت ظهور الحدث.

T : يمثل المدة الزمنية اللازمة لحدوث الفشل وهو متغير عشوائي يمثل وقت بقاء للكائن الحي.

t:يمثل زمن بقاء الكائن الحي ويكون دائماً أكبر من او تساوي صفر (0 ≤ t).

ومن خصائص هذه الدالة كالاتي: -

$$1. \int_{\forall t}^{\infty} f(t) d(t) = 1 .$$

$$2. f(t) \geq 0.$$

2-3 دالة الكثافة التجميعية للفشل: (Cumulative Function) [3] [40]

أحتمال موت الكائن لحين الزمن (t) وتسمى بدالة توزيع وقت الحياة . فإذا كان (T) يمثل وقت ظهور الحدث، متغير عشوائي مستمر لديه دالة كثافة احتمالية (Probability Density Function) فان دالة التوزيع التراكمية للفشل يعبر عنها رياضياً بالشكل الآتي:

$$F(t) = pr(T \leq t) \quad (2 - 2)$$

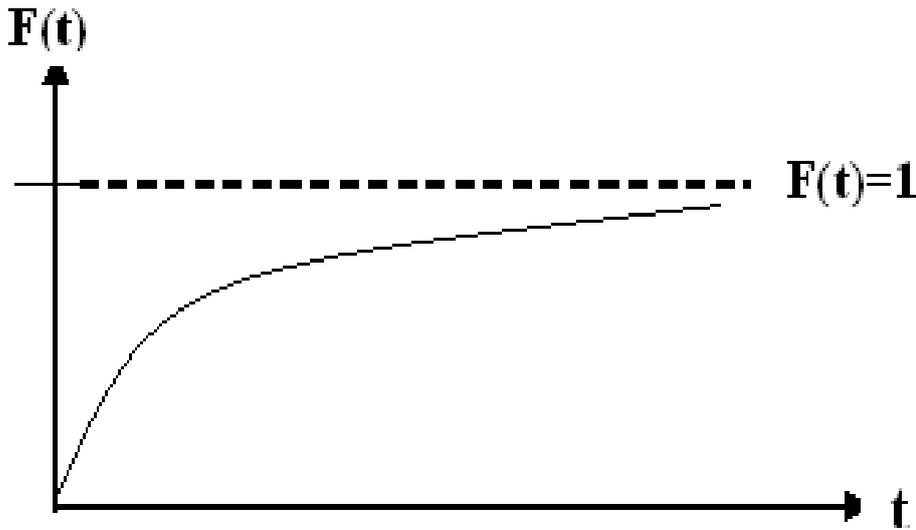
$$F(t) = \int_0^t f(u) du$$

$$F(t) = 1 - S(t) \quad (2 - 3)$$

وللدالة التجميعية للفشل خصائص هي:

1. تكون غير سالبة وتتراوح قيمتها بين الصفر والواحد  $0 \leq F(t) \leq 1$ .
2. تكون متزايدة دائما أي أن  $(\lim_{t \rightarrow 0} F(t) = 1)$  وهذا يعني أن أي فرد لابدأن يصل الى الفشل (الموت) عند  $(t \rightarrow \infty)$ .
3. لا يتم أي حدث (الموت) دون أن تعمل  $(\lim_{t \rightarrow 0} F(t) = 0)$ .

وان الشكل (2-1) يبين منحنى دالة الكثافة التجميعية للفشل.



الشكل (2-1) منحنى دالة الكثافة التجميعية للفشل [1]

#### 2-4 دالة البقاء $S(t)$ : (Survival Function) [48] [45]

يهتم تحليل البقاء بدراسة توزيع الوقت منذ حالة البدء (مثل بداية استخدام علاج معين او الولادة) ويمكن تعريف وقت البقاء على أنه حدوث حدث معين، كظهور مرض معين او الأستجابة الى علاج معين او الأنتكاسة او الموت، لذلك فان دالة البقاء تمثل أحتمال بقاء الكائن الحي على قيد الحياة بعد مرور الزمن  $(t)$ ، وان أحتمال البقاء على قيد الحياة يقع خلال الفترة الزمنية  $(0, t)$

لذلك يتركز تحليل البقاء على قيد الحياة بشكل رئيسي على التنبؤ في تحديد احتمال المخاطر ويعبر عن دالة البقاء  $S(t)$  رياضياً بالصيغة الآتية :-

$$S(t) = \text{pr}(T > t) = \int_t^{\infty} f(t) dt \quad \dots (2 - 4)$$

أذ إن:

$f(t)$ : دالة الكثافة الاحتمالية P.d.f للمتغير العشوائي  $t$ .

$T$ : يمثل المدة الزمنية اللازمة لحدوث الفشل وهو متغير عشوائي يمثل وقت بقاء للكائن الحي .

$t$ : يمثل زمن بقاء الكائن الحي ويكون دائماً أكبر من او تساوي صفر ( $0 \leq t$ ).

ولتكن  $F(t)$  تمثل دالة الكثافة التجميعية C. D. F للمتغير العشوائي  $x$  فإن:

$$F(t) = \text{pr}(T \leq t) = \int_0^t f(t) dt \quad (2 - 5)$$

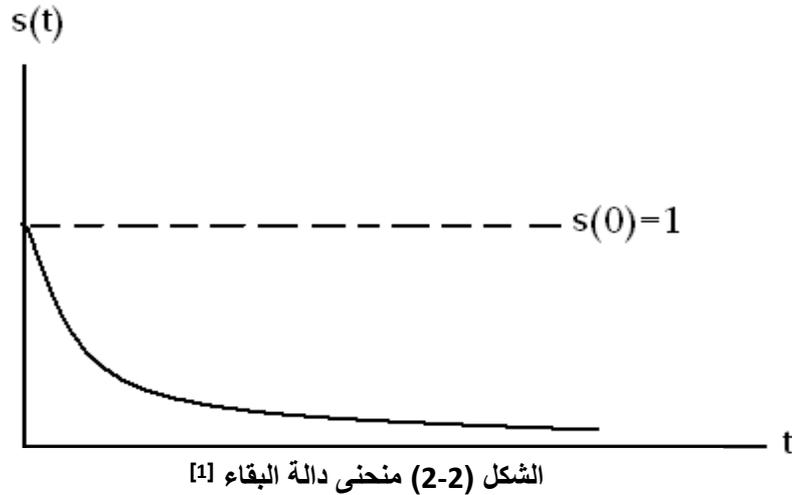
$$= 1 - \text{pr}(T > t) = 1 - \int_t^{\infty} f(t) dt$$

$$S(t) = 1 - F(t) \quad (2 - 6)$$

وتتصف دالة البقاء بالخصائص الآتية:

1. تكون موجبة دائماً وتتراوح قيمها بين الصفر والواحد الصحيح أي  $0 \leq S(t) \leq 1$ .
2. تكون دائماً متناقصة أي  $\lim_{t \rightarrow 0} S(t) = 0$  ، وهذا يعني أن أي فرد لابدأن يصل الى الفشل (الموت) عند  $(t \rightarrow \infty)$ .
3. غالباً تكون  $S(0) = 1$ .

الشكل (2-2) يمثل المنحني العام لدالة البقاء أذ أن المحور العمودي يمثل قيمة دالة البقاء  $S(t)$  وان المحور الافقي يمثل وقت البقاء  $(t)$  وفي ضوء الشكل يتبين ان قيمة دالة البقاء يتناسب عكسياً مع الزمن  $t$ .



[18] [40] (Risk Function)

## 2-5 دالة المخاطرة :

تؤدي دالة المخاطرة دوراً أساسياً في تحليل بيانات العمر، حيث تعطي مقدار توقع الوقت حتى حدوث حدث معين، ومن خلالها يمكن التعرف على الأنموذج الرياضي لدالة البقاء، التي تعطي نسبة الفشل الأني (Rate Failure Conditional) على فرض أن الفرد لا زال على قيد الحياة حتى الزمن (t) ويشير معدل الفشل فقط إلى الأشياء التي لا يمكن إصلاحها ويمكن التعبير عن معدل المخاطرة بالصيغة الرياضية التالية :

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = \frac{f(t)}{1-F(t)} \quad (2-7)$$

نلاحظ من العلاقة (2-7) أن دالة المخاطرة مرتبطة رياضياً بدالة التوزيع التراكمية ودالة الكثافة الاحتمالية للفشل، أي أن إذا وجدت أحدهما يمكن إيجاد الدوال الأخرى ومن أهم خصائصها أن حدها الأعلى غير محدد وقيمتها دائماً موجبة وان دالة المخاطرة تتناسب عكسياً مع دالة البقاء وطردياً مع الدالة الاحتمالية للفشل.

## 2-6 توزيع ليندلي ذي الثلاث معالم: (Three Parameter Lindley. Dist) [42]

يعد توزيع ليندلي (Lindley Distribution) واحداً من التوزيعات المستمرة ذات الأهمية الكبيرة في دراسة المعولية ونظرية البقاء، التي تمتاز بإمكانية كبيرة في تمثيل الأنظمة المختلفة التي تتألف من مجتمعات مركبة وغير متجانسة وكذلك المرونة العالية لهذا التوزيع كنموذج للفشل.

ينتسب هذا التوزيع إلى العالم ليندلي (Lindley 1958) والتي يعد من التوزيعات المهمة في العلوم الطبية والهندسية، ونمذجة أوقات الحياة، وكذلك في الدراسات السكانية المتمثلة بتوقعات

الحياة في جداول الحياة ، وكذلك في موضوع الرقابة على الجودة . يأخذ توزيع ليندلي عدة أنواع أو صيغ حسب عدد المعلمات التوزيع المحددة بالمدة  $[0, \infty]$  منها توزيع ليندلي ذي المعلمة الواحدة، وتوزيع ليندلي ذي المعلمتين، وتوزيع ليندلي ذي الثلاث معلمات .

تكتب دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ليندلي ذي معلمتين بالشكل الاتي:

$$f(t; \theta, \beta) = \begin{cases} \frac{\theta^2}{\theta + \beta} (1 + \beta t)e^{-\theta t} & ; x > 0, \theta > 0, \theta + \beta > 0 \\ 0 & \text{o. w} \end{cases} \dots (2 - 8)$$

أذ إن:

$\beta$  : معلمة الشكل (Shape parameters).

$\theta$  : معلمة القياس (Scale parameter) .

ويعد توزيع ليندلي ذي الثلاث معلمات خليط من التوزيع الاسي بمعلمة واحدة ( $\theta$ ) وتوزيع كاما بمعلمتين، لذلك فان المتغير العشوائي ( $t$ ) التي يتبع توزيع ليندلي ذي الثلاث معلمات له دالة كثافة الاحتمالية وفق الصيغة الاتية:

$$f(t; \theta, \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} (\alpha + \beta t)e^{-\theta t} & ; \theta > 0, \beta > 0, t > 0, \theta\beta + \alpha > 0 \\ 0 & ; \text{o. w} \end{cases} \dots (2 - 9)$$

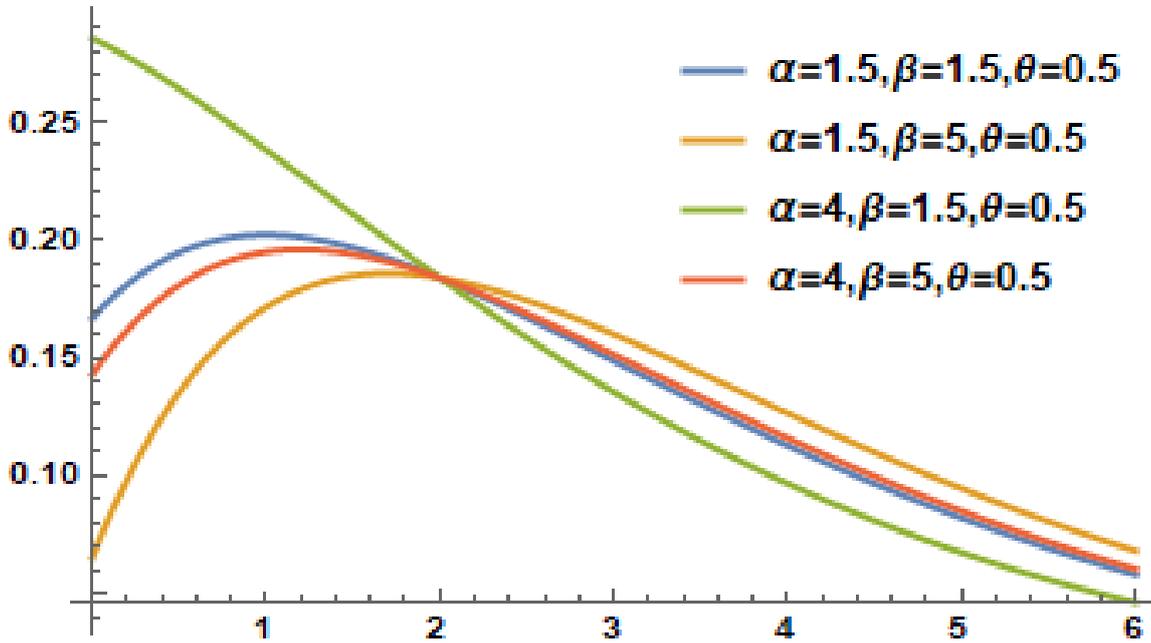
أذ إن:

$\alpha, \beta$  : معلمتي الشكل (Shape parameters).

$\theta$  : معلمة القياس (Scale parameter) .

$t$  : المتغير العشوائي التي يمثل الزمن لحين الفشل .

والشكل (2-3) يبين سلوك دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ليندلي ذي الثلاث معلمات عند قيم مختلفة من معلمات التوزيع وهو من اعداد الباحث بالاعتماد على برنامج Wolfram Mathematica .



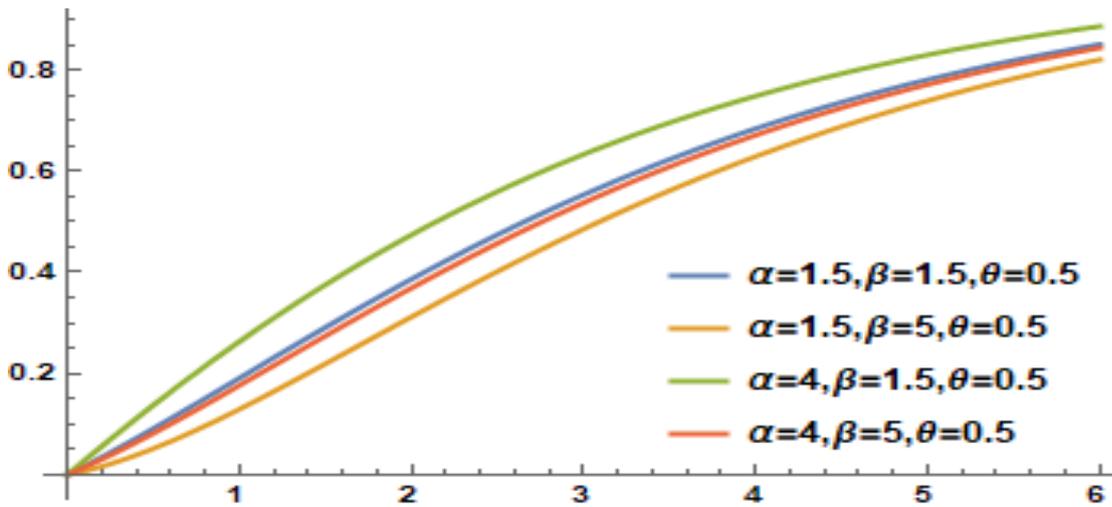
الشكل (2-3) سلوك دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ليندلي ذي الثلاث معلمات عند قيم مختلفة من معلمات التوزيع

ان دالة الكثافة التجميعية لتوزيع ليندلي ذي الثلاث معلمات يمكن صياغتها بالشكل الاتي [42]:

$$\begin{aligned}
 F(t) &= \int_0^t f(t). dt \\
 &= \int_0^t \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} (\alpha + \beta t) e^{-\theta t}. dt \\
 &= 1 - \left[ 1 + \frac{\theta\beta t}{\alpha\theta + \beta} \right] e^{-\theta t}
 \end{aligned}$$

$$\therefore F(t, \theta, \alpha, \beta) = 1 - \left[ 1 + \frac{\theta\beta t}{\theta\alpha + \beta} \right] e^{-\theta t} \quad (2 - 10)$$

والشكل (2-4) يبين سلوك دالة الكثافة التجميعية لتوزيع ليندلي ذي الثلاث معلمات عند قيم مختلفة من معلمات التوزيع وهو من اعداد الباحث.



الشكل (2-4) سلوك دالة الكثافة التجميعية (C.D.F) لتوزيع ليندلي ذي الثلاث معلمات

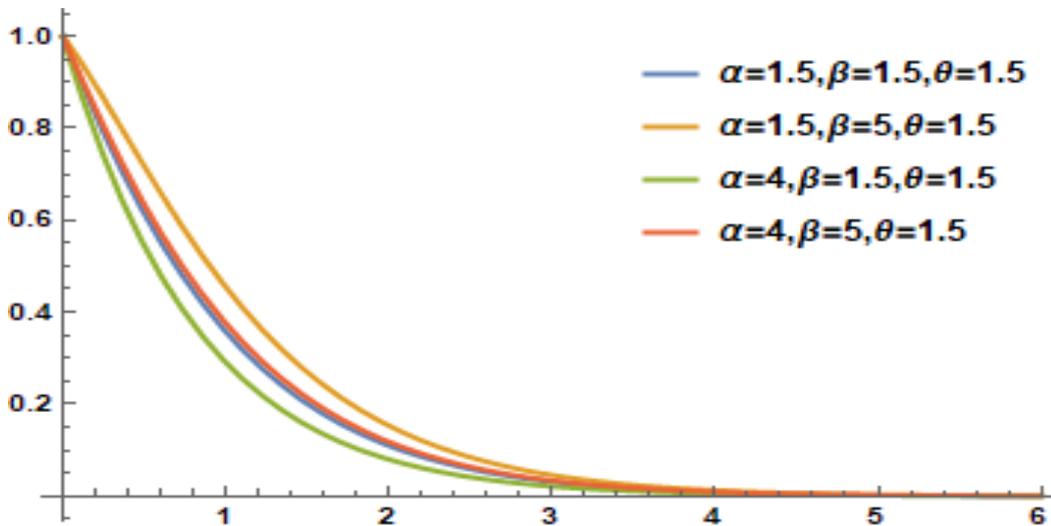
وأن دالة البقاء لتوزيع ليندلي ذي الثلاث معلمات تكون الشكل الاتي [42]:

$$S(t) = 1 - F(t)$$

$$= 1 - \left[ 1 - \left[ 1 + \frac{\theta\beta t}{\theta\alpha + \beta} \right] e^{-\theta t} \right]$$

$$S(t) = \left[ 1 + \frac{\theta\beta t}{\theta\alpha + \beta} \right] e^{-\theta t} \quad (2 - 11)$$

والشكل (2-5) يبين سلوك دالة البقاء لتوزيع ليندلي ذي الثلاث معلمات عند قيم مختلفة من معلمات التوزيع وهو من اعداد الباحث بالاعتماد على برنامج Wolfram Mathematica.



الشكل (2-5) سلوك دالة البقاء لتوزيع ليندلي ذي الثلاث معلمات عند قيم مختلفة من معلمات التوزيع

أن دالة المخاطرة لتوزيع ليندلي يمكن صياغتها كالآتي [42]:

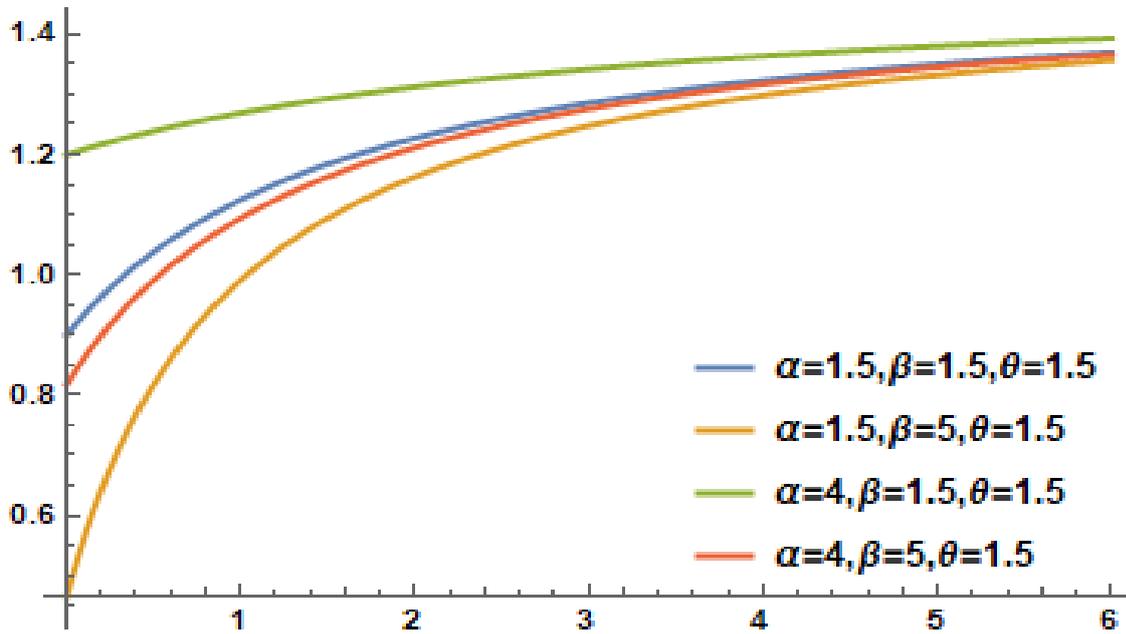
$$h(t) = \frac{f(t)}{s(t)}$$

$$h(t) = \frac{\frac{\theta^2}{\alpha\theta+\beta}(\alpha+\beta t)e^{-\theta t}}{\left(1+\frac{\theta\beta t}{\alpha\theta+\beta}\right)e^{-\theta t}}$$

$$= \frac{\theta^2(\alpha+\beta t)e^{-\theta t}}{\left(\frac{\theta\beta te^{-\theta t}}{\alpha\theta+\beta}+e^{-\theta t}\right)(\alpha+\beta t)}$$

$$h(t) = \frac{\theta^2(\alpha + \beta t)}{(\beta\theta t + \theta\alpha) + \beta} \quad (2 - 12)$$

والمخطط التوضيحي في الشكل (6-2) يبين سلوك دالة المخاطرة لتوزيع ليندلي ذي الثلاث معلمات عند قيم مختلفة من معلمات التوزيع .



الشكل (6-2) سلوك دالة المخاطرة لتوزيع ليندلي ذي الثلاث معلمات عند قيم مختلفة من معلمات التوزيع

والجدول (2-1) يوضح أهم خصائص توزيع ليندلي ذي الثلاث معلمات.

جدول (2-1) يمثل بعض خصائص توزيع ليندلي ذي الثلاث معلمات

الخاصية	الصيغة
parameters	$\alpha$ : (Shape parameters) ، $\theta \beta + \alpha > 0$ $\beta$ : (Shape parameters) ، $\beta > 0$ $\theta$ : (Scale parameter) ، $\theta > 0$
Mean	$\frac{\alpha\theta + 2\beta}{\theta(\alpha\theta + \beta)}$
Variance	$\frac{\alpha^2\theta^2 + 4\alpha\theta\beta + 2\beta^2}{\theta^2(\alpha\theta + \beta)^2}$
The Coefficient of Variation	$\frac{\sqrt{\alpha^2\theta^2 + 4\alpha\theta\beta + 2\beta^2}}{\alpha\theta + 2\beta}$
The Coefficient of Skewnes	$\frac{2\alpha^3\theta^3 + 6\alpha^2\theta^2\beta + 6\alpha\theta\beta^2 + 2\beta^3}{(\alpha^2\theta^2 + 4\alpha\theta\beta + 2\beta^2)^{\frac{3}{2}}}$
Kurtosis The Coefficient	$\frac{3(\alpha^4\theta^4 + 24\alpha^3\theta^3\beta + 44\alpha^2\theta^2\beta^2 + 32\alpha\theta\beta^3 + 8\beta^4)}{(\alpha^2\theta^2 + 4\alpha\theta\beta + 2\beta^2)^2}$

[21] [6] (Bayesian Approach)

2-7 أسلوب بيز في التقدير:

سميت طريقة بيز أو منهج بيز نسبةً الى توماس بيز (TheTomas Bayes) ، أذ أن هناك مدرستين في التقدير الاولى تسمى بالمدرسة الكلاسيكية وهي تفترض أن المعلمات كميات ثابتة يتم تقديرها بالطرائق الكلاسيكية مثل طريقة الأماكن الأعظم وطريقة المربعات الصغرى وطريقة العزوم وغيرها ، والاخرى تسمى المدرسة البيزية والتي تفترض أن المعلمة (المعلمات) المجهولة

الخاصة بالتوزيع الاحتمالي تعد كمتغيرات عشوائية وان هنالك معلومات سابقة عنها (اولية) تصاغ تلك المعلومات على شكل توزيع احتمالي يعرف بدالة الكثافة الاحتمالية الاولية (Prior Probability function) وعادة ما يكون هذ التوزيع غير ملائم اي أن تكامله لكل مجاله لا يساوي واحد إذ يتم التعرف على هذه المعلومات من بيانات وتجارب سابقة او من النظرية التي تحكم الظاهرة. وايضاً تعتمد نظرية بيز على المعلومات الحالية للعينه التي يمكن أن تمثل بدالة الأمكان (Likelihoods Function) الخاصة بالمشاهدات . ودمج دالة الكثافة الاحتمالية الاولية للمعلومات مع دالة الأمكان الأعظم للمشاهدات الحالية نحصل على التوزيع الاحتمالي اللاحق (Posterior). وفي طريقة بيز نستعمل دالة خسارة (Loss Function) وهي دالة يمكن من خلالها قياس الخسارة الناتجة من اتخاذ القرار بالاعتماد على قيمة ( $\theta$ ) بينما القرار الواجب اتخاذه يعتمد على ( $\theta$ ) اي وجود فرق بين المعلمة وتقديرها.

لذلك فان العناصر الاساسية لطريقة بيز هي:

1. معرفة الدالة الاساسية وهي الدالة الاحتمالية لتوزيع البيانات  $f(t_1, t_2, \dots, t_n/\theta)$  ومنها نحصل على دالة الأمكان للمشاهدات الحالية  $l(t_1, t_2, \dots, t_n|\theta)$ .
2. معرفة الاحتمال السابق (prior distribution)  $\pi(\theta)$  (قبل المعاينة).
3. نحصل على الاحتمال اللاحق (Posterior Distribution) (بعد المعاينة)  $h(\theta|t_1, t_2, \dots, t_n)$  حسب نظرية بيز نحصل على التوزيع اللاحق بأستعمال صيغة معكوس بيز (Bays Inversion Formula) وكالاتي:

$$h(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\pi(\theta) \prod_{i=1}^n f(x_i, x_2, \dots, x_n|\theta)}{\int_{\forall \theta} \pi(\theta) \prod_{i=1}^n f(x_i, x_2, \dots, x_n|\theta) d\theta} \quad \dots (2 - 13)$$

أذ إن:

$$\pi(\theta) : \text{التوزيع الأولي للمعلومات } \theta.$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n|\theta) : \text{دالة الأمكان لمشاهدات العينة.}$$

$$h(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n) : \text{التوزيع اللاحق.}$$

[6] [26] (Loss Functions)

2-7-1 دوال الخسارة:

تختلف التقديرات البيزية تبعاً لأختلاف أنواع دوال الخسارة التي يعد توفرها ضروري على العكس من الأساليب الأخرى لتقدير معلمة أو متجه المعلمات ( $\hat{\theta}$ ) بهدف الحصول على مقدر بيزي تكون عنده الخسارة (المتوقعة اللاحقة اقل ما يمكن) ، وهذا المقدر يرتبط بشكل رئيسي بدالة المخاطرة (Risk function) ويجعلها في نهايتها الصغرى ، التي يتم الحصول عليها عن طريق اخذ التوقع لدالة الخسارة (Expected Loss Function) ويرمز لها بالرمز  $R(\hat{\theta}, \theta)$  وذلك لغرض لأختبار دقة الأسلوب البيزي للحصول على المعلمة المقدر ، وتعد دالة الخسار مقياس لمقدار الخسارة الناتجة من اتخاذ القرار التي يعتمد على المقدر ( $\hat{\theta}_{Bayes}$ ).

فأذا كانت  $\theta$  تمثل معلمة التوزيع المراد تقديرها فإن  $L(\theta, \hat{\theta})$  ستمثل دالة الخسارة التي يجب تحقق الشروط التالية:

$$1- L(\theta, \hat{\theta}) \geq 0 \quad ; \quad \forall \theta, \forall \hat{\theta}$$

$$2- L(\theta, \hat{\theta}) = 0 \quad ; \quad \forall \hat{\theta} = \theta$$

وذلك فإن أسلوب بيز يعتمد على إيجاد قيمة  $\hat{\theta}$  والتي تقلل من توقع الخسارة أي أن :

$$R(\theta, \hat{\theta}) = E[L(\theta, \hat{\theta})]$$

$$= \text{Min}_{\hat{\theta}} \int_{\forall \theta} L(\theta, \hat{\theta}), h(\theta|x) d\theta$$

أذن  $E[L(\theta, \hat{\theta})]$  يهدف الى تقليل المخاطرة (Risk Minimize) أقل ما يمكن.

وفي هذه الرسالة تم أستعمال نوعين من دوال الخسارة هما دالة الخسارة التربيعية (Squared error loss function) دالة متماثلة والتي تعد من اكثر دوال الخسارة أستخداماً وشيوعاً ودالة خسارة انتروبي العامة (General Entropy Loss function) غير المتماثلة.

## 2-7-2 دوال الكثافة الاحتمالية المسبقة: [14] [6]

### (Prior Probability density function)

يتضمن الأسلوب البيزي في التقدير على ضرورة توفير دالة الكثافة الاحتمالية الأولية (prior p.d.f) التي تحتوي على جميع المعلومات المسبقة المتوفرة لدى الباحث حول البيانات قيد الدراسة والتي تعكس اعتقاده وتصوره حول المعلمة (المعلمات) غير المعلومة وتتم صياغة هذه المعلومات بشكل دالة احتمالية أولية (prior p.d.f) مناسبة. وتأخذ طريقتين أحدهما الأسلوب العلمي

وفيه تكون المعلومات من جنس البيانات المستعملة وعندها تسمى دالة الكثافة الاحتمالية (Data. Based prior p. d. f)، والأخر من خلال معلومات يمكن الحصول عليها باعتبارات غير متعلقة بالبيانات او من غير جنس البيانات حيث يتم جمعها عن طريق الافتراضات النظرية والمشاهدات وعندها تسمى دالة الكثافة الاحتمالية غير المستندة على البيانات (Non Data Based prior pdf) والتي يتم الحصول على معلوماتها نتيجة الخط بين الأسلوب العلمي والافتراض الشخصي وأن هذه المعلومات التي نحصل عليها يكون لها دور كبير وبارز في تحديد دالة الكثافة الاحتمالية الأولية، وهناك أنواع من الدوال الكثافة الأولية يمكن توضيحها كما يأتي:

### 1-1-7-2 دالة الكثافة الاحتمالية غير المعلوماتية: [10] [6]

#### (Non-Informative Prior P.d.f)

تستعمل دالة الكثافة الاحتمالية غير المعلوماتية عندما تكون المعلومات الأولية المتوفرة لدى الباحث غير كافية أو معدومة بشكل نهائي ولا يوجد تصور واضح حول المعلمة (المعلمت) المجهولة عبر تقديرها، وفي هذا الجانب فقد توصل العالم جيفري (Jeffery) الى وضع قاعدتين أساسيتين من خلالها يتم تحديد دوال التوزيع السابق (prior distribution) .

القاعدة الأولى: تعتمد على فترة المعلمة في تحديد التوزيع الاولي وكما يلي:

1. يؤخذ التوزيع الاولي كتوزيع منتظم (Uniform Distribution) إذا كانت المعلمة المراد تقديرها  $(\theta)$  لها مجال  $(-\infty, \infty)$  وبهذا تكون دالة الكثافة الاحتمالية السابقة  $\pi(\theta)$  كما يلي:

$$\pi(\theta)d\theta \propto \pi(\theta) \quad -\infty < \theta < \infty$$

$$\pi(\theta)d\theta \propto \text{constant}$$

2. يؤخذ التوزيع الاحتمالي كتوزيع لوغاريتمي منتظم إذا كانت المعلمة المراد تقديرها  $(\theta)$  لها مجال ضمن المجال الموجب للأعداد الطبيعية  $(0, \infty)$  وبهذا تكون دالة الكثافة الاحتمالية السابقة  $\pi(\theta)$  كما يلي:

$$\pi(\theta)d\theta \propto \frac{1}{\theta} d\theta \quad ; \quad 0 < \theta < \infty$$

أذ أن الدالة الاحتمالية السابقة التي يتم الحصول عليها وفق القاعدة الأولى غير مناسبة وذلك لان تكامل هذه الدالة في مجالها لا يساوي الواحد الصحيح ، لكن عند دمجها مع دالة الأماكن للمشاهدات  $p(x|\theta)$  سوف نحصل على دالة احتمالية لاحقة ملائمة (Proper).

القاعدة الثانية: وفي هذه القاعدة سوف يتم الاعتماد على معلومة فيشر (Fisher Information) التي يعرف بقانون (Jeffery) للأحتمال الاولي القياسي أذ أن دالة الكثافة الاحتمالية لمعلمة وأحدة تتناسب مع الجذر التربيعي لمصفوفة معلومات فيشر.

$$\pi(\theta) = \sqrt{I(\theta)}$$

$$I(\theta) = -nE \left[ \frac{d^2 \log f}{d\theta^2} \right] = nE \left[ \frac{d \log f}{d\theta} \right]^2$$

أذ ان:

$I(\theta)$ : هي مصفوفة معلومة فشر وفي حالة وجود أكثر من معلمة فإن دالة الكثافة الاحتمالية الأولية لعدة معلمات تتناسب مع الجذر التربيعي لمحدد مصفوفة معلومات فيشر.

### 2-7-1-2 دالة الكثافة الاحتمالية الأولية المعلوماتية: (Informative prior pdf) [10] [6]

تستعمل هذه الدالة عندما تتوفر المعلومات المسبقة الكافية لدى الباحث حول المعلمة (المعلمات) المراد تقديرها، وتتميز دالة الكثافة الاحتمالية بأنها تكون معروفة المعلمات وتكون المعلمة مقيدة بفترات معينة استناداً الى المعلومات التي يحصل عليها الباحث، أن وضع القيود عن المعلمات المراد تقديرها من الأمور المهمة التي يلجأ اليها الباحث معتمداً على المعلومات المتوفرة عن تلك المعلمة، أن صياغة دالة الكثافة الاحتمالية يعتمد اعتماد وثيق على هذه القيود، وان الدالة الاحتمالية الأولية المصاغة في هذه الحالة مشابهة للدالة غير المعلوماتية المصاغة حسب تطبيق قاعدة جيفري (Jeffrey) بهدف الحصول على أفضل مقدر.

### 2-7-1-3 دالة الكثافة الاحتمالية الأولية المعتمدة على عينة سابقة: [14] [10]

تستعمل هذه الدالة عندما تكون المعلومات المتوفرة لدى الباحث عن المعلمة (المعلمات) المراد تقديرها قليلة جداً حيث يتم الحصول على معلومات عبر التجارب السابقة او الحالية، حيث تقسم البيانات الى قسمين ، القسم الأول يكون لها توزيع احتمالي اولي غير معلوماتي حيث نحصل على التوزيع اللاحق للعينة الأولى وذلك عبر دمجها مع دالة الأماكن الأعظم للعينة الأولى يتم

أستعمل هذا التوزيع كتوزيع احتمالي أولي للمعلمة الثانية ، ومن ثم توظف هذه المعلمة التي تم الحصول عليها من التجربة قيد الدراسة ليتم صياغتها بشكل دالة الأماكن الأعظم من أجل الحصول على توزيع لاحق مناسب ومنه يمكن الحصول على مقدرات بيز للمعلمة.

#### 2-7-1-4 دالة الكثافة لأحتمالية الأولية المرافقة الطبيعية: [14] [11]

### (Conjugate prior p.d.f)

وهي من أكثر الدوال استعمالاً بالمقارنة مع الدوال التي تم ذكرها سابقاً لأنها دوال احتمالية معروفة ولما تتميز به هذه الدالة من صفات جيدة حيث تبنى بالاعتماد على دالة الأماكن الأعظم للمشاهدات بوصفها دالة بالمعلمة  $(\theta)$  إذ أن دالة الأماكن  $L(\theta|x)$  ودالة الكثافة الاحتمالية الأولية  $\pi(\theta)$  وكذلك دالة الكثافة الاحتمالية اللاحقة  $h(\theta|x)$  تتميز بأن لها الصيغة الدالية نفسها لكن بمعلمات مختلفة فضلاً عن كونها محددة وواضحة لذلك يفضل أستعمال مثل هكذا نوع من الدوال بدلاً عن الدوال الكثافة الاحتمالية الأولية غير المعلوماتية التي تم ذكرها سابقاً كونها دالة غير ملائمة ، ومن أكثر دوال الأولية المرافقة الطبيعية شيوعاً هي دوال الكثافة الاحتمالية المشتركة الأولية (طبيعي - كما).

#### 2-8 مقدر بيز القياسي المعلوماتي: [14] [11]

### (Standard Informative Bayesian Estimator)

يعتمد مقدر بيز القياسي على دالة التوزيع اللاحق في المعادلة (13 - 2) والتي يضم المعلومات السابقة عن المعلمة  $(\theta)$  ومشاهدات العينة الحالية  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  وبموجب نظرية بيز فإن التوزيع اللاحق للمعلمة  $(\theta)$  يمكن أن نحصل عليه بأستعمال صيغة بيز العكسية (Bayesian Inverse formula). ولأيجاد مقدر بيز القياسي يجب أستعمال إحدى دوال الخسارة (Loss Function) والتي تعد من الطرائق الجيدة للحكم على أداء المعلمة المقدره وهناك عدة أنواع من دوال الخسارة منها المتماثلة وغير المتماثلة وفي هذه الرسالة سيتم أستعمال دالة خسارة متماثلة (symmetric) وهي دالة الخسارة التربيعية (Squared error loss function (SEL)) ودالة خسارة غير متماثلة (Asymmetric) وهي دالة خسارة الانتروبي العامة (General Entropy Loss(EL)) في إيجاد مقدر بيز القياسي المعلوماتي وكما يأتي:

**2-8-1 مقدر بيز القياسي في ظل دالة خسارة تربيعية (SBSEL):** [26] [11]

**(Standard Bayesian Estimator under Squared Error Loss function)**

تعد دالة الخسارة التربيعية والتي تدعى ايضا بدالة خسارة مربع الخطأ (Squared Error Loss Function) من دوال الخسارة التماثلية (Symmetric) أي أن كمية الخسارة في دالة الخسارة للخطأ الموجب تساوي كمية الخسارة للخطأ السالب وبالاتجاه نفسه، ويكون مقدر بيز وفق دالة الخسارة التربيعية وحيدا ويجعل دالة الخسارة أصغر ما يمكن وهو ما يجعله مقبولا دائماً وتعرف دالة الخسارة التربيعية بالصيغة الآتية:

$$L_1(\hat{\theta}, \theta) = a_0(\hat{\theta} - \theta)^2 \quad (2 - 14)$$

أذ أن  $a_0$  هو ثابت موجب لا يؤثر في إيجاد مقدر بيز حيث يُحذف عند الاشتقاق لمقدر بيز بالنسبة لهذه الدالة فتصبح صيغة دالة الخسارة التربيعية بالشكل الآتي:

$$L_1(\hat{\theta}, \theta) = (\hat{\theta} - \theta)^2 \quad (2 - 15)$$

$$\text{Bayes Risk} = E(\hat{\theta} - \theta)^2$$

$$E(\hat{\theta} - \theta)^2 = \int_{\forall \theta} (\hat{\theta} - \theta)^2 h(\theta | \underline{x}) d\theta$$

$$E(\hat{\theta} - \theta)^2 = \int_{\forall \theta} (\hat{\theta}^2 - 2\theta \hat{\theta} + \theta^2) h(\theta | \underline{x}) d\theta$$

$$E(\hat{\theta} - \theta)^2 = \hat{\theta}^2 - 2\hat{\theta}E(\theta | \underline{x}) + E(\theta^2 | \underline{x}) \quad (2 - 16)$$

وباشتقاق طرفي المعادلة رقم (2-16) بالنسبة لـ  $\hat{\theta}$  ومساواة المشتقة بالصفر نحصل على :

$$\therefore \hat{\theta}_{\text{SBSEL}} = E(\theta | \underline{x}) \quad (2 - 17)$$

أذ إن:

$\theta$  : متجه المعلمات المراد تقديرها.

$\hat{\theta}$  : متجه المعلمات المقدرة.

$\hat{\theta}_{\text{SEL}}$  : متجه المعلمات المقدرة بموجب طريقة بيز القياسية في ظل دالة الخسارة التربيعية.

لذلك فإن مقدر بيز في ظل دالة الخسارة التربيعية التي يجعل دالة المخاطرة اقل ما يمكن والتي تمثل توقع دالة الخسارة هو التوقع الشرطي للمقدر.

ونلاحظ أن مقدر بيز القياسي  $\hat{\theta}_{SEL}$  للمعلمات  $\theta$  ما هو الا متوسط التوزيع اللاحق (Posterior mean) للمعلمة العشوائية  $(\theta)$  ، لذلك فان مقدر بيز القياسي لدالة البقاء هو التوقع الشرطي اللاحق لدالة البقاء اي أن :

$$\hat{S}_{SBSEL}(x_1, x_2, \dots, x_n) = E(S|x_1, x_2, \dots, x_n)$$

الآن نحتاج الى اعطاء التوزيعات الأولية للمعلمات المراد تقديرها  $(\theta, \alpha, \beta)$  ، وحسب ماتوفر للباحث من معلومات حول التوزيعات الأولية للمعلمات افترض أن التوزيعات الأولية لتلك المعلمات ستكون كالاتي:

$$\theta \sim \text{Gamma}(a_1, b_1)$$

$$\alpha \sim \text{Gamma}(a_2, b_2)$$

$$\beta \sim \text{Beta}(c, d)$$

وبذلك تكون دالة الكثافة الاحتمالية الاولية (Prior Distribution) لكل معلمة كالاتي:

$$\pi_1(\theta) \propto \frac{b_1^{a_1}}{\Gamma(a_1)} \theta^{a_1-1} e^{-b_1\theta}; \quad \theta > 0 \quad (2-18)$$

$$\pi_2(\alpha) \propto \frac{b_2^{a_2}}{\Gamma(a_2)} \alpha^{a_2-1} e^{-b_2\alpha}; \quad \alpha > 0 \quad (2-19)$$

$$\pi_3(\beta) \propto \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1}; \quad 0 < \beta < 1 \quad (2-20)$$

حيث يشير الرمز  $(\Gamma)$  لدالة كاما الاولي (Gamma Function) ويعبر عنها رياضيا بالصيغة الاتية :

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} \cdot d(x) = (n-1)! \quad (2-21)$$

لذلك فان التوزيع الاولي المشترك (Joint Prior) يكون كالاتي:

$$\pi_1(\theta)\pi_2(\alpha)\pi_3(\beta) \propto \frac{b_1^{a_1}}{\Gamma(a_1)} \theta^{a_1-1} e^{-b_1\theta} \frac{b_2^{a_2}}{\Gamma(a_2)} \alpha^{a_2-1} e^{-b_2\alpha} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1}$$

$$\pi(\theta, \alpha, \beta) \propto \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \theta^{a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-b_1\theta} e^{-b_2\alpha} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} \quad (2-22)$$

بالرجوع الى الباحث (Han) [22] فإن المعلمات  $(a_1, a_2, b_1, b_2, c, d)$  يمكن اختيارها بالشكل التي يضمن أن تكون دوال الكثافة الاحتمالية الأولية  $\pi_3(\beta), \pi_2(\alpha), \pi_1(\theta)$  متناقصة بالنسبة للمعلمات الأساسية المراد تقديرها وحيث أن المشتقة الاولى لدوال الكثافة الاحتمالية الأولية هي :

$$\frac{d\pi_1(\theta)}{d\theta} = \frac{b_1^{a_1}}{\Gamma(a_1)} \theta^{a_1-2} e^{-b_1\theta} (-b_1\theta + (a_1 - 1))$$

$$\frac{d\pi_2(\alpha)}{d\alpha} = \frac{b_2^{a_2}}{\Gamma(a_2)} \alpha^{a_2-2} e^{-b_2\alpha} (-b_2\alpha + (a_2 - 1))$$

$$\frac{d\pi_3(\beta)}{d\beta} = -(d + c - 2) (\beta - 1)^d (\beta - 1)^{c-3}$$

فان المعادلات (2-20)، (2-19)، (2-18) تكون متناقصة اذا تحقق الشرط التالي:

$$\left[ \frac{d\pi_1(\theta)}{d\theta}, \frac{d\pi_2(\alpha)}{d\alpha}, \frac{d\pi_3(\beta)}{d\beta} < 0 \right]$$

[  $0 < a_1, a_2, c, d, b_1, b_2 < 1$  ] و عندما [  $\theta, \alpha, \beta > 0$  ]

وقد اثبت الباحث (Berger, 1985) [12] أن قيم المعلمات الأساسية الكبيرة يقلل من دقة التقديرات البيزية لذلك يجب اختيار هذه القيم ضمن المجال  $0 < \theta, \alpha, \beta < C$  حيث ان C ثابت حقيقي يتم اختياره بالشكل التي لا يبتعد كثيراً عن قيم  $(a_1, a_2, c, d, b_1, b_2)$  ويكون قريباً من المعلمات  $(\theta, \alpha, \beta)$  لغرض المحافظة على حصانة المقدرات البيزية.

أقترح (Press(2001) [31] أستعمال قيم موجبة صغيرة جداً للمعلمات في التوزيع الاولي لذلك سنفترض أن:

$$a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = c = d = 0.1e^{-11}$$

وان دالة الأماكن للمشاهدات  $x_1, x_2, \dots, x_n$  تكتب بالشكل الآتي:

$$L = \prod_{i=1}^n f(x, \theta, \alpha, \beta) \\ = \prod_{i=1}^n \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} (\alpha + \beta x_i) e^{-\theta x_i}$$

$$= \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}} \quad \dots (2-23)$$

وان التوزيع المشتركة يكون بالشكل الآتي:

$$\pi(\theta, \alpha, \beta) \propto A \theta^{a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-a_1\theta} e^{-a_2\alpha} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}}$$

$$\pi(\theta, \alpha, \beta) \propto A \frac{\theta^{2n+a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-a_1\theta} e^{-a_2\alpha}}{(\alpha\theta + \beta)^n} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}} \quad \dots (2-24)$$

حيث ان:-

$$A = \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2} \Gamma(c+d)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\Gamma(c)\Gamma(d)}$$

وان دالة الكثافة الحدية لمشاهدات العينة تكون بالصيغة الآتية:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = A \int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} \frac{\theta^{2n+a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-a_1\theta} e^{-a_2\alpha} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}}}{(\alpha\theta + \beta)^n} d\theta d\alpha d\beta \quad \dots (2-25)$$

وحسب نظرية بيز فان دالة التوزيع اللاحق (Posterior pdf) للمعطيات  $(\theta, \alpha, \beta)$

يمكن أن نحصل عليه بأستعمال صيغة بيز العكسية بقسمة دالة التوزيع المشتركة على دالة الكثافة الحدية وكما يأتي:

$$h(\theta, \alpha, \beta | x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{f(\theta, \alpha, \beta, X_1, \dots, X_n)}{\iiint_{\theta, \alpha, \beta} f(\theta, \alpha, \beta, X_1, \dots, X_n) d\theta d\alpha d\beta}$$

$$= \frac{(\alpha\theta + \beta)^{-n} \theta^{2n+a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-a_1\theta} e^{-a_2\alpha} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}}}{\int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} (\alpha\theta + \beta)^{-n} \theta^{2n+a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-a_1\theta} e^{-a_2\alpha} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}} d\theta d\alpha d\beta} \quad \dots (2-26)$$

وبأستعمال دالة الخسارة التربيعية يمكن الحصول على مقدر بيز القياسي لدالة البقاء وكما يأتي:

$$\hat{S}_{SBSEL}(x_1, x_2, \dots, x_n) = E(S | x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$= \int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} S(x) h(\theta, \alpha, \beta | x_1, x_2, \dots, x_n) d\theta d\alpha d\beta$$

$$= \int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} \left( \left[ 1 + \frac{\theta \beta x}{\theta \alpha + \beta} \right] e^{-\theta x} \left( \frac{(\alpha\theta + \beta)^{-n} \theta^{2n+a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-a_1\theta} e^{-a_2\alpha} \beta^{c-1}}{\int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} (\alpha\theta + \beta)^{-n} \theta^{2n+a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-a_1\theta} e^{-a_2\alpha} \beta^{c-1} \right. \right.$$

$$\left. \left. \frac{(1-\beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}}}{(1-\beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}} d\theta d\alpha d\beta} \right) \right) d\theta d\alpha d\beta \quad \dots (2-27)$$

ونلاحظ بان المعادلة (2-27) معادلات غير خطية (Non-Linear) وغير محكمة نظرياً

ولايمكن أن تحل بالطرائق التحليلية الاعتيادية لذلك لابد من أستعمال أسلوب تقريبي لحساب هذه

التكاملات المعقدة وقد تم أستعمال تقريب ليندلي (Lindely Approximation) لأيجاد مقدر بيز

القياسي لدالة البقاء في ظل دالة الخسارة التربيعية.

2-8-2 مقدر بيز القياسي المعلوماتي في ظل دالة خسارة إنتروبي العامة SBEL: [47] [38] [34]

(Standard Informative Bayesian Estimator under General Entropy Loss)

في بعض الاحيان لا يتحقق شرط دوال الخسارة المتماثلة والتي تفترض بأن الخسارة هي نفسها بأي إتجاه، لذا نلجأ الى أستعمال دوال خسارة غير متماثلة، فقد يكون الخطأ بالاتجاه الموجب أكبر من الخطأ في الإتجاه السالب وبالعكس. ومن دوال الخسارة غير المتماثلة دالة خسارة الانتروبي العامة.

تعرف دالة الخسارة الانتروني العامة (EL) General Entropy Loss بالصيغة الآتية:

$$L_2(\hat{\theta}, \theta) = c \left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right)^q - q \log\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right) - 1 \quad ; q \neq 0 \quad \dots (2 - 28)$$

q:دالة الشكل

أذ أن c هو ثابت موجب نفرض بانه يساوي واحد لأنه لا يؤثر في إيجاد مقدر بيز حيث يُحذف عند الأشتقاق لمقدر بيز بالنسبة لهذه الدالة ، فتصبح صيغة دالة الانتروبي العامة بالشكل الآتي:

$$L_2(\hat{\theta}, \theta) = \left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right)^q - q \log\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right) - 1 \quad ; q \neq 0 \quad \dots (2 - 29)$$

لذلك فإن مقدر بيز في ظل دالة الخسارة انتروبي العامة التي يجعل دالة المخاطرة اقل ما يمكن والتي تمثل توقع دالة الخسارة بعد إيجاد المشتقة الاولى بالنسبة للمعلمة المراد تقديرها ومساواتها بالصفر نحصل على:

$$\begin{aligned} \text{Risk} &= E\left(\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right)^q - q \log\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right) - 1\right) \\ &= \int_{\forall \theta} \left( \left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right)^q - q \log\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right) - 1 \right) h(\theta, \alpha, \beta | x_1, x_2, \dots, x_n) d\theta \\ &= \int_{\forall \theta} \left( \left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right)^q - q \log(\hat{\theta}) + q \log(\theta) - 1 \right) h(\theta, \alpha, \beta | x_1, x_2, \dots, x_n) d\theta \\ &= \hat{\theta}^q \hat{\theta} E(\theta^{-q} | \underline{x}) - q \log(\hat{\theta}) + q E(\log(\theta) | \underline{x}) - 1 \quad \dots (2 - 30) \end{aligned}$$

وبالأشتقاق الجزئي للمعادلة (2-30) بالنسبة  $\hat{\theta}$  ومساواة المشتقة بالصفر نحصل على:

$$\text{Risk} = q\hat{\theta}^{q-1}qE(\hat{\theta}^{-q}) - q\hat{\theta}^{-1} = 0 \quad \dots (2 - 31)$$

لذلك فإن مقدر بيز في ظل دالة الخسارة انتروبي العامة بعد اخذ الجذر ذي القوة  $q$  لطرفي المعادلة (2 - 31) نحصل على الآتي:

$$\hat{\theta}_{\text{SBEL}} = [E(\hat{\theta}^{-q}|\underline{x})]^{-\frac{1}{q}} \quad \dots (2 - 32)$$

ومن الملاحظ أن مقدر بيز وفق دالة خسارة الانتروبي العامة عندما ( $q = -1$ ) يساوي مقدر بيز بأستعمال دالة الخسارة التربيعية.

وبأستعمال دالة خسارة انتروبي العامة يمكن الحصول على مقدر بيز القياسي لدالة البقاء في ظل دالة خسارة انتروبي العامة وكما يأتي:

$$\begin{aligned} \hat{S}_{\text{SBEL}}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= [E(S(x)^{-q}|\underline{x})]^{-\frac{1}{q}} \\ &= \left[ \int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} S(x)^{-q} h(\theta, \alpha, \beta | x_1, x_2, \dots, x_n) d\theta d\alpha d\beta \right]^{-\frac{1}{q}} \\ &= \left[ \int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} \left( \left[ 1 + \frac{\theta\beta x}{\theta\alpha + \beta} \right] e^{-\theta x} \right)^{-q} \left( \frac{(\alpha\theta + \beta)^{-n} \theta^{2n+a_1-1} e^{-a_1\theta} e^{-a_2\alpha} \beta^{c-1}}{\int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} (\alpha\theta + \beta)^{-n} \theta^{2n+a_1-1} e^{-a_1\theta} e^{-a_2\alpha} \beta^{c-1}} \cdot \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{\alpha^{a_2-1} (1-\beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta x}}{\alpha^{a_2-1} (1-\beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta x}} d\theta d\alpha d\beta \right) \right]^{-\frac{1}{q}} \quad (2 - 33) \end{aligned}$$

والمعادلة (2 - 33) تمثل معادلة غير خطية (Non-Linear) تم أستعمال تقريب ليندلي (Lindely Approximation) لأيجاد مقدر بيز القياسي لدالة البقاء في ظل دالة الانتروبي العامة.

## 2-9 مقدر توقع بيز: (Estimator Expected Bayesian) [20] [27] [30]

قدمت هذه الطريقة من قبل الباحث (Han) في عام (2006) والتي تفترض بان المعلمات الفوقية (Hyper-parameters) في التوزيع الاولي هي عبارة عن متغيرات عشوائية لها دالة كثافة احتمالية حيث يتم التخلص من مشكلة تعيين قيم افتراضية لها كما في طريقة بيز القياسية يتم التقدير بطريقة توقع بيز وفق الخطوات الآتية:

1. اختيار دالة كثافة احتمالية اولية تتضمن معلمات فوقية يتم اختيارها بالشكل التي يجعل دالة الكثافة الاحتمالية الاولية متناقصة بالنسبة للمعلمة المراد تقديرها وتكون دوال الكثافة الاحتمالية للمعلمات الفوقية كالآتي:

$$\pi(a_1) \propto \frac{1}{c} \quad ; 0 < a_1 < c \quad \dots (2 - 34)$$

$$\pi(a_2) \propto \frac{1}{c_1} \quad ; 0 < a_2 < c_1 \quad \dots (2 - 35)$$

$$\pi(b_1) \propto \frac{1}{c_2} \quad ; 0 < b_1 < c_2 \quad \dots (2 - 36)$$

$$\pi(b_2) \propto \frac{1}{c_3} \quad ; 0 < b_2 < c_3 \quad \dots (2 - 37)$$

$$\pi(c) \propto \frac{1}{c_4} \quad ; 0 < c < c_4 \quad \dots (2 - 38)$$

$$\pi(d) \propto \frac{1}{c_5} \quad ; 0 < d < c_5 \quad \dots (2 - 39)$$

لذلك فان التوزيع الأولي المشترك للمعلمات الفوقية يكون كالآتي:

$$\pi^*(a_1, a_2, b_1, b_2, c, d) \propto \frac{1}{c c_1 c_2 c_3 c_4 c_5} \quad \dots (2 - 40)$$

2. أيجاد مقدر توقع بيز كالتالي:

$$\hat{S}_{EBSEL} = \int_{a_1 a_2 c d b_1 b_2} \hat{S}_{SEL \text{ or } EL} \pi^*(a_1, a_2, b_1, b_2, c, d) da_1 da_2 dc d db_1 db_2 \quad (2 - 41)$$

أذ إن:

دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة للمعلمات في التوزيعات الاحتمالية الاولية التي تستعمل لدراسة تأثير التوزيعات الاولية المختلفة على مقدر توقع بيز.

$\hat{S}_{SEL \text{ or } EL}$ : مقدر بيز القياسي في ظل دالة الخسارة التربيعية او دالة الخسارة انتروبي العامة.

$\hat{S}_{EB}$ : مقدر توقع بيز.

**2-9-1 مقدر توقع بيز في ظل دالة خسارة تربيعية EBSEL:** [29] [11]

**(Expected Bayesian Estimator Under Squared Error Loss)**

وفق دالة الكثافة الاحتمالية الاولية في المعادلة (2 - 40) وبأستعمال صيغة توقع بيز في المعادلة رقم (2 - 41) نحصل على مقدرات توقع بيز لدالة البقاء توزيع ليندلي ذي ثلاث معلمات في ظل دالة خسارة تربيعية كما يأتي:

$$\begin{aligned} \hat{S}_{EBSEL} &= \int_{a_1 a_2 c, d} \int_{b_1, b_2} \hat{S}_{SBSEL} \pi^*(a_1, a_2, b_1, b_2, c, d) da_1 da_2, dcd dd db_1 db_2 \\ &= \int_{a_1 a_2 cd} \int_{b_1, b_2} \left( \int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} \left( 1 + \frac{\theta \beta x}{\theta \alpha + \beta} \right) e^{-\theta x} \left[ \frac{(\alpha \theta + \beta)^{-n} \theta^{2n+a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-a_1 \theta} e^{-a_2 \alpha}}{\int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} (\alpha \theta + \beta)^{-n} \theta^{2n+a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-a_1 \theta} e^{-a_2 \alpha}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{\beta^{c-1} (1 - \beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n \theta \bar{x}}}{\beta^{c-1} (1 - \beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n \theta \bar{x}}} d\theta d\alpha d\beta \right] \right) d\theta d\alpha d\beta \\ &\quad \frac{1}{c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c} d d d a_1 da_2 d b_1 db_2 dcd d \end{aligned} \quad \dots (2 - 42)$$

أذن:

$\hat{S}_{SEL}$  : مقدر بيز القياسي في ظل دالة خسارة تربيعية.

كأن المعادلة (2 - 42) تمثل معادلة غير خطية سيتم أستعمال تقريب ليندلي لأيجاد مقدر توقع بيز لدالة البقاء في ظل دالة خسارة تربيعية.

**2-9-2 مقدر توقع بيز في ظل دالة خسارة انتروبي العامة EBEL:** [47] [38] [34]

**(Expected Bayesian Estimator Under General Entropy Loss)**

وفق دوال الكثافة الاحتمالية الاولية في المعادلة (2-40) وبأستعمال صيغة توقع بيز في المعادلة رقم (2- 41) نحصل على مقدرات توقع بيز لدالة البقاء لتوزيع ليندلي ذي الثلاث معلمات وفي ظل دالة خسارة انتروبي العامة كما يأتي:

$$\begin{aligned} \hat{S}_{EBEL} &= \int_{a_1 a_2 cd} \int_{b_1, b_2} \hat{S}_{SBEL} \pi^*(a_1, a_2, b_1, b_2, c, d) da_1 da_2, dcd d db_1 db_2 \\ &= \int_{a_1 a_2 cd} \int_{b_1, b_2} \left( \int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} \left[ 1 + \frac{\theta \beta x}{\theta \alpha + \beta} \right]^{-q} e^{-\theta x} \left[ \frac{(\alpha \theta + \beta)^{-n} \theta^{2n+a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-a_1 \theta} e^{-a_2 \alpha}}{\int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} (\alpha \theta + \beta)^{-n} \theta^{2n+a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-a_1 \theta} e^{-a_2 \alpha}} \right. \right. \end{aligned}$$

$$\frac{\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}}}{\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}} d\theta d\alpha d\beta} \Bigg]^{-1} \cdot \frac{1}{c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c} d a_1 d a_2 d b_1 d b_2 d c d \quad (2-43)$$

أذ إن:

$\hat{S}_{EL}$  : مقدر بيز القياسي في ظل دالة خسارة إنتروبي العامة.

ونلاحظ أن المعادلة (2-43) معادلة غير خطية (Non-Linear) بمتغيرات عديدة يستعمل لحلها طرائق التحليل العددية لذلك سيتم أستعمال تقريب ليندلي (Lindely Approximation) لأيجاد مقدر توقع بيز لدالة البقاء في ظل دالة الانتروبي العامة .

### 2-10 مقدر بيز الهرمي: (Hierarchical Bayesian Estimator): [21] [20] [15]

تعتمد هذه الطريقة على فكرة بأن هناك عدة مستويات للمعلومات الفوقية (Hyperparameters) تستعمل لاستخلاص المعلومات الاولية حول المعلمات المراد تقديرها. قدمت هذه الطريقة من قبل الباحثان ليندلي وسميث (Lindley & Smith) في عام (1972) بطرح فكرة التوزيع الاولي الهرمي بافتراض أن التوزيع الاولي يمكن تكيفه بالنسبة للمعلمات الفوقية بحيث يكون مقدر بيز بالاستناد على هذا التوزيع لا يعتمد على المعلمات الفوقية وذلك عن طريق افتراض توزيع احتمالي للمعلمات الفوقية.

بالنظر الى دالة الكثافة الاحتمالية الاولية المشتركة  $\pi(\theta, \alpha, \beta)$  نجدها تعتمد على المعلمات الفوقية  $(a_1, a_2, b_1, b_2, c, d)$  والتي كما اقترح الباحثان (Lindley & Smith) من خلال تكيف توزيع احتمالي اولي للمعلمات الفوقية يمكن استخلاص المعلومات الاولية منها من دون الاعتماد على البيانات الحالية، وتكون دوال الكثافة الاحتمالية للمعلمات الفوقية كما هي في طريقة توقع بيز ويتم أيجاد مقدر بيز الهرمي وفقاً للخطوات الآتية:

1. أيجاد التوزيع الاولي للمعلمات المراد تقديرها بعد التخلص من تأثير المعلمات الفوقية كالاتي:

$$\pi(\theta, \alpha, \beta) = \int_V (d a_1 a_2 b_1 b_2 c) \pi(\theta | a_1, a_2, b_1, b_2, c, d) \pi(a_1, a_2, b_1, b_2, c, d) d d a_1 d a_2 d b_1 d b_2 d c \dots \quad (2-44)$$

أذ إن:

$\pi(\theta, \alpha, \beta)$  : التوزيع الاولي للمعلمات المراد تقديرها بعد التخلص من تأثير المعلمات الفوقية.

$\pi(\theta | a_1, a_2, b_1, b_2, c, d)$  : التوزيع الاولي للمعلمات الفوقية للتوزيع.

$\pi(a_1, a_2, b_1, b_2, c, d)$  : التوزيع الاولي للمعلمات الفوقية كما في طريقة توقع بيز.

2. نعوض التوزيع الاولي من المعادلة (2-44) في صيغة بيز العكسية في المعادلة (2-13) للحصول على التوزيع اللاحق الهرمي وكالاتي:

$$h^*(\theta, \alpha, \beta | x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\pi(\theta, \alpha, \beta) \prod_{i=1}^n f(x_i | \theta)}{\int_{\forall \theta} \pi(\theta, \alpha, \beta) \prod_{i=1}^n f(x_i | \theta) d\theta} \quad \dots (2 - 45)$$

أيجاد مقدر بيز الهرمي لدالة البقاء لتوزيع ليندلي ذي الثلاث معلمات في ظل دالة الخسارة كالاتي:

$$\hat{S}_{HB} = \int_{\forall \theta} S(x) h^*(\theta, \alpha, \beta | x_1, x_2, \dots, x_n) d\theta d\alpha d\beta \quad (2 - 46)$$

### 2-10-1 مقدر بيز الهرمي في ظل دالة خسارة تربيعية HBELS: [29] [11]

#### (Hierarchical Bayesian Estimator Under Squared Error Loss)

بأستعمال صيغة بيز الهرمي في الصيغة (2-44) وكذلك التوزيع اللاحق المشترك الهرمي في الصيغة (2-46) نحصل على مقدر بيز الهرمي لدالة البقاء لتوزيع ليندلي في ظل دالة الخسارة التربيعية وكما يلي:

$$\pi(\theta, \alpha, \beta) = \int_0^c \int_0^{c_1} \int_0^{c_2} \int_0^{c_3} \int_0^{c_4} \int_0^{c_5} \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\Gamma(a_1) \Gamma(a_2)} \theta^{a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-b_1 \theta} e^{-b_2 \alpha}$$

$$\frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} \left[ \frac{1}{cc_1 c_2 c_3 c_4 c_5} \right] da_1 da_2 d b_1 db_2 dcd d$$

$$\pi(\theta, \alpha, \beta) = \frac{1}{cc_1 c_2 c_3 c_4 c_5} \int_0^c \int_0^{c_1} \int_0^{c_2} \int_0^{c_3} \int_0^{c_4} \int_0^{c_5} \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\Gamma(a_1) \Gamma(a_2)} \theta^{a_1-1} e^{-b_1 \theta}$$

$$\alpha^{a_2-1} e^{-b_2 \alpha} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} da_1 da_2 d b_1 db_2 dcd d \dots (2 - 47)$$

نعوض التوزيع الهرمي اللولي من المعادلة (2-47) في معادلة (2-45) لنحصل على التوزيع الهرمي اللاحق وكالاتي:

$$h^*(\theta, \alpha, \beta | x_1 \dots x_n) = \frac{\frac{1}{cc_1 c_2 c_3 c_4 c_5} \int_0^c \int_0^{c_1} \int_0^{c_2} \int_0^{c_3} \int_0^{c_4} \int_0^{c_5} \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\Gamma(a_1) \Gamma(a_2)}}{\frac{1}{cc_1 c_2 c_3 c_4 c_5} \int_{(\theta, \alpha, \beta)} \int_0^c \int_0^{c_1} \int_0^{c_2} \int_0^{c_3} \int_0^{c_4} \int_0^{c_5} \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\Gamma(a_1) \Gamma(a_2)}}$$

$$\frac{\theta^{a_1-1} e^{-b_1 \theta} \alpha^{a_2-1} e^{-b_2 \alpha} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} da_1 da_2 d b_1 db_2 dcd d}{\theta^{a_1-1} e^{-b_1 \theta} \alpha^{a_2-1} e^{-b_2 \alpha} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} da_1 da_2 d b_1 db_2 dcd d}$$

$$\frac{\left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta}\right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta}\right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}} d\theta d\alpha d\beta} \dots (2-48)$$

فان مقدر بيز الهرمي لدالة البقاء لتوزيع ليندلي ذي الثلاث معلمات في ظل دالة الخسارة التربيعية كالآتي:

$$\hat{S}_{HBEL} = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \left[ 1 + \frac{\theta\beta x}{\alpha\theta + \beta} \right] e^{-\theta x} \frac{\frac{1}{c_1 c_2 c_3 c_4 c_5} \int_0^c \int_0^{c_1} \int_0^{c_2} \int_0^{c_3} \int_0^{c_4} \int_0^{c_5} \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}}{\frac{1}{c_1 c_2 c_3 c_4 c_5} \int_{(\theta, \alpha, \beta)} \int_0^c \int_0^{c_1} \int_0^{c_2} \int_0^{c_3} \int_0^{c_4} \int_0^{c_5} \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}} d\theta d\alpha d\beta$$

$$\frac{\theta^{a_1-1} e^{-b_1 \theta} \alpha^{a_2-1} e^{-b_2 \alpha} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} da_1 da_2 d b_1 db_2 dcd d}{\theta^{a_1-1} e^{-b_1 \theta} \alpha^{a_2-1} e^{-b_2 \alpha} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} da_1 da_2 d b_1 db_2 dcd d}$$

$$\left. \frac{\left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta}\right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta}\right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}} d\theta d\alpha d\beta} \right] d\theta d\alpha d\beta \dots (2-49)$$

أن المعادلة (2-49) معادلة غير خطية (Non-Linear) ولا يمكن إيجاد حلها نظرياً ولأيمكن أن تحل بالطرائق التحليلية الاعتيادية لذلك لابد من أستعمال أسلوب تقريبي لحساب هذه التكاملات المعقدة لذلك سيتم أستعمال تقريب ليندلي (Lindely Approximation) لأيجاد مقدر بيز الهرمي لدالة البقاء في ظل دالة خسارة تربيعية.

## 2-10-2 مقدر بيز الهرمي في ظل دالة خسارة انتروبي العامة: HBELs [47] [38]

[34]

### (Hierarchical Bayesian Estimator Under General Entropy Loss)

بأستعمال معادلة بيز الهرمي (2-44) والتوزيع اللاحق المشترك الهرمي (2-46) نحصل على مقدر بيز الهرمي لدالة البقاء لتوزيع ليندلي في ظل دالة الخسارة التربيعية وكما يلي:

$$\hat{S}_{HBEL} = \left[ \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \left[ 1 + \frac{\theta\beta x}{\theta\alpha + \beta} \right] e^{-\theta x} \right]^{-q} \frac{\frac{1}{cc_1c_2c_3c_4c_5} \int_0^c \int_0^{c_1} \int_0^{c_2} \int_0^{c_3} \int_0^{c_4} \int_0^{c_5} \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}}{\frac{1}{cc_1c_2c_3c_4c_5} \int_{(\theta,\alpha,\beta)} \int_0^c \int_0^{c_1} \int_0^{c_2} \int_0^{c_3} \int_0^{c_4} \int_0^{c_5} \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}}$$

$$\frac{\theta^{a_1-1} e^{-b_1\theta} \alpha^{a_2-1} e^{-b_2\alpha} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} da_1 da_2 d b_1 db_2 dcd d}{\theta^{a_1-1} e^{-b_1\theta} \alpha^{a_2-1} e^{-b_2\alpha} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} da_1 da_2 d b_1 db_2 dcd d}$$

$$\left[ \frac{\left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta+\beta}\right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha+\beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta+\beta}\right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha+\beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}} d\theta d\alpha d\beta \right]^{-\frac{1}{q}} \dots (2-50)$$

ونلاحظ أن المعادلة (2-50) تمثل معادلة غير خطية (Non-Linear) ولا يمكن إيجاد حلها نظرياً ولأمكن أن تحل بالطرائق التحليلية الاعتيادية لذلك لابد من استعمال أسلوب تقريبي لحساب هذه التكاملات المعقدة لذلك سيتم استعمال تقريب ليندلي (Lindely Approximation) لأيجاد مقدر بيز الهرمي لدالة البقاء في ظل دالة خسارة انتروبي العامة.

## 2-11 اختبار حسن المطابقة: [1] [4] (GoodNess of Fit test)

لغرض معرفة أن البيانات الحقيقية تتبع التوزيع المدروس (ليندلي ذي الثلاث معلمات) فقد تم استعمال اختبار حسن المطابقة (Good Ness of Fit) وحسب الفرضية الاحصائية الآتية:

$H_0$ : The data have Three Parameters Lindley Distribution

$H_1$ : The data dont have Three Parameters Lindley Distribution

وقدمت توضح نتائج اختبار فرضية حسن المطابقة الفرضية بأستعمال اختبار Chi-Squared التي تكون صيغته العامة:

$$\chi^2 = \sum \frac{(D_i - E_i)^2}{(E_i)} \sim \chi^2_{(k-1)} \dots (2-51)$$

وان خطوات احتساب احصاءة اختبار حسن المطابقة  $\chi^2_C$  كالآتي:

1. تبويب البيانات الى فئات وان  $D_i$  تمثل التكرارات المشاهدة الحقيقية.
2. حساب احتمالات تكرارات المشاهدة الحقيقية  $P_i$  عن طريق دالة الكثافة التجميعية (C. D. F).

3. حساب التكرار المتوقع  $E_i$  لكل تكرار مشاهد  $D_i$  أن  $E_i = P_i \sum_{i=1}^n D_i$  وهي تمثل القيمة المتوقعة التي تم احتسابها من التوزيع النظري المستعمل .
4. احتساب احصاء الاختبار  $\chi^2$  عند درجة حرية  $(K - c)$  وذلك بأستعمال الدالة خوارزمية جاهزة في برنامج (MatLab) ، وبخوارزمية كتبت في البرنامج والتي تم فيها تعريف دالة التوزيع التراكمية النظرية للتوزيع (cdf) ومقارنتها مع دالة التوزيع التراكمية المقدر للبيانات الحقيقية (cdf) أن  $k$  تمثل عدد الفئات التي يتم طرحها من درجة الحرية وبما اننا استعملنا تقديرات الثلاث معلمات فان درجة الحرية تصبح  $(k - 3 - 1 = K - 4)$  في حالة توزيع ليندلي ذي الثلاث معلمات.
5. يتم قبول فرضية العدم اذا كانت قيمة إحصاء الاختبار المحسوبة  $(\chi_c^2)$  اقل من قيمة مربع كاي الجدولية  $(\chi_{\text{tabl}}^2)$ .

## 2-12-1 معايير المقارنة والدقة: (Criteria comparing and accuracy) [1] [10] [4]

تم أستعمال المعايير الأتية لغرض المقارنة بين توزيع ليندلي ذي الثلاث معلمات وتوزيع ليندلي بمعلمتين لبيان أيهما أفضل بالنسبة للبيانات الحقيقية التي ستطبق في الجانب العملي من هذه الرسالة وكما يأتي:

### 2-12-1 اختبار أكايكي AIC: ( Akaike Test )

أن الصيغة العامة لأحصاء معيار أكايكي (AIC) كما يلي:

$$AIC = -2L(\hat{\theta} \setminus X) + 2P \quad \dots (2 - 52)$$

P : عدد المعلمات في دالة التوزيع الاحتمالية النظرية.

$L(\hat{\theta} \setminus X)$ : لوغاريتم دالة الامكان (Log Likelihood Function) لمشاهدات بيانات العينة.

### 2-12-2 معلومة اكايكي البيزي BIC: (Bayesian Akaike Test)

إحدى معايير اختبار حسن المطابقة ويرمز له اختصار (BIC) وأن صيغته العامة تكون كما يلي:

$$BIC = -2L(\hat{\theta} \setminus x) + P \text{Log}(n) \quad \dots (2 - 53)$$

$L(\hat{\theta} \setminus X)$ : تمثل لوغاريتم دالة الامكان (Log Likelihood Function) لمشاهدات بيانات العينة.

$P$ : عدد المعلمات في دالة التوزيع الاحتمالية النظرية.

$n$ : حجم العينة.

### 2-12-3 اختبار أكايكي المتسق CAIC :

#### (Consistent Akaike Information Criterion)

أن الصيغة لاختبار حسن المطابقة أكايكي المتسق (CAIC) هي كما يلي:

$$CAIC = -2L(\hat{\theta} \setminus x) + \frac{2nP}{n - P - 1} \quad \dots (2 - 54)$$

أذ أن:

$n$ : حجم العينة.

$P$ : عدد المعلمات في دالة التوزيع الاحتمالية النظرية.

### 2-13 تقريب ليندلي : [29][33] (Lindley Approximation)

وضع الباحث (Lindley) في عام (1980) حل تقريبي للتكامل الناتج من أستعمال طريقة مقدر بيز (Bayesian estimator) وحسب أسلوب الباحث ليندلي يعاد صياغة توقع الدالة السابقة حسب الصيغة الآتية :

$$E[u(\underline{\theta}) \setminus x] = \frac{\int_{\Omega} u(\underline{\theta}) e^{L(\underline{\theta}) + \rho(\underline{\theta})} d\underline{\theta}}{\int_{\Omega} e^{L(\underline{\theta}) + \rho(\underline{\theta})} d\underline{\theta}} \quad \dots (2 - 55)$$

أذ إن:

$L(\underline{\theta})$ : لوغاريتم دالة الأمكان الاعظم.

$\rho(\underline{\theta})$ : لوغاريتم دالة التوزيع السابق للمعلمة  $(\underline{\theta})$ .

$u(\underline{\theta})$ : اي دالة للمعلمة  $(\underline{\theta})$ .

وقد أقترح الباحث ليندلي الصيغة الآتية لحل التكاملات الناتجة من صيغة بيز وكالاتي:

$$E[u(\underline{\theta}) / x] = u(\hat{\theta}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m [u_{ij} + 2u_i \rho_j] \sigma_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m L_{ijkl} u_l \sigma_{ij} \sigma_{kl} \dots (2 - 56)$$

أذ ان:

$m$ : تمثل عدد المعلمات ،  $(m=3)$ .

$u(\hat{\theta})$ : مقدر الأماكن الأعظم لدالة البقاء.

وأن:

$$L_{ijk} = \frac{\partial^3 L(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}_1 \partial \underline{\theta}_2 \partial \underline{\theta}_3} \Big|_{\underline{\theta}=\hat{\theta}} \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (2 - 57)$$

$$\partial \underline{\theta}_1 = \partial \theta$$

$$\partial \underline{\theta}_2 = \partial \alpha$$

$$\partial \underline{\theta}_3 = \partial \beta$$

$$\sigma_{ij} = - \left( \frac{\partial^2 L(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}_i \partial \underline{\theta}_j} \Big|_{\underline{\theta}=\hat{\theta}} \right)^{-1} \quad \theta_1 = \theta; \theta_2 = \alpha; \theta_3 = \beta, i, j = 1, 2, 3 \quad (2 - 58)$$

$$\rho = \text{Log}(\pi(\underline{\theta})) = \text{Log} \left( \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\Gamma(a_1) \Gamma(a_2)} \theta^{a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-b_1 \theta} e^{-b_2 \alpha} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c) \Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} \right) \dots (2 - 59)$$

$$\rho_i = \frac{\partial \log(\rho)}{\partial \underline{\theta}_i} \quad i = 1, 2, 3 \quad \dots (2 - 60)$$

$$u_i = \frac{\partial u(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}_i}; \quad i = 1, 2, 3 \quad \dots (2 - 61)$$

$$u_{ij} = \frac{\partial u^2}{\partial \underline{\theta}_i \partial \underline{\theta}_j} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \dots (2 - 62)$$

وللحصول على مقدر بيز القياسي لدالة البقاء  $\hat{S}(x)$  في ظل دالة خسارة تربيعية وعلى فرض ان:



$$u_{33} = \frac{\partial^2 u_{\theta\alpha\beta} \left( \left[ 1 + \frac{\theta\beta x}{\alpha\theta + \beta} \right] e^{-\theta x} \left( \frac{(\alpha\theta + \beta)^{-n} \theta^{2n+a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-a_1\theta} e^{-a_2\alpha\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}}{\int_{\theta\alpha\beta} (\alpha\theta + \beta)^{-n} \theta^{2n+a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-a_1\theta} e^{-a_2\alpha\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}} d\theta d\alpha d\beta} \right) \right)}{(\partial\beta)^2} d\theta d\alpha d\beta$$

$$L_{123} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\theta \partial\alpha \partial\beta}$$

$$L_{132} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\theta \partial\beta \partial\alpha}$$

$$L_{213} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\alpha \partial\theta \partial\beta}$$

$$L_{231} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\alpha \partial\beta \partial\theta}$$

$$L_{312} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\beta \partial\theta \partial\alpha}$$

$$L_{321} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\beta \partial\alpha \partial\theta}$$

$$L_{112} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\theta \partial\theta \partial\alpha}$$

$$L_{332} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\theta \partial\theta \partial\beta}$$

$$L_{323} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\beta \partial\alpha \partial\beta}$$

$$L_{233} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\alpha \partial\beta \partial\beta}$$

$$L_{113} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\theta \partial\theta \partial\beta}$$

$$L_{131} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\theta \partial\beta \partial\theta}$$

$$L_{311} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\beta \partial\theta \partial\theta}$$

$$L_{233} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\alpha \partial\beta \partial\beta}$$

$$L_{323} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\beta \partial\alpha \partial\beta}$$

$$L_{322} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\beta \partial\alpha \partial\alpha}$$

$$L_{333} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\beta \partial\beta \partial\beta}$$

$$\rho_1 = \frac{\partial \text{Log} \left( \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \theta^{a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-b_1\theta} e^{-b_2\alpha} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} \right)}{\partial\theta}$$

$$\rho_2 = \frac{\partial \text{Log} \left( \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \theta^{a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-b_1\theta} e^{-b_2\alpha} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} \right)}{\partial\alpha}$$

$$\rho_3 = \frac{\partial \text{Log} \left( \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \theta^{a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-b_1\theta} e^{-b_2\alpha} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} \right)}{\partial\beta}$$

$$\sigma_{11} = - \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\theta \partial\theta} \right)^{-1}$$

$$\sigma_{12} = - \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\theta \partial\alpha} \right)^{-1}$$

$$\sigma_{13} = - \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\theta \partial\beta} \right)^{-1}$$

$$\sigma_{21} = - \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\beta \partial\theta} \right)^{-1}$$

$$\sigma_{22} = - \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\alpha \partial\alpha} \right)^{-1}$$

$$\sigma_{23} = - \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\alpha \partial\beta} \right)^{-1}$$

$$\sigma_{32} = - \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\beta \partial\alpha} \right)^{-1}$$

$$\sigma_{31} = - \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\beta \partial\theta} \right)^{-1}$$

$$\sigma_{33} = - \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\beta \partial\beta} \right)^{-1}$$

فان المعادلة (2-56) تكون كالآتي:

$$\begin{aligned} \hat{S}_{SBSEL} = & \hat{S}_{mle} + u_1\rho_1\sigma_{11} + u_1\rho_2\sigma_{12} + +u_1\rho_3\sigma_{13} + 0.5L_{231}u_1\sigma_{23}\sigma_{11} \\ & + 0.5L_{233}u_1\sigma_{23}\sigma_{31} + 0.5L_{311}u_1\sigma_{31}\sigma_{11} + 0.5L_{312}u_1\sigma_{31}\sigma_{21} \\ & + 0.5L_{313}u_1\sigma_{31}^2 + 0.5L_{321}u_1\sigma_{32}\sigma_{11} + 0.5L_{323}u_1\sigma_{32}\sigma_{31} \\ & + 0.5L_{331}u_1\sigma_{33}\sigma_{13} + 0.5L_{332}u_1\sigma_{33}\sigma_{21} + 0.5L_{333}u_1\sigma_{33}\sigma_{31} \\ & + 0.5L_{111}u_1\sigma_{11}^2 + 0.5L_{112}u_1\sigma_{11}\sigma_{21} \\ & + 0.5L_{113}u_1\sigma_{11}\sigma_{31} \end{aligned} \quad \dots (2-64)$$

وللحصول على مقدر بيز القياسي لدالة البقاء  $S(x)$  في ظل دالة انتروبي العامة وعلى فرض أن

$$u(\theta; \alpha; \beta) = \left[ \int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} \left[ 1 + \frac{\theta\beta x}{\theta\alpha + \beta} \right] e^{-\theta x} \right]^{-q} \frac{(\alpha\theta + \beta)^{-n} \theta^{2n+a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-a_1\theta} e^{-a_2\alpha}}{\int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} (\alpha\theta + \beta)^{-n} \theta^{2n+a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-a_1\theta} e^{-a_2\alpha}}$$

$$\frac{\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}}}{\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}} d\theta d\alpha d\beta} \left. d\theta d\alpha d\beta \right]^{-\frac{1}{q}} \dots (2-65)$$

بأشتقاق المعادلة (2-65) فان :

$$u_1 = \frac{\partial u \left[ \int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} \left[ 1 + \frac{\theta \beta x}{\theta \alpha + \beta} \right] e^{-\theta x} \right]^{-q} \frac{(\alpha + \beta)^{-n} \theta^{2n+a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-a_1 \theta} e^{-a_2 \alpha}}{\int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} (\alpha + \beta)^{-n} \theta^{2n+a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-a_1 \theta} e^{-a_2 \alpha}}}{\partial \theta}$$

$$\frac{\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}}}{\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}} d\theta d\alpha d\beta} \left. d\theta d\alpha d\beta \right]^{-\frac{1}{q}}$$

$$u_2 = \frac{\partial u \left[ \int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} \left[ 1 + \frac{\theta \beta x}{\theta \alpha + \beta} \right] e^{-\theta x} \right]^{-q} \frac{(\alpha + \beta)^{-n} \theta^{2n+a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-a_1 \theta} e^{-a_2 \alpha}}{\int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} (\alpha + \beta)^{-n} \theta^{2n+a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-a_1 \theta} e^{-a_2 \alpha}}}{\partial \alpha}$$

$$\frac{\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}}}{\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}} d\theta d\alpha d\beta} \left. d\theta d\alpha d\beta \right]^{-\frac{1}{q}}$$

$$u_3 = \frac{\partial u \left[ \int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} \left[ 1 + \frac{\theta \beta x}{\theta \alpha + \beta} \right] e^{-\theta x} \right]^{-q} \frac{(\alpha + \beta)^{-n} \theta^{2n+a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-a_1 \theta} e^{-a_2 \alpha}}{\int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} (\alpha + \beta)^{-n} \theta^{2n+a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-a_1 \theta} e^{-a_2 \alpha}}}{\partial \beta}$$

$$\frac{\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}}}{\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}} d\theta d\alpha d\beta} \left. d\theta d\alpha d\beta \right]^{-\frac{1}{q}}$$

$$u_{12} = \frac{\partial^2 u \left[ \int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} \left[ 1 + \frac{\theta \beta x}{\theta \alpha + \beta} \right] e^{-\theta x} \right]^{-q} \frac{(\alpha + \beta)^{-n} \theta^{2n+a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-a_1 \theta} e^{-a_2 \alpha}}{\int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} (\alpha + \beta)^{-n} \theta^{2n+a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-a_1 \theta} e^{-a_2 \alpha}}}{\partial \theta \partial \alpha}$$

$$\frac{\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}}}{\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}} d\theta d\alpha d\beta} \left. d\theta d\alpha d\beta \right]^{-\frac{1}{q}}$$

$$u_{21} = u_{12}$$

$$u_{12} = \frac{\partial^2 u \left[ \int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} \left[ 1 + \frac{\theta \beta x}{\theta \alpha + \beta} \right] e^{-\theta x} \right]^{-q} \frac{(\alpha + \beta)^{-n} \theta^{2n+a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-a_1 \theta} e^{-a_2 \alpha}}{\int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} (\alpha + \beta)^{-n} \theta^{2n+a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-a_1 \theta} e^{-a_2 \alpha}}}{(\partial \alpha)^2}$$

$$\frac{\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}}}{\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}} d\theta d\alpha d\beta} \Bigg]^{-\frac{1}{q}}$$

$$u_{13} = \frac{\partial^2 u \left[ \int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} \left[ 1 + \frac{\theta \beta x}{\theta \alpha + \beta} \right] e^{-\theta x} \right]^{-q} \frac{(\alpha \theta + \beta)^{-n} \theta^{2n+a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-a_1 \theta} e^{-a_2 \alpha}}{\int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} (\alpha \theta + \beta)^{-n} \theta^{2n+a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-a_1 \theta} e^{-a_2 \alpha}}}{\partial \theta \partial \beta}$$

$$\frac{\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}}}{\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}} d\theta d\alpha d\beta} \Bigg]^{-\frac{1}{q}}$$

$$u_{13} = u_{31}$$

$$u_{23} = \frac{\partial^2 u \left[ \int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} \left[ 1 + \frac{\theta \beta x}{\theta \alpha + \beta} \right] e^{-\theta x} \right]^{-q} \frac{(\alpha \theta + \beta)^{-n} \theta^{2n+a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-a_1 \theta} e^{-a_2 \alpha}}{\int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} (\alpha \theta + \beta)^{-n} \theta^{2n+a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-a_1 \theta} e^{-a_2 \alpha}}}{\partial \alpha \partial \beta}$$

$$\frac{\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}}}{\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}} d\theta d\alpha d\beta} \Bigg]^{-\frac{1}{q}}$$

$$u_{23} = u_{32}$$

$$u_{33} = \frac{\partial^2 \left[ \int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} \left[ 1 + \frac{\theta \beta x}{\theta \alpha + \beta} \right] e^{-\theta x} \right]^{-q} \frac{(\alpha \theta + \beta)^{-n} \theta^{2n+a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-a_1 \theta} e^{-a_2 \alpha}}{\int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} (\alpha \theta + \beta)^{-n} \theta^{2n+a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-a_1 \theta} e^{-a_2 \alpha}}}{(\partial \beta)^2}$$

$$\frac{\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}}}{\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}} d\theta d\alpha d\beta} \Bigg]^{-\frac{1}{q}}$$

$$L_{123} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha \theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}}}{\partial \theta \partial \alpha \partial \beta}$$

$$L_{132} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha \theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}}}{\partial \theta \partial \beta \partial \alpha}$$

$$L_{213} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha \theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}}}{\partial \alpha \partial \theta \partial \beta}$$

$$L_{231} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha \theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}}}{\partial \alpha \partial \beta \partial \theta}$$

$$L_{312} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\beta \partial\theta \partial\alpha}$$

$$L_{321} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\beta \partial\alpha \partial\theta}$$

$$L_{112} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\theta \partial\theta \partial\alpha}$$

$$L_{332} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\theta \partial\theta \partial\beta}$$

$$L_{323} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\beta \partial\alpha \partial\beta}$$

$$L_{233} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\alpha \partial\beta \partial\beta}$$

$$L_{113} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\theta \partial\theta \partial\beta}$$

$$L_{131} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\theta \partial\beta \partial\theta}$$

$$L_{311} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\beta \partial\theta \partial\theta}$$

$$L_{233} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\alpha \partial\beta \partial\beta}$$

$$L_{323} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\beta \partial\alpha \partial\beta}$$

$$L_{322} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\beta \partial\alpha \partial\alpha}$$

$$L_{333} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\beta \partial\beta \partial\beta}$$

$$\rho_1 = \frac{\partial \text{Log} \left( \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\Gamma(a_1) \Gamma(a_2)} \theta^{a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-b_1 \theta} e^{-b_2 \alpha} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c) \Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} \right)}{\partial \theta}$$

$$\rho_2 = \frac{\partial \text{Log} \left( \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\Gamma(a_1) \Gamma(a_2)} \theta^{a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-b_1 \theta} e^{-b_2 \alpha} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c) \Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} \right)}{\partial \alpha}$$

$$\rho_3 = \frac{\partial \text{Log} \left( \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\Gamma(a_1) \Gamma(a_2)} \theta^{a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-b_1 \theta} e^{-b_2 \alpha} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c) \Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} \right)}{\partial \beta}$$

$$\sigma_{11} = - \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{\theta^2}{\alpha \theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n \theta \bar{x}}}{\partial \theta \partial \theta} \right)^{-1}$$

$$\sigma_{12} = - \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{\theta^2}{\alpha \theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n \theta \bar{x}}}{\partial \theta \partial \alpha} \right)^{-1}$$

$$\sigma_{13} = - \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{\theta^2}{\alpha \theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n \theta \bar{x}}}{\partial \theta \partial \beta} \right)^{-1}$$

$$\sigma_{21} = - \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{\theta^2}{\alpha \theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n \theta \bar{x}}}{\partial \beta \partial \theta} \right)^{-1}$$

$$\sigma_{22} = - \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{\theta^2}{\alpha \theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n \theta \bar{x}}}{\partial \alpha \partial \alpha} \right)^{-1}$$

$$\sigma_{23} = - \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{\theta^2}{\alpha \theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n \theta \bar{x}}}{\partial \alpha \partial \beta} \right)^{-1}$$

$$\sigma_{32} = - \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{\theta^2}{\alpha \theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n \theta \bar{x}}}{\partial \beta \partial \alpha} \right)^{-1}$$

$$\sigma_{31} = - \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\beta \partial\theta} \right)^{-1}$$

$$\sigma_{33} = - \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\beta \partial\beta} \right)^{-1}$$

فان المعادلة (2-56) تكون كالآتي:

$$\begin{aligned} \hat{S}_{SBSEL} = \hat{S}_{mle} &+ u_1\rho_1\sigma_{11} + u_1\rho_2\sigma_{12} + +u_1\rho_3\sigma_{13} + 0.5L_{231}u_1\sigma_{23}\sigma_{11} \\ &+ 0.5L_{233}u_1\sigma_{23}\sigma_{31} + 0.5L_{311}u_1\sigma_{31}\sigma_{11} + 0.5L_{312}u_1\sigma_{31}\sigma_{21} \\ &+ 0.5L_{313}u_1\sigma_{31}^2 + 0.5L_{321}u_1\sigma_{32}\sigma_{11} + 0.5L_{323}u_1\sigma_{32}\sigma_{31} \\ &+ 0.5L_{331}u_1\sigma_{33}\sigma_{13} + 0.5L_{332}u_1\sigma_{33}\sigma_{21} + 0.5L_{333}u_1\sigma_{33}\sigma_{31} \\ &+ 0.5L_{111}u_1\sigma_{11}^2 + 0.5L_{112}u_1\sigma_{11}\sigma_{21} \\ &+ 0.5L_{113}u_1\sigma_{11}\sigma_{31} \quad \dots (2 - 66) \end{aligned}$$

وللحصول على مقدر توقع بيز لدالة البقاء  $S(x)$  في ظل دالة خسارة تربيعية وعلى فرض ان:

$$\begin{aligned} u(\theta; \alpha; \beta) &= \int_{a_1 a_2 c d} \int_{b_1, b_2} \hat{S}_{SEL} \pi^*(a_1, a_2, b_1, b_2, c, d) d d d a_1 d a_2 d b_1 d b_2 d c d d \\ &= \int_{a_1 a_2 c d} \int_{b_1, b_2} \left( \int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} \left( 1 + \frac{\theta\beta x}{\theta\alpha + \beta} \right) e^{-\theta x} \left[ \frac{(\alpha\theta + \beta)^{-n} \theta^{2n+a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-a_1\theta} e^{-a_2\alpha}}{\int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} (\alpha\theta + \beta)^{-n} \theta^{2n+a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-a_1\theta} e^{-a_2\alpha}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{\beta^{c-1} (1 - \beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\beta^{c-1} (1 - \beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}} d\theta d\alpha d\beta \cdot \frac{1}{c} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{1}{c_1 c_2 c_3 c_4 c_5} \right) d d d a_1 d a_2 d b_1 d b_2 d c d d \dots (2 - 66) \end{aligned}$$

وبأشتقاق المعادلة (2 - 67) للمعلمات فان:

$$u_1 = \frac{\partial u_{\int_{a_1 a_2 c d} \int_{b_1, b_2} \left( \int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} \left( 1 + \frac{\theta\beta x}{\theta\alpha + \beta} \right) e^{-\theta x} \left[ \frac{(\alpha\theta + \beta)^{-n} \theta^{2n+a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-a_1\theta} e^{-a_2\alpha}}{\int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} (\alpha\theta + \beta)^{-n} \theta^{2n+a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-a_1\theta} e^{-a_2\alpha}} \right. \right. \right.}{\partial\theta}$$

$$\frac{\beta^{c-1} (1 - \beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\beta^{c-1} (1 - \beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}} d\theta d\alpha d\beta \left. \frac{1}{c c_1 c_2 c_3 c_4 c_5} \right) d a_1 d a_2 d b_1 d b_2 d c d d$$

$$u_2 = \frac{\partial u_{\int_{a_1 a_2 c d} \int_{b_1, b_2} \left( \int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} \left( 1 + \frac{\theta\beta x}{\theta\alpha + \beta} \right) e^{-\theta x} \left[ \frac{(\alpha\theta + \beta)^{-n} \theta^{2n+a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-a_1\theta} e^{-a_2\alpha}}{\int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} (\alpha\theta + \beta)^{-n} \theta^{2n+a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-a_1\theta} e^{-a_2\alpha}} \right. \right. \right.}{\partial\alpha}$$

$$\frac{\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}}}{\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}} d\theta d\alpha d\beta} \left) d\theta d\alpha d\beta \cdot \frac{1}{cc_1 c_2 c_3 c_4 c_5} \right) da_1 da_2 d b_1 db_2 dcd d$$

$$u_3 = \frac{\partial u_{a_1 a_2 cd b_1, b_2} \left( \int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} \left( 1 + \frac{\theta \beta x}{\theta \alpha + \beta} \right) e^{-\theta x} \left[ \frac{(\alpha \theta + \beta)^{-n} \theta^{2n+a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-a_1 \theta} e^{-a_2 \alpha}}{\int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} (\alpha \theta + \beta)^{-n} \theta^{2n+a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-a_1 \theta} e^{-a_2 \alpha}} \right]}{\partial \beta} \right)}{\beta}$$

$$\frac{\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}}}{\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}} d\theta d\alpha d\beta} \left) d\theta d\alpha d\beta \cdot \frac{1}{cc_1 c_2 c_3 c_4 c_5} \right) da_1 da_2 d b_1 db_2 dcd d$$

$$u_{12} = \frac{\partial^2 u_{a_1 a_2 cd b_1, b_2} \left( \int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} \left( 1 + \frac{\theta \beta x}{\theta \alpha + \beta} \right) e^{-\theta x} \left[ \frac{(\alpha \theta + \beta)^{-n} \theta^{2n+a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-a_1 \theta} e^{-a_2 \alpha}}{\int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} (\alpha \theta + \beta)^{-n} \theta^{2n+a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-a_1 \theta} e^{-a_2 \alpha}} \right]}{\partial \theta \partial \alpha} \right)}{\partial \theta \partial \alpha}$$

$$\frac{\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}}}{\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}} d\theta d\alpha d\beta} \left) d\theta d\alpha d\beta \cdot \frac{1}{cc_1 c_2 c_3 c_4 c_5} \right) da_1 da_2 d b_1 db_2 dcd d$$

$$u_{12} = u_{21}$$

$$u_{22} = \frac{\partial^2 u_{a_1 a_2 cd b_1, b_2} \left( \int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} \left( 1 + \frac{\theta \beta x}{\theta \alpha + \beta} \right) e^{-\theta x} \left[ \frac{(\alpha \theta + \beta)^{-n} \theta^{2n+a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-a_1 \theta} e^{-a_2 \alpha}}{\int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} (\alpha \theta + \beta)^{-n} \theta^{2n+a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-a_1 \theta} e^{-a_2 \alpha}} \right]}{(\partial \alpha)^2} \right)}{(\partial \alpha)^2}$$

$$\frac{\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}}}{\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}} d\theta d\alpha d\beta} \left) d\theta d\alpha d\beta \cdot \frac{1}{cc_1 c_2 c_3 c_4 c_5} \right) da_1 da_2 d b_1 db_2 dcd d$$

$$u_{13} = \frac{\partial^2 u_{a_1 a_2 cd b_1, b_2} \left( \int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} \left( 1 + \frac{\theta \beta x}{\theta \alpha + \beta} \right) e^{-\theta x} \left[ \frac{(\alpha \theta + \beta)^{-n} \theta^{2n+a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-a_1 \theta} e^{-a_2 \alpha}}{\int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} (\alpha \theta + \beta)^{-n} \theta^{2n+a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-a_1 \theta} e^{-a_2 \alpha}} \right]}{\partial \theta \partial \beta} \right)}{\partial \theta \partial \beta}$$

$$\frac{\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}}}{\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}} d\theta d\alpha d\beta} \left) d\theta d\alpha d\beta \cdot \frac{1}{cc_1 c_2 c_3 c_4 c_5} \right) da_1 da_2 d b_1 db_2 dcd d$$

$$u_{13} = u_{31}$$

$$u_{23} = \frac{\partial^2 u_{a_1 a_2 cd b_1, b_2} \left( \int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} \left( 1 + \frac{\theta \beta x}{\theta \alpha + \beta} \right) e^{-\theta x} \left[ \frac{(\alpha \theta + \beta)^{-n} \theta^{2n+a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-a_1 \theta} e^{-a_2 \alpha}}{\int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} (\alpha \theta + \beta)^{-n} \theta^{2n+a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-a_1 \theta} e^{-a_2 \alpha}} \right]}{\partial \alpha \partial \beta} \right)}{\partial \alpha \partial \beta}$$

$$\frac{\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}}}{\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}} d\theta d\alpha d\beta} \left) d\theta d\alpha d\beta \cdot \frac{1}{cc_1 c_2 c_3 c_4 c_5} \right) da_1 da_2 d b_1 db_2 dcd d$$

$$u_{23} = u_{32}$$

$$u_{33} = \frac{\partial^2 u_{\int_{a_1 a_2 c d b_1, b_2} \left( \int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} \left( 1 + \frac{\theta \beta x}{\theta \alpha + \beta} \right) e^{-\theta x} \left[ \frac{(\alpha \theta + \beta)^{-n} \theta^{2n+a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-a_1 \theta} e^{-a_2 \alpha}}{\int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} (\alpha \theta + \beta)^n \theta^{2n+a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-a_1 \theta} e^{-a_2 \alpha}} \right]}{(\partial \beta)^2}$$

$$\frac{\beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}}}{\beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}} d\theta d\alpha d\beta} \cdot \frac{1}{c c_1 c_2 c_3 c_4 c_5} da_1 da_2 d b_1 db_2 dcd d$$

$$L_{123} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha \theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}}}{\partial \theta \partial \alpha \partial \beta}$$

$$L_{132} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha \theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}}}{\partial \theta \partial \beta \partial \alpha}$$

$$L_{213} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha \theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}}}{\partial \alpha \partial \theta \partial \beta}$$

$$L_{231} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha \theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}}}{\partial \alpha \partial \beta \partial \theta}$$

$$L_{312} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha \theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}}}{\partial \beta \partial \theta \partial \alpha}$$

$$L_{321} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha \theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}}}{\partial \beta \partial \alpha \partial \theta}$$

$$L_{112} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha \theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}}}{\partial \theta \partial \theta \partial \alpha}$$

$$L_{332} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha \theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}}}{\partial \theta \partial \theta \partial \beta}$$

$$L_{323} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha \theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}}}{\partial \beta \partial \alpha \partial \beta}$$

$$L_{233} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha \theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}}}{\partial \alpha \partial \beta \partial \beta}$$

$$L_{113} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha \theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}}}{\partial \theta \partial \theta \partial \beta}$$

$$L_{131} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\theta \partial\beta \partial\theta}$$

$$L_{311} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\beta \partial\theta \partial\theta}$$

$$L_{233} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\alpha \partial\beta \partial\beta}$$

$$L_{323} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\beta \partial\alpha \partial\beta}$$

$$L_{322} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\beta \partial\alpha \partial\alpha}$$

$$L_{333} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\beta \partial\beta \partial\beta}$$

$$\rho_1 = \frac{\partial \text{Log} \left( \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \theta^{a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-b_1\theta} e^{-b_2\alpha} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} \right)}{\partial\theta}$$

$$\rho_2 = \frac{\partial \text{Log} \left( \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \theta^{a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-b_1\theta} e^{-b_2\alpha} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} \right)}{\partial\alpha}$$

$$\rho_2 = \frac{\partial \text{Log} \left( \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \theta^{a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-b_1\theta} e^{-b_2\alpha} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} \right)}{\partial\beta}$$

$$\sigma_{11} = - \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\theta \partial\theta} \right)^{-1}$$

$$\sigma_{12} = - \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\theta \partial\alpha} \right)^{-1}$$

$$\sigma_{13} = - \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\theta \partial\beta} \right)^{-1}$$

$$\sigma_{21} = - \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\beta \partial\theta} \right)^{-1}$$

$$\sigma_{22} = - \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\alpha \partial\alpha} \right)^{-1}$$

$$\sigma_{23} = - \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\alpha \partial\beta} \right)^{-1}$$

$$\sigma_{32} = - \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\beta \partial\alpha} \right)^{-1}$$

$$\sigma_{31} = - \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\beta \partial\theta} \right)^{-1}$$

$$\sigma_{33} = - \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\beta \partial\beta} \right)^{-1}$$

فان المعادلة (2-56) تكون كالآتي:

$$\begin{aligned} \hat{S}_{SBSEL} = & \hat{S}_{mle} + u_1\rho_1\sigma_{11} + u_1\rho_2\sigma_{12} + u_1\rho_3\sigma_{13} + 0.5L_{231}u_1\sigma_{23}\sigma_{11} \\ & + 0.5L_{233}u_1\sigma_{23}\sigma_{31} + 0.5L_{311}u_1\sigma_{31}\sigma_{11} + 0.5L_{312}u_1\sigma_{31}\sigma_{21} \\ & + 0.5L_{313}u_1\sigma_{31}^2 + 0.5L_{321}u_1\sigma_{32}\sigma_{11} + 0.5L_{323}u_1\sigma_{32}\sigma_{31} \\ & + 0.5L_{331}u_1\sigma_{33}\sigma_{13} + 0.5L_{332}u_1\sigma_{33}\sigma_{21} + 0.5L_{333}u_1\sigma_{33}\sigma_{31} \\ & + 0.5L_{111}u_1\sigma_{11}^2 + 0.5L_{112}u_1\sigma_{11}\sigma_{21} \\ & + 0.5L_{113}u_1\sigma_{11}\sigma_{31} \end{aligned} \quad \dots (2-68)$$

وباشتقاق المعادلة (68 - 2) للمعاملات فان:

وللحصول على مقدر توقع بيز لدالة البقاء  $S(x)$  في ظل دالة خسارة انتروبي العامة وعلى فرض ان:

$$u(\theta; \alpha; \beta) = \int_{a_1 a_2 c d b_1, b_2} \left( \int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} \left[ 1 + \frac{\theta \beta x}{\theta \alpha + \beta} \right]^{-q} e^{-\theta x} \left[ \frac{(\alpha \theta + \beta)^{-n} \theta^{2n+a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-a_1 \theta}}{\int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} (\alpha \theta + \beta)^{-n} \theta^{2n+a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-a_1 \theta}} \right. \right. \\ \left. \left. \frac{e^{-a_2 \alpha} \beta^{c-1} (1 - \beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n \theta \bar{x}}}{e^{-a_2 \alpha} \beta^{c-1} (1 - \beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n \theta \bar{x}}} d\theta d\alpha d\beta \right]^{-\frac{1}{q}} \right) da_1 da_2 d b_1 db_2 d c d d \quad \dots (2 - 69)$$

$$u_1 = \frac{\partial u}{\partial \theta} \int_{a_1 a_2 c d b_1, b_2} \left( \int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} \left[ \left( 1 + \frac{\theta \beta x}{\theta \alpha + \beta} \right) e^{-\theta x} \right]^{-q} \left[ \frac{(\alpha \theta + \beta)^{-n} \theta^{2n+a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-a_1 \theta}}{\int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} (\alpha \theta + \beta)^{-n} \theta^{2n+a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-a_1 \theta}} \right. \right. \\ \left. \left. \frac{e^{-a_2 \alpha} \beta^{c-1} (1 - \beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n \theta \bar{x}}}{\beta^{c-1} (1 - \beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n \theta \bar{x}}} d\theta d\alpha d\beta \right]^{-\frac{1}{q}} \frac{1}{c c_1 c_2 c_3 c_4 c_5} \right) da_1 da_2 d b_1 db_2 d c d d$$

$$u_2 = \frac{\partial u}{\partial \alpha} \int_{a_1 a_2 c d b_1, b_2} \left( \int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} \left[ \left( 1 + \frac{\theta \beta x}{\theta \alpha + \beta} \right) e^{-\theta x} \right]^{-q} \left[ \frac{(\alpha \theta + \beta)^{-n} \theta^{2n+a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-a_1 \theta} e^{-a_2 \alpha}}{\int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} (\alpha \theta + \beta)^{-n} \theta^{2n+a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-a_1 \theta} e^{-a_2 \alpha}} \right. \right. \\ \left. \left. \frac{\beta^{c-1} (1 - \beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n \theta \bar{x}}}{\beta^{c-1} (1 - \beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n \theta \bar{x}}} d\theta d\alpha d\beta \right]^{-\frac{1}{q}} \frac{1}{c c_1 c_2 c_3 c_4 c_5} \right) da_1 da_2 d b_1 db_2 d c d d$$

$$u_3 = \frac{\partial u}{\partial \beta} \int_{a_1 a_2 c d b_1, b_2} \left( \int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} \left[ \left( 1 + \frac{\theta \beta x}{\theta \alpha + \beta} \right) e^{-\theta x} \right]^{-q} \left[ \frac{(\alpha \theta + \beta)^{-n} \theta^{2n+a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-a_1 \theta} e^{-a_2 \alpha} \beta^{c-1}}{\int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} (\alpha \theta + \beta)^{-n} \theta^{2n+a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-a_1 \theta} e^{-a_2 \alpha} \beta^{c-1}} \right. \right. \\ \left. \left. \frac{(1 - \beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n \theta \bar{x}}}{(1 - \beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n \theta \bar{x}}} d\theta d\alpha d\beta \right]^{-\frac{1}{q}} \frac{1}{c c_1 c_2 c_3 c_4 c_5} \right) da_1 da_2 d b_1 db_2 d c d d$$

$$u_{12} = \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial \alpha} \int_{a_1 a_2 c d b_1, b_2} \left( \int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} \left[ \left( 1 + \frac{\theta \beta x}{\theta \alpha + \beta} \right) e^{-\theta x} \right]^{-q} \left[ \frac{(\alpha \theta + \beta)^{-n} \theta^{2n+a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-a_1 \theta} e^{-a_2 \alpha} \beta^{c-1}}{\int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} (\alpha \theta + \beta)^{-n} \theta^{2n+a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-a_1 \theta} e^{-a_2 \alpha} \beta^{c-1}} \right. \right. \\ \left. \left. \frac{(1 - \beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n \theta \bar{x}}}{(1 - \beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n \theta \bar{x}}} d\theta d\alpha d\beta \right]^{-\frac{1}{q}} \frac{1}{c c_1 c_2 c_3 c_4 c_5} \right) da_1 da_2 d b_1 db_2 d c d d$$

$$\left. \frac{(1-\beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}}}{(1-\beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}} d\theta d\alpha d\beta} \right]^{-q} \frac{1}{cc_1 c_2 c_3 c_4 c_5} \Bigg] d d d a_1 d a_2 d b_1 d b_2 d c d d$$

$$u_{12} = u_{21}$$

$$u_{22} = \frac{\partial^2 u \left[ \int_{a_1 a_2 c d b_1, b_2} \left[ \int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} \left[ \left( 1 + \frac{\theta \beta x}{\theta \alpha + \beta} \right) e^{-\theta x} \right]^{-q} \left[ \frac{(\alpha \theta + \beta)^{-n} \theta^{2n+a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-a_1 \theta} e^{-a_2 \alpha} \beta^{c-1}}{\int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} (\alpha \theta + \beta)^{-n} \theta^{2n+a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-a_1 \theta} e^{-a_2 \alpha} \beta^{c-1}} \right] \right]}{(\partial \alpha)^2}$$

$$\left. \frac{(1-\beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}}}{(1-\beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}} d\theta d\alpha d\beta} \right]^{-q} \frac{1}{cc_1 c_2 c_3 c_4 c_5} \Bigg] d a_1 d a_2 d b_1 d b_2 d c d d$$

$$u_{13} = \frac{\partial^2 u \left[ \int_{a_1 a_2 c d b_1, b_2} \left[ \int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} \left[ \left( 1 + \frac{\theta \beta x}{\theta \alpha + \beta} \right) e^{-\theta x} \right]^{-q} \left[ \frac{(\alpha \theta + \beta)^{-n} \theta^{2n+a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-a_1 \theta} e^{-a_2 \alpha} \beta^{c-1}}{\int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} (\alpha \theta + \beta)^{-n} \theta^{2n+a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-a_1 \theta} e^{-a_2 \alpha} \beta^{c-1}} \right] \right]}{\partial \theta \partial \beta}$$

$$\left. \frac{(1-\beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}}}{(1-\beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}} d\theta d\alpha d\beta} \right]^{-q} \frac{1}{cc_1 c_2 c_3 c_4 c_5} \Bigg] d a_1 d a_2 d b_1 d b_2 d c d d$$

$$u_{13} = u_{31}$$

$$u_{23} = \frac{\partial^2 u \left[ \int_{a_1 a_2 c d b_1, b_2} \left[ \int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} \left[ \left( 1 + \frac{\theta \beta x}{\theta \alpha + \beta} \right) e^{-\theta x} \right]^{-q} \left[ \frac{(\alpha \theta + \beta)^{-n} \theta^{2n+a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-a_1 \theta} e^{-a_2 \alpha} \beta^{c-1}}{\int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} (\alpha \theta + \beta)^{-n} \theta^{2n+a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-a_1 \theta} e^{-a_2 \alpha} \beta^{c-1}} \right] \right]}{\partial \alpha \partial \beta}$$

$$\left. \frac{(1-\beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}}}{(1-\beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}} d\theta d\alpha d\beta} \right]^{-q} \frac{1}{cc_1 c_2 c_3 c_4 c_5} \Bigg] d d d a_1 d a_2 d b_1 d b_2 d c d d$$

$$u_{23} = u_{32}$$

$$u_{33} = \frac{\partial^2 u \left[ \int_{a_1 a_2 c d b_1, b_2} \left[ \int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} \left[ \left( 1 + \frac{\theta \beta x}{\theta \alpha + \beta} \right) e^{-\theta x} \right]^{-q} \left[ \frac{(\alpha \theta + \beta)^{-n} \theta^{2n+a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-a_1 \theta} e^{-a_2 \alpha} \beta^{c-1}}{\int_{\theta} \int_{\alpha} \int_{\beta} (\alpha \theta + \beta)^{-n} \theta^{2n+a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-a_1 \theta} e^{-a_2 \alpha} \beta^{c-1}} \right] \right]}{(\partial \beta)^2}$$

$$\left. \frac{(1-\beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}}}{(1-\beta)^{d-1} \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}} d\theta d\alpha d\beta} \right]^{-q} \frac{1}{cc_1 c_2 c_3 c_4 c_5} \Bigg] d d d a_1 d a_2 d b_1 d b_2 d c d d$$

$$L_{123} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha \theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}}}{\partial \theta \partial \alpha \partial \beta}$$

$$L_{132} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\theta \partial\beta \partial\alpha}$$

$$L_{213} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\alpha \partial\theta \partial\beta}$$

$$L_{231} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\alpha \partial\beta \partial\theta}$$

$$L_{312} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\beta \partial\theta \partial\alpha}$$

$$L_{321} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\beta \partial\alpha \partial\theta}$$

$$L_{112} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\theta \partial\theta \partial\alpha}$$

$$L_{332} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\theta \partial\theta \partial\beta}$$

$$L_{323} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\beta \partial\alpha \partial\beta}$$

$$L_{233} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\alpha \partial\beta \partial\beta}$$

$$L_{113} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\theta \partial\theta \partial\beta}$$

$$L_{131} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\theta \partial\beta \partial\theta}$$

$$L_{311} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\beta \partial\theta \partial\theta}$$

$$L_{233} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\alpha \partial\beta \partial\beta}$$

$$L_{323} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\beta \partial\alpha \partial\beta}$$

$$L_{322} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\beta \partial\alpha \partial\alpha}$$

$$L_{333} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\beta \partial\beta \partial\beta}$$

$$\rho_1 = \frac{\partial \text{Log} \left( \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \theta^{a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-b_1\theta} e^{-b_2\alpha} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} \right)}{\partial\theta}$$

$$\rho_2 = \frac{\partial \text{Log} \left( \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \theta^{a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-b_1\theta} e^{-b_2\alpha} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} \right)}{\partial\alpha}$$

$$\rho_3 = \frac{\partial \text{Log} \left( \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \theta^{a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-b_1\theta} e^{-b_2\alpha} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} \right)}{\partial\beta}$$

$$\sigma_{11} = - \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\theta \partial\theta} \right)^{-1}$$

$$\sigma_{12} = - \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\theta \partial\alpha} \right)^{-1}$$

$$\sigma_{13} = - \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\theta \partial\beta} \right)^{-1}$$

$$\sigma_{21} = - \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\beta \partial\theta} \right)^{-1}$$

$$\sigma_{22} = - \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\alpha \partial\alpha} \right)^{-1}$$

$$\sigma_{23} = - \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\alpha \partial\beta} \right)^{-1}$$

$$\sigma_{32} = - \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\beta \partial\alpha} \right)^{-1}$$

$$\sigma_{31} = - \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\beta \partial\theta} \right)^{-1}$$

$$\sigma_{33} = - \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\beta \partial\beta} \right)^{-1}$$

فان المعادلة (2-56) تكون كالآتي:

$$\begin{aligned} \hat{S}_{SBSEL} = & \hat{S}_{mle} + u_1\rho_1\sigma_{11} + u_1\rho_2\sigma_{12} + +u_1\rho_3\sigma_{13} + 0.5L_{231}u_1\sigma_{23}\sigma_{11} \\ & + 0.5L_{233}u_1\sigma_{23}\sigma_{31} + 0.5L_{311}u_1\sigma_{31}\sigma_{11} + 0.5L_{312}u_1\sigma_{31}\sigma_{21} \\ & + 0.5L_{313}u_1\sigma_{31}^2 + 0.5L_{321}u_1\sigma_{32}\sigma_{11} + 0.5L_{323}u_1\sigma_{32}\sigma_{31} \\ & + 0.5L_{331}u_1\sigma_{33}\sigma_{13} + 0.5L_{332}u_1\sigma_{33}\sigma_{21} + 0.5L_{333}u_1\sigma_{33}\sigma_{31} \\ & + 0.5L_{111}u_1\sigma_{11}^2 + 0.5L_{112}u_1\sigma_{11}\sigma_{21} \\ & + 0.5L_{113}u_1\sigma_{11}\sigma_{31} \end{aligned} \quad \dots (2 - 70)$$

وللحصول على مقدر بيز الهرمي لدالة البقاء S(x) في ظل دالة خسارة تربيعية وعلى فرض ان:

$$u(\theta; \alpha; \beta) = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \left[ 1 + \frac{\theta\beta x}{\alpha\theta + \beta} \right] e^{-\theta x} \frac{\int_0^c \int_0^{c_1} \int_0^{c_2} \int_0^{c_3} \int_0^{c_4} \int_0^{c_5} \frac{1}{c} \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}}{\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \left[ \int_0^c \int_0^{c_1} \int_0^{c_2} \int_0^{c_3} \int_0^{c_4} \int_0^{c_5} \frac{1}{c} \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \right]}$$

$$\frac{\theta^{a_1-1} e^{-b_1\theta} \alpha^{a_2-1} e^{-b_2\alpha} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} da_1 da_2 d b_1 db_2 dcd d}{\theta^{a_1-1} e^{-b_1\theta} \alpha^{a_2-1} e^{-b_2\alpha} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} da_1 da_2 d b_1 db_2 dcd d]}$$

$$\left. \frac{\left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta}\right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta}\right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}} d\theta d\alpha d\beta} \right] d\theta d\alpha d\beta \quad \dots (2 - 71)$$

وباشتقاق المعادلة (2 - 71) للمعطيات فان:

$$u_1 = \frac{\partial u \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \left[ 1 + \frac{\theta\beta x}{\theta\alpha + \beta} \right] e^{-\theta x} \frac{\int_0^c \int_0^{c_1} \int_0^{c_2} \int_0^{c_3} \int_0^{c_4} \int_0^{c_5} \frac{1}{c} \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \theta^{a_1-1} e^{-b_1\theta} \alpha^{a_2-1} e^{-b_2\alpha}}{\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \left[ \int_0^c \int_0^{c_1} \int_0^{c_2} \int_0^{c_3} \int_0^{c_4} \int_0^{c_5} \frac{1}{c} \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \theta^{a_1-1} e^{-b_1\theta} \alpha^{a_2-1} e^{-b_2\alpha} \right]} d\theta}{\partial \theta}$$

$$\left. \frac{\left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta}\right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} da_1 da_2 d b_1 db_2 dcd d}{\left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta}\right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} da_1 da_2 d b_1 db_2 dcd d} \right] d\theta d\alpha d\beta$$

$$u_2 = \frac{\partial u \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \left[ 1 + \frac{\theta\beta x}{\theta\alpha + \beta} \right] e^{-\theta x} \frac{\int_0^c \int_0^{c_1} \int_0^{c_2} \int_0^{c_3} \int_0^{c_4} \int_0^{c_5} \frac{1}{c} \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} e^{-b_1\theta} \alpha^{a_2-1} e^{-b_2\alpha}}{\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \left[ \int_0^c \int_0^{c_1} \int_0^{c_2} \int_0^{c_3} \int_0^{c_4} \int_0^{c_5} \frac{1}{c} \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} e^{-b_1\theta} \alpha^{a_2-1} e^{-b_2\alpha} \right]} d\alpha}{\partial \alpha}$$

$$\left. \frac{\theta^{a_1-1} \left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta}\right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} da_1 da_2 d b_1 db_2 dcd d}{\theta^{a_1-1} \left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta}\right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} da_1 da_2 d b_1 db_2 dcd d} \right] d\theta d\alpha d\beta$$

$$u_3 = \frac{\partial u \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \left[ 1 + \frac{\theta\beta x}{\theta\alpha + \beta} \right] e^{-\theta x} \frac{\int_0^c \int_0^{c_1} \int_0^{c_2} \int_0^{c_3} \int_0^{c_4} \int_0^{c_5} \frac{1}{c} \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} e^{-b_1\theta} \alpha^{a_2-1} e^{-b_2\alpha}}{\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \left[ \int_0^c \int_0^{c_1} \int_0^{c_2} \int_0^{c_3} \int_0^{c_4} \int_0^{c_5} \frac{1}{c} \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} e^{-b_1\theta} \alpha^{a_2-1} e^{-b_2\alpha} \right]} d\beta}{\partial \beta}$$

$$\left. \frac{\theta^{a_1-1} \left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta}\right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} da_1 da_2 d b_1 db_2 dcd d}{\theta^{a_1-1} \left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta}\right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} da_1 da_2 d b_1 db_2 dcd d} \right] d\theta d\alpha d\beta$$

$$u_{12} = \frac{\partial^2 u \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \left[ 1 + \frac{\theta\beta x}{\theta\alpha + \beta} \right] e^{-\theta x} \frac{\int_0^c \int_0^{c_1} \int_0^{c_2} \int_0^{c_3} \int_0^{c_4} \int_0^{c_5} \frac{1}{c} \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \alpha^{a_2-1} e^{-b_2\alpha}}{\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \left[ \int_0^c \int_0^{c_1} \int_0^{c_2} \int_0^{c_3} \int_0^{c_4} \int_0^{c_5} \frac{1}{c} \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \alpha^{a_2-1} e^{-b_2\alpha} \right]} d\theta d\alpha}{\partial \theta \partial \alpha}$$

$$\frac{\theta^{a_1-1} e^{-b_1 \theta} \left( \frac{\theta^2}{\alpha \theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n \theta \bar{x}} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} da_1 da_2 d b_1 db_2 dcd d}{\theta^{a_1-1} e^{-b_1 \theta} \left( \frac{\theta^2}{\alpha \theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n \theta \bar{x}} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} da_1 da_2 d b_1 db_2 dcd d} \Big] d\theta d\alpha d\beta$$

$$u_{12} = u_{21}$$

$$u_{22} = \frac{\partial^2 u \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \left[ 1 + \frac{\theta \beta x}{\theta \alpha + \beta} \right] e^{-\theta x} \frac{\int_0^c \int_0^{c_1} \int_0^{c_2} \int_0^{c_3} \int_0^{c_4} \int_0^{c_5} \frac{1}{c} \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \alpha^{a_2-1} e^{-b_2 \alpha}}{\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \left[ \int_0^c \int_0^{c_1} \int_0^{c_2} \int_0^{c_3} \int_0^{c_4} \int_0^{c_5} \frac{1}{c} \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \alpha^{a_2-1} e^{-b_2 \alpha} \right]} d\theta d\alpha d\beta}{(\partial \alpha)^2}$$

$$\frac{\left( \frac{\theta^2}{\alpha \theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n \theta \bar{x}} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} da_1 da_2 d b_1 db_2 dcd d}{\left( \frac{\theta^2}{\alpha \theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n \theta \bar{x}} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} da_1 da_2 d b_1 db_2 dcd d} \Big] d\theta d\alpha d\beta$$

$$u_{13} = \frac{\partial^2 u \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \left[ 1 + \frac{\theta \beta x}{\theta \alpha + \beta} \right] e^{-\theta x} \frac{\int_0^c \int_0^{c_1} \int_0^{c_2} \int_0^{c_3} \int_0^{c_4} \int_0^{c_5} \frac{1}{c} \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \alpha^{a_2-1} e^{-b_2 \alpha}}{\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \left[ \int_0^c \int_0^{c_1} \int_0^{c_2} \int_0^{c_3} \int_0^{c_4} \int_0^{c_5} \frac{1}{c} \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \alpha^{a_2-1} e^{-b_2 \alpha} \right]} d\theta d\alpha d\beta}{\partial \theta \partial \beta}$$

$$\frac{\theta^{a_1-1} e^{-b_1 \theta} \left( \frac{\theta^2}{\alpha \theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n \theta \bar{x}} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} da_1 da_2 d b_1 db_2 dcd d}{\theta^{a_1-1} e^{-b_1 \theta} \left( \frac{\theta^2}{\alpha \theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n \theta \bar{x}} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} da_1 da_2 d b_1 db_2 dcd d} \Big] d\theta d\alpha d\beta$$

$$u_{13} = u_{31}$$

$$u_{23} = \frac{\partial^2 u \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \left[ 1 + \frac{\theta \beta x}{\theta \alpha + \beta} \right] e^{-\theta x} \frac{\int_0^c \int_0^{c_1} \int_0^{c_2} \int_0^{c_3} \int_0^{c_4} \int_0^{c_5} \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \theta^{a_1-1} e^{-b_1 \theta} \alpha^{a_2-1} e^{-b_2 \alpha}}{\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \left[ \int_0^c \int_0^{c_1} \int_0^{c_2} \int_0^{c_3} \int_0^{c_4} \int_0^{c_5} \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \theta^{a_1-1} e^{-b_1 \theta} \alpha^{a_2-1} e^{-b_2 \alpha} \right]} d\theta d\alpha d\beta}{\partial \alpha \partial \beta}$$

$$\frac{\left( \frac{\theta^2}{\alpha \theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n \theta \bar{x}} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} da_1 da_2 d b_1 db_2 dcd d}{\left( \frac{\theta^2}{\alpha \theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n \theta \bar{x}} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} da_1 da_2 d b_1 db_2 dcd d} \Big] d\theta d\alpha d\beta$$

$$u_{23} = u_{32}$$

$$u_{33} = \frac{\partial^2 u \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \left[ 1 + \frac{\theta \beta x}{\theta \alpha + \beta} \right] e^{-\theta x} \frac{\int_0^c \int_0^{c_1} \int_0^{c_2} \int_0^{c_3} \int_0^{c_4} \int_0^{c_5} \frac{1}{c} \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} e^{-b_1 \theta} \alpha^{a_2-1} e^{-b_2 \alpha}}{\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \left[ \int_0^c \int_0^{c_1} \int_0^{c_2} \int_0^{c_3} \int_0^{c_4} \int_0^{c_5} \frac{1}{c} \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} e^{-b_1 \theta} \alpha^{a_2-1} e^{-b_2 \alpha} \right]} d\theta d\alpha d\beta}{(\partial \beta)^2}$$

$$\frac{\theta^{a_1-1} \left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta+\beta}\right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha+\beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} da_1 da_2 d b_1 db_2 dcd d}{\theta^{a_1-1} \left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta+\beta}\right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha+\beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} da_1 da_2 d b_1 db_2 dcd d} \Big] d\theta d\alpha d\beta$$

$$L_{123} = \frac{\partial^3 \left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta+\beta}\right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha+\beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\theta \partial\alpha \partial\beta}$$

$$L_{132} = \frac{\partial^3 \left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta+\beta}\right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha+\beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\theta \partial\beta \partial\alpha}$$

$$L_{213} = \frac{\partial^3 \left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta+\beta}\right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha+\beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\alpha \partial\theta \partial\beta}$$

$$L_{231} = \frac{\partial^3 \left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta+\beta}\right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha+\beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\alpha \partial\beta \partial\theta}$$

$$L_{312} = \frac{\partial^3 \left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta+\beta}\right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha+\beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\beta \partial\theta \partial\alpha}$$

$$L_{321} = \frac{\partial^3 \left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta+\beta}\right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha+\beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\beta \partial\alpha \partial\theta}$$

$$L_{112} = \frac{\partial^3 \left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta+\beta}\right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha+\beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\theta \partial\theta \partial\alpha}$$

$$L_{332} = \frac{\partial^3 \left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta+\beta}\right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha+\beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\theta \partial\theta \partial\beta}$$

$$L_{323} = \frac{\partial^3 \left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta+\beta}\right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha+\beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\beta \partial\alpha \partial\beta}$$

$$L_{233} = \frac{\partial^3 \left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta+\beta}\right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha+\beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\alpha \partial\beta \partial\beta}$$

$$L_{113} = \frac{\partial^3 \left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta+\beta}\right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha+\beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\theta \partial\theta \partial\beta}$$

$$L_{131} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\theta \partial\beta \partial\theta}$$

$$L_{311} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\beta \partial\theta \partial\theta}$$

$$L_{233} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\alpha \partial\beta \partial\beta}$$

$$L_{323} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\beta \partial\alpha \partial\beta}$$

$$L_{322} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\beta \partial\alpha \partial\alpha}$$

$$L_{333} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\beta \partial\beta \partial\beta}$$

$$\rho_1 = \frac{\partial \text{Log} \left( \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \theta^{a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-b_1\theta} e^{-b_2\alpha} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} \right)}{\partial\theta}$$

$$\rho_2 = \frac{\partial \text{Log} \left( \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \theta^{a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-b_1\theta} e^{-b_2\alpha} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} \right)}{\partial\alpha}$$

$$\rho_3 = \frac{\partial \text{Log} \left( \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \theta^{a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-b_1\theta} e^{-b_2\alpha} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} \right)}{\partial\beta}$$

$$\sigma_{11} = - \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\theta \partial\theta} \right)^{-1}$$

$$\sigma_{12} = - \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\theta \partial\alpha} \right)^{-1}$$

$$\sigma_{13} = - \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\theta \partial\beta} \right)^{-1}$$

$$\sigma_{21} = - \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\beta \partial\theta} \right)^{-1}$$

$$\sigma_{22} = - \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\alpha \partial\alpha} \right)^{-1}$$

$$\sigma_{23} = - \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\alpha \partial\beta} \right)^{-1}$$

$$\sigma_{32} = - \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\beta \partial\alpha} \right)^{-1}$$

$$\sigma_{31} = - \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\beta \partial\theta} \right)^{-1}$$

$$\sigma_{33} = - \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\beta \partial\beta} \right)^{-1}$$

فان المعادلة (2-56) تكون كالآتي:

$$\begin{aligned} \hat{S}_{SBSEL} = & \hat{S}_{mle} + u_1\rho_1\sigma_{11} + u_1\rho_2\sigma_{12} + u_1\rho_3\sigma_{13} + 0.5L_{231}u_1\sigma_{23}\sigma_{11} \\ & + 0.5L_{233}u_1\sigma_{23}\sigma_{31} + 0.5L_{311}u_1\sigma_{31}\sigma_{11} + 0.5L_{312}u_1\sigma_{31}\sigma_{21} \\ & + 0.5L_{313}u_1\sigma_{31}^2 + 0.5L_{321}u_1\sigma_{32}\sigma_{11} + 0.5L_{323}u_1\sigma_{32}\sigma_{31} \\ & + 0.5L_{331}u_1\sigma_{33}\sigma_{13} + 0.5L_{332}u_1\sigma_{33}\sigma_{21} + 0.5L_{333}u_1\sigma_{33}\sigma_{31} \\ & + 0.5L_{111}u_1\sigma_{11}^2 + 0.5L_{112}u_1\sigma_{11}\sigma_{21} \\ & + 0.5L_{113}u_1\sigma_{11}\sigma_{31} \end{aligned} \quad \dots (2-72)$$

وللحصول على مقدر بيز الهرمي لدالة البقاء  $S(x)$  في ظل دالة خسارة انتروبي العامة وعلى فرض

ان:

$$u(\theta; \alpha; \beta) = \frac{\int_0^c \int_0^{c_1} \int_0^{c_2} \int_0^{c_3} \int_0^{c_4} \int_0^{c_5} \frac{1}{c} \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \left[1 + \frac{\theta \beta x}{\theta \alpha + \beta}\right]^{-q} e^{-\theta x}}{\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \left[ \int_0^c \int_0^{c_1} \int_0^{c_2} \int_0^{c_3} \int_0^{c_4} \int_0^{c_5} \frac{1}{c} \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \right. \\ \left. \theta^{a_1-1} e^{-b_1 \theta} \alpha^{a_2-1} e^{-b_2 \alpha} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} da_1 da_2 d b_1 db_2 dcd d \right. \\ \left. \theta^{a_1-1} e^{-b_1 \theta} \alpha^{a_2-1} e^{-b_2 \alpha} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} da_1 da_2 d b_1 db_2 dcd d \right]^{-\frac{1}{q}} \dots (2-73)$$

وباشتقاق المعادلة (2-73) للمعطيات فان:

$$u_1 = \frac{\partial u}{\partial \theta} \left[ \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \left[ \left[1 + \frac{\theta \beta x}{\theta \alpha + \beta}\right]^{-q} \frac{\int_0^c \int_0^{c_1} \int_0^{c_2} \int_0^{c_3} \int_0^{c_4} \int_0^{c_5} \frac{1}{c} \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} e^{-b_1 \theta} \alpha^{a_2-1} e^{-b_2 \alpha}}{\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \left[ \int_0^c \int_0^{c_1} \int_0^{c_2} \int_0^{c_3} \int_0^{c_4} \int_0^{c_5} \frac{1}{c} \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} e^{-b_1 \theta} \alpha^{a_2-1} e^{-b_2 \alpha}} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \theta^{a_1-1} \left(\frac{\theta^2}{\alpha \theta + \beta}\right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n \theta \bar{x}} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} da_1 da_2 d b_1 db_2 dcd d \right]^{-\frac{1}{q}} \right]^{-\frac{1}{q}} \right]$$

$$u_2 = \frac{\partial u}{\partial \alpha} \left[ \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \left[ \left[1 + \frac{\theta \beta x}{\theta \alpha + \beta}\right]^{-q} \frac{\int_0^c \int_0^{c_1} \int_0^{c_2} \int_0^{c_3} \int_0^{c_4} \int_0^{c_5} \frac{1}{c} \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} e^{-b_1 \theta} \alpha^{a_2-1} e^{-b_2 \alpha}}{\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \left[ \int_0^c \int_0^{c_1} \int_0^{c_2} \int_0^{c_3} \int_0^{c_4} \int_0^{c_5} \frac{1}{c} \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} e^{-b_1 \theta} \alpha^{a_2-1} e^{-b_2 \alpha}} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \theta^{a_1-1} \left(\frac{\theta^2}{\alpha \theta + \beta}\right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n \theta \bar{x}} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} da_1 da_2 d b_1 db_2 dcd d \right]^{-\frac{1}{q}} \right]^{-\frac{1}{q}} \right]$$

$$u_3 = \frac{\partial u}{\partial \beta} \left[ \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \left[ \left[1 + \frac{\theta \beta x}{\theta \alpha + \beta}\right]^{-q} \frac{\int_0^c \int_0^{c_1} \int_0^{c_2} \int_0^{c_3} \int_0^{c_4} \int_0^{c_5} \frac{1}{c} \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} e^{-b_1 \theta} \alpha^{a_2-1} e^{-b_2 \alpha}}{\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \left[ \int_0^c \int_0^{c_1} \int_0^{c_2} \int_0^{c_3} \int_0^{c_4} \int_0^{c_5} \frac{1}{c} \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} e^{-b_1 \theta} \alpha^{a_2-1} e^{-b_2 \alpha}} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \theta^{a_1-1} \left(\frac{\theta^2}{\alpha \theta + \beta}\right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n \theta \bar{x}} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} da_1 da_2 d b_1 db_2 dcd d \right]^{-\frac{1}{q}} \right]^{-\frac{1}{q}} \right]$$

$$\frac{\theta^{a_1-1} \left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta}\right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} da_1 da_2 d b_1 db_2 dcd d}{\theta^{a_1-1} \left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta}\right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} da_1 da_2 d b_1 db_2 dcd d] d\theta d\alpha d\beta} \Bigg] d\theta d\alpha d\beta \Bigg]^{-\frac{1}{q}}$$

$u_{12} =$

$$\partial^2 u \left[ \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \left[ \left[ 1 + \frac{\theta\beta x}{\theta\alpha + \beta} \right] e^{-\theta x} \right]^{-q} \frac{\int_0^c \int_0^{c_1} \int_0^{c_2} \int_0^{c_3} \int_0^{c_4} \int_0^{c_5} \frac{1}{c} \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} e^{-b_1\theta\alpha^{a_2-1} e^{-b_2\alpha}}}{\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \left[ \int_0^c \int_0^{c_1} \int_0^{c_2} \int_0^{c_3} \int_0^{c_4} \int_0^{c_5} \frac{1}{c} \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} e^{-b_1\theta\alpha^{a_2-1} e^{-b_2\alpha}} \right]} \right] d\theta d\alpha$$

$$\frac{\theta^{a_1-1} \left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta}\right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} da_1 da_2 d b_1 db_2 dcd d}{\theta^{a_1-1} \left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta}\right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} da_1 da_2 d b_1 db_2 dcd d] d\theta d\alpha d\beta} \Bigg] d\theta d\alpha d\beta \Bigg]^{-\frac{1}{q}}$$

$u_{12} = u_{21}$

$$\partial^2 u \left[ \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \left[ \left[ 1 + \frac{\theta\beta x}{\theta\alpha + \beta} \right] e^{-\theta x} \right]^{-q} \frac{\int_0^c \int_0^{c_1} \int_0^{c_2} \int_0^{c_3} \int_0^{c_4} \int_0^{c_5} \frac{1}{c} \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \alpha^{a_2-1} e^{-b_2\alpha}}{\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \left[ \int_0^c \int_0^{c_1} \int_0^{c_2} \int_0^{c_3} \int_0^{c_4} \int_0^{c_5} \frac{1}{c} \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \alpha^{a_2-1} e^{-b_2\alpha} \right]} \right] d\theta d\alpha$$

$u_{22} =$

$(\theta\alpha)^2$

$$\frac{\theta^{a_1-1} \left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta}\right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} da_1 da_2 d b_1 db_2 dcd d}{\theta^{a_1-1} \left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta}\right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} da_1 da_2 d b_1 db_2 dcd d] d\theta d\alpha d\beta} \Bigg] d\theta d\alpha d\beta \Bigg]^{-\frac{1}{q}}$$

$$\partial^2 u \left[ \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \left[ \left[ 1 + \frac{\theta\beta x}{\theta\alpha + \beta} \right] e^{-\theta x} \right]^{-q} \frac{\int_0^c \int_0^{c_1} \int_0^{c_2} \int_0^{c_3} \int_0^{c_4} \int_0^{c_5} \frac{1}{c} \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} e^{-b_1\theta\alpha^{a_2-1} e^{-b_2\alpha}}}{\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \left[ \int_0^c \int_0^{c_1} \int_0^{c_2} \int_0^{c_3} \int_0^{c_4} \int_0^{c_5} \frac{1}{c} \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} e^{-b_1\theta\alpha^{a_2-1} e^{-b_2\alpha}} \right]} \right] d\theta d\alpha d\beta$$

$u_{13} =$

$\theta\alpha\beta$

$$\frac{\theta^{a_1-1} \left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta}\right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} da_1 da_2 d b_1 db_2 dcd d}{\theta^{a_1-1} \left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta}\right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} da_1 da_2 d b_1 db_2 dcd d] d\theta d\alpha d\beta} \Bigg] d\theta d\alpha d\beta \Bigg]^{-\frac{1}{q}}$$

$$u_{13} = u_{13}$$

$$\partial^2 u \left[ \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \left[ \left[ 1 + \frac{\theta \beta x}{\theta \alpha + \beta} \right] e^{-\theta x} \right]^{-q} \frac{\int_0^c \int_0^{c_1} \int_0^{c_2} \int_0^{c_3} \int_0^{c_4} \int_0^{c_5} \frac{1}{c} \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\Gamma(a_1) \Gamma(a_2)} e^{-b_1 \theta \alpha^{a_2-1} - b_2 \alpha} e^{-b_2 \alpha}}{\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \left[ \int_0^c \int_0^{c_1} \int_0^{c_2} \int_0^{c_3} \int_0^{c_4} \int_0^{c_5} \frac{1}{c} \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\Gamma(a_1) \Gamma(a_2)} e^{-b_1 \theta \alpha^{a_2-1} - b_2 \alpha} e^{-b_2 \alpha} \right]} \right] d\alpha d\beta$$

$$u_{23} =$$

$$\left[ \frac{\theta^{a_1-1} \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} da_1 da_2 d b_1 db_2 dcd d}{\theta^{a_1-1} \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} da_1 da_2 d b_1 db_2 dcd d} d\theta d\alpha d\beta \right]^{-\frac{1}{q}}$$

$$u_{23} = u_{32}$$

$$\partial^2 u \left[ \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \left[ \left[ 1 + \frac{\theta \beta x}{\theta \alpha + \beta} \right] e^{-\theta x} \right]^{-q} \frac{\int_0^c \int_0^{c_1} \int_0^{c_2} \int_0^{c_3} \int_0^{c_4} \int_0^{c_5} \frac{1}{c} \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\Gamma(a_1) \Gamma(a_2)} e^{-b_1 \theta \alpha^{a_2-1} - b_2 \alpha} e^{-b_2 \alpha}}{\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \left[ \int_0^c \int_0^{c_1} \int_0^{c_2} \int_0^{c_3} \int_0^{c_4} \int_0^{c_5} \frac{1}{c} \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\Gamma(a_1) \Gamma(a_2)} e^{-b_1 \theta \alpha^{a_2-1} - b_2 \alpha} e^{-b_2 \alpha} \right]} \right] d\theta d\alpha d\beta$$

$$u_{33} =$$

$$\left[ \frac{\theta^{a_1-1} \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} da_1 da_2 d b_1 db_2 dcd d}{\theta^{a_1-1} \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} da_1 da_2 d b_1 db_2 dcd d} d\theta d\alpha d\beta \right]^{-\frac{1}{q}}$$

$$L_{123} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}}}{\partial \theta \partial \alpha \partial \beta}$$

$$L_{132} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}}}{\partial \theta \partial \beta \partial \alpha}$$

$$L_{213} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}}}{\partial \alpha \partial \theta \partial \beta}$$

$$L_{231} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}}}{\partial \alpha \partial \beta \partial \theta}$$

$$L_{312} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\beta \partial\theta \partial\alpha}$$

$$L_{321} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\beta \partial\alpha \partial\theta}$$

$$L_{112} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\theta \partial\theta \partial\alpha}$$

$$L_{332} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\theta \partial\theta \partial\beta}$$

$$L_{323} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\beta \partial\alpha \partial\beta}$$

$$L_{233} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\alpha \partial\beta \partial\beta}$$

$$L_{113} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\theta \partial\theta \partial\beta}$$

$$L_{131} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\theta \partial\beta \partial\theta}$$

$$L_{311} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\beta \partial\theta \partial\theta}$$

$$L_{233} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\alpha \partial\beta \partial\beta}$$

$$L_{323} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\beta \partial\alpha \partial\beta}$$

$$L_{322} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\beta \partial\alpha \partial\alpha}$$

$$L_{333} = \frac{\partial^3 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\beta \partial\beta \partial\beta}$$

$$\rho_1 = \frac{\partial \text{Log} \left( \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\Gamma(a_1) \Gamma(a_2)} \theta^{a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-b_1 \theta} e^{-b_2 \alpha} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c) \Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} \right)}{\partial \theta}$$

$$\rho_2 = \frac{\partial \text{Log} \left( \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\Gamma(a_1) \Gamma(a_2)} \theta^{a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-b_1 \theta} e^{-b_2 \alpha} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c) \Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} \right)}{\partial \alpha}$$

$$\rho_3 = \frac{\partial \text{Log} \left( \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2}}{\Gamma(a_1) \Gamma(a_2)} \theta^{a_1-1} \alpha^{a_2-1} e^{-b_1 \theta} e^{-b_2 \alpha} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c) \Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} \right)}{\partial \beta}$$

$$\sigma_{11} = - \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{\theta^2}{\alpha \theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n \theta \bar{x}}}{\partial \theta \partial \theta} \right)^{-1}$$

$$\sigma_{12} = - \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{\theta^2}{\alpha \theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n \theta \bar{x}}}{\partial \theta \partial \alpha} \right)^{-1}$$

$$\sigma_{13} = - \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{\theta^2}{\alpha \theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n \theta \bar{x}}}{\partial \theta \partial \beta} \right)^{-1}$$

$$\sigma_{21} = - \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{\theta^2}{\alpha \theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n \theta \bar{x}}}{\partial \beta \partial \theta} \right)^{-1}$$

$$\sigma_{22} = - \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{\theta^2}{\alpha \theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n \theta \bar{x}}}{\partial \alpha \partial \alpha} \right)^{-1}$$

$$\sigma_{23} = - \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{\theta^2}{\alpha \theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n \theta \bar{x}}}{\partial \alpha \partial \beta} \right)^{-1}$$

$$\sigma_{32} = - \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{\theta^2}{\alpha \theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n \theta \bar{x}}}{\partial \beta \partial \alpha} \right)^{-1}$$

$$\sigma_{31} = - \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\beta \partial\theta} \right)^{-1}$$

$$\sigma_{33} = - \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\beta \partial\beta} \right)^{-1}$$

فان المعادلة (2-56) تكون كالآتي:

$$\begin{aligned} \hat{S}_{SBSEL} = \hat{S}_{mle} &+ u_1\rho_1\sigma_{11} + u_1\rho_2\sigma_{12} + +u_1\rho_3\sigma_{13} + 0.5L_{231}u_1\sigma_{23}\sigma_{11} \\ &+ 0.5L_{233}u_1\sigma_{23}\sigma_{31} + 0.5L_{311}u_1\sigma_{31}\sigma_{11} + 0.5L_{312}u_1\sigma_{31}\sigma_{21} \\ &+ 0.5L_{313}u_1\sigma_{31}^2 + 0.5L_{321}u_1\sigma_{32}\sigma_{11} + 0.5L_{323}u_1\sigma_{32}\sigma_{31} \\ &+ 0.5L_{331}u_1\sigma_{33}\sigma_{13} + 0.5L_{332}u_1\sigma_{33}\sigma_{21} + 0.5L_{333}u_1\sigma_{33}\sigma_{31} \\ &+ 0.5L_{111}u_1\sigma_{11}^2 + 0.5L_{112}u_1\sigma_{11}\sigma_{21} \\ &+ 0.5L_{113}u_1\sigma_{11}\sigma_{31} \end{aligned} \quad \dots (2 - 74)$$

علماً أن جميع التكاملات والمشتقات للمعادلات آنفة الذكر تتم اجرائها ضمن الدوال الخاصة ببرنامج ماتلاب لصعوبة حلها يدوياً.

النفس والعالم

الجانح والتجربتي

## (Preface)

## 1 – 3 تمهيد:

تم في هذا الفصل توضيح لمفهوم المحاكاة وما هي المحاكاة وكذلك توظيف أسلوب محاكاة مونت-كارلو (Monte – Carlo Simulation) من حيث أحجام العينات المولدة وكذلك النمذج الافتراضية المستعملة وعرض نتائج تجربة المحاكاة التي تم الحصول عليها في إيجاد مقدرات دالة البقاء بأستعمال طرائق التقدير المذكورة في الفصل الثاني ، أذ شمل هذا الفصل وصفاً لتجارب المحاكاة من حيث توليد البيانات التي تتبع توزيع ليندلي ذي الثلاث معلمات ، بأستعمال المعيار الاحصائي متوسط مربعات الخطاء التكاملي (IMSE) للتوصل الى افضلية مقدرات دالة البقاء بالأعتماد على برنامج كتب بلغة الماتلاب Matlab.

## [29] [39] (Simulation)

## 2-3 المحاكاة:

تعد المحاكاة أسلوب رقمي يستعمل عبر الحاسوب الالكتروني في إيجاد أنموذج مماثل الى الأنموذج الحقيقي من دون المحاولة للحصول على الأنموذج الحقيقي نفسه، ويمكن القول أن أسلوب المحاكاة هي أنواعا من العمليات المنطقية والرياضية تمثيل وتقليد للواقع الحقيقي لوصف سلوك الظواهر الحقيقية الواقعية المعقدة صعبة الفهم والتحليل، ووصف سلوكها خلال فترة زمنية معينة ،عبر الحصول على بيانات تقريبية لدراسة تلك الظواهر في حال استحالة الحصول على تلك البيانات او عدم توفرها بشكل كافٍ وتوفر المحاكاة على الباحثين الكثير من الوقت والجهد والمال من خلال الحصول على المشاهدات المطلوبة من دون اللجوء للحصول عليها ميدانيا لذلك تضاعفت طرائق المحاكاة لأنها الطريقة الأفضل التي يمكننا التعامل معها لمساعدة الباحثين في الدراسة.

ومن أهم ميزات طرق المحاكاة هي المرونة التامة عبر إعطاء معلومات دقيقة عن الواقع التي يمثلها وكذلك تعطي القدرة على التجريب والتكرار لمرات عديدة بتغيير المدخلات الخاصة في كل مرة، و تفسير المدخلات الخاصة بعمليات التقدير ، و توليد سلسلة من الأرقام العشوائية في التجربة الأولى تكون مستقلة عن سلسلة الأرقام العشوائية في التجربة الثانية مما يعطيها ميزة فريدة في العشوائية المتبعة في توليد الأرقام العشوائية ، فظلاً عن حجوم العينات المختلفة، والقيم الافتراضية للمعلمات التي يتم اخذها بنظر الاعتبار لغرض التحليل الاحصائي الدقيق وتوجد طرائق مختلفة للمحاكاة ومنها طريقة (Mont – Carlo Method) والطريقة التناظرية (Analog Method) والطريقة المختلطة (Mixed Method) وتعد طريقة مونت-كارلو من أهم طرائق

المحاكاة والأكثر شيوعاً التي تستعمل لتوليد سلسلة من المشاهدات للتوزيعات الاحتمالية التي تمتلك دوال كثافة احتمالية معروفة، وقد أستعملت بشكل واسع في المجالات العلمية لمحاكاة الأنموذج العشوائي المدروس ، وان عملية التكرار تعتمد بشكل اساسي على تقنيات الحاسوب الإلكتروني المستعمل ومن ثم تحديد الأسلوب المناسب لغرض المقارنة بين الطرق الاحصائية المختلفة .

### 3-3 وصف مراحل تجارب المحاكاة: (Description Simulation Experiments)

لقد تضمنت تجارب المحاكاة عدة مراحل اساسية لتطبيق أساليب تقدير دالة البقاء وكالاتي:

#### 3-3-1 المرحلة الأولى تحديد القيم الافتراضية: (Initial Values Determination )

تعد مرحلة تحديد القيم الافتراضية من أهم المراحل التي تعتمد عليها بقية المراحل اللاحق وقد تم اختيار القيم الافتراضية كالاتي:

1. تحديد القيم الافتراضية للمعلمات: عن طريق القيام بتجارب متكررة وفحص واختبار النتائج التي يتم الحصول عليها والتي اعطت فكرة واضحة عن المقدرات ونمط سلوكها أذ جرى تحديد تسع نماذج موضحة في الجدول (1-3) الاتي:

جدول (3-1) النمادج المقترحة والقيم الافتراضية للمعلمات

Experiment	$\theta$	$\alpha$	$\beta$
1	2	3	3
2	2	3.5	2
3	2	4	4
4	2.5	3.5	4
5	2.5	4	2
6	2.5	4.5	2

7	3.5	4.5	2
8	3.5	5	1
9	3.5	5.5	4

2. تحديد عدة قيم لحجم العينة (n) لغرض معرفة مدى تأثير حجم العينة على دقة النتائج المستحصلة من طرائق التقدير تم اختيار خمسة أحجام للعينات هي (n=10, 25, 50, 75, 100).

3. تكرار كل تجربة كان مساوي الى  $L = 1000$  لغرض الحصول على تجانس عال.

### 3-3-2 المرحلة الثانية توليد الأرقام العشوائية: (Data Generatio) [25] [3]

يتم في هذه المرحلة توليد البيانات التي تتبع توزيع ليندلي بالمعلمات  $(\alpha, \beta, \theta)$  على وفق الخطوات التالية:

1- توليد الاعداد العشوائية التي تتبع التوزيع المنتظم المستمر (Uniform Distribution) التي تقع ضمن المدة  $[0, 1]$  بالاعتماد على الدالة (Rand) في برنامج ما تلاب .

2- استعمال طريقة التحويل المعكوس (Inverse Function) عن طريق أستعمال دالة الكثافة التجميعية لتوزيع ليندلي ذي الثلاث معلمات بمساواة دالة التوزيع التراكمية للتوزيع بالرقم العشوائي التي تم توليدها في الخطوة (1) وكالاتي:

$$u = F(x, \theta, \alpha, \beta)$$

$$u = 1 - \left[ 1 + \frac{\theta\beta x}{\theta\alpha + \beta} \right] e^{-\theta x} \quad \dots (3-1)$$

ومن معادلة (3-1) نجد قيم المتغير العشوائي x التي يتبع توزيع ليندلي ذي الثلاث معلمات وكالاتي:

$$X = F^{-1}(U)$$

وبمأن المعادلة (3-1) معادلة ضمنية وغير خطية لا يمكن منها الحصول على قيم (x) بصورة تحليلية لذا سيتم أستعمال واحدة من الدوال الرياضية المهمة في إيجاد قيم (x)

والتي تستعمل في مثل هكذا حالات وهي الدالة الرياضية (Lambert W function) وكالاتي:

$$F(x, \alpha, \beta, \theta) = 1 - \left[ 1 + \frac{\theta\beta x}{\theta\alpha + \beta} \right] e^{-\theta x}$$

$$u = 1 - \left[ 1 + \frac{\theta\beta x}{\theta\alpha + \beta} \right] e^{-\theta x}$$

$$1 - u = \left[ 1 + \frac{\theta\beta x}{\theta\alpha + \beta} \right] e^{-\theta x}$$

$$(1 - u)e^{\theta x} = \left[ 1 + \frac{\theta\beta x}{\theta\alpha + \beta} \right]$$

$$(1 - u)e^{\theta x} = \left[ \frac{\theta\beta x + \theta\alpha + \beta}{\theta\alpha + \beta} \right]$$

$$\beta + \theta\alpha + \theta\beta x = (\beta + \theta\alpha)(1 - u)e^{\theta x}$$

بالضرب في  $\frac{1}{\beta}$  ينتج

$$\frac{\beta + \theta\alpha + \theta\beta x}{\beta} = \frac{(\theta\alpha + \beta)(1 - u)e^{\theta x}}{\beta}$$

$$\frac{\beta + \theta\alpha}{\beta} + \theta x = \frac{\beta + \theta\alpha}{\beta} (1 - u)e^{\theta x}$$

بإضافة المقدار  $-\frac{\theta\alpha + \beta}{\theta}$  نحصل على :

$$\frac{\beta + \theta\alpha}{\beta} + \theta x - \frac{1}{\beta}(\beta + \theta\alpha)e^{\theta x} - \frac{\theta\alpha + \beta}{\theta} = \frac{\beta + \theta\alpha}{\theta}(1 - u)e^{\theta x} - \frac{1}{\beta}(\beta + \theta\alpha)e^{\theta x} - \frac{\theta\alpha + \beta}{\theta}$$

$$\theta x - \frac{1}{\beta}(\beta + \theta\alpha)e^{\theta x} = -\frac{\theta\alpha + \beta}{\beta}$$

$$-\frac{1}{\beta}(\beta + \theta\alpha)e^{\theta x} = -\theta x - \frac{\theta\alpha + \beta}{\beta} \quad \dots (3 - 2)$$

بضرب طرفي المعادلة (2 - 3) بالمقدار  $e^{-\theta x - \frac{\theta\alpha + \beta}{\beta}}$  نحصل على

$$\left[ -\frac{1}{\beta}(1-u)(\beta + \theta\alpha) \right] e^{-\frac{\theta\alpha + \beta}{\beta}} = \left[ -\theta x - \frac{\theta\alpha + \beta}{\beta} \right] e^{-\theta x - \frac{\theta\alpha + \beta}{\beta}}$$

$$\text{constant} = (w)e^{-w} \quad \dots (3-3)$$

$$\text{constant} = -\frac{1}{\beta}(1-u)(\beta + \theta\alpha)e^{-\frac{\theta\alpha + \beta}{\beta}}, \quad w = -\theta x - \frac{\theta\alpha + \beta}{\beta} \quad \text{أذ أن :}$$

وطالمان  $u \in (0,1)$  ، ذلك يعني يجب أن نأخذ بالحسبان جزء دالة لامبرت السالب (Negative Lamber W function) كالآتي:

$$W_{-1} \left[ -\frac{1}{\beta}(1-u)(\beta + \theta\alpha)e^{-\frac{\theta\alpha + \beta}{\beta}} \right] = \left( -\theta x - \frac{\theta\alpha + \beta}{\beta} \right) e^{-\theta x - \frac{\theta\alpha + \beta}{\beta}}$$

والتي يؤدي الى:

$$x = -\frac{\theta\alpha + \beta}{\beta} - \frac{1}{\beta} W_{-1} \left[ -\frac{1}{\beta}(1-u)(\beta + \theta\alpha)e^{-\frac{\theta\alpha + \beta}{\beta}} \right] \quad \dots (3-4)$$

### **3-3-3 المرحلة الثالثة أيجاد المقدرات: (Estimators finding)**

وفي هذه المرحلة يتم فيها أيجاد مقدرات دالة البقاء لتوزيع ليندلي ذي الثلاث معلمات بأستعمال طراق التقدير التي تم عرضها في الفصل الثاني من الرسالة وفق الصيغ (2-27) و (2-33) و (2-42) و (2-43) و (2-49) و (2-50) وكالآتي:

1. مقدر بيز القياسي المعلوماتي في ظل دالة خسارة تربيعية.
2. مقدر بيز القياسي المعلوماتي في ظل دالة خسارة انتروبي العامة.
3. مقدر توقع بيز في ظل دالة خسارة تربيعية.
4. مقدر توقع بيز في ظل دالة خسارة انتروبي العامة.
5. مقدر بيز الهرمي في ظل دالة خسارة تربيعية.
6. مقدر بيز الهرمي في ظل دالة خسارة انتروبي العامة.

وذلك بأستعمال تقريب ليندلي (Lindely approximation) بموجب الصيغة (55-2) في الجانب النظري في ظل دوال الخسارة التي تم تحديدها ولكل معلمة تم افتراض توزيع اولي وكالاتي:

$$\theta \sim \text{Gamma}(a_1, b_1), \quad \alpha \sim \text{Gamma}(a_2, b_2), \quad \beta \sim \text{Beta}(c, d)$$

أقترح (Press(2001) أستعمال قيم موجبة صغيرة جدا للمعلمات الفوقية في التوزيع الاولي ، لذلك سنفترض أن :

$$(a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = c = d = 0.1e^{-11})$$

### 3-3-4 المرحلة الرابعة المقارنة بين طرائق التقدير: (Comparing Methods) [23]

المرحلة الأخيرة من مراحل تجربة المحاكاة تأتي مرحلة المقارنة بين مقدرات دالة البقاء بالاعتماد على المعيار الاحصائي متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) وهو فضل من متوسط مربعات الخطأ لكون (MSE) يحسب لكل  $(t_i)$  من الزمن لكن (IMSE) يمثل بمثابة التكامل للمساحة الكلية لـ  $(t_i)$  واختزلها بقيمة واحدة العامة ممثلة للزمن، أو معبرة عن الزمن الكلي وصيغة هذا المقياس تكون كما يأتي:

$$\begin{aligned} \text{IMSE}(\hat{S}(t_i)) &= \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \left\{ \frac{1}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} (\hat{S}_j(t_i) - S_j(t_i))^2 \right\} \\ &= \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \text{MSE}(\hat{S}_j(t_i)) \end{aligned} \quad (3 - 5)$$

أذ إن:

L: تمثل عدد مرات تكرار التجربة وهو (1000) مرة.

$n_t$ : هي معبرة عن حدود المتغير  $(t_i)$  من الحد الأدنى الى الحد الأعلى .

$\hat{S}(t_i)$ : القيمة المقدرة لدالة البقاء وقف طرائق التقدير المستعملة .

### 3-4 تحليل تجارب المحاكاة: (Simulation Experiments Analyses)

سيتم في هذا المبحث عرض نتائج تجارب المحاكاة وتحليلها لتقدير دالة البقاء بحسب الطرائق المبينة في الجانب النظري من هذه الرسالة حيث تم الحصول على هذه النتائج عبر برنامج كتب بأستعمال

برنامج ما تلاب وتم عرض النتائج في الجداول (3-2) الى (3-11) والتي تضمنت بعض المختصرات والرموز والتي يمكن توضيحها كالاتي:

$t_i$ : تمثل أوقات البقاء لحين الفشل والتي تعد عينة تمثل التوزيع الاحتمالي ليندلي ذي الثلاث معلمات.

$S(t)$ : دالة البقاء الحقيقية (الأفتراضية) وهي في حالة تناقص.

$\hat{S}(t)_{SBSEL}$ : دالة البقاء المقدره بطريقة بيز القياسية المعلوماتية في ظل دالة خسارة التربيعية لـ (1000) تجربة.

$\hat{S}(t)_{SBEL}$ : دالة البقاء المقدره بطريقة بيز القياسية المعلوماتية في ظل دالة خسارة انتروبي العامة لـ (1000) تجربة وهي في حالة تناقص.

$\hat{S}(t)_{EBSEL}$ : دالة البقاء المقدره بطريقة توقع بيز في ظل دالة خسارة التربيعية لـ (1000) تجربة وهي في حالة تناقص.

$\hat{S}(t)_{EBEL}$ : دالة البقاء المقدره بطريقة توقع بيز في ظل دالة خسارة انتروبي العامة لـ (1000) تجربة وهي في حالة تناقص.

$\hat{S}(t)_{HBSEL}$ : دالة البقاء المقدره بطريقة بيزا الهرمي في ظل دالة خسارة التربيعية لـ (1000) تجربة وهي في حالة تناقص.

$\hat{S}(t)_{HBEL}$ : دالة البقاء المقدره بطريقة بيزا الهرمي في ظل دالة خسارة انتروبي العامة لـ (1000) تجربة وهي في حالة تناقص.

IMSE: متوسط مربعات الخطأ التكاملية عند طرائق التقدير.

جدول (3-2) القيم الحقيقية والتقديرية لدالة البقاء بموجب طرائق التقدير وقيمة متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) لكل طريقة عند أحجام العينات المفترضة للأنموذج الاول

		Model 1			$\theta = 3$	$\alpha = 3$	$\beta = 2$		
n	$t_i$	Real(S(t))	$\hat{S}(t)_{SBSEL}$	$\hat{S}(t)_{SBEL}$	$\hat{S}(t)_{EBSEL}$	$\hat{S}(t)_{EBEL}$	$\hat{S}(t)_{HBSEL}$	$\hat{S}(t)_{HBEL}$	
10	0.07604	0.90246	0.99637	0.95000	0.99619	0.91500	0.95238	0.99733	
	0.10025	0.87301	0.98993	0.90000	0.98969	0.82500	0.90476	0.99199	
	0.23638	0.72150	0.98131	0.85000	0.98107	0.77500	0.85714	0.98449	
	0.55263	0.45312	0.97074	0.80000	0.97053	0.52500	0.80952	0.97501	
	0.68941	0.36764	0.95837	0.75000	0.95824	0.37500	0.76190	0.96365	
	1.12223	0.18528	0.94433	0.70000	0.94430	0.15500	0.71429	0.95053	
	1.53320	0.09421	0.92872	0.65000	0.92881	0.07500	0.66667	0.93572	
	1.58337	0.08662	0.91165	0.60000	0.91187	0.02500	0.61905	0.91930	
	2.00333	0.04249	0.89321	0.55000	0.89358	0.07500	0.57143	0.90137	
	2.11434	0.03511	0.87351	0.50000	0.87402	0.02500	0.52381	0.88201	
IMSE			0.00160	0.06683	0.00178	0.00128	0.05577	0.05942	
Best			$\hat{S}(t)_{EBEL}$						
25	0.02417	0.96817	0.99770	0.97561	0.99752	0.98750	0.99813	0.97500	
	0.02715	0.96429	0.99267	0.95122	0.99233	0.96250	0.99374	0.95000	
	0.03525	0.95383	0.98535	0.92683	0.98490	0.93750	0.98713	0.92500	
	0.07571	0.90287	0.97595	0.90244	0.97542	0.91250	0.97844	0.90000	
	0.11275	0.85811	0.96459	0.87805	0.96403	0.88750	0.96778	0.87500	
	0.12613	0.84239	0.95139	0.85366	0.95085	0.86250	0.95522	0.85000	
	0.13784	0.82881	0.93646	0.82927	0.93596	0.83750	0.94086	0.82500	
	0.23485	0.72308	0.91991	0.80488	0.91948	0.81250	0.92479	0.70000	
	0.35526	0.60777	0.90184	0.78049	0.90149	0.78750	0.90709	0.57500	
	0.38924	0.57824	0.88235	0.75610	0.88212	0.76250	0.88788	0.55000	
IMSE			0.00074	0.01002	0.00088	0.00854	0.01079	0.00062	
Best			$\hat{S}(t)_{HBEL}$						
50	0.02618	0.96555	0.99807	0.99167	0.99836	0.99789	0.98361	0.97333	

	0.09362	0.88100	0.99350	0.97500	0.99425	0.99314	0.96721	0.86667
	0.11000	0.86138	0.98665	0.95833	0.98791	0.98612	0.95082	0.85000
	0.11902	0.85071	0.97767	0.94167	0.97947	0.97701	0.93443	0.83333
	0.13042	0.83739	0.96668	0.92500	0.96900	0.96593	0.91803	0.82667
	0.15156	0.81313	0.95379	0.90833	0.95660	0.95298	0.90164	0.82000
	0.16018	0.80340	0.93910	0.89167	0.94236	0.93826	0.88525	0.81333
	0.18476	0.77619	0.92273	0.87500	0.92636	0.92189	0.86885	0.86667
	0.20301	0.75648	0.90477	0.85833	0.90870	0.90396	0.85246	0.775000
	0.21011	0.74892	0.88535	0.84167	0.88950	0.88459	0.83607	0.73333
<b>IMSE</b>			<b>0.00048</b>	<b>0.00203</b>	<b>0.00263</b>	<b>0.00060</b>	<b>0.00280</b>	<b>0.00041</b>
<b>Best</b>			<b><math>\hat{S}(t)_{HBEL}</math></b>					
75	0.00348	0.99537	0.99852	0.99852	0.99816	0.99375	0.98750	0.98765
	0.00897	0.98810	0.99465	0.99465	0.99378	0.98125	0.97500	0.97531
	0.03796	0.95035	0.98858	0.98858	0.98717	0.96875	0.96250	0.96296
	0.04132	0.94605	0.98041	0.98041	0.97847	0.95625	0.95000	0.95062
	0.05861	0.92415	0.97022	0.97022	0.96778	0.94375	0.93750	0.93827
	0.05870	0.92403	0.95807	0.95807	0.95521	0.93125	0.92500	0.92593
	0.06046	0.92182	0.94406	0.94406	0.94084	0.91875	0.91250	0.91358
	0.06497	0.91618	0.92826	0.92826	0.92478	0.90625	0.90000	0.90123
	0.06547	0.91556	0.91079	0.91079	0.90711	0.89375	0.88750	0.88889
	0.08347	0.89335	0.89173	0.89173	0.88796	0.88125	0.87500	0.87654
<b>IMSE</b>			<b>0.00034</b>	<b>0.00081</b>	<b>0.00046</b>	<b>0.00031</b>	<b>0.00077</b>	<b>0.00051</b>
<b>Best</b>			<b><math>\hat{S}(t)_{EBEL}</math></b>					
100	0.01162	0.98460	0.99854	0.99819	0.99010	0.99500	0.99000	0.99854
	0.02216	0.97078	0.99466	0.99379	0.98020	0.98500	0.98000	0.99466
	0.03281	0.95698	0.98854	0.98711	0.97030	0.97500	0.97000	0.98854
	0.04589	0.94022	0.98026	0.97829	0.96040	0.96500	0.96000	0.98026
	0.06281	0.91887	0.96992	0.96744	0.95050	0.95500	0.95000	0.96992
	0.06633	0.91448	0.95760	0.95467	0.94059	0.94500	0.94000	0.95760
	0.07516	0.90355	0.94337	0.94006	0.93069	0.93500	0.93000	0.94337

0.08713	0.88888	0.92735	0.92373	0.92079	0.92500	0.92000	0.92735
0.09231	0.88258	0.90962	0.90578	0.91089	0.91500	0.91000	0.90962
0.10441	0.86803	0.87500	0.90478	0.90089	0.90500	0.90000	0.90000
IMSE		0.00027	0.00024	0.00025	0.00038	0.00026	0.00015
Best		$\hat{S}(t)_{HBEL}$					

يتضح من خلال الجدول (3-2) والاشكال (3-1) الى (3-5) وعند القيم الافتراضية للمعاملات  $\theta = 3$ ,  $(\alpha=3, \beta=2)$  ومن خلال استخدام المعيار الاحصائي متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) للمقارنة بين افضلية الطرائق المستخدمة لتقدير دالة البقاء ولأحجام العينات المختلفة كانت النتائج كما يأتي:

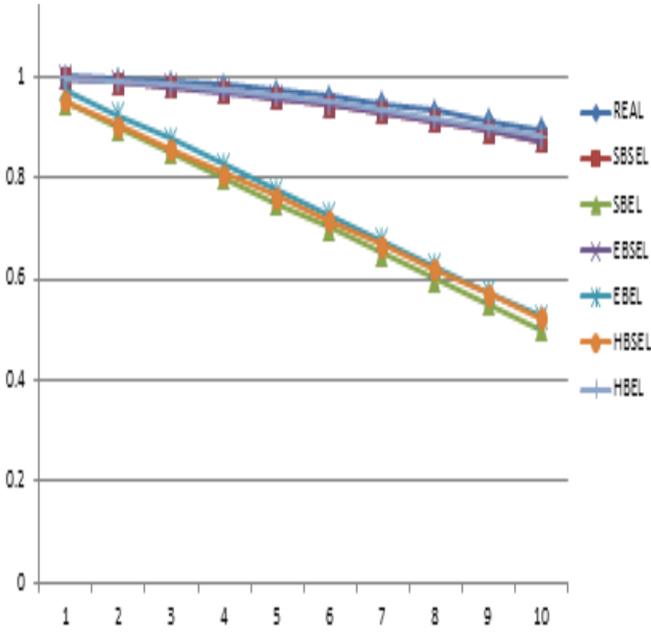
❖ عند حجم عينة (10) كانت طريقة توقع بيز في ظل دالة خسارة انتروبي العامة  $\hat{S}(t)_{EBEL}$  هي الأفضل في تقدير دالة البقاء كونها قد سجلت اقل متوسط مربعات خطأ تكاملي بلغ (IMSE = 0.00128).

❖ عند حجم عينة (25) كانت طريقة بيز الهرمي في ظل دالة انتروبي العامة  $\hat{S}(t)_{HBEL}$  هي الأفضل في تقدير دالة البقاء كونها قد سجلت اقل قيمة متوسط مربعات خطأ تكاملي بلغ (IMSE = 0.00062).

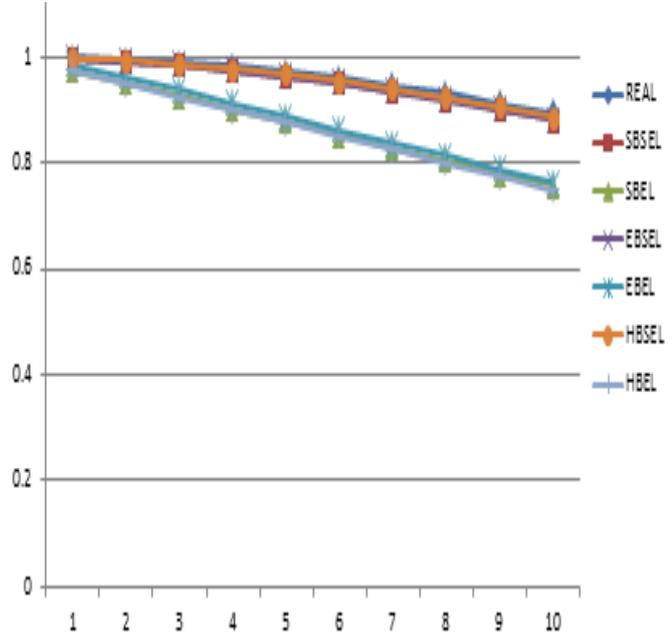
❖ عند حجم عينة (50) كانت طريقة بيز الهرمي في ظل دالة انتروبي العامة  $\hat{S}(t)_{HBEL}$  هي الأفضل في تقدير دالة البقاء كونها قد سجلت اقل قيمة متوسط مربعات خطأ تكاملي بلغ (IMSE = 0.00041).

❖ عند حجم عينة (75) كانت طريقة توقع بيز في ظل دالة خسارة انتروبي العامة  $\hat{S}(t)_{EBEL}$  هي الأفضل في تقدير دالة البقاء كونها سجلت اقل قيمة لمتوسط مربعات الخطأ التكاملي بلغ (IMSE = 0.00031).

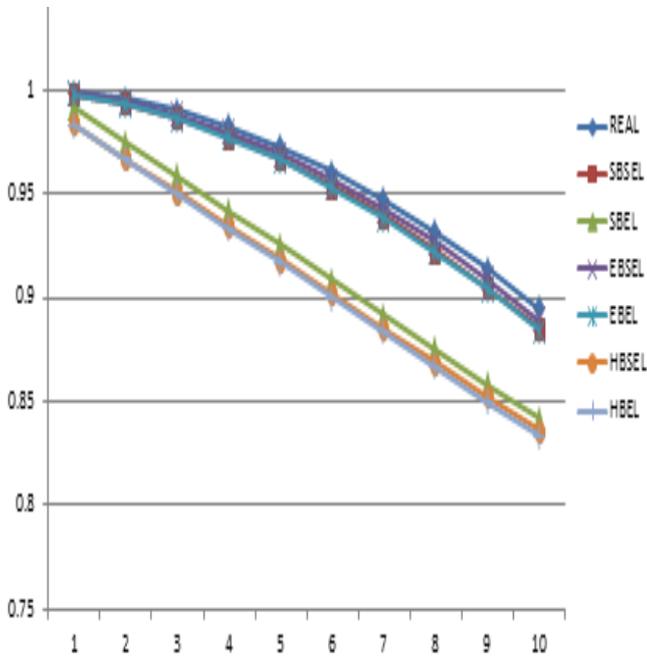
❖ عند حجم عينة (100) كانت طريقة بيز الهرمي في ظل دالة خسارة انتروبي العامة  $\hat{S}(t)_{HBEL}$  هي الأفضل في تقدير دالة البقاء كونها قد سجلت اقل قيمة لمتوسط مربعات الخطأ التكاملي بلغ (IMSE = 0.00015).



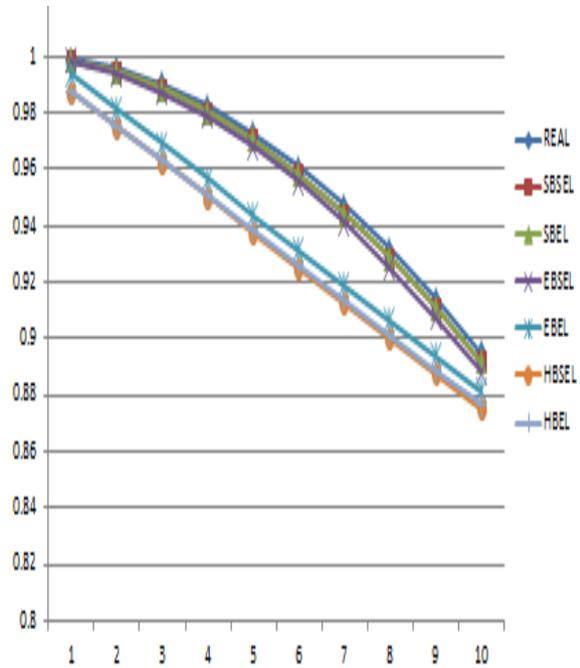
شكل (3-1) دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n=10)



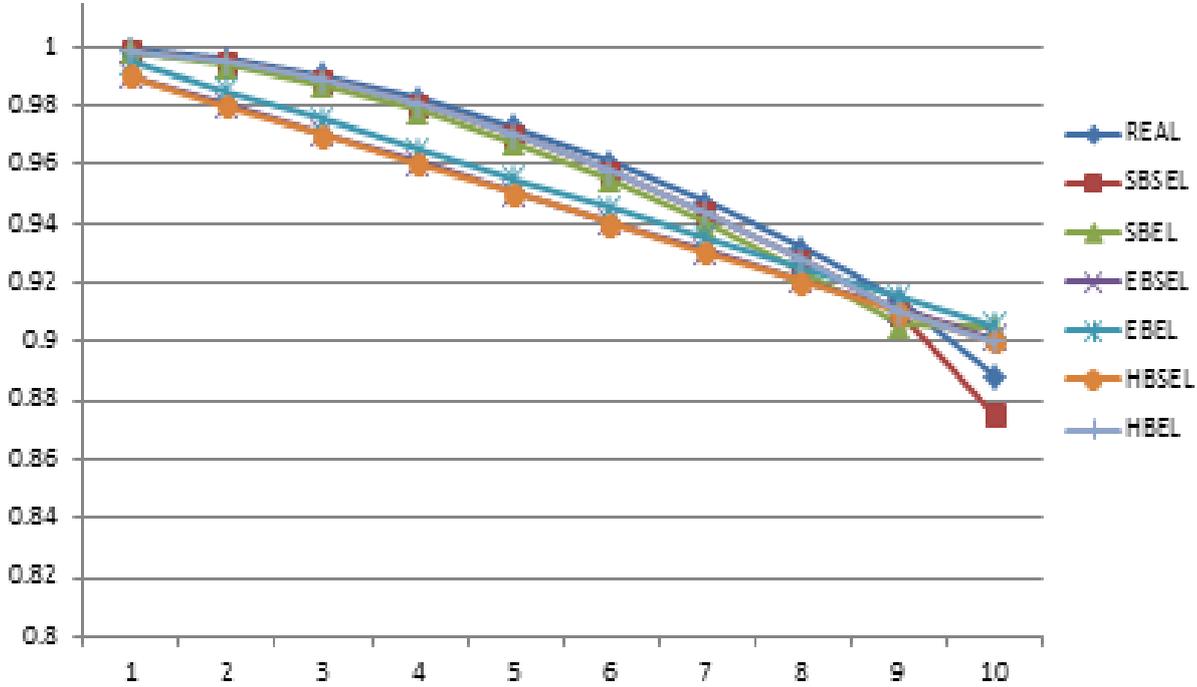
شكل (3-2) دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n=25)



شكل (3-3) دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n=50)



شكل (3-4) دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n=75)



شكل (3-5) دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n=100)

جدول (3-3) القيم الحقيقية والتقديرية لدالة البقاء بموجب طرائق التقدير وقيمة متوسط مربعات الخطأ التكاملية (IMSE) لكل طريقة عند أحجام العينات المفترضة للأنموذج الثاني

Model 2		$\theta = 2$	$\alpha = 3.5$	$\beta = 2$				
n	$t_i$	Real(S(t))	$\hat{S}(t)_{SBSSEL}$	$\hat{S}(t)_{SBEL}$	$\hat{S}(t)_{EBSEL}$	$\hat{S}(t)_{EBEL}$	$\hat{S}(t)_{HBSEL}$	$\hat{S}(t)_{HBEL}$
10	0.02469	0.96226	0.97722	0.95000	0.99710	0.99796	0.95238	0.97500
	0.06654	0.90129	0.92226	0.90000	0.99210	0.99386	0.90476	0.92500
	0.09384	0.86345	0.92111	0.85000	0.98543	0.98810	0.85714	0.87500
	0.19296	0.73813	0.75739	0.80000	0.97729	0.98082	0.80952	0.82500
	0.25866	0.66464	0.66779	0.75000	0.96777	0.97209	0.76190	0.77500
	0.70569	0.32027	0.35686	0.70000	0.95695	0.96200	0.71429	0.72500
	0.78897	0.27877	0.24470	0.65000	0.94491	0.95059	0.66667	0.67500
	0.97532	0.20382	0.23135	0.60000	0.93170	0.93792	0.61905	0.62500
	1.31181	0.11483	0.11690	0.55000	0.91739	0.92405	0.57143	0.57500
	1.47459	0.08671	0.08132	0.50000	0.90204	0.90902	0.52381	0.52500

IMSE			0.00093	0.07386	0.00132	0.00119	0.06605	0.06227
Best			$\hat{S}(t)_{SBSL}$					
25	0.01868	0.97133	0.99808	0.97500	0.99785	0.98750	0.98850	0.97561
	0.01991	0.96946	0.99403	0.95000	0.99358	0.96250	0.97504	0.95122
	0.02782	0.95757	0.98821	0.92500	0.98759	0.93750	0.96988	0.92683
	0.03942	0.94038	0.98079	0.90000	0.98003	0.91250	0.95312	0.90244
	0.04751	0.92855	0.97187	0.87500	0.97100	0.88750	0.94485	0.87805
	0.11733	0.83207	0.96152	0.85000	0.96058	0.86250	0.86512	0.85366
	0.12886	0.81708	0.94982	0.82500	0.94885	0.83750	0.85400	0.82927
	0.17453	0.76007	0.93685	0.80000	0.93587	0.81250	0.74154	0.80488
	0.40035	0.52891	0.92266	0.77500	0.92170	0.78750	0.52779	0.78049
	0.41072	0.52008	0.90734	0.75000	0.90642	0.76250	0.53283	0.75610
IMSE			0.00057	0.01366	0.00073	0.01114	0.00045	0.01279
Best			$\hat{S}(t)_{HBSL}$					
50	0.01003	0.98451	0.99167	0.99858	0.99841	0.99881	0.98361	0.98333
	0.03471	0.94732	0.97500	0.99520	0.99485	0.96582	0.96721	0.96667
	0.04000	0.93953	0.95833	0.99012	0.98961	0.94118	0.95082	0.95000
	0.05584	0.91653	0.94167	0.98344	0.98281	0.93497	0.93443	0.93333
	0.06514	0.90327	0.92500	0.97523	0.97451	0.92724	0.91803	0.91667
	0.07187	0.89378	0.90833	0.96557	0.96479	0.86804	0.90164	0.90000
	0.09136	0.86683	0.89167	0.95451	0.95371	0.85742	0.88525	0.88333
	0.10371	0.85013	0.87500	0.94213	0.94133	0.84542	0.86885	0.86667
	0.11676	0.83283	0.85833	0.92847	0.92771	0.93212	0.85246	0.85000
	0.12151	0.82661	0.84167	0.91362	0.91291	0.81755	0.83607	0.83333
IMSE			0.00334	0.00032	0.00044	0.00027	0.00407	0.00429
Best			$\hat{S}(t)_{EBEL}$					
75	0.01462	0.97749	0.99870	0.99853	0.98887	0.99375	0.98765	0.98750
	0.02128	0.96740	0.99547	0.99509	0.97595	0.98125	0.97531	0.97500
	0.02194	0.96640	0.99052	0.98993	0.96136	0.96875	0.96296	0.96250
	0.04570	0.93119	0.98396	0.98317	0.95518	0.95625	0.95062	0.95000
	0.06098	0.90918	0.97585	0.97489	0.92747	0.94375	0.93827	0.93750

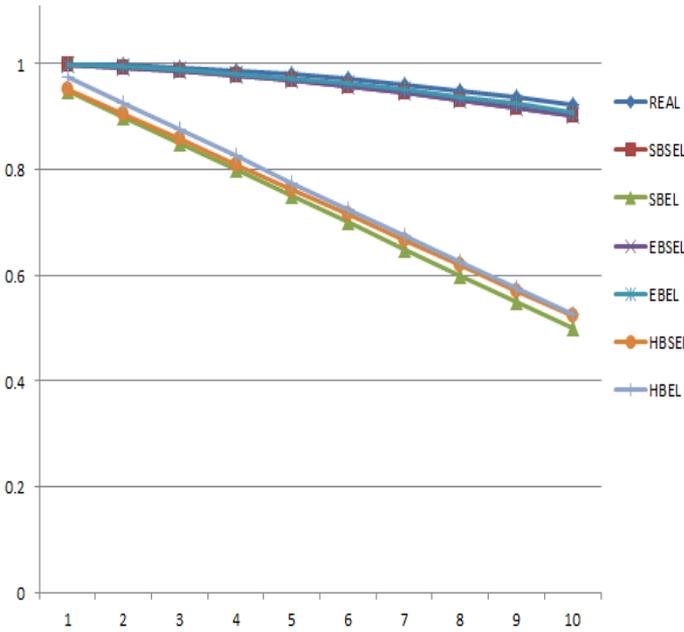
	0.06337	0.90577	0.96627	0.96516	0.91826	0.93125	0.92593	0.92500
	0.07145	0.89437	0.95527	0.95404	0.85762	0.91875	0.91358	0.91250
	0.07297	0.89223	0.94291	0.94159	0.84560	0.90625	0.90123	0.90000
	0.08221	0.87939	0.92928	0.92789	0.83225	0.89375	0.88889	0.88750
	0.08759	0.87199	0.91442	0.91300	0.81764	0.88125	0.87654	0.87500
IMSE			0.000182	0.000274	0.000151	0.00181	0.00225	0.00234
Best	$\hat{S}(t)_{EBSEL}$							
100	0.00074	0.99885	0.99877	0.99861	0.99000	0.99500	0.99010	0.99893
	0.00433	0.99328	0.99564	0.99530	0.98000	0.98500	0.98020	0.99606
	0.02338	0.96424	0.99080	0.99029	0.97000	0.97500	0.97030	0.99154
	0.04213	0.93641	0.98433	0.98368	0.96000	0.96500	0.96040	0.98542
	0.04514	0.93201	0.97631	0.97554	0.95000	0.95500	0.95050	0.97774
	0.06118	0.90889	0.96679	0.96593	0.94000	0.94500	0.94059	0.96856
	0.07157	0.89420	0.95584	0.95492	0.93000	0.93500	0.93069	0.95794
	0.07435	0.89030	0.94352	0.94257	0.92000	0.92500	0.92079	0.94591
	0.08120	0.88079	0.92990	0.92894	0.91000	0.91500	0.91089	0.93255
	0.08133	0.88060	0.91505	0.91411	0.90000	0.90500	0.90099	0.91791
IMSE			0.000179	0.000266	0.00064	0.00042	0.00061	0.000148
Best	$\hat{S}(t)_{HBEL}$							

يتضح من خلا الجدول (3-3) والاشكل (3-6) الى (3-10) عند القيم الافتراضية للمعلمات  $(\theta=2, \alpha=3.5)$  ومن خلال استخدام المعيار الاحصائي متوسط مربعات الخطأ التكاملية (IMSE) للمقارنة بين أفضلية الطرائق المستخدمة لتقدير دالة البقاء لأحجام العينات المختلفة يمكن تفسير نتائج الجدول كما يلي :

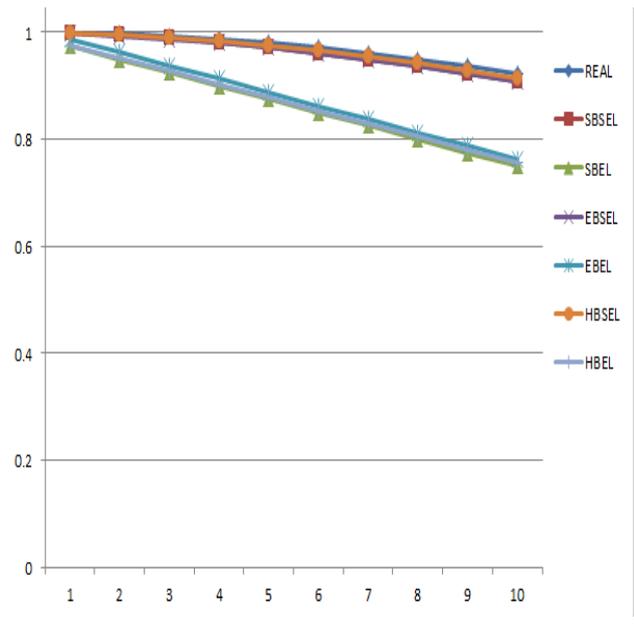
- ❖ عند حجم عينة (10) كانت طريقة بيز القياسية في ظل دالة خسارة تربيعية  $\hat{S}(t)_{SBSEL}$  هي الأفضل في تقدير دالة البقاء كونها قد سجلت اقل قيمة لمتوسط مربعات خطأ تكاملي بلغ (IMSE = 0.00093).
- ❖ عند حجم عينة (25) كانت طريقة بيز الهرمي في ظل دالة خسارة تربيعية  $\hat{S}(t)_{HBSEL}$  هي الأفضل لتقدير دالة البقاء كونها قد سجلت اقل قيمة لمتوسط مربعات الخطأ التكاملية بلغ (IMSE = 0.00045).
- ❖ عند حجم عينة (50) كانت طريقة توقع بيز القياسية في ظل دالة خسارة انتروبي العامة  $\hat{S}(t)_{EBEL}$  هي الأفضل لتقدير دالة البقاء كونها قد سجلت اقل قيمة لمتوسط مربعات الخطأ التكاملية بلغ (IMSE = 0.00027).

❖ عند حجم عينة (75) كانت طريقة توقع بيز في ظل دالة خسارة تربيعية  $\hat{S}(t)_{EBSEL}$  هي الأفضل لتقدير دالة البقاء كونها قد سجلت اقل قيمة لمتوسط مربعات الخطأ التكاملي بلغ (IMSE = 0.000151).

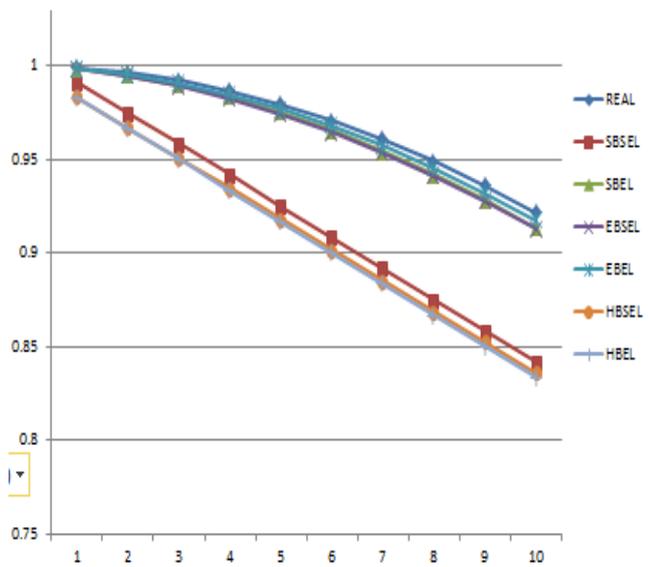
❖ عند حجم عينة (100) كانت طريقة بيز الهرمي في ظل دالة خسارة انتروبي العامة  $\hat{S}(t)_{HBEL}$  هي الأفضل لتقدير دالة البقاء كونها قد سجلت اقل قيمة لمتوسط مربعات الخطأ التكاملي بلغ (IMSE = 0.000148).



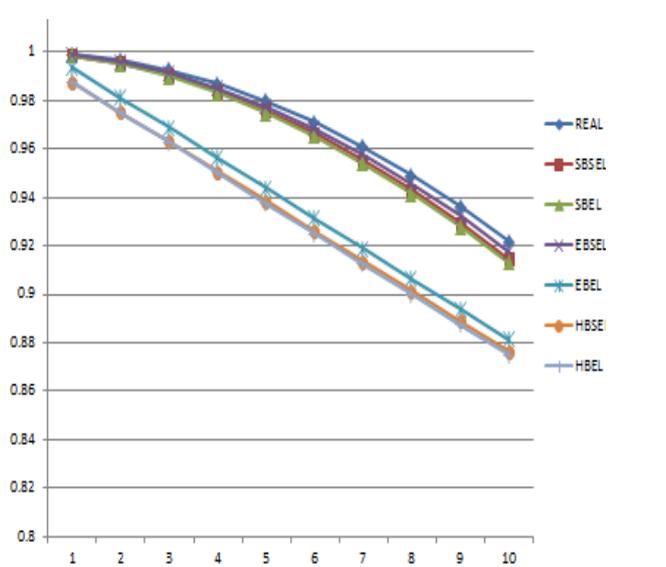
شكل (3-6) دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n= 10)



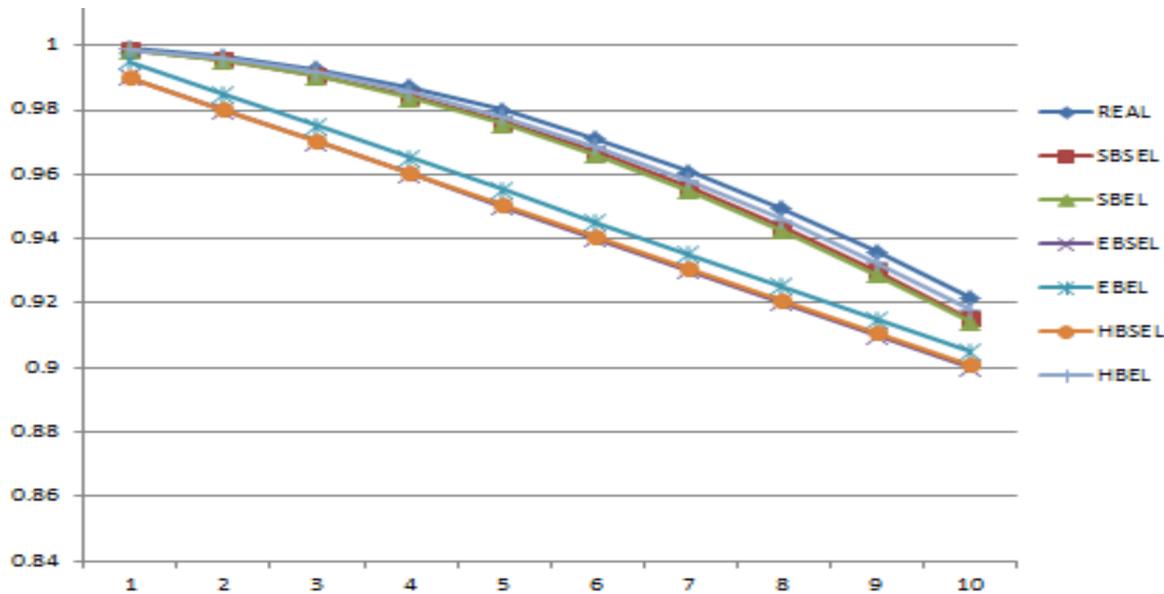
شكل (3-7) دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n= 25)



شكل (3-8) دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n= 50)



شكل (3-9) دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (75)



شكل (3-10) دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n = 100)

جدول (3-4) القيم الحقيقية والتقديرية لدالة البقاء بموجب طرائق التقدير وقيمة متوسط مربعات الخطأ التكالمي (IMSE) لكل طريقة عند أحجام العينات المفترضة للأنموذج الثالث

Model 3				$\beta=4$	$\alpha=4$	$\theta=2$		
n	ti	Real(S(t))	$\hat{S}(t)_{SBSEL}$	$\hat{S}(t)_{SBEL}$	$\hat{S}(t)_{EBSEL}$	$\hat{S}(t)_{EBEL}$	$\hat{S}(t)_{HBSEL}$	$\hat{S}(t)_{HBEL}$
10	0.02769	0.90618	0.99793	0.97500	0.94850	0.99783	0.95238	0.95000
	0.14010	0.60654	0.99413	0.92500	0.64543	0.99397	0.90476	0.90000
	0.18565	0.51515	0.98898	0.87500	0.52107	0.98879	0.85714	0.85000
	0.20535	0.47995	0.98262	0.82500	0.48553	0.98244	0.80952	0.80000
	0.20848	0.47460	0.97514	0.77500	0.46886	0.97500	0.76190	0.75000
	0.21139	0.46966	0.96661	0.72500	0.45711	0.96651	0.71429	0.70000
	0.31058	0.32857	0.95707	0.67500	0.33231	0.95704	0.66667	0.65000
	0.33234	0.30373	0.94658	0.62500	0.32250	0.94663	0.61905	0.60000
	0.37668	0.25874	0.93518	0.57500	0.25417	0.93532	0.57143	0.55000
	0.54807	0.13886	0.92291	0.52500	0.21299	0.92315	0.52381	0.50000
IMSE			0.00081	0.06676	0.00061	0.00091	0.07064	0.07871
Best			$\hat{S}(t)_{EBSEL}$					

25	0.00556	0.98042	0.99849	0.98750	0.99883	0.99832	0.97561	0.97500
	0.01278	0.95555	0.99531	0.96250	0.99613	0.99497	0.95122	0.95000
	0.04565	0.85000	0.99075	0.93750	0.89210	0.99026	0.92683	0.92500
	0.06162	0.80295	0.98491	0.91250	0.88682	0.98430	0.90244	0.90000
	0.07805	0.75721	0.97788	0.88750	0.78035	0.97718	0.87805	0.87500
	0.08531	0.73785	0.96971	0.86250	0.77274	0.96894	0.85366	0.85000
	0.08841	0.72973	0.96047	0.83750	0.76401	0.95965	0.82927	0.82500
	0.11265	0.66914	0.95019	0.81250	0.65423	0.94934	0.80488	0.80000
	0.11978	0.65229	0.93893	0.78750	0.64341	0.93807	0.78049	0.77500
	0.12476	0.64077	0.92674	0.76250	0.63161	0.92589	0.75610	0.75000
IMSE		0.00043	0.01307	0.00033	0.00054	0.01483	0.01576	
Best		$\hat{S}(t)_{EBSEL}$						
50	0.00015	0.99948	0.99874	0.99167	0.99853	0.99899	0.98361	0.98333
	0.01590	0.94503	0.99589	0.97500	0.99545	0.99651	0.96721	0.96667
	0.02649	0.91005	0.99168	0.95833	0.99101	0.99272	0.95082	0.95000
	0.03328	0.88829	0.98620	0.94167	0.98533	0.88770	0.93443	0.93333
	0.04116	0.86371	0.97952	0.92500	0.97847	0.88147	0.91803	0.91667
	0.04486	0.85239	0.97169	0.90833	0.97049	0.87410	0.90164	0.90000
	0.04722	0.84525	0.96277	0.89167	0.96144	0.86560	0.88525	0.88333
	0.05140	0.83275	0.95279	0.87500	0.95136	0.85602	0.86885	0.86667
	0.05907	0.81029	0.94180	0.85833	0.94030	0.84540	0.85246	0.85000
	0.06260	0.80014	0.92985	0.84167	0.92830	0.81377	0.83607	0.83333
IMSE		0.00028	0.00441	0.00040	0.00022	0.00523	0.00548	
Best		$\hat{S}(t)_{EBEL}$						
75	0.00482	0.98302	0.99896	0.99375	0.99880	0.99911	0.98765	0.98750
	0.00914	0.96801	0.99640	0.98125	0.99606	0.95681	0.97531	0.97500
	0.01226	0.95735	0.99250	0.96875	0.99198	0.94323	0.96296	0.96250
	0.01428	0.95047	0.98734	0.95625	0.98666	0.93841	0.95062	0.95000
	0.01504	0.94792	0.98098	0.94375	0.98016	0.92240	0.93827	0.93750
	0.01841	0.93660	0.97346	0.93125	0.97252	0.91523	0.92593	0.92500

	0.02407	0.91793	0.96483	0.91875	0.96380	0.91311	0.91358	0.91250
	0.02450	0.91652	0.95512	0.90625	0.95403	0.90076	0.90123	0.90000
	0.03140	0.89429	0.94439	0.89375	0.94325	0.84711	0.88889	0.88750
	0.03619	0.87914	0.93267	0.88125	0.93152	0.83566	0.87654	0.87500
	IMSE		0.00018	0.00181	0.00027	0.00015	0.00225	0.00234
	Best		$\hat{S}(t)_{EBEL}$					
100	0.00292	0.98966	0.99904	0.99500	0.99892	0.99916	0.99010	0.99000
	0.00376	0.98672	0.99660	0.98500	0.99631	0.99693	0.98020	0.98000
	0.00719	0.97477	0.99283	0.97500	0.99237	0.99342	0.97030	0.97000
	0.00882	0.96911	0.98780	0.96500	0.98717	0.98867	0.96040	0.96000
	0.01334	0.95365	0.98156	0.95500	0.98078	0.98273	0.95050	0.95000
	0.01396	0.95155	0.97415	0.94500	0.97324	0.97561	0.94059	0.94000
	0.01553	0.94625	0.96561	0.93500	0.96459	0.96737	0.93069	0.93000
	0.01568	0.94576	0.95599	0.92500	0.95488	0.95802	0.92079	0.92000
	0.01641	0.94330	0.94533	0.91500	0.94414	0.94762	0.91089	0.91000
	0.01787	0.93841	0.93367	0.90500	0.93243	0.93619	0.90099	0.90000
	IMSE		0.00014	0.00081	0.00020	0.00012	0.00106	0.00110
	Best		$\hat{S}(t)_{EBEL}$					

يتضح من خلا الجدول (3-4) والأشكال (3-11) الى (3-15) وعند الافتراضية للمعاملات  $\theta=2, \alpha=4$

( $\beta=4$ ) من خلال استخدام المعيار الاحصائي متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) للمقارنة بين

افضلية الطرائق المستخدمة لتقدير دالة البقاء لأحجام العينات المختلفة يمكن تفسير نتائج الجدول كما يلي :

❖ عند حجم عينة (10) كانت طريقة توقع بيز في ظل دالة خسارة تربيعية  $\hat{S}(t)_{EBSEL}$  هي الأفضل لتقدير

دالة البقاء كونها قد سجلت اقل قيمة لمتوسط مربعات الخطأ التكاملي بلغ (IMSE = 0.00061).

❖ عند حجم عينة (25) كانت طريقة توقع بيز في ظل دالة خسارة تربيعية  $\hat{S}(t)_{EBSEL}$  هي الأفضل لتقدير

دالة البقاء كونها قد سجلت اقل قيمة لمتوسط مربعات الخطأ التكاملي بلغ (IMSE = 0.00033).

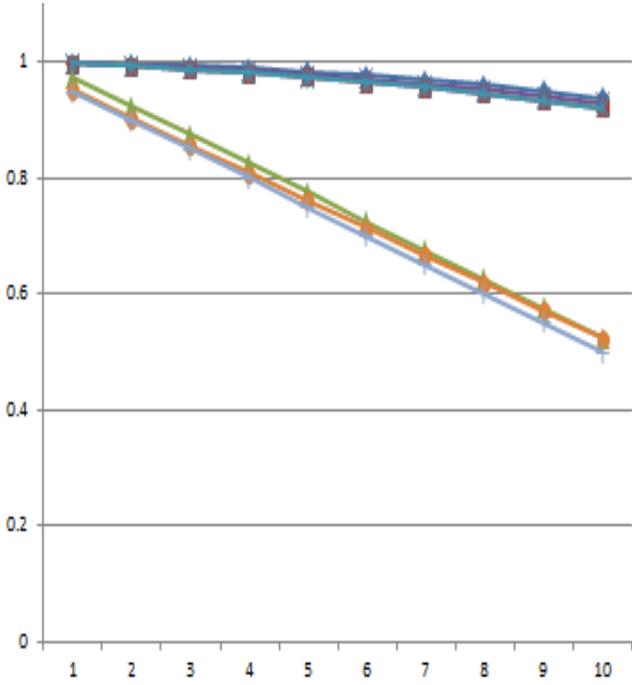
❖ عند حجم عينة (50) كانت طريقة توقع بيز في ظل دالة خسارة انتروبي العامة  $\hat{S}(t)_{EBEL}$  هي الأفضل

لتقدير دالة البقاء كونها قد سجلت اقل قيمة لمتوسط مربعات الخطأ التكاملي بلغ (IMSE = 0.00022).

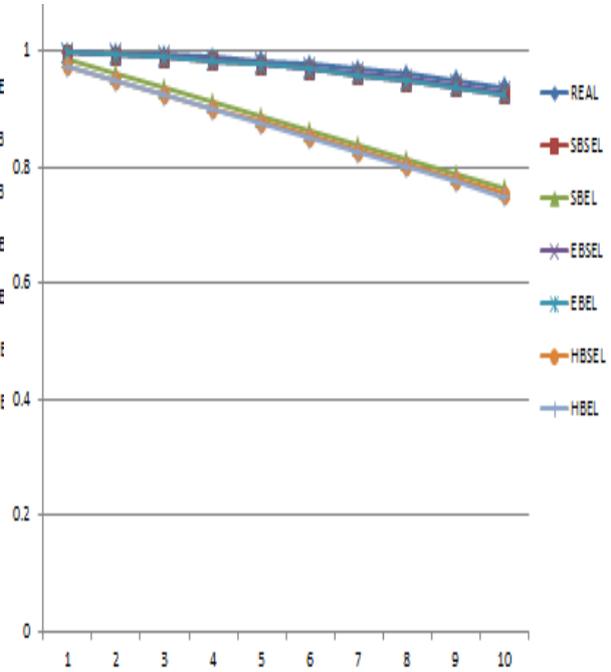
❖ عند حجم عينة (75) كانت طريقة توقع بيز في ظل دالة خسارة انتروبي العامة  $\hat{S}(t)_{EBEL}$  هي الأفضل

لتقدير دالة البقاء كونها قد سجلت اقل قيمة لمتوسط مربعات الخطأ التكاملي بلغ (IMSE = 0.00015).

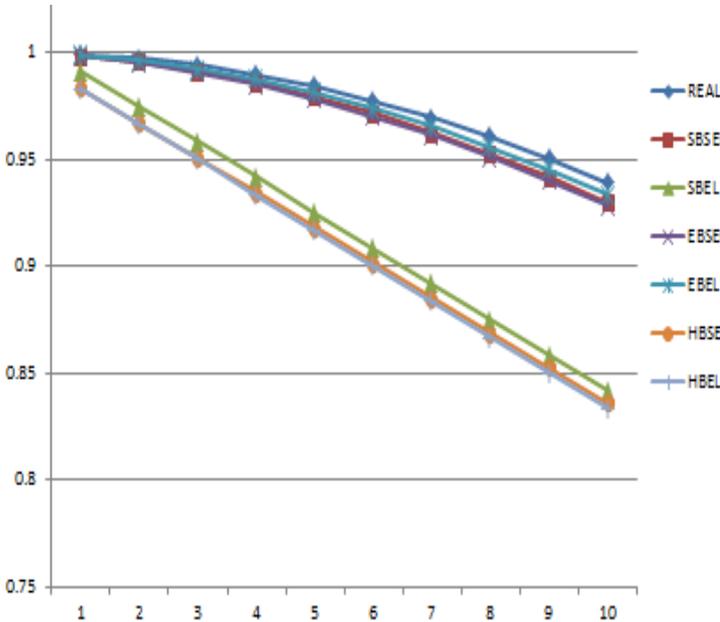
❖ عند حجم عينة (100) كانت طريقة توقع بيز في ظل دالة خسارة انتروبي العامة  $\hat{S}(t)_{EBEL}$  هي الأفضل لتقدير دالة البقاء كونها قد سجلت اقل قيمة لمتوسط مربعات الخطأ التكاملي بلغ (IMSE = 0.00012).



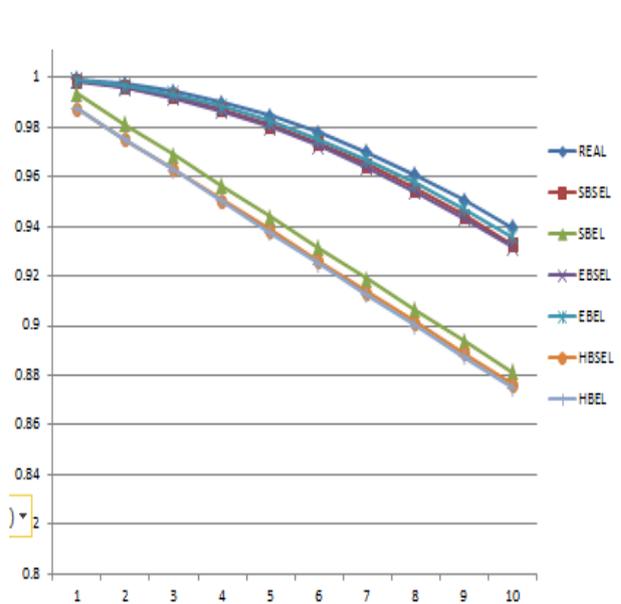
شكل (3-11) دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n= 10)



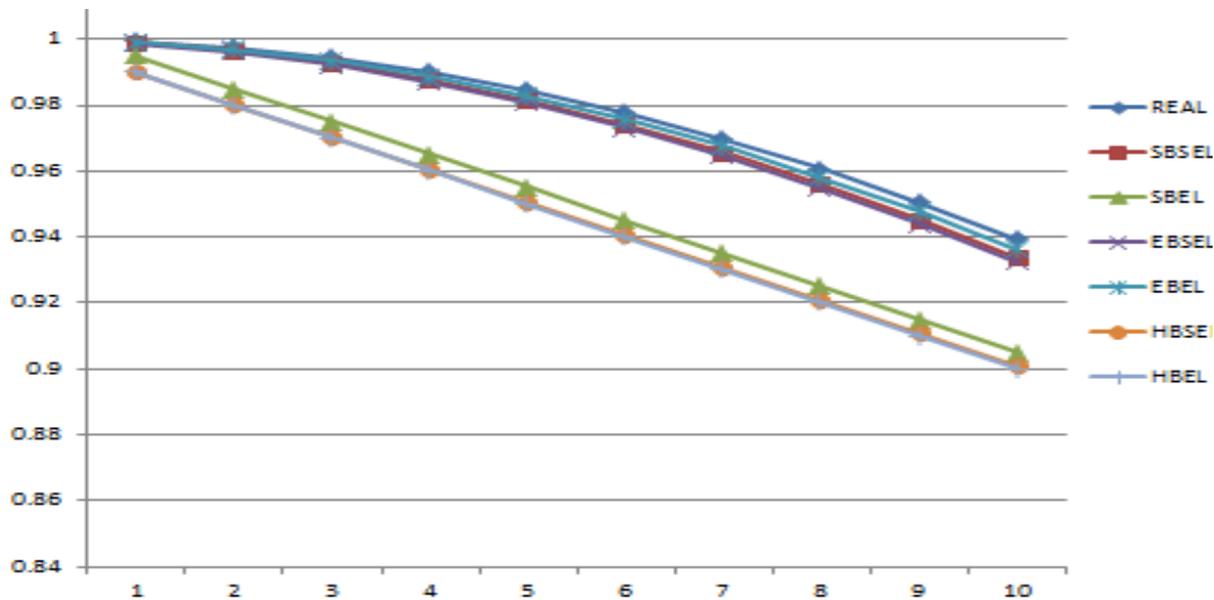
شكل (3-12) دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n= 25)



شكل (3-13) دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n= 50)



شكل (3-14) دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n= 75)



شكل (3-15) دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n= 100)

جدول (3-5) القيم الحقيقية والتقديرية لدالة البقاء بموجب طرائق التقدير وقيمة متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) لكل طريقة عند أحجام العينات المفترضة للأنموذج الرابع

Model 4				$\theta = 4$	$\alpha = 3.5$	$\beta = 4$		
n	t <sub>i</sub>	Real(R(t))	$\hat{S}(t)_{SBSEL}$	$\hat{S}(t)_{SBEL}$	$\hat{S}(t)_{EBSEL}$	$\hat{S}(t)_{EBEL}$	$\hat{S}(t)_{HBSEL}$	$\hat{S}(t)_{HBEL}$
10	0.02579	0.92265	0.99922	0.95000	0.99915	0.97500	0.92948	0.95238
	0.05801	0.83380	0.99736	0.90000	0.99726	0.92500	0.89808	0.90476
	0.06501	0.81557	0.99445	0.85000	0.99433	0.87500	0.89572	0.85714
	0.07590	0.78797	0.99044	0.80000	0.99034	0.82500	0.79236	0.80952
	0.11919	0.68657	0.98531	0.75000	0.98525	0.77500	0.68792	0.76190
	0.25367	0.44426	0.97902	0.70000	0.97902	0.72500	0.46235	0.71429
	0.25508	0.44221	0.97153	0.65000	0.97163	0.67500	0.44561	0.66667
	0.30320	0.37750	0.96282	0.60000	0.96304	0.62500	0.36764	0.61905
	0.37929	0.29328	0.95288	0.55000	0.95323	0.57500	0.28842	0.57143
	0.73901	0.08620	0.94170	0.50000	0.94219	0.52500	0.08791	0.52381
IMSE			0.000540	0.084837	0.000606	0.072439	0.000387	0.076451
Best			$\hat{S}(t)_{HBSEL}$					

25	0.02463	0.92601	0.99957	0.97500	0.99950	0.98750	0.93968	0.97561
	0.05354	0.84563	0.99825	0.95000	0.99809	0.96250	0.89861	0.95122
	0.05609	0.83887	0.99596	0.92500	0.99570	0.93750	0.89665	0.92683
	0.05962	0.82957	0.99261	0.90000	0.99225	0.91250	0.89370	0.90244
	0.09475	0.74221	0.98813	0.87500	0.98769	0.88750	0.78967	0.87805
	0.11051	0.70585	0.98246	0.85000	0.98195	0.86250	0.72449	0.85366
	0.11278	0.70077	0.97555	0.82500	0.97500	0.83750	0.71808	0.82927
	0.12931	0.66469	0.96737	0.80000	0.96680	0.81250	0.67040	0.80488
	0.13665	0.64922	0.95787	0.77500	0.95731	0.78750	0.66141	0.78049
	0.15167	0.61865	0.94706	0.75000	0.94651	0.76250	0.64107	0.75610
IMSE		0.000232	0.018559	0.000296	0.015641	0.000174	0.017544	
Best		$\hat{S}(t)_{HBSEL}$						
50	0.00666	0.97946	0.99968	0.99167	0.99961	0.98975	0.98361	0.98333
	0.00794	0.97557	0.99859	0.97500	0.99841	0.97883	0.96721	0.96667
	0.01195	0.96344	0.99660	0.95833	0.99629	0.96707	0.95082	0.95000
	0.03320	0.90148	0.99358	0.94167	0.99314	0.93436	0.93443	0.93333
	0.03583	0.89408	0.98946	0.92500	0.98890	0.89058	0.91803	0.91667
	0.04095	0.87981	0.98415	0.90833	0.98347	0.88565	0.90164	0.90000
	0.04265	0.87513	0.97760	0.89167	0.97683	0.87950	0.88525	0.88333
	0.05325	0.84641	0.96976	0.87500	0.96890	0.87205	0.86885	0.86667
	0.05699	0.83649	0.96058	0.85833	0.95967	0.86328	0.85246	0.85000
	0.05701	0.83643	0.95005	0.84167	0.94909	0.85312	0.83607	0.83333
IMSE		0.000137	0.005945	0.000196	0.000106	0.006878	0.007161	
Best		$\hat{S}(t)_{EBEL}$						
75	0.00703	0.97835	0.99974	0.99375	0.99969	0.98978	0.98765	0.98750
	0.00817	0.97487	0.99878	0.98125	0.99864	0.97895	0.97531	0.97500
	0.00978	0.97001	0.99696	0.96875	0.99671	0.96732	0.96296	0.96250
	0.01479	0.95495	0.99416	0.95625	0.99378	0.95475	0.95062	0.95000
	0.01985	0.93998	0.99028	0.94375	0.98978	0.92114	0.93827	0.93750
	0.02127	0.93581	0.98523	0.93125	0.98462	0.91610	0.92593	0.92500

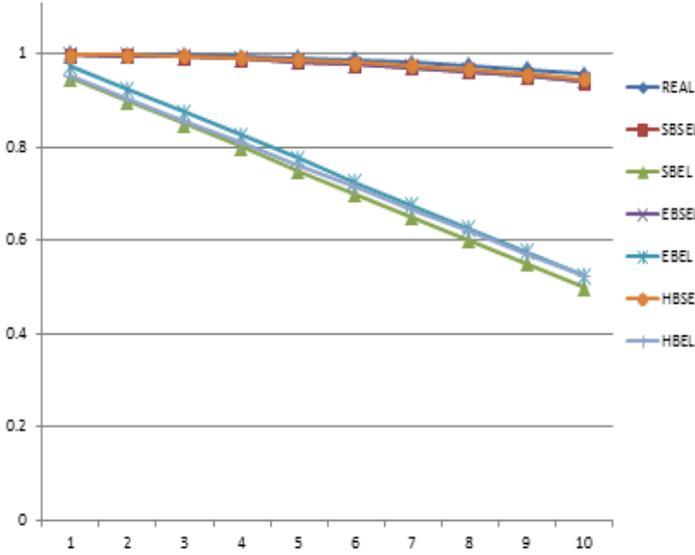
	0.02918	0.91292	0.97896	0.91875	0.97825	0.90045	0.91358	0.91250
	0.02933	0.91250	0.97139	0.90625	0.97061	0.89322	0.90123	0.90000
	0.04900	0.85781	0.96250	0.89375	0.96165	0.86466	0.88889	0.88750
	0.06209	0.82314	0.95224	0.88125	0.95136	0.85473	0.87654	0.87500
	IMSE		0.000093	0.002828	0.000136	0.000076	0.003356	0.003467
	Best		$\hat{S}(t)_{EBEL}$					
100	0.00316	0.99020	0.99974	0.99968	0.99978	0.99500	0.99010	0.99000
	0.00589	0.98182	0.99878	0.99859	0.99893	0.98500	0.98020	0.98000
	0.01371	0.95818	0.99695	0.99660	0.99727	0.97500	0.97030	0.97000
	0.01399	0.95734	0.99412	0.99360	0.99466	0.96500	0.96040	0.96000
	0.01449	0.95583	0.99021	0.98949	0.99100	0.95500	0.95050	0.95000
	0.01801	0.94538	0.98511	0.98421	0.98618	0.94500	0.94059	0.94000
	0.02221	0.93305	0.97877	0.97770	0.98013	0.93500	0.93069	0.93000
	0.02761	0.91741	0.97114	0.96990	0.97280	0.92500	0.92079	0.92000
	0.03340	0.90091	0.96216	0.96078	0.96412	0.91500	0.91089	0.91000
	0.03340	0.90090	0.95181	0.95031	0.95405	0.90500	0.90099	0.90000
	IMSE		0.000088	0.000139	0.000072	0.001513	0.001840	0.001892
	Best		$\hat{S}(t)_{EBSEL}$					

يتضح من خلال الجدول (3-5) والاشكال (3-16) الى (3-20) عند القيم الافتراضية للمعلمات  $\theta = 4$   $\alpha = 3.5$   $\beta = 4$  ومن خلال استخدام المعيار الاحصائي متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) للمقارنة بين افضلية الطرائق المستخدمة لتقدير دالة البقاء لأحجام العينات المختلفة يمكن تفسير نتائج الجدول كما يلي :

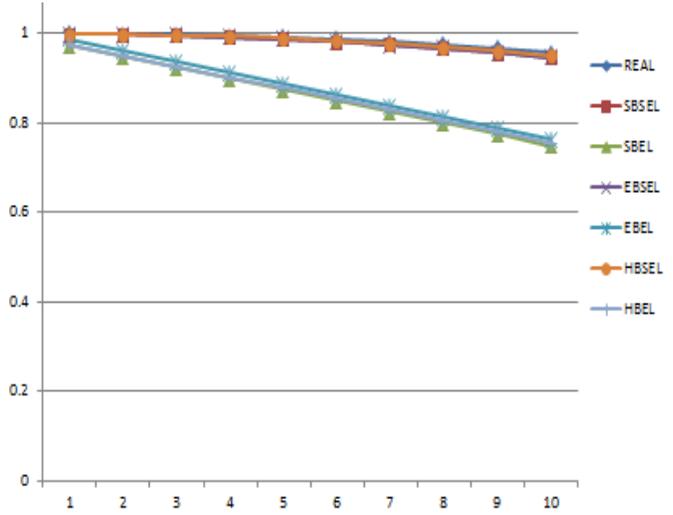
- ❖ عند حجم عينة (10) كانت طريقة بيز الهرمي في ظل دالة خسارة تربيعية  $\hat{S}(t)_{HBSEL}$  هي الأفضل لتقدير دالة البقاء كونها قد سجلت اقل قيمة لمتوسط مربعات الخطأ التكاملي بلغ (IMSE = 0.000387).
- ❖ عند حجم عينة (25) كانت طريقة بيز الهرمي في ظل دالة خسارة تربيعية  $\hat{S}(t)_{HBSEL}$  هي الأفضل لتقدير دالة البقاء كونها قد سجلت اقل قيمة لمتوسط مربعات الخطأ التكاملي بلغ (IMSE = 0.000174).
- ❖ عند حجم عينة (50) كانت طريقة توقع بيز في ظل دالة خسارة انتروبي العامة  $\hat{S}(t)_{EBEL}$  هي الأفضل لتقدير دالة البقاء كونها قد سجلت اقل قيمة لمتوسط مربعات الخطأ التكاملي بلغ (IMSE = 0.000106).

❖ عند حجم عينة (75) كانت طريقة توقع بيز في ظل دالة خسارة انتروبي العامة  $\hat{S}(t)_{EBEL}$  هي الأفضل لتقدير دالة البقاء كونها قد سجلت اقل قيمة لمتوسط مربعات الخطأ التكاملية بلغ (IMSE = 0.000076).

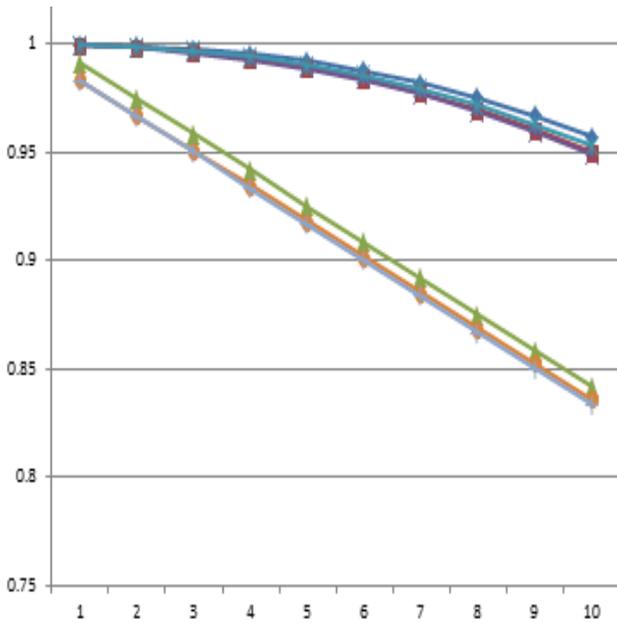
❖ عند حجم عينة (100) كانت طريقة توقع بيز في ظل دالة خسارة تربيعية  $\hat{S}(t)_{EBSEL}$  هي الأفضل لتقدير دالة البقاء كونها قد سجلت اقل قيمة لمتوسط مربعات الخطأ التكاملية بلغ (IMSE = 0.000072).



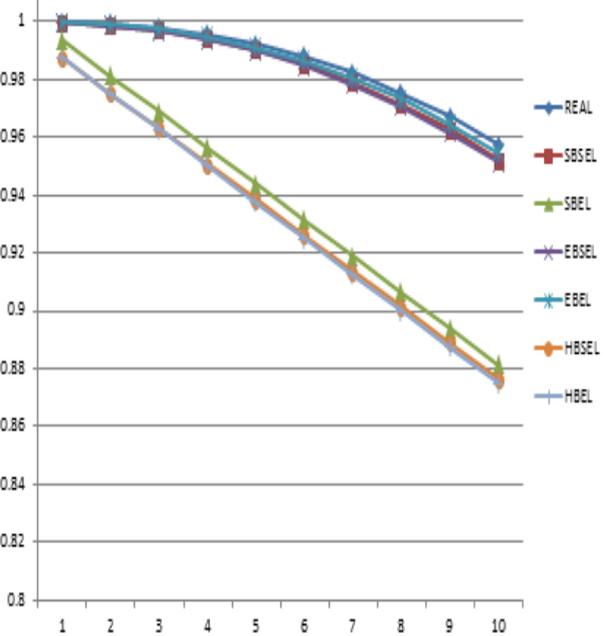
شكل (3-16) دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n= 10)



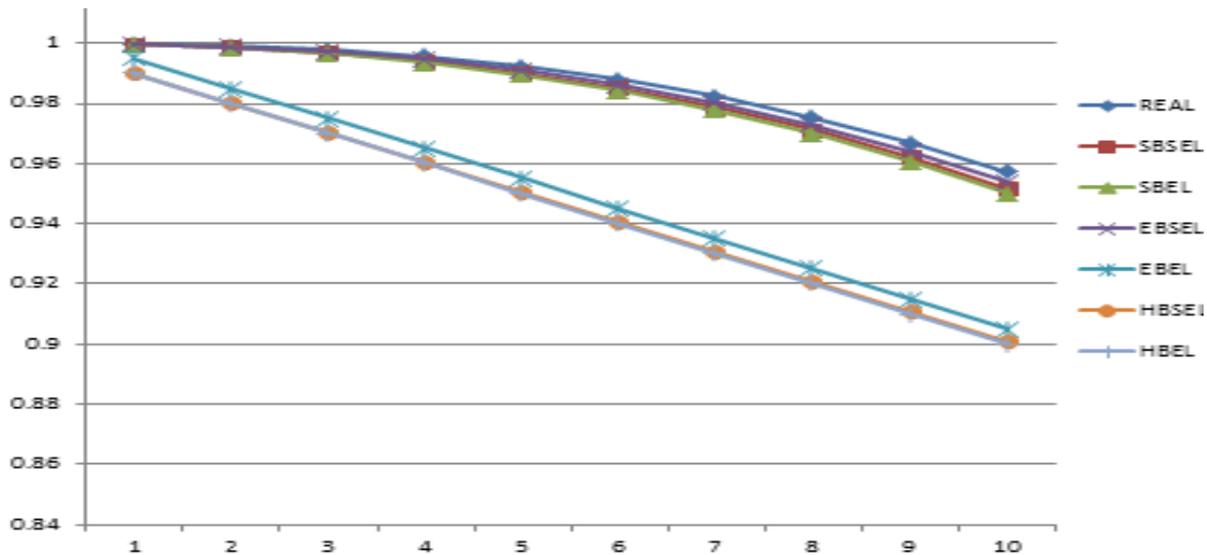
شكل (3-17) دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n= 25)



شكل (3-18) دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n= 50)



شكل (3-19) دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n= 75)



شكل (3-20) دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n= 100)

جدول (3-6) القيم الحقيقية والتقديرية لدالة البقاء بموجب طرائق التقدير وقيمة متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) لكل طريقة عند أحجام العينات المفترضة للأنموذج الخامس

Model 5				$\theta = 2.5$	$\alpha = 4$	$\beta = 2$		
n	t <sub>i</sub>	Real(R(t))	$\hat{S}(t)_{SBSSEL}$	$\hat{S}(t)_{SBEL}$	$\hat{S}(t)_{EBSEL}$	$\hat{S}(t)_{EBEL}$	$\hat{S}(t)_{HBSEL}$	$\hat{S}(t)_{HBEL}$
10	0.06380	0.87523	0.99940	0.95000	0.99934	0.97500	0.95238	0.89963
	0.20026	0.65671	0.99798	0.90000	0.99787	0.92500	0.90476	0.69858
	0.24154	0.60172	0.99577	0.85000	0.99560	0.87500	0.85714	0.69683
	0.45468	0.38166	0.99273	0.80000	0.99253	0.82500	0.80952	0.39432
	0.49028	0.35352	0.98883	0.75000	0.98862	0.77500	0.76190	0.39101
	0.58773	0.28643	0.98406	0.70000	0.98384	0.72500	0.71429	0.28686
	0.61598	0.26941	0.97839	0.65000	0.97818	0.67500	0.66667	0.28182
	0.65012	0.25018	0.97179	0.60000	0.97162	0.62500	0.61905	0.27588
	0.83579	0.16685	0.96426	0.55000	0.96413	0.57500	0.57143	0.16899
	1.26956	0.06397	0.95578	0.50000	0.95571	0.52500	0.52381	0.06113
IMSE			0.000372	0.087958	0.000429	0.075356	0.079415	0.000248
Best			$\hat{S}(t)_{HBEL}$					
25	0.01556	0.96808	0.99964	0.97500	0.99957	0.98750	0.96974	0.97561
	0.12506	0.76962	0.99861	0.95000	0.99844	0.96250	0.79892	0.95122

	0.15769	0.71850	0.99685	0.92500	0.99657	0.93750	0.79744	0.92683
	0.18549	0.67754	0.99432	0.90000	0.99392	0.91250	0.69524	0.90244
	0.18921	0.67225	0.99094	0.87500	0.99045	0.88750	0.69225	0.87805
	0.19109	0.66958	0.98670	0.85000	0.98611	0.86250	0.68842	0.85366
	0.21014	0.64313	0.98155	0.82500	0.98088	0.83750	0.68370	0.82927
	0.21291	0.63936	0.97545	0.80000	0.97471	0.81250	0.67805	0.80488
	0.25394	0.58610	0.96839	0.77500	0.96760	0.78750	0.57143	0.78049
	0.32146	0.50765	0.96033	0.75000	0.95952	0.76250	0.56382	0.75610
	<b>IMSE</b>		<b>0.000177</b>	<b>0.020022</b>	<b>0.000234</b>	<b>0.017002</b>	<b>0.000127</b>	<b>0.018966</b>
	<b>Best</b>		<b><math>\hat{S}(t)_{HBSEL}</math></b>					
50	0.00933	0.98074	0.99976	0.99167	0.99971	0.98981	0.98361	0.98333
	0.02073	0.95770	0.99895	0.97500	0.99882	0.96912	0.96721	0.96667
	0.02329	0.95260	0.99746	0.95833	0.99723	0.95782	0.95082	0.95000
	0.02336	0.95245	0.99523	0.94167	0.99490	0.95582	0.93443	0.93333
	0.04198	0.91613	0.99218	0.92500	0.99174	0.91304	0.91803	0.91667
	0.04744	0.90572	0.98826	0.90833	0.98773	0.90942	0.90164	0.90000
	0.06211	0.87834	0.98342	0.89167	0.98281	0.88491	0.88525	0.88333
	0.06230	0.87798	0.97763	0.87500	0.97694	0.87946	0.86885	0.86667
	0.07094	0.86224	0.97085	0.85833	0.97011	0.87302	0.85246	0.85000
	0.07141	0.86140	0.96306	0.84167	0.96228	0.86557	0.83607	0.83333
	<b>IMSE</b>		<b>0.000095</b>	<b>0.006787</b>	<b>0.000133</b>	<b>0.000074</b>	<b>0.007769</b>	<b>0.008071</b>
	<b>Best</b>		<b><math>\hat{S}(t)_{EBEL}</math></b>					
75	0.01046	0.97844	0.99979	0.97983	0.99975	0.99375	0.98765	0.98750
	0.01257	0.97414	0.99904	0.97918	0.99892	0.98125	0.97531	0.97500
	0.02268	0.95381	0.99763	0.96792	0.99743	0.96875	0.96296	0.96250
	0.02702	0.94521	0.99548	0.95597	0.99518	0.95625	0.95062	0.95000
	0.03514	0.92932	0.99253	0.93324	0.99213	0.94375	0.93827	0.93750
	0.03584	0.92795	0.98870	0.92967	0.98821	0.93125	0.92593	0.92500
	0.06859	0.86650	0.98396	0.88521	0.98338	0.91875	0.91358	0.91250
	0.07147	0.86128	0.97826	0.87979	0.97760	0.90625	0.90123	0.90000

	0.10396	0.80452	0.97157	0.87339	0.97085	0.89375	0.88889	0.88750
	0.11070	0.79322	0.96385	0.76597	0.96308	0.88125	0.87654	0.87500
	IMSE		0.000070	0.000055	0.000102	0.003411	0.003979	0.004100
	Best		$\hat{S}(t)_{SBEL}$					
100	0.00564	0.98832	0.99980	0.99984	0.99975	0.99500	0.99010	0.99000
	0.00901	0.98139	0.99908	0.99920	0.99893	0.98500	0.98020	0.98000
	0.02990	0.93953	0.99771	0.99797	0.99745	0.97500	0.97030	0.97000
	0.03203	0.93537	0.99562	0.99604	0.99522	0.96500	0.96040	0.96000
	0.03532	0.92896	0.99272	0.99334	0.99219	0.95500	0.95050	0.95000
	0.04217	0.91575	0.98895	0.98980	0.98828	0.94500	0.94059	0.94000
	0.04802	0.90463	0.98426	0.98535	0.98347	0.93500	0.93069	0.93000
	0.05960	0.88296	0.97862	0.87995	0.97769	0.92500	0.92079	0.92000
	0.06274	0.87719	0.97197	0.87356	0.97094	0.91500	0.91089	0.91000
	0.06905	0.86566	0.96430	0.86614	0.96316	0.90500	0.90099	0.90000
	IMSE		0.000063	0.000049	0.000100	0.001939	0.002301	0.002360
	Best		$\hat{S}(t)_{SBEL}$					

يتضح من خلا الجدول (3-6) والاشكال (3-21) الى (3-25) عند القيم الافتراضية للمعلمات  $\theta$  ( $\alpha=4, \beta=2, \sigma=2.5$ ) ومن خلال استخدام المعيار الاحصائي متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) للمقارنة بين افضلية الطرائق المستخدمة لتقدير دالة البقاء لأحجام العينات المختلفة يمكن تفسير نتائج الجدول كما يلي :

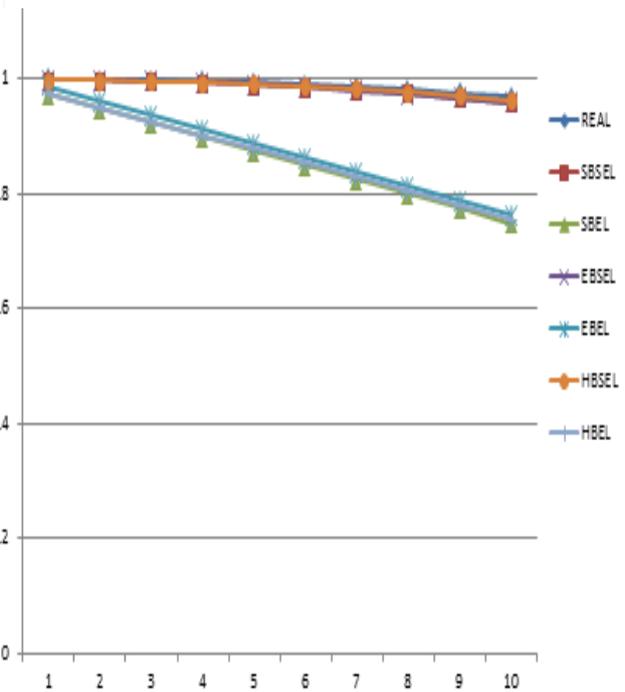
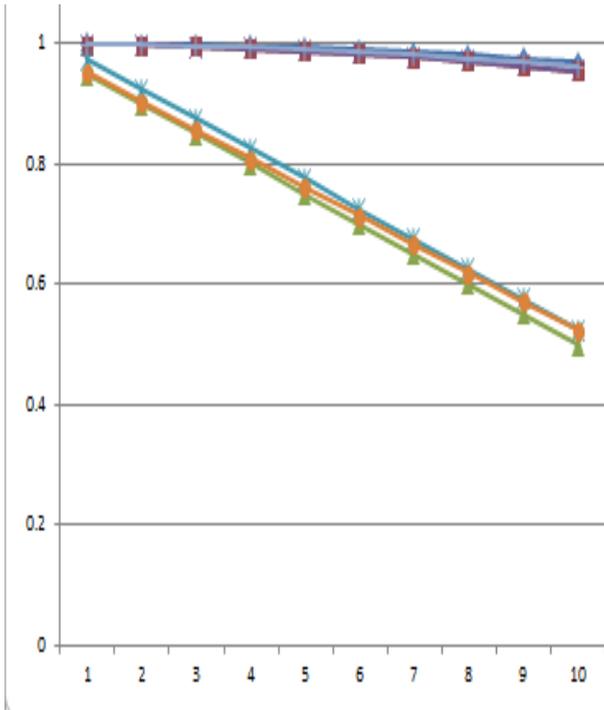
❖ عند حجم عينة (10) كانت طريقة بيز الهرمي في ظل دالة خسارة انتروبي العامة  $\hat{S}(t)_{HBEL}$  هي الأفضل لتقدير دالة البقاء كونها قد سجلت اقل قيمة لمتوسط مربعات الخطأ التكاملي بلغ (IMSE = 0.000248).

❖ عند حجم عينة (25) كانت طريقة بيز الهرمي في ظل دالة خسارة تربيعية  $\hat{S}(t)_{HBSL}$  هي الأفضل لتقدير دالة البقاء كونها قد سجلت اقل قيمة لمتوسط مربعات الخطأ التكاملي بلغ (IMSE = 0.000127).

❖ عند حجم عينة (50) كانت طريقة توقع بيز في ظل دالة خسارة انتروبي العامة  $\hat{S}(t)_{EBEL}$  هي الأفضل لتقدير دالة البقاء كونها قد سجلت اقل قيمة لمتوسط مربعات الخطأ التكاملي بلغ (IMSE = 0.000074).

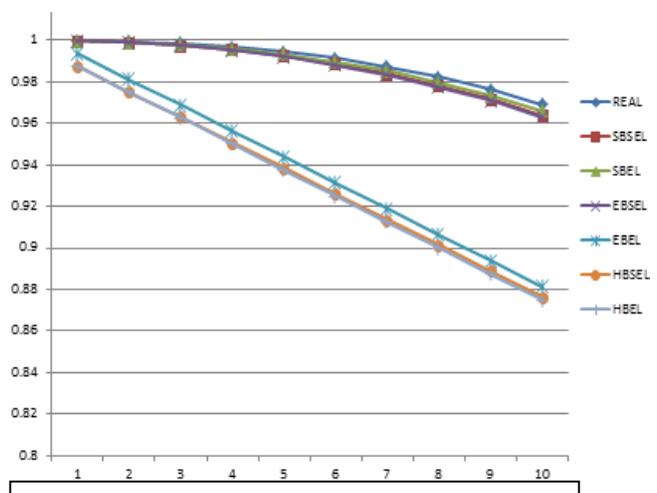
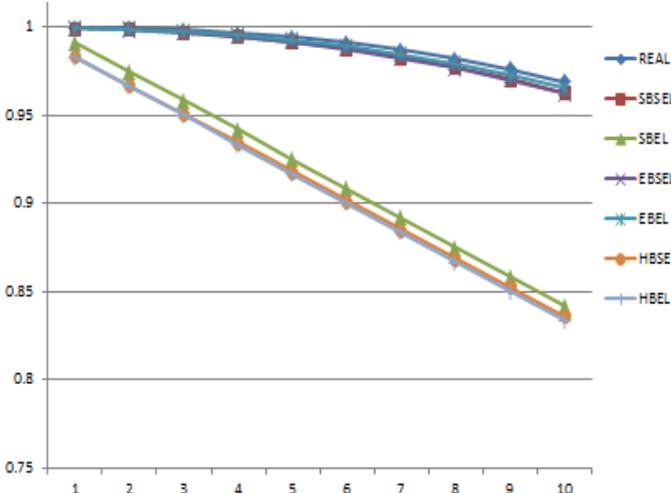
❖ عند حجم عينة (75) كانت طريقة بيز القياسية في ظل دالة خسارة انتروبي العامة  $\hat{S}(t)_{SBEL}$  هي الأفضل لتقدير دالة البقاء كونها قد سجلت اقل قيمة لمتوسط مربعات الخطأ التكاملية بلغ (  $0.000055 = IMSE$  ).

❖ عند حجم عينة (100) كانت طريقة بيز القياسية في ظل دالة خسارة انتروبي العامة  $\hat{S}(t)_{SBEL}$  هي الأفضل لتقدير دالة البقاء عند كونها قد سجلت اقل قيمة لمتوسط مربعات الخطأ التكاملية بلغ (  $0.000049 = IMSE$  ).



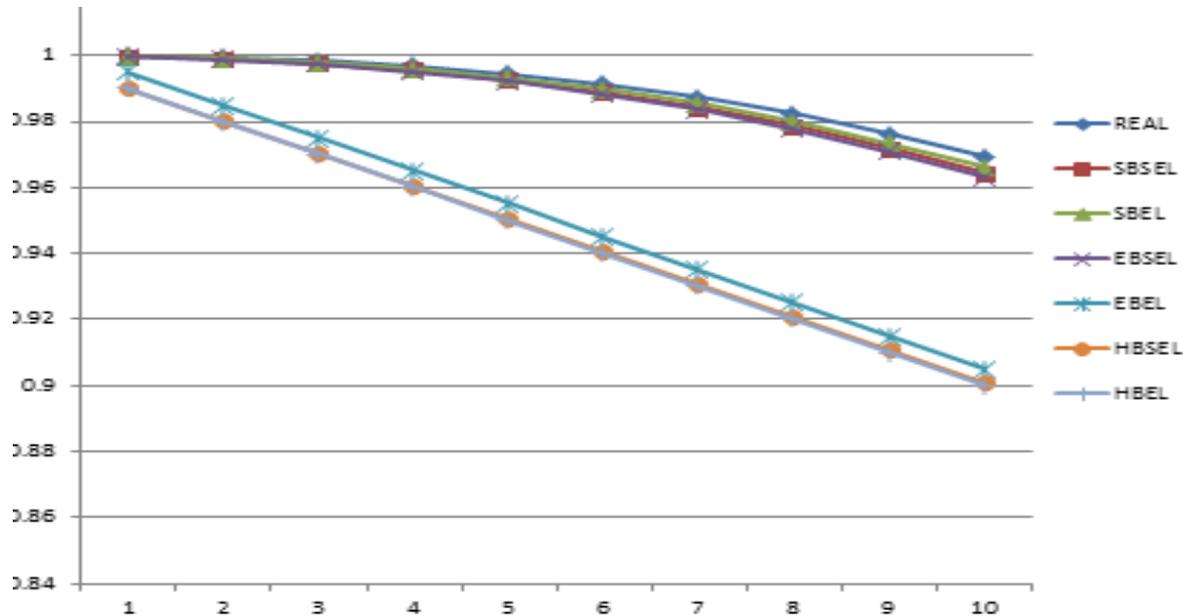
شكل (3-21) دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n= 10)

شكل (3-22) دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n= 25)



شكل (3-23) دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n= 50)

شكل (3-24) دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n= 75)



شكل (3-25) دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n= 100)

جدول (3-7) القيم الحقيقية والتقديرية لدالة البقاء بموجب طرائق التقدير وقيمة متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) لكل طريقة عند أحجام العينات المفترضة للأنموذج السادس

Model 6				$\theta = 2.4$	$\alpha = 4.5$	$\beta = 2$		
n	t <sub>i</sub>	Real(R(t))	$\hat{S}(t)_{SBSEL}$	$\hat{S}(t)_{SBEL}$	$\hat{S}(t)_{EBSEL}$	$\hat{S}(t)_{EBEL}$	$\hat{S}(t)_{HBSEL}$	$\hat{S}(t)_{HBEL}$
10	0.08381	0.84350	0.99942	0.99935	0.89965	0.97500	0.95238	0.95000
	0.20894	0.65310	0.99814	0.99801	0.69872	0.92500	0.90476	0.90000
	0.27212	0.57354	0.99620	0.99601	0.59721	0.87500	0.85714	0.85000
	0.35534	0.48301	0.99359	0.99335	0.49509	0.82500	0.80952	0.80000
	0.39675	0.44331	0.99030	0.99002	0.49233	0.77500	0.76190	0.75000
	0.40262	0.43794	0.98631	0.98600	0.48891	0.72500	0.71429	0.70000
	0.57598	0.30520	0.98163	0.98129	0.38480	0.67500	0.66667	0.65000
	0.61742	0.27984	0.97622	0.97587	0.27998	0.62500	0.61905	0.60000
	0.63695	0.26861	0.97009	0.96974	0.27444	0.57500	0.57143	0.55000

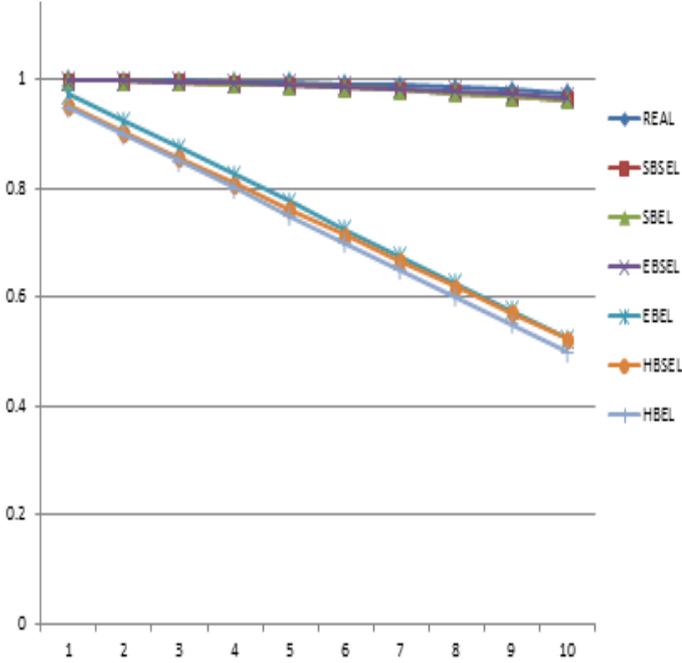
	0.87184	0.16373	0.96324	0.96289	0.16817	0.52500	0.52381	0.50000
	IMSE		0.000318	0.000372	0.000202	0.077281	0.081370	0.090016
	Best		$\hat{S}(t)_{EBSEL}$					
25	0.00778	0.98436	0.99971	0.97500	0.99965	0.98750	0.99980	0.97561
	0.02548	0.94966	0.99890	0.95000	0.99875	0.96250	0.95916	0.95122
	0.04009	0.92193	0.99752	0.92500	0.99727	0.93750	0.92801	0.92683
	0.05707	0.89067	0.99553	0.90000	0.99519	0.91250	0.89630	0.90244
	0.06422	0.87781	0.99290	0.87500	0.99246	0.88750	0.89399	0.87805
	0.12094	0.78201	0.98959	0.85000	0.98907	0.86250	0.79102	0.85366
	0.12768	0.77131	0.98557	0.82500	0.98498	0.83750	0.78738	0.82927
	0.21884	0.63997	0.98083	0.80000	0.98017	0.81250	0.68302	0.80488
	0.23931	0.61361	0.97534	0.77500	0.97462	0.78750	0.67792	0.78049
	0.24212	0.61007	0.96908	0.75000	0.96832	0.76250	0.67205	0.75610
	IMSE		0.000123	0.021004	0.000166	0.017918	0.000084	0.019922
	Best		$\hat{S}(t)_{HBSEL}$					
50	0.00227	0.99542	0.99979	0.99167	0.99974	0.99985	0.98361	0.98333
	0.00978	0.98038	0.99912	0.97500	0.99899	0.99930	0.96721	0.96667
	0.02842	0.94402	0.99792	0.95833	0.95770	0.99827	0.95082	0.95000
	0.02861	0.94366	0.99613	0.94167	0.94581	0.99669	0.93443	0.93333
	0.04271	0.91704	0.99371	0.92500	0.91329	0.99451	0.91803	0.91667
	0.05068	0.90230	0.99061	0.90833	0.91010	0.99169	0.90164	0.90000
	0.05235	0.89925	0.98680	0.89167	0.88621	0.98818	0.88525	0.88333
	0.05634	0.89198	0.98225	0.87500	0.88159	0.98394	0.86885	0.86667
	0.05888	0.88738	0.97694	0.85833	0.87622	0.97895	0.85246	0.85000
	0.07610	0.85684	0.97084	0.84167	0.85007	0.97318	0.83607	0.83333
	IMSE		0.000073	0.007366	0.000107	0.000052	0.008382	0.008695
	Best		$\hat{S}(t)_{EBEL}$					
75	0.00064	0.99870	0.999842	0.999871	0.9998092	0.99375	0.9876543	0.9875
	0.00168	0.99661	0.999276	0.999381	0.9991758	0.98125	0.9753086	0.975
	0.00364	0.99265	0.998211	0.998433	0.9980237	0.96875	0.962963	0.9625
	0.01306	0.97389	0.996581	0.986954	0.9962942	0.95625	0.9506173	0.95

	0.01665	0.96682	0.994332	0.964885	0.9939384	0.94375	0.9382716	0.9375
	0.02465	0.95126	0.991419	0.952176	0.9909147	0.93125	0.9259259	0.925
	0.03492	0.93164	0.9878	0.93878	0.9871868	0.91875	0.9135802	0.9125
	0.03796	0.92591	0.983443	0.92466	0.9827235	0.90625	0.9012346	0.901224
	0.04478	0.91318	0.978319	0.919782	0.9774983	0.89375	0.8888889	0.88756
	0.06255	0.88079	0.972403	0.874116	0.9714886	0.88125	0.8765432	0.8755
	IMSE		0.000044	0.000034	0.000066	0.003822	0.004417	0.004545
	Best		$\hat{S}(t)_{SBEL}$					
100	0.00059	0.99880	0.99985	0.99000	0.99981	0.99500	0.99010	0.99988
	0.00484	0.99024	0.99931	0.98000	0.99920	0.98500	0.98020	0.99940
	0.00545	0.98902	0.99828	0.97000	0.99808	0.97500	0.97030	0.99848
	0.01242	0.97514	0.99670	0.96000	0.99640	0.96500	0.96040	0.97703
	0.02892	0.94307	0.99451	0.95000	0.99410	0.95500	0.95050	0.94499
	0.02930	0.94235	0.99166	0.94000	0.99114	0.94500	0.94059	0.94233
	0.03126	0.93860	0.98812	0.93000	0.98749	0.93500	0.93069	0.93898
	0.04669	0.90965	0.98384	0.92000	0.98311	0.92500	0.92079	0.91491
	0.04732	0.90849	0.97880	0.91000	0.97798	0.91500	0.91089	0.91009
	0.04766	0.90785	0.97298	0.90000	0.97208	0.90500	0.90099	0.91449
	IMSE		0.000039	0.002697	0.000063	0.002250	0.002634	0.000031
	Best		$\hat{S}(t)_{HBEL}$					

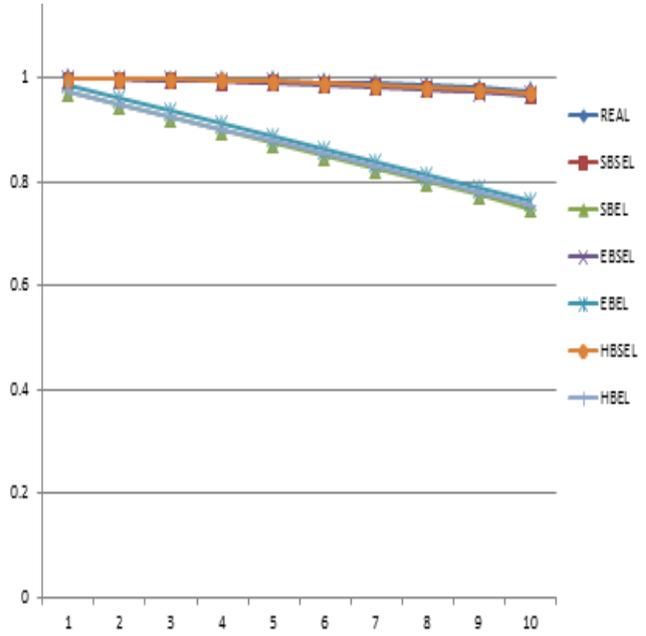
يتضح من خلا الجدول (3-7) والاشكال (3-26) الى (3-30) عند القيم الافتراضية للمعلمات ( $\theta = 2.4$ ,  $\alpha = 4.5$ ,  $\beta = 2$ ) ومن خلال استخدام المعيار الاحصائي متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) للمقارنة بين افضلية الطرائق المستخدمة لتقدير دالة البقاء ولأحجام العينات المختلفة يمكن تفسير نتائج الجدول كما يلي :

- ❖ عند حجم عينة (10) كانت طريقة توقع بيز في ظل دالة خسارة تربيعية  $\hat{S}(t)_{EBSEL}$  هي الأفضل لتقدير دالة البقاء كونها قد سجلت اقل قيمة لمتوسط مربعات الخطأ التكاملي بلغ (IMSE = 0.000202).
- ❖ عند حجم عينة (25) كانت طريقة بيز الهرمي في ظل دالة خسارة تربيعية  $\hat{S}(t)_{HBSEL}$  هي الأفضل لتقدير دالة البقاء كونها قد سجلت اقل قيمة لمتوسط مربعات الخطأ التكاملي بلغ (IMSE = 0.000084).
- ❖ عند حجم عينة (50) كانت طريقة توقع بيز في ظل دالة خسارة انتروبي العامة  $\hat{S}(t)_{EBEL}$  هي الأفضل لتقدير دالة البقاء كونها قد سجلت اقل قيمة لمتوسط مربعات الخطأ التكاملي بلغ (IMSE = 0.000052).
- ❖ عند حجم عينة (75) كانت طريقة بيز القياسية في ظل دالة خسارة انتروبي العامة  $\hat{S}(t)_{SBEL}$  هي الأفضل لتقدير دالة البقاء كونها قد سجلت اقل قيمة لمتوسط مربعات الخطأ التكاملي بلغ (IMSE = 0.000034).

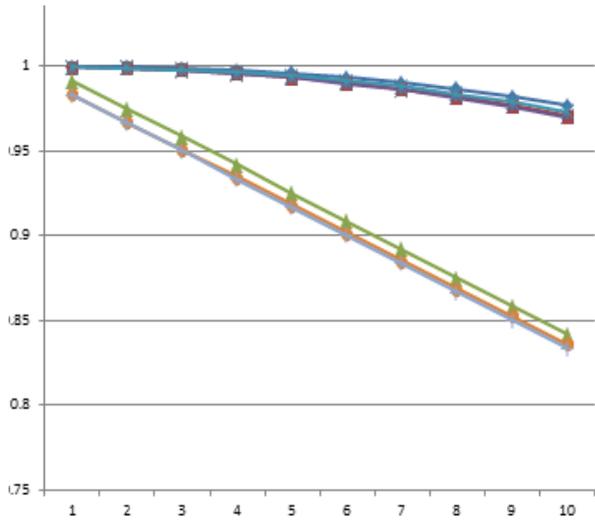
❖ عند حجم عينة (100) كانت طريقة بيزالهرمي في ظل دالة خسارة انتروبي العامة  $\hat{S}(t)_{HBEL}$  هي الأفضل لتقدير دالة البقاء كونها قد سجلت اقل قيمة لمتوسط مربعات الخطأ التكاملية بلغ  $=0.000031$  (IMSE).



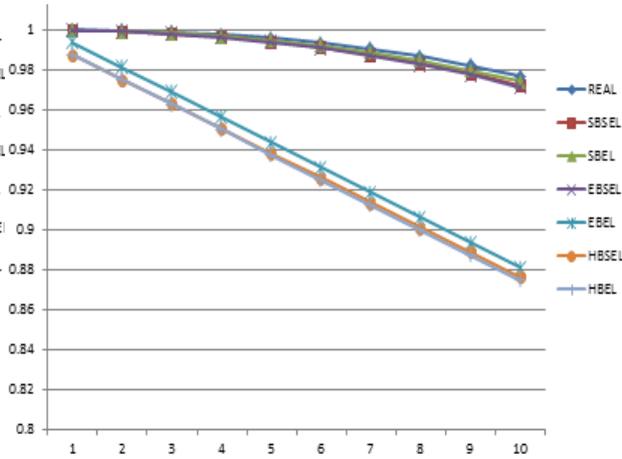
شكل (3-26) دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n= 10)



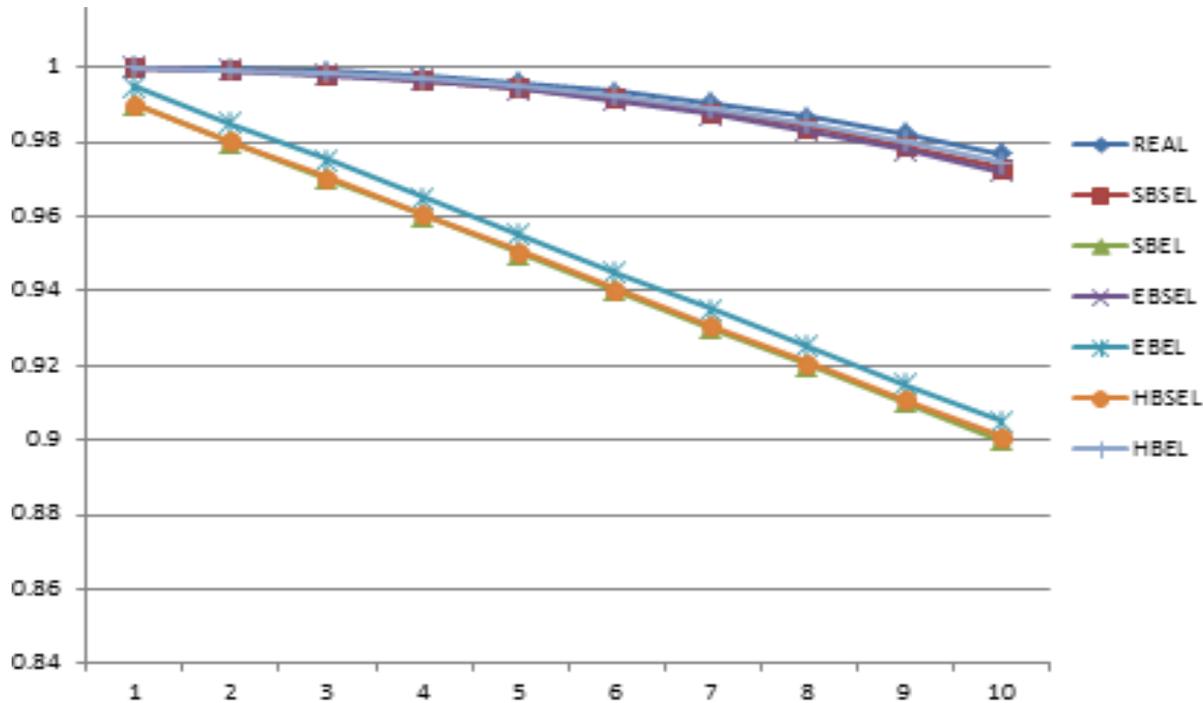
شكل (3-27) دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n= 25)



شكل (3-28) دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n= 50)



شكل (3-29) دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n= 75)



شكل (3-30) دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n= 100)

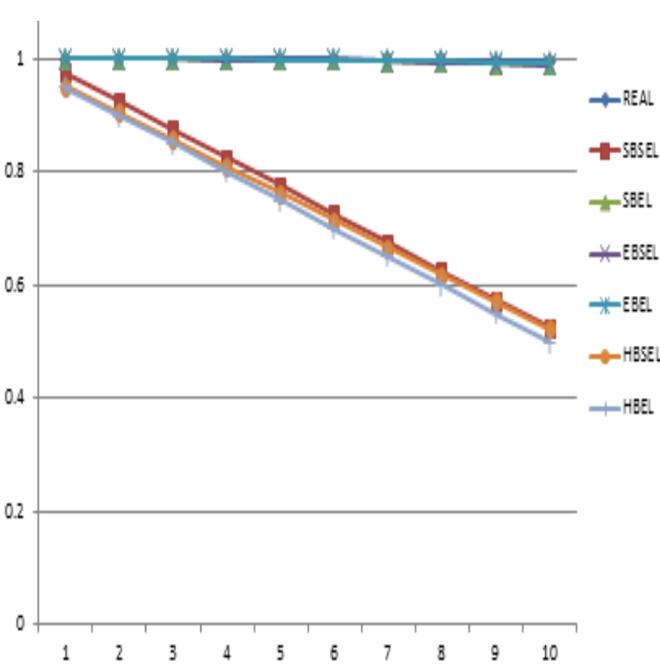
جدول (3-8) القيم الحقيقية والتقديرية لدالة البقاء بموجب طرائق التقدير وقيمة متوسط مربعات الخطأ التكاملية (IMSE) لكل طريقة عند أحجام العينات المفترضة للأنموذج السابع

Model 7				$\theta = 3.5$	$\alpha = 4.5$	$\beta = 2$		
n	ti	Real(R(t))	$\hat{S}(t)_{SBSEL}$	$\hat{S}(t)_{SBEL}$	$\hat{S}(t)_{EBSEL}$	$\hat{S}(t)_{EBEL}$	$\hat{S}(t)_{HBSEL}$	$\hat{S}(t)_{HBEL}$
10	0.02012	0.93939	0.97500	0.99995	0.99994	0.93997	0.95238	0.95000
	0.03034	0.91000	0.92500	0.99977	0.99974	0.91987	0.90476	0.90000
	0.12425	0.67906	0.87500	0.99943	0.99937	0.69963	0.85714	0.85000
	0.16589	0.59616	0.82500	0.99887	0.99879	0.59923	0.80952	0.80000
	0.22938	0.48859	0.77500	0.99806	0.99795	0.49861	0.76190	0.75000
	0.26025	0.44344	0.72500	0.99695	0.99682	0.49774	0.71429	0.70000
	0.27456	0.42395	0.67500	0.99550	0.99534	0.49656	0.66667	0.65000
	0.41265	0.27431	0.62500	0.99366	0.99348	0.29504	0.61905	0.60000
	0.52964	0.18937	0.57500	0.99139	0.99119	0.19313	0.57143	0.55000
	1.39993	0.01156	0.52500	0.98864	0.98843	0.02077	0.52381	0.50000
IMSE			0.081985	0.0000509	0.0000618	0.0000282	0.086148	0.095038
Best			$\hat{S}(t)_{EBEL}$					
25	0.02027	0.93897	0.93999	0.99998	0.99997	0.98750	0.97561	0.97500
	0.02987	0.91133	0.91994	0.99991	0.99988	0.96250	0.95122	0.95000
	0.03740	0.89026	0.89981	0.99972	0.99967	0.93750	0.92683	0.92500
	0.03744	0.89014	0.89956	0.99940	0.99931	0.91250	0.90244	0.90000

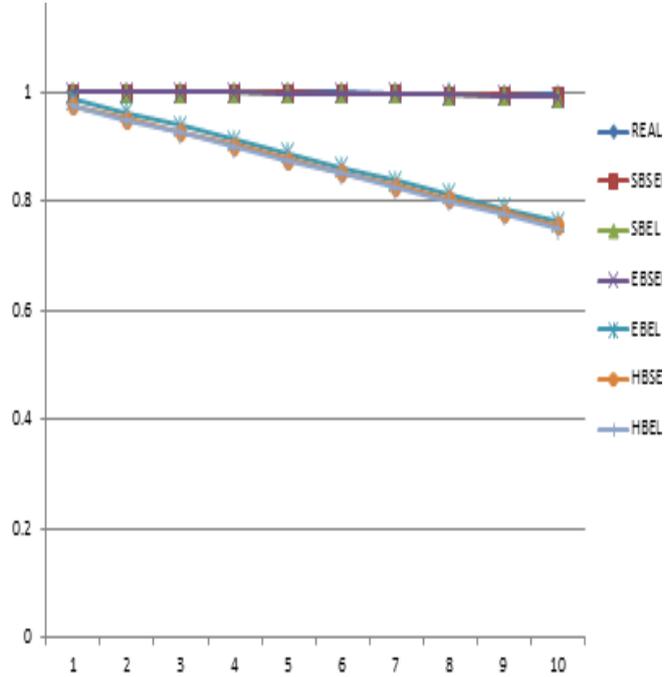
	0.09473	0.74463	0.74914	0.99888	0.99875	0.88750	0.87805	0.87500
	0.10104	0.73012	0.73852	0.99813	0.99795	0.86250	0.85366	0.85000
	0.11064	0.70854	0.71764	0.99709	0.99686	0.83750	0.82927	0.82500
	0.12000	0.68814	0.68646	0.99571	0.99544	0.81250	0.80488	0.80000
	0.12279	0.68217	0.67491	0.99394	0.99362	0.78750	0.78049	0.77500
	0.19291	0.54779	0.54295	0.99173	0.99136	0.76250	0.75610	0.75000
	<b>IMSE</b>	<b>0.0000085</b>	0.0000151	0.0000228	0.020213	0.022315	0.023459	
	<b>Best</b>	<b><math>\hat{S}(t)_{SBSSEL}</math></b>						
50	0.01078	0.96706	0.96999	0.99999	0.99999	0.99167	0.98361	0.98333
	0.01782	0.94614	0.94996	0.99994	0.99993	0.97500	0.96721	0.96667
	0.02448	0.92676	0.92985	0.99981	0.99977	0.95833	0.95082	0.95000
	0.02542	0.92403	0.92964	0.99955	0.99949	0.94167	0.93443	0.93333
	0.04620	0.86619	0.86928	0.99912	0.99902	0.92500	0.91803	0.91667
	0.05138	0.85234	0.85872	0.99848	0.99834	0.90833	0.90164	0.90000
	0.05982	0.83023	0.83793	0.99757	0.99739	0.89167	0.88525	0.88333
	0.06638	0.81343	0.81684	0.99635	0.99611	0.87500	0.86885	0.86667
	0.06813	0.80901	0.80540	0.99475	0.99446	0.85833	0.85246	0.85000
0.07004	0.80420	0.80356	0.99273	0.99238	0.84167	0.83607	0.83333	
	<b>IMSE</b>	<b>0.0000050</b>	0.0000072	0.0000107	0.008859	0.009953	0.010294	
	<b>Best</b>	<b><math>\hat{S}(t)_{SBSSEL}</math></b>						
75	0.00541	0.98333	0.98996	0.99999	0.99999	0.99375	0.98765	0.98750
	0.01287	0.96082	0.95996	0.99995	0.99994	0.98125	0.97531	0.97500
	0.01700	0.94855	0.93986	0.99983	0.99980	0.96875	0.96296	0.96250
	0.02378	0.92877	0.92966	0.99960	0.99954	0.95625	0.95062	0.95000
	0.03953	0.88437	0.89932	0.99920	0.99910	0.94375	0.93827	0.93750
	0.04944	0.85749	0.85877	0.99859	0.99844	0.93125	0.92593	0.92500
	0.05976	0.83039	0.84799	0.99772	0.99751	0.91875	0.91358	0.91250
	0.06350	0.82077	0.82690	0.99653	0.99626	0.90625	0.90123	0.90000
	0.06458	0.81802	0.81547	0.99496	0.99462	0.89375	0.88889	0.88750
0.06531	0.81616	0.80362	0.99297	0.99256	0.88125	0.87654	0.87500	
	<b>IMSE</b>	<b>0.0000031</b>	0.0000045	0.0000074	0.004914	0.005572	0.005716	
	<b>Best</b>	<b><math>\hat{S}(t)_{SBSSEL}</math></b>						
100	0.00046	0.99858	0.99997	0.99500	0.99999	0.99999	0.99010	0.99000
	0.00280	0.99135	0.99321	0.98500	0.99995	0.99996	0.98020	0.98000
	0.00302	0.99067	0.99089	0.97500	0.99982	0.99985	0.97030	0.97000
	0.00770	0.97637	0.97969	0.96500	0.99959	0.99964	0.96040	0.96000
	0.00993	0.96961	0.96937	0.95500	0.99918	0.99928	0.95050	0.95000
	0.01142	0.96513	0.96886	0.94500	0.99858	0.99871	0.94059	0.94000
	0.01193	0.96362	0.96811	0.93500	0.99771	0.99789	0.93069	0.93000
	0.01428	0.95661	0.95708	0.92500	0.99653	0.99677	0.92079	0.92000
	0.01624	0.95079	0.95570	0.91500	0.99498	0.99528	0.91089	0.91000
0.01638	0.95037	0.95391	0.90500	0.99301	0.99337	0.90099	0.90000	
	<b>IMSE</b>	<b>0.0000027</b>	0.003101	0.0000062	0.0000037	0.003538	0.003612	
	<b>Best</b>	<b><math>\hat{S}(t)_{SBSSEL}</math></b>						

يتضح من خلا الجدول (3-8) والاشكل(3-31) الى (3-35) عند القيم الافتراضية للمعلمات  $\theta = 3.5$ ,  $\alpha = 4.5$ ,  $\beta = 2$  وفي ضوء استخدام المعيار الاحصائي متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) للمقارنة بين افضلية الطرائق المستخدمة لتقدير دالة البقاء ولأحجام العينات المختلفة يمكن تفسير نتائج الجدول كما يأتي :

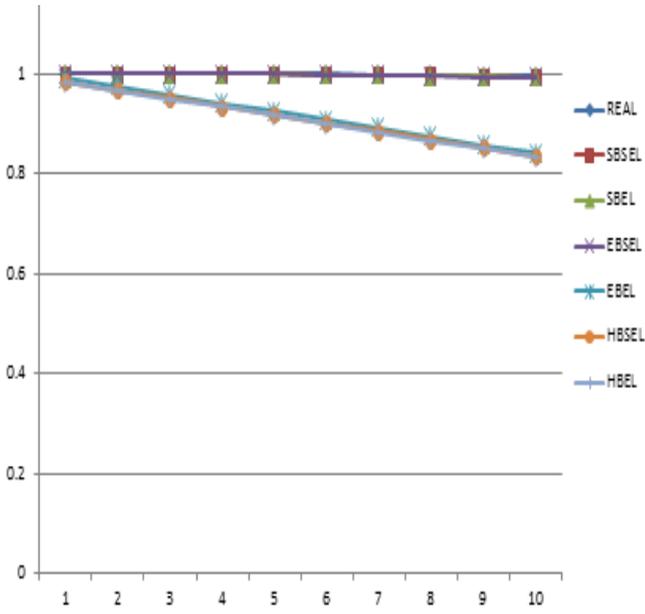
- ❖ عند حجم عينة (10) كانت طريقة توقع بيز في ظل دالة خسارة انتروبي العامة  $\hat{S}(t)_{EBEL}$  هي الأفضل لتقدير دالة البقاء كونها قد سجلت اقل قيمة لمتوسط مربعات الخطأ التكاملي بلغ (IMSE = 0.0000282).
- ❖ عند حجم عينة (25) كانت طريقة بيز القياسية في ظل دالة خسارة تربيعية  $\hat{S}(t)_{SBSEL}$  هي الأفضل لتقدير دالة البقاء كونها قد سجلت اقل قيمة لمتوسط مربعات الخطأ التكاملي بلغ (IMSE = 0.0000085).
- ❖ عند حجم عينة (50) كانت طريقة بيز القياسية في ظل دالة خسارة تربيعية  $\hat{S}(t)_{SBSEL}$  هي الأفضل لتقدير دالة كونها قد سجلت اقل قيمة لمتوسط مربعات الخطأ التكاملي بلغ (IMSE = 0.0000050).
- ❖ عند حجم عينة (75) كانت طريقة بيز القياسية في ظل دالة خسارة تربيعية  $\hat{S}(t)_{SBSEL}$  هي الأفضل لتقدير دالة البقاء كونها سجلت اقل قيمة لمتوسط مربعات الخطأ التكاملي بلغ (IMSE = 0.0000031).
- ❖ عند حجم عينة (100) كانت طريقة بيز القياسية في ظل دالة خسارة تربيعية  $\hat{S}(t)_{SBSEL}$  هي الأفضل لتقدير دالة البقاء كونها قد سجلت اقل قيمة لمتوسط مربعات الخطأ التكاملي بلغ (IMSE = 0.0000027).



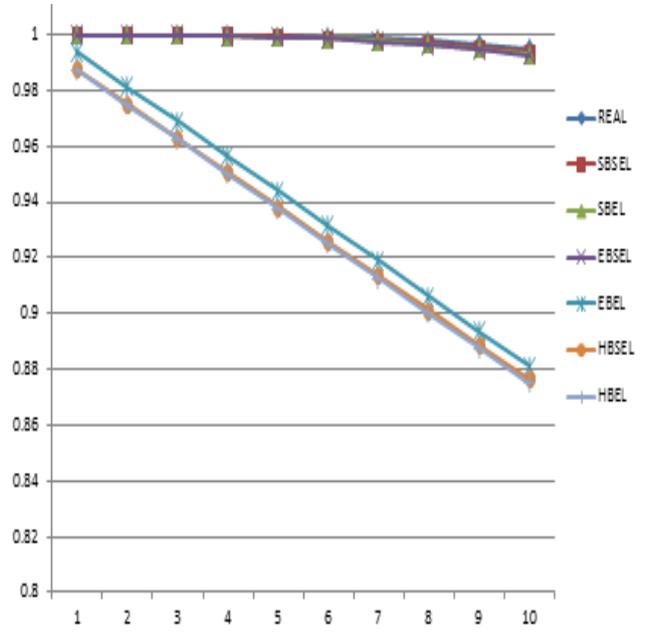
شكل (3-31) دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n= 10)



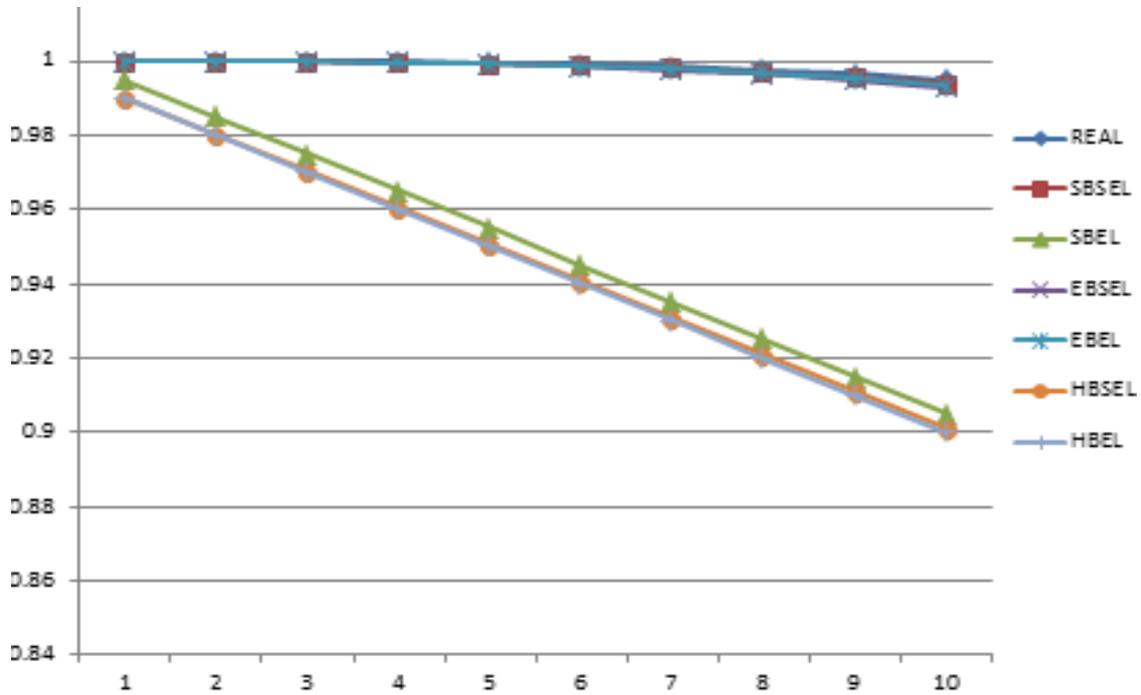
شكل (3-32) دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n= 25)



شكل (3-33) دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n= 50)



شكل (3-34) دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n= 75)



شكل (3-35) دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n= 100)

جدول (3-9) القيم الحقيقية والتقديرية لدالة البقاء بموجب طرائق التقدير وقيمة متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) لكل طريقة عند أحجام العينات المفترضة لأنموذج الثامن

Model 8					$\theta = 3.5$	$\alpha = 5$	$\beta = 1$	
n	ti	Real(R(t))	$\hat{S}(t)_{SBSEL}$	$\hat{S}(t)_{SBEL}$	$\hat{S}(t)_{EBSEL}$	$\hat{S}(t)_{EBEL}$	$\hat{S}(t)_{HBSEL}$	$\hat{S}(t)_{HBEL}$
10	0.04692	0.85609	0.85997	0.95000	0.99997	0.97500	0.99999	0.95238
	0.05513	0.83311	0.83987	0.90000	0.99985	0.92500	0.99993	0.90476
	0.06291	0.81191	0.81965	0.85000	0.99962	0.87500	0.99979	0.85714
	0.08866	0.74552	0.75930	0.80000	0.99925	0.82500	0.99954	0.80952
	0.11826	0.67585	0.66878	0.75000	0.99871	0.77500	0.99915	0.76190
	0.14730	0.61381	0.61806	0.70000	0.99797	0.72500	0.99860	0.71429
	0.15507	0.59821	0.58710	0.65000	0.99699	0.67500	0.99784	0.66667
	0.15738	0.59363	0.58587	0.60000	0.99575	0.62500	0.99685	0.61905
	0.28088	0.39404	0.37435	0.55000	0.99422	0.57500	0.99559	0.57143
	0.28383	0.39020	0.37249	0.50000	0.99235	0.52500	0.99403	0.52381
IMSE			0.0000224	0.095411	0.0000278	0.082335	0.0000114	0.086502
Best			$\hat{S}(t)_{HBSEL}$					
25	0.03002	0.90537	0.99999	0.98750	0.91999	0.99998	0.97561	0.97500
	0.08034	0.76635	0.99992	0.96250	0.75995	0.99989	0.95122	0.95000
	0.08053	0.76588	0.99977	0.93750	0.75984	0.99972	0.92683	0.92500
	0.08079	0.76522	0.99951	0.91250	0.75965	0.99942	0.90244	0.90000
	0.09211	0.73704	0.99910	0.88750	0.74933	0.99897	0.87805	0.87500
	0.10482	0.70663	0.99851	0.86250	0.71885	0.99833	0.85366	0.85000
	0.11173	0.69063	0.99770	0.83750	0.69818	0.99747	0.82927	0.82500
	0.11783	0.67681	0.99664	0.81250	0.68728	0.99635	0.80488	0.80000
	0.11877	0.67470	0.99529	0.78750	0.67612	0.99494	0.78049	0.77500
	0.14651	0.61543	0.99361	0.76250	0.61465	0.99320	0.75610	0.75000
IMSE			0.0000111	0.020387	0.0000060	0.000017	0.022495	0.023644
Best			$\hat{S}(t)_{EBSEL}$					
50	0.00010	0.99966	0.99999	0.99167	0.99997	0.99999	0.98361	0.98333
	0.00769	0.97485	0.99995	0.97500	0.97997	0.99993	0.96721	0.96667
	0.01591	0.94869	0.99985	0.95833	0.94989	0.99980	0.95082	0.95000
	0.01595	0.94856	0.99965	0.94167	0.94973	0.99957	0.93443	0.93333
	0.03046	0.90405	0.99932	0.92500	0.91946	0.99921	0.91803	0.91667
	0.04051	0.87446	0.99884	0.90833	0.88905	0.99868	0.90164	0.90000
	0.04191	0.87040	0.99816	0.89167	0.87847	0.99794	0.88525	0.88333
	0.05369	0.83710	0.99725	0.87500	0.83767	0.99696	0.86885	0.86667
	0.05538	0.83244	0.99606	0.85833	0.83662	0.99571	0.85246	0.85000
	0.07030	0.79227	0.99456	0.84167	0.79527	0.99414	0.83607	0.83333
IMSE			0.0000051	0.008974	0.0000031	0.000008	0.010073	0.010416
Best			$\hat{S}(t)_{EBSEL}$					
75	0.00177	0.99417	0.99996	0.99999	0.99999	0.99375	0.98765	0.98750
	0.01456	0.95292	0.95497	0.99996	0.99994	0.98125	0.97531	0.97500
	0.02712	0.91410	0.91290	0.99987	0.99983	0.96875	0.96296	0.96250
	0.02854	0.90983	0.90975	0.99969	0.99961	0.95625	0.95062	0.95000

	0.03352	0.89493	0.89949	0.99939	0.99927	0.94375	0.93827	0.93750
	0.04853	0.85153	0.85910	0.99893	0.99876	0.93125	0.92593	0.92500
	0.06595	0.80380	0.81853	0.99829	0.99805	0.91875	0.91358	0.91250
	0.06877	0.79630	0.79774	0.99741	0.99710	0.90625	0.90123	0.90000
	0.07257	0.78634	0.78671	0.99627	0.99588	0.89375	0.88889	0.88750
	0.07636	0.77654	0.77538	0.99482	0.99434	0.88125	0.87654	0.87500
	IMSE	0.0000023	0.0000036	0.0000070	0.004999	0.005662	0.005808	
	Best	$\hat{S}(t)_{\text{SBSEL}}$						
100	0.00523	0.98283	0.98666	1.00000	0.99999	0.99500	0.99010	0.99000
	0.00928	0.96973	0.97998	0.99997	0.99996	0.98500	0.98020	0.98000
	0.01089	0.96458	0.96991	0.99989	0.99987	0.97500	0.97030	0.97000
	0.01111	0.96389	0.96978	0.99974	0.99969	0.96500	0.96040	0.96000
	0.01570	0.94935	0.94955	0.99948	0.99939	0.95500	0.95050	0.95000
	0.01619	0.94781	0.94918	0.99907	0.99894	0.94500	0.94059	0.94000
	0.01838	0.94097	0.94865	0.99848	0.99830	0.93500	0.93069	0.93000
	0.01840	0.94090	0.94791	0.99767	0.99743	0.92500	0.92079	0.92000
	0.02067	0.93384	0.93693	0.99660	0.99629	0.91500	0.91089	0.91000
	0.02997	0.90551	0.91546	0.99523	0.99485	0.90500	0.90099	0.90000
	IMSE	0.0000013	0.0000019	0.0000035	0.003169	0.003610	0.003684	
	Best	$\hat{S}(t)_{\text{SBSEL}}$						

يتضح من خلا الجدول (3-9) والاشكال (3-36) الى(3-40) وعند الافتراضية للمعلمات  $\theta = 3.5$ ,  $\alpha = 5$  ( $\beta = 1$ ) وفي ضوء استخدام المعيار الاحصائي متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) للمقارنة بين افضلية الطرائق المستخدمة لتقدير دالة البقاء لأحجام العينات المختلفة يمكن تفسير نتائج الجدول كما يأتي:

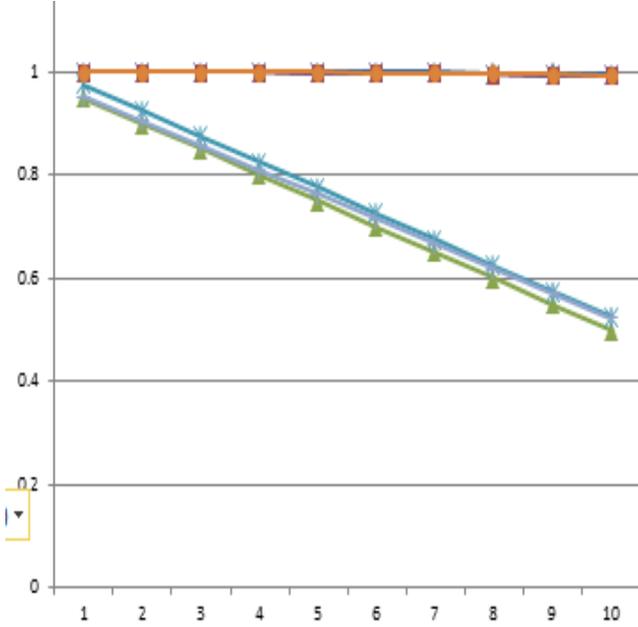
❖ عند حجم عينة (25) كانت طريقة توقع بيز في ظل دالة خسارة تربيعية  $\hat{S}(t)_{\text{HBSEL}}$  هي الأفضل لتقدير دالة البقاء كونها قد سجلت اقل قيمة لمتوسط مربعات الخطأ التكاملي بلغ (IMSE = 0.0000060).

❖ عند حجم عينة (25) كانت طريقة توقع بيز في ظل دالة خسارة تربيعية  $\hat{S}(t)_{\text{EBSEL}}$  هي الأفضل لتقدير دالة البقاء كونها قد سجلت اقل قيمة لمتوسط مربعات الخطأ التكاملي بلغ (IMSE = 0.0000060).

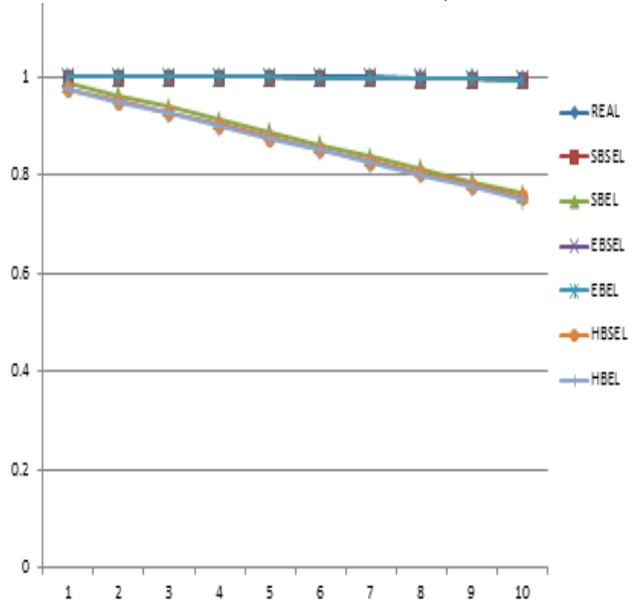
❖ عند حجم عينة (50) كانت طريقة توقع بيز في ظل دالة خسارة انطروبي العامة  $\hat{S}(t)_{\text{EBEL}}$  هي الأفضل لتقدير دالة البقاء كونها قد سجلت اقل قيمة لمتوسط مربعات الخطأ التكاملي بلغ (IMSE = 0.0000031).

❖ عند حجم عينة (75) كانت طريقة بيز القياسية في ظل دالة خسارة تربيعية  $\hat{S}(t)_{\text{SBEL}}$  هي الأفضل لتقدير دالة البقاء كونها قد سجلت اقل قيمة لمتوسط مربعات الخطأ التكاملي بلغ (IMSE = 0.0000023).

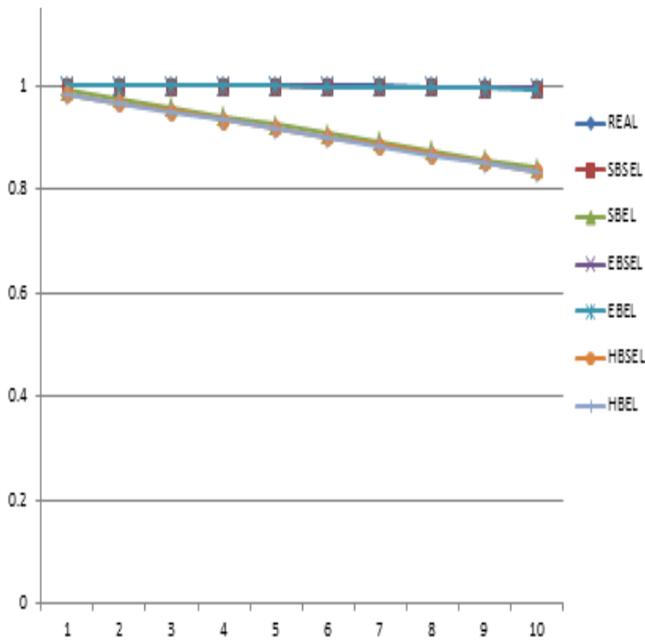
❖ عند حجم عينة (100) كانت طريقة بيز القياسية في ظل دالة خسارة تربيعية  $\hat{S}(t)_{SBEL}$  هي الأفضل لتقدير دالة البقاء كونها قد سجلت اقل قيمة لمتوسط مربعات الخطأ التكاملية بلغ  $(= 0.0000013)$  (IMSE).



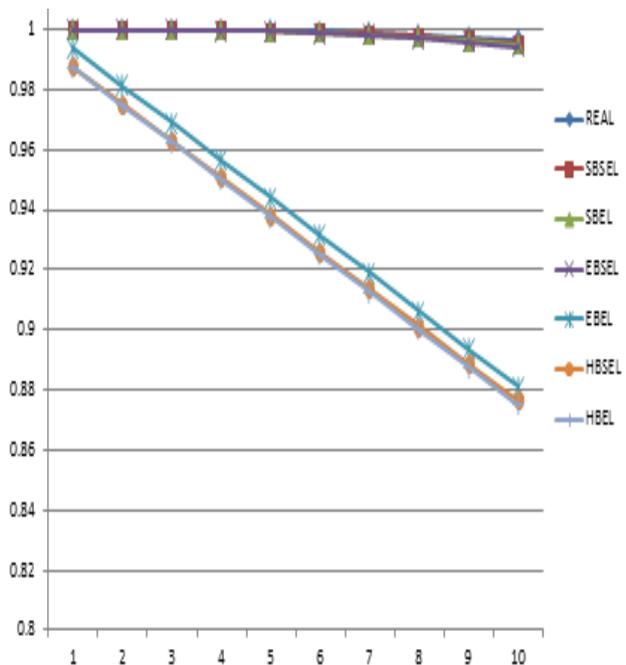
شكل (3-36) دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة  $(n=10)$



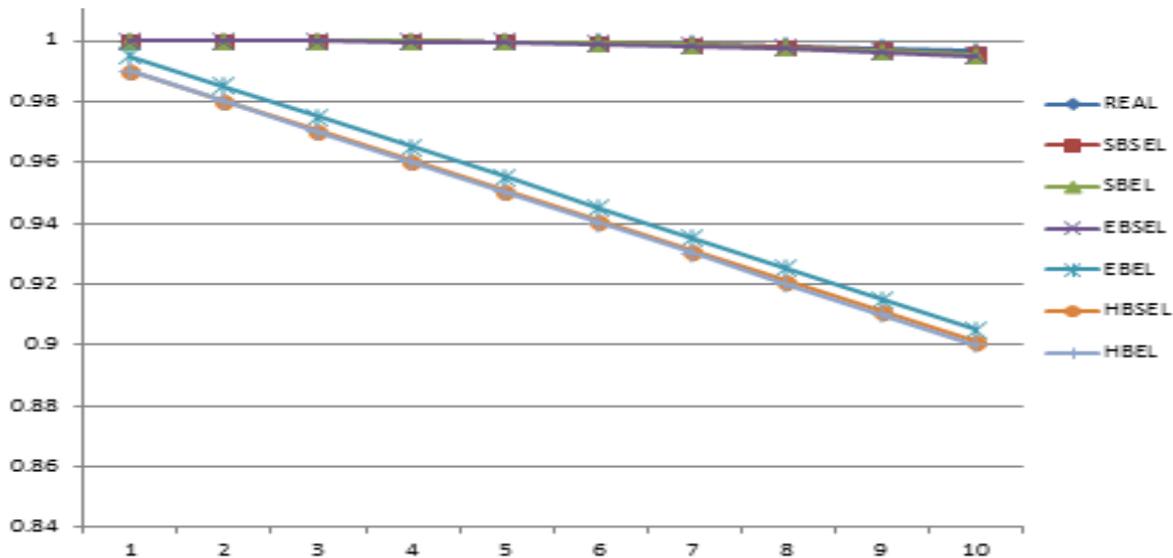
شكل (3-37) دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة  $(n=25)$



شكل (3-38) دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة  $(n=50)$



شكل (3-39) دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة  $(n=75)$



شكل (3-40) دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n= 100)

جدول (3-10) القيم الحقيقية والتقديرية لدالة البقاء بموجب طرائق التقدير وقيمة متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) لكل طريقة عند أحجام العينات المفترضة للنموذج التاسع

Mosel 9				$\theta = 3.4$	$\alpha = 5.5$	$\beta = 4$		
n	t <sub>i</sub>	Real(R(t))	$\hat{S}(t)_{SBSSEL}$	$\hat{S}(t)_{SBEL}$	$\hat{S}(t)_{EBSEL}$	$\hat{S}(t)_{EBEL}$	$\hat{S}(t)_{HBSEL}$	$\hat{S}(t)_{HBEL}$
10	0.00499	0.98564	0.99997	0.95000	0.99996	0.97500	0.95238	0.98999
	0.02433	0.93182	0.99986	0.90000	0.99983	0.92500	0.90476	0.93993
	0.06816	0.82009	0.99966	0.85000	0.99961	0.87500	0.85714	0.82981
	0.11943	0.70570	0.99935	0.80000	0.99927	0.82500	0.80952	0.71060
	0.29537	0.41891	0.99890	0.75000	0.99879	0.77500	0.76190	0.41928
	0.34334	0.36285	0.99829	0.70000	0.99815	0.72500	0.71429	0.36183
	0.35656	0.34873	0.99749	0.65000	0.99733	0.67500	0.66667	0.34823
	0.66792	0.13538	0.99649	0.60000	0.99629	0.62500	0.61905	0.13745
	0.70064	0.12243	0.99525	0.55000	0.99503	0.57500	0.57143	0.12646
0.86482	0.07371	0.99376	0.50000	0.99351	0.52500	0.52381	0.07525	
IMSE			0.0000227	0.095648	0.0000298	0.082558	0.086728	0.0000101
Best			$\hat{S}(t)_{HBEL}$					
25	0.01985	0.94405	0.99999	0.97500	0.99998	0.98750	0.97561	0.94999
	0.02035	0.94266	0.99994	0.95000	0.99992	0.96250	0.95122	0.94996

	0.02634	0.92640	0.99982	0.92500	0.99978	0.93750	0.92683	0.92988
	0.03075	0.91460	0.99962	0.90000	0.99955	0.91250	0.90244	0.91973
	0.05664	0.84815	0.99930	0.87500	0.99920	0.88750	0.87805	0.84949
	0.07967	0.79297	0.99885	0.85000	0.99871	0.86250	0.85366	0.79112
	0.08199	0.78760	0.99822	0.82500	0.99805	0.83750	0.82927	0.78862
	0.12003	0.70447	0.99741	0.80000	0.99719	0.81250	0.80488	0.71794
	0.14493	0.65469	0.99637	0.77500	0.99611	0.78750	0.78049	0.65706
	0.20057	0.55546	0.99509	0.75000	0.99479	0.76250	0.75610	0.54995
	<b>IMSE</b>		<b>0.0000073</b>	<b>0.023762</b>	<b>0.0000116</b>	<b>0.020498</b>	<b>0.022610</b>	<b>0.0000036</b>
	<b>Best</b>		<b><math>\hat{S}(t)_{HBEL}</math></b>					
50	0.01279	0.96357	1.00000	0.98333	0.99999	0.99167	0.98361	0.97998
	0.02625	0.92664	0.99997	0.96667	0.99996	0.97500	0.96721	0.91998
	0.04435	0.87909	0.99990	0.95000	0.99988	0.95833	0.95082	0.87992
	0.04536	0.87650	0.99977	0.93333	0.99973	0.94167	0.93443	0.86982
	0.04864	0.86817	0.99955	0.91667	0.99948	0.92500	0.91803	0.86963
	0.05008	0.86452	0.99921	0.90000	0.99912	0.90833	0.90164	0.86935
	0.05417	0.85427	0.99874	0.88333	0.99861	0.89167	0.88525	0.85894
	0.07278	0.80910	0.99810	0.86667	0.99793	0.87500	0.86885	0.80838
	0.08874	0.77219	0.99726	0.85000	0.99705	0.85833	0.85246	0.77764
	0.10350	0.73949	0.99620	0.83333	0.99594	0.84167	0.83607	0.73669
	<b>IMSE</b>		<b>0.0000022</b>	<b>0.010495</b>	<b>0.0000037</b>	<b>0.009048</b>	<b>0.010150</b>	<b>0.0000014</b>
	<b>Best</b>		<b><math>\hat{S}(t)_{SBEL}</math></b>					
75	0.00689	0.98024	1.00000	0.98999	0.99999	0.99375	0.98765	0.98750
	0.00719	0.97938	0.99997	0.97998	0.99996	0.98125	0.97531	0.97500
	0.01027	0.97067	0.99991	0.97193	0.99988	0.96875	0.96296	0.96250
	0.01124	0.96793	0.99979	0.96983	0.99973	0.95625	0.95062	0.95000
	0.01688	0.95221	0.99958	0.95965	0.99949	0.94375	0.93827	0.93750
	0.01913	0.94602	0.99926	0.94938	0.99914	0.93125	0.92593	0.92500
	0.02448	0.93142	0.99880	0.93898	0.99864	0.91875	0.91358	0.91250
	0.02474	0.93072	0.99818	0.93843	0.99797	0.90625	0.90123	0.90000
	0.02508	0.92979	0.99737	0.92770	0.99710	0.89375	0.88889	0.88750
	0.03339	0.90760	0.99633	0.90676	0.99601	0.88125	0.87654	0.87500

IMSE		0.0000018	0.0000011	0.0000036	0.005055	0.005720	0.005866	
Best		$\hat{S}(t)_{SBEL}$						
100	0.00023	0.99934	1.00000	0.99921	1.00000	0.99500	0.99010	0.99000
	0.00561	0.98388	0.99998	0.98998	0.99997	0.98500	0.98020	0.98000
	0.01064	0.96961	0.99992	0.96993	0.99990	0.97500	0.97030	0.97000
	0.01221	0.96522	0.99980	0.96984	0.99976	0.96500	0.96040	0.96000
	0.01488	0.95775	0.99961	0.95966	0.99953	0.95500	0.95050	0.95000
	0.01554	0.95592	0.99930	0.95940	0.99919	0.94500	0.94059	0.94000
	0.02990	0.91684	0.99887	0.91900	0.99871	0.93500	0.93069	0.93000
	0.02996	0.91668	0.99827	0.91846	0.99806	0.92500	0.92079	0.92000
	0.03046	0.91535	0.99748	0.91774	0.99721	0.91500	0.91089	0.91000
	0.03319	0.90813	0.99647	0.90681	0.99614	0.90500	0.90099	0.90000
IMSE		0.0000012	0.0000009	0.0000025	0.003213	0.003656	0.003731	
Best		$\hat{S}(t)_{SBEL}$						

يتضح عبر (3-10) والاشكال(3-41) الى (3-45) وعند القيم الافتراضية للمعلمات  $\theta = 3.4$ ,  $\alpha = 5.5$ ,  $(\beta = 4)$  وفي ضوء استخدام المعيار الاحصائي متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) للمقارنة بين افضلية الطرائق المستخدمة لتقدير دالة البقاء ولأحجام العينات المختلفة يمكن تفسير نتائج الجدول كما يأتي :

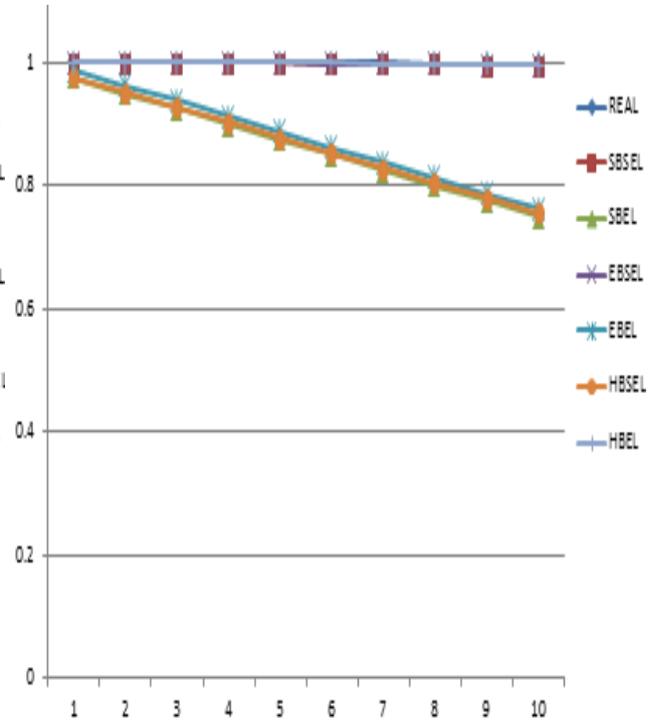
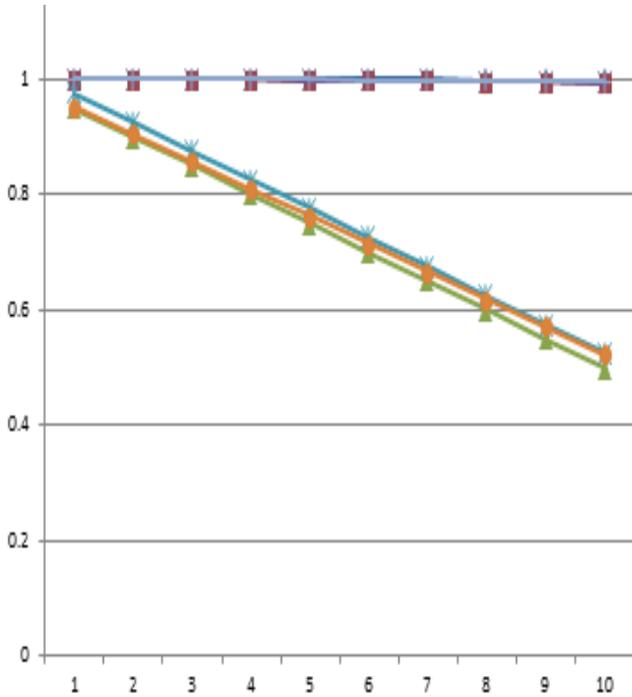
❖ عند حجم عينة (10) كانت طريقة بيز الهرمي في ظل دالة خسارة انتروبي العامة  $\hat{S}(t)_{HBEL}$  هي الأفضل لتقدير دالة البقاء كونها قد سجلت اقل قيمة لمتوسط مربعات الخطأ التكاملي بلغ (0.0000101) = (IMSE).

❖ عند حجم عينة (25) كانت طريقة بيز الهرمي في ظل دالة خسارة انتروبي العامة  $\hat{S}(t)_{HBEL}$  هي الأفضل لتقدير دالة البقاء كونها قد سجلت اقل قيمة لمتوسط مربعات الخطأ التكاملي بلغ (0.0000036) = (IMSE).

❖ عند حجم عينة (50) كانت طريقة بيز الهرمي في ظل دالة خسارة انتروبي العامة  $\hat{S}(t)_{HBEL}$  هي الأفضل لتقدير دالة البقاء كونها قد سجلت اقل قيمة لمتوسط مربعات الخطأ التكاملي بلغ (0.0000014) = (IMSE).

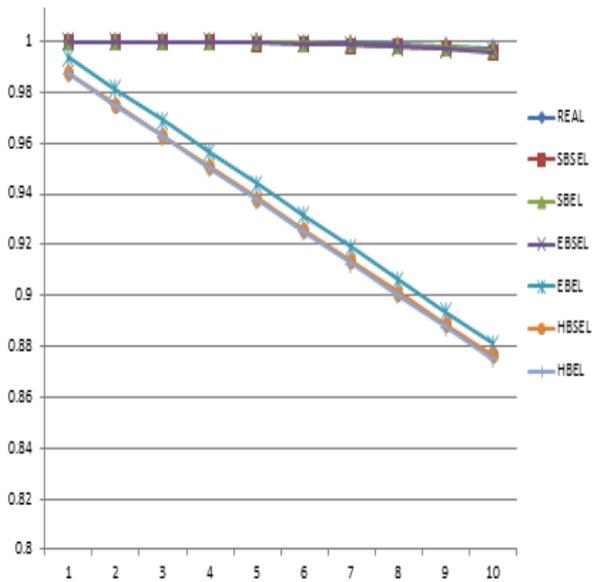
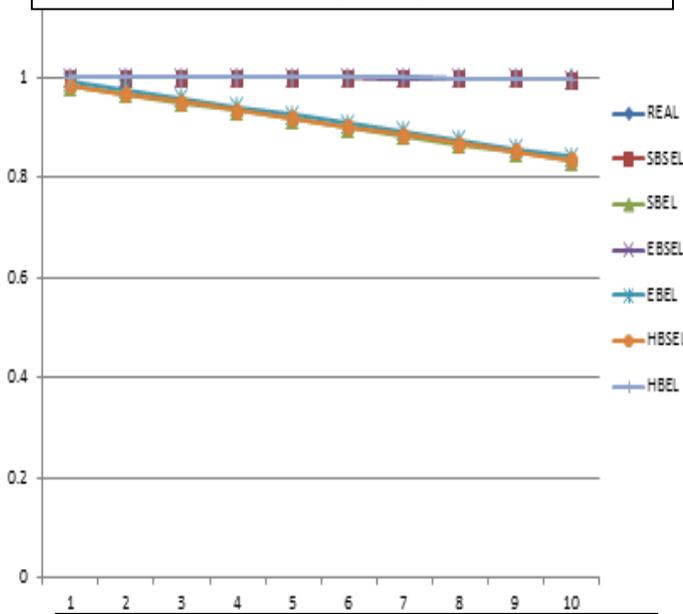
❖ عند حجم عينة (75) كانت طريقة بيز القياسية في ظل دالة خسارة انتروبي العامة  $\hat{S}(t)_{SBEL}$  هي الأفضل لتقدير دالة البقاء كونها قد سجلت اقل قيمة لمتوسط مربعات الخطأ التكاملي بلغ (0.0000011) = (IMSE).

❖ عند حجم عينة (100) كانت طريقة بيز القياسية في ظل دالة خسارة انتروبي العامة  $\hat{S}(t)_{SBEL}$  هي الأفضل لتقدير دالة البقاء كونها قد سجلت اقل قيمة لمتوسط مربعات الخطأ التكاملي بلغ (IMSE =0.0000009).



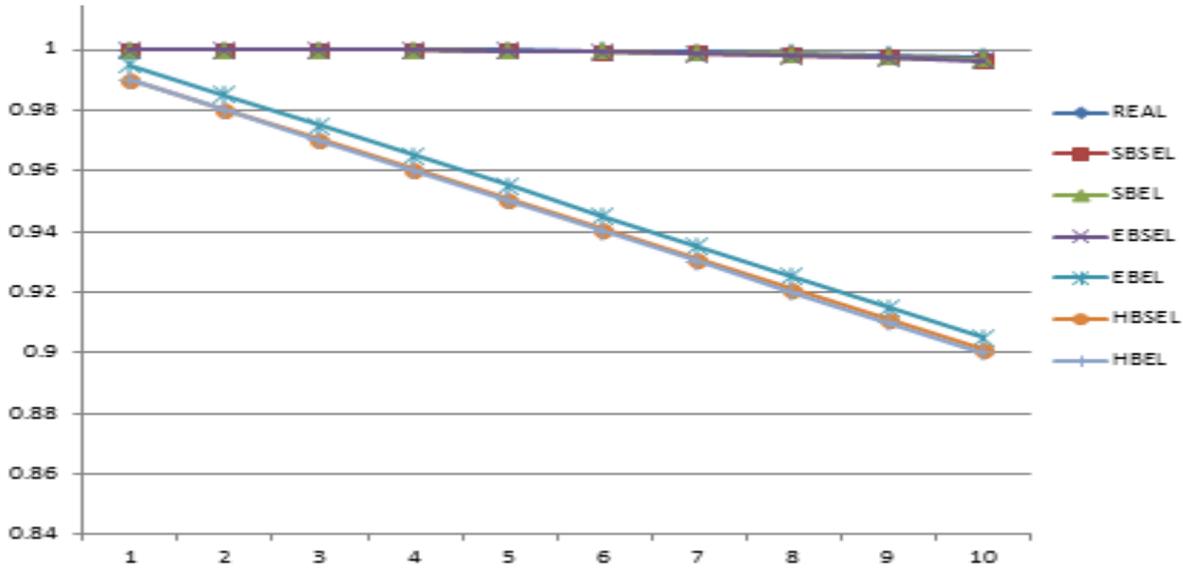
شكل (3-41) دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n= 10)

شكل (3-42) دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n= 25)



شكل (3-43) دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n= 50)

شكل (3-44) دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n= 75)



شكل (3-45) دالة البقاء الحقيقية و المقدرة بموجب طرائق التقدير عند حجم عينة (n= 100)

والجدول (3-11) يبين نسب الافضلية لكل طريقة من طرائق التقدير عند كل حجم من أحجام العينات:

والجدول (3-11) نسب الافضلية لكل طريقة من طرائق التقدير عند كل حجم من أحجام العينات

الطريقة	حجم العينة					عدد مرات الافضلية	نسبة الافضلية
	$n_1 = 10$	$n_2 = 25$	$n_3 = 50$	$n_4 = 75$	$n_5 = 100$		
SBSEL	1	1	1	2	2	7	16%
SBEL	0	0	0	3	2	5	11%
EBSEL	2	2	1	1	1	7	16%
EBEL	2	0	5	3	1	11	24%
HBSEL	2	4	0	0	0	6	13%
HBEL	2	2	2	0	3	9	20%

ومن جدول (3-11) يتضح ما يأتي:

- ❖ من خلال الجداول (3-2) (3-3) (3-4) (3-5) (3-6) (3-7) (3-8) (3-9) (3-10) بأن قيم دالة البقاء المقدرة تقترب من قيم دالة البقاء الحقيقية وتزداد اقترابا كلما زاد حجم العينة (n) ولجميع طرائق التقدير المستعملة.
- ❖ نلاحظ أن القيم المقدرة لدالة البقاء تتناقص كلما زاد الزمن (t) وهذا ما يطابق الجانب النظري عن سلوك دالة البقاء كونها دالة متناقصة.

- ❖ الرسوم البيانية توضح تقارب بين طرائق التقدير المستعملة لتقدير دالة البقاء لتوزيع ليندلي ذي الثلاث معلمات والقيم الحقيقية وهذا ما يدل على ملائمة كافة طرائق التقدير.
- ❖ ان تناقص القيم الخاصة بالمعيار الاحصائي متوسط مربعات الخطاء التكاملية (IMSE) كلما زاد حجم العينة وهذا يطابق النظرية الخاصة بهذا المؤشر.
- ❖ عند حجم العينة (10) تساوى في الأفضلية كل من طريقة توقع بيز وطريقة بيز الهرمي في ظل دوال الخسارة المستعملة لأنها تمتلك اقل قيمة (IMSE).
- ❖ عند حجم العينة (25) كانت طريقة بيز الهرمي ظل دالة خسارة تربيعية  $\hat{S}(t)_{HBSEL}$  افضل لتقدير دالة البقاء لأنها تمتلك اقل قيمة (IMSE).
- ❖ عند حجم العينة (50) كانت طريقة توقع بيز في ظل دالة خسارة انتروبي العامة  $\hat{S}(t)_{EBEL}$  افضل لتقدير دالة البقاء لأنها تمتلك اقل قيمة (IMSE).
- ❖ عند حجم العينة (75) تساوى في الأفضلية كل من طريقة بيز القياسي في ظل دالة خسارة تربيعية  $\hat{S}(t)_{SBEL}$  و طريقة توقع بيز في ظل دالة خسارة انتروبي العامة  $\hat{S}(t)_{HBEL}$  لأنها تمتلك اقل قيمة (IMSE).
- ❖ عند حجم العينة (100) كانت طريقة بيز الهرمي في ظل دالة خسارة انتروبي العامة  $\hat{S}(t)_{HBEL}$  افضل لتقدير دالة البقاء لأنها سجلت اعلى نسب افضلية عن الطرائق الباقية.
- ❖ عند المقارنة بين طرائق التقدير في ضوء نسبة الأفضلية تبين لنا أن طريقة توقع بيز في ظل دالة خسارة انتروبي العامة  $\hat{S}(t)_{EBEL}$  جاءت بالمرتبة الأولى لامتلاكها اكبر نسبة حيث بلغت %24 وجاءت بعدها طريقة بيز الهرمي في ظل دالة خسارة انتروبي العامة  $\hat{S}(t)_{HBEL}$  بالمرتبة الثانية وبنسبة حيث بلغت %20 وجاءت بعدها طريقة بيز القياسي في ظل دالة خسارة تربيعية  $\hat{S}(t)_{SBEL}$  وطريقة توقع بيز في ظل دالة خسارة تربيعية وبنسبة حيث بلغت %16 وجاءت بعدها كل من طريقة بيز القياسية في ظل دالة خسارة تربيعية  $\hat{S}(t)_{SBSEL}$  وطريقة بيز الهرمي في ظل دالة خسارة تربيعية  $\hat{S}(t)_{HBSEL}$  في المرتبة الرابعة بنسبة بلغت %13 وجاءت بعدها طريقة بيز القياسية في ظل دالة انتروبي العامة  $\hat{S}(t)_{SBEL}$  بالمرتبة الخامسة وبنسبة %11.

النفس والرب

والجانح والطيب

## 1-4 تمهيد:

## (Preface )

تضمن هذا الفصل الجانب العملي من هذه الرسالة لتقدير دالة البقاء إذ أستعملت بيانات حقيقية للأشخاص المصابين بمرض فايروس (COVID-19) كورونا المستجد عبر المدة (2020/5/8) ولغاية (2020/7/17) ولكلا الجنسين إذ تم اختيار مستشفى الحسين التعليمي في محافظة كربلاء مكان لجمع البيانات التي تخص هذه الرسالة بهدف تطبيقها على توزيع ليندلي ذي الثلاث معالم بعد أن تم تطبيق اختبارات حسن المطابقة لبيان مدى ملائمة البيانات مع التوزيع المستعمل ثم تقدير دالة البقاء بأستعمال كل من طريقة التوقع البيزي وطريقة بيز الهرمي التي ظهرت افضليتهما في التقدير في مخرجات المحاكاة.

## 2-4 نبذة مختصرة عن مرض فايروس كورونا المستجد:

[5] (COVID-19)

يعد فايروس مرض كورونا (COVID-19) المستجد من الفايروسات التاجية الانتقالية شديدة العدوى التي يصيب الانسان والحيوان على حد سواء في مختلف الفئات العمرية ويصعب السيطرة عليها وذلك يزداد انتشاره بزيادة الاحتكاك بين الأفراد ويعد انتشار وباء كورونا من المشاكل الصحية التي عصف سكان العالم اجمع وبلغت ضحاياه الملايين.

وتزداد خطورة المرض للأشخاص المسنين خصوصاً الذين يعانون من الامراض المزمنة مثل امراض القلب والسكري وضغط الدم فهو يصيب الجهاز التنفسي للإنسان ضيق التنفس والالتهابات الحادة التي يؤدي الى خفض الجهاز المناعي سواء أكانت خفيفة مثل نزلات البرد أم شديد مثل الالتهاب الرئوي الحاد فضلاً عن تركيبته الجينية فأن الحامض النووي للفايروس يمنحه القدرة على النمو والتكاثر وأحداث طفرات وراثية.

## 1-2-4 نشأة المرض: [5]

تم تشخيص اول حالة لمرض كورونا في الستينيات القرن الماضي وهو عبارة عن متلازمة نفسية حادة ناتج عن فصائل متعددة من الفايروسات التاجية ومنها: -

- فايروس كورونا (NL63).

- وفايروس كورونا (E229).

- فايروس سارس (SARS) اول ظهور للفايروس عام (2003).

- وفايروس (HKU1) اول ظهور للفايروس في عام (2004).

- وفايروس كورونا (OC43) اول ظهور للفايروس في عام (2005).

- فايروس متلازمة الشرق الأوسط التنفسية اول ظهور للفايروس عام (2012).

- فايروس كورونا (COVID-19) اول ظهور للفايروس عام (2019) في مدينة وهان الصينية .

### 2-2-4 أعراض المرض:<sup>[5]</sup>

ان أعراض مرض فايروس كورونا وشدهتها تكون متفاوتة من مريض لآخر والأكثر شيوعا منها: -

1-ارتفاع درجات الحرارة وارهاق عام.

2- الشعور بالألم وفقدان حاسة الذيق والشم.

3- سعال جاف وقشعريرة وضيق التنفس.

4- الألتهاب في الحلق والأحتقان في الانف.

5- غثيان ورشح شديد.

الأن هذه الاعراض لأتظهر عند البعض بل لا يشعر هؤلاء بالمرض.

### 3-2-4 انتقال المرض والعدوى<sup>[5]</sup>

ينتقل الفايروس نتيجة الاقتراب والملامسة المباشرة من الشخص المصاب او نتيجة السعال والرداذ للشخص المصاب بالفايروس الى الشخص السليم وكذلك نتيجة التقبيل وملامسة الأسطح لذلك يوصي بعدم الاقتراب اقل من متر للأشخاص المصابين ومن الجدير بالذكر لا توجد فترة حضانة محددة للفايروس الان التوقعات تشير ان فترة حضانة المرض (2-14 يوم).

### 4-2-4 أساليب علاج المرض:<sup>[5]</sup>

لم يكتشف علاج فعال ومحدد لغاية الان ولكن يتم أستعمال الادوية الداعمة حسب حالة المريض وأن المساعي الرامية لمكافحة هذى الوباء وعلاجه حيث سعى الأطباء الى أستعمال بلازما الدم المناعية التي ثبتت فعاليتها في كثير من التجارب السريرية والأطباء والمختصون ينصحون بتناول الأغذية التي تحتوي على فيتامينات مع المراقبة المستمرة لدرجة حرارة المريض كجاء وقائي من الإصابة بالفايروس لذلك يعد هذا الوباء من مشاكل العصر الحالي التي من الضروري اجراء البحوث والدراسات حول تطبيق البيانات وتحليلها احصائيا من لدن الباحثين.

### 3-4 جمع البيانات الحقيقية المتعلقة بالرسالة: (Collection Real Data)

جمعت البيانات المتعلقة بالرسالة لعدد من المصابين بمرض فايروس كورونا (COVID-19) المستجد من سجلات دائرة مستشفى الحسين التعليمي في محافظة كربلاء المقدسة قسم الحميات والبالغ عددها (50) مشاهدة تمثل أوقات بقاء المرضى بالساعات تحت المراقبة والعلاج لحين الوفاء وتم تبويب البيانات للأشخاص المصابين لغرض الحصول على أوقات الحياة ( $t_i$ ) وذلك بطرح تاريخ الإصابة بالفايروس من تاريخ الوفاة وكما يلي :

جدول (4-1) يمثل أوقات البقاء لمرضى المصابين بفايروس كورونا بالساعات

0.1666	0.4166	1.0833	1.5	2.5416
0.2083	0.4166	1.125	1.7916	2.5466
0.2083	0.4583	1.125	2.0416	3.125
0.2083	0.5	1.125	2.125	3.166
0.2083	0.5833	1.125	2.125	3.1666
0.25	0.625	1.125	2.1666	3.2083
0.25	0.7083	1.1666	2.125	3.7084
0.25	0.75	1.25	2.1666	3.3333
0.2916	0.875	1.375	2.1667	3.5545
0.375	1	1.375	2.25	3.6556

❖ لغرض معرفة أن البيانات الحقيقية المبينة في الجدول (4-1) تتبع التوزيع المدروس (ليندلي ذي الثلاث معلمات) فقد تم أستعمال اختبار حسن المطابقة (Good ness of Fit) بأستعمال اختبار  $\chi^2$  وحسب المعادلة (51 - 2) والجدول (4-2) يبين نتائج اختبار ملائمة البيانات مع التوزيع المستخدم وحسب الجدول الآتي :

جدول (4-2) نتائج اختبار حسن المطابقة

Distribution	$\chi_c^2$	$\chi_{tabl}^2$	Sig.	Decision
Three Parameters Lindley	3.22	3.84	.0727	Not Reject $H_0$

نلاحظ من جدول (4-2) تظهر أن قيمة  $\chi_c^2$  المحسوبة والبالغة (3.22) اقل من قيمة  $\chi_{tabl}^2$  الجدولية والبالغة (3.84) وكانت قيمة Sig=0.0722 اكبر من مستوى المعنوية (0,05) وهذا يعني عدم رفض فرضية العدم اي أن البيانات الحقيقية تتوزع وفقاً لتوزيع ليندلي ذي الثلاث معلمات .

❖ لغرض معرفة افضلية بين توزيع ليندلي ذي الثلاث معلمات وتوزيع ليندلي ذي معلمتين أذ أقترحت العديد من المعايير الاختبارات وقد استعمل منها ثلاثة معايير والتي تم الإشارة إليها في المعادلات (2-51) (2-52) (2-53) حيث يتم تطبيقها على بيانات أوقات البقاء لمرضى فايروس كورونا التي تم الحصول عليها من سجلات دائرة مستشفى الحسين التعليمي في محافظة كربلاء المقدسة قسم الحميات . يبين جدول (4-3) نتائج اختبارات البين افضلية التوزيع الاحتمالي والتي طبقت على البيانات الحقيقية وكالاتي:

جدول (4-3) يبين معايير المفاضلة بين توزيع ليندلي ذي معلمتين وتوزيع ليندلي ذي الثلاث معلمات في تمثيل البيانات الحقيقية

Distribution	AIC	AICc	BIC
Three Para Lindley Distribution.	262.5818	263.1152	268.2573
Two Para. Lindley Distribution	292.8434	293.3771	298.5192

نلاحظ من جدول (4-3) بان معايير الاختبارات الخاصة بتوزيع ليندلي ذي الثلاث معلمات كان اقل من توزيع ليندلي ذي معلمتين لامتلاكه اقل قيمة بالنسبة لمعايير المفاضلة المستخدمة وهذا يدل عن ملائمة البيانات الحقيقية لتوزيع ليندلي ذي الثلاث معلمات.

(Real data analysis )

4-4 تحليل البيانات الحقيقية:

بينت نتائج تجارب المحاكاة الموضحة في الفصل الثالث من هذه الرسالة أفضلية طريقة توقع بيز في ظل دالة خسارة انتروبي العامة وطريقة بيز الهرمي في ظل دالة خسارة انتروبي العامة في تقدير دالة البقاء لتوزيع ليندلي ذي الثلاث معلمات لتمثيل البيانات الحقيقية عند أحجام العينات المتوسطة والصغيرة وتبين كذلك من الجانب التطبيقي أفضلية توزيع ليندلي ذي الثلاث معلمات لتمثيل البيانات الحقيقية . وعلى ضوء ذلك يتم تقدير دالة البقاء والدوال المرتبطة بها وفقاً لذلك حيث كانت نتائج التقدير كما في جدول (4-4) أدناه:

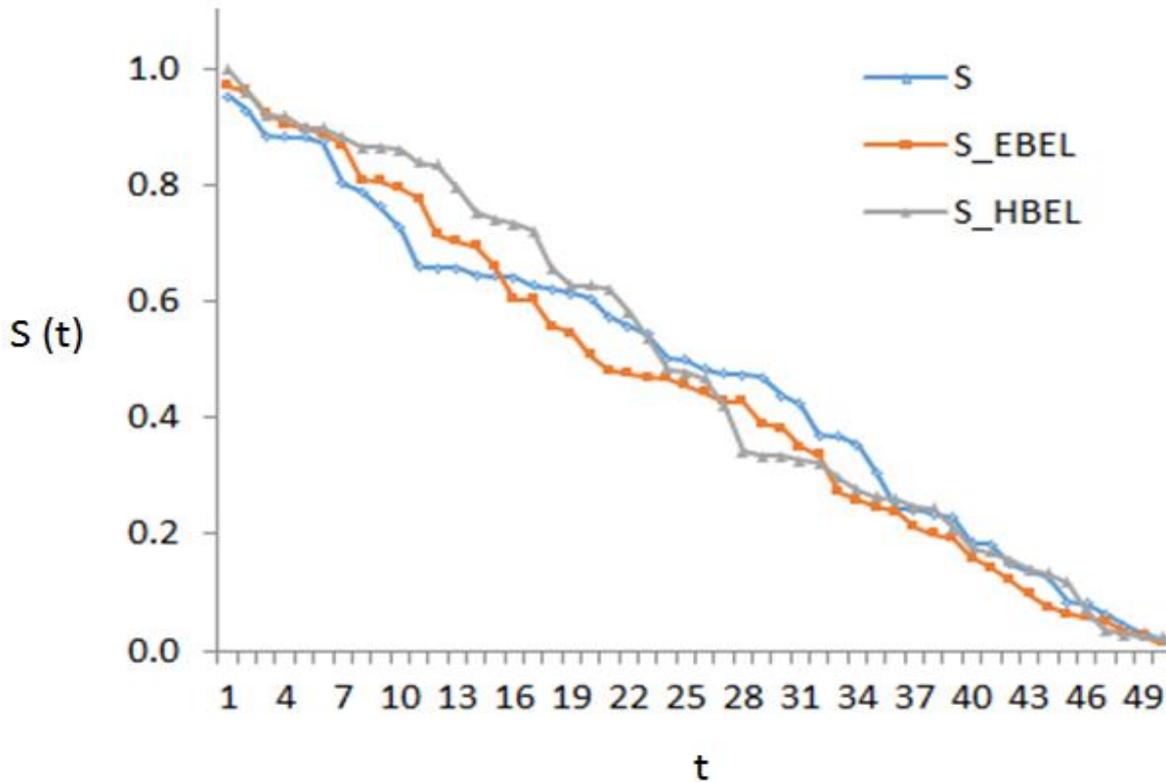
جدول (4-4) مقدرات طريقة التوقع البيزي وبيز الهرمي في ظل دالة خسارة انتروبي العامة لدالة البقاء والدالة التراكمية بعد ترتيب البيانات الخاصة بأوقات البقاء تصاعدياً

i	ti	Real $\hat{S}(t)$	$\hat{S}(t)_{EBEL}$	F(t)	$\hat{S}(t)_{HBEL}$	F(t)
1	0.16	0.95128	0.97048	0.02952	0.99740	0.0026
2	0.2083	0.92737	0.96168	0.03832	0.96006	0.03994
3	0.2083	0.92737	0.96168	0.03832	0.96006	0.03994
4	0.2083	0.92737	0.96168	0.03832	0.96006	0.03994
5	0.2083	0.92737	0.96168	0.03832	0.96006	0.03994
6	0.25	0.87384	0.88713	0.11287	0.89703	0.10297
7	0.25	0.87384	0.88713	0.11287	0.89703	0.10297
8	0.25	0.87384	0.88713	0.11287	0.89703	0.10297
9	0.2916	0.76191	0.80651	0.19349	0.86337	0.13663
10	0.375	0.72660	0.79364	0.20636	0.86054	0.13946
11	0.4166	0.65976	0.77699	0.22301	0.83838	0.16162
12	0.4166	0.65976	0.77699	0.22301	0.83838	0.16162

i	t <sub>i</sub>	Real $\hat{S}(t)$	$\hat{S}(t)_{EBEL}$	F(t)	$\hat{S}(t)_{HBEL}$	F(t)
13	0.4583	0.65599	0.70356	0.29644	0.79439	0.20561
14	0.5	0.64472	0.69523	0.30477	0.75338	0.24662
15	0.5833	0.64352	0.65996	0.34004	0.73963	0.26037
16	0.625	0.64011	0.60398	0.39602	0.73228	0.26772
17	0.7083	0.62696	0.60235	0.39765	0.72035	0.27965
18	0.75	0.62006	0.55829	0.44171	0.65661	0.34339
19	0.875	0.61315	0.54477	0.45523	0.62793	0.37207
20	1	0.60607	0.50748	0.49252	0.62625	0.37375
21	1.0833	0.57332	0.48164	0.51836	0.62117	0.37883
22	1.125	0.55668	0.47577	0.52423	0.58024	0.41976
23	1.125	0.55668	0.47577	0.52423	0.58024	0.41976
24	1.125	0.55668	0.47577	0.52423	0.58024	0.41976
25	1.125	0.55668	0.47577	0.52423	0.58024	0.41976
26	1.125	0.55668	0.47577	0.52423	0.58024	0.41976
27	1.1666	0.47500	0.42754	0.57246	0.41954	0.58046
28	1.25	0.47389	0.42736	0.57264	0.34216	0.65784
29	1.375	0.46889	0.38974	0.61026	0.33411	0.66589
30	1.375	0.46889	0.38974	0.61026	0.33388	0.66612
31	1.5	0.42448	0.34977	0.65023	0.33388	0.66612

i	t <sub>i</sub>	Real $\hat{S}(t)$	$\hat{S}(t)_{EBEL}$	F(t)	$\hat{S}(t)_{HBEL}$	F(t)
32	1.7916	0.37026	0.33610	0.6639	0.32164	0.0026
33	2.0416	0.36767	0.27264	0.72736	0.29695	0.03994
34	2.125	0.35359	0.25831	0.74169	0.27743	0.07995
35	2.125	0.3535	0.25831	0.74169	0.27743	0.07995
36	2.1666	0.24488	0.23928	0.76072	0.26118	0.10221
37	2.125	0.24185	0.21283	0.78717	0.24689	0.10297
38	2.1666	0.23517	0.20097	0.79903	0.24390	0.11737
39	2.1667	0.22884	0.19379	0.80621	0.21075	0.13614
40	2.25	0.18397	0.15873	0.84127	0.17735	0.13663
41	2.5416	0.18309	0.14306	0.85694	0.16956	0.13946
42	2.5466	0.14989	0.12098	0.87902	0.15513	0.16162
43	3.125	0.13665	0.09636	0.90364	0.13862	0.16666
44	3.166	0.12662	0.07587	0.92413	0.13309	0.20561
45	3.1666	0.08425	0.06346	0.93654	0.11638	0.24662
46	3.2083	0.08163	0.05715	0.94285	0.06931	0.26037
47	3.7084	0.06239	0.05190	0.9481	0.03651	0.26772
48	3.3333	0.04409	0.03092	0.96908	0.02685	0.27965
49	3.5545	0.02938	0.02471	0.97529	0.02587	0.34339
50	3.6556	0.02116	0.01394	0.98606	0.02194	0.37207
Sum	71.1283		22.75603	27.24397	24.50241	12.93528

Mean	1.422	0.4551206	0.544879	0.490048	0.258705
				2	



شكل (4-1) منحنى دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير

من الجدول (4-4) الموضح انفا والشكل (4-1) نستنتج الآتي:

- 1- القيم المقدرة لدالة البقاء بموجب طريقتي التقدير تتقارب من القيم الحقيقية عند المعلمات الافتراضية ( $\theta = 4$  و  $\alpha = 4$  و  $\beta = 3$ ).
- 2- نلاحظ من الجدول (4-4) ان احتمال بقاء الشخص على قيد الحياة لطريقة توقع بيز في ظل دالة خسارة انتروبي العامة كان ما يقارب 97% ولكن بمرور الوقت فإن عدد الذين فارقوا الحياة قد ازداد بالتالي فان دالة البقاء قد انخفضت واصبحت قريبة من 1% عندما حصلت الوفاة رقم (50) وهذا يدل على ان دالة البقاء تتناسب عكسيا مع الزمن .
- 3- نلاحظ من الجدول (4-4) ان احتمال بقاء الشخص على قيد الحياة لطريقة بيز الهرمي في ظل دالة خسارة انتروبي العامة كان ما يقارب 99% ولكن بمرور الوقت فإن عدد الذين فارقوا الحياة قد ازداد بالتالي فان دالة البقاء قد انخفضت واصبحت قريبة من 2% عندما حصلت الوفاة رقم (50).

- 4- نلاحظ ان النتائج بالطريقتين تكون متكافئة ومتقاربه كما نلاحظ بان قيم الدالة التجميعية للبقاء تزداد بزيادة الزمن ( $t_i$ )، وتقع قيمتها بين الصفر والواحد الصحيح أي أن هناك علاقة طردية بين وقت البقاء والدالة التجميعية للبقاء في حين يتضح بأن قيم دالة البقاء تتناقص بزيادة الزمن ( $t_i$ )، وهذا يعني أن هناك علاقة عكسية بين قيم دالة البقاء وقيم الدالة التجميعية للبقاء .
- 5- ان متوسط قيم دالة البقاء للبيانات الحقيقية عند طريقة التوقع البيزي هو (0.455120) أي نسبة عدم بقاء المصاب بفايروس Covid-19 على قيد الحياة هو 45% تقريبا ،وان متوسط قيم دالة البقاء للبيانات الحقيقية عند طريقة بيز الهرمي هو (0.4900420) أي نسبة عدم بقاء المصاب بفايروس Covid-19 على قيد الحياة هو 49% تقريبا.
- 6- ان متوسط الوقت للوفاة يبلغ ( 1.421) أي أن متوسط وقت وفاة المصاب بفايروس Covid-19 يبلغ (34) ساعة تقريبا.
- 7- بالأمكان الحصول على احتمال البقاء للمصاب بفايروس Covid-19 عن طريق أستعمال دالة البقاء لغرض التنبؤ بأحتمال وفاة المصاب بعد مده محددة من الزمن على سبيل المثال احتمال البقاء المصاب بعد (54) ساعة  $p(t > 2.52) = 0.14205$  وكذلك بالنسبة للفترات الزمنية الأخرى .

الفصل الخامس

الاستعانة بالبر والبر صباغ

## (Conclusions)

### 5-1 الأستنتاجات:

استنادا الى النتائج المستحصلة من الجانب التجريبي وكذلك الجانب التطبيقي (الحقيقي) يمكن تلخيص الأستنتاجات كما يأتي:

1. ان أستعمال دالة توزيع ليندلي ذي الثلاث معلمات أظهرت نتائجها أكثر دقة من أستعمال دالة ليندلي ذات المعلمتين في تقدير دالة البقاء في ظل دالتي الخسارة (دالة الخسارة التربيعية ودالة الخسارة انتروبي العامة) المستعملة في هذه الرسالة.
2. أظهر الجانب التطبيقي في تقدير دالة البقاء للبيانات الحقيقية كانت متقاربة مع القيم الافتراضية في الجانب التجريبي لتوزيع ليندلي المستخدم في هذه الرسالة ولأغلب حجوم العينات.
3. عند حجوم عينة (10) افراد تساوى في الأفضلية كل من طريقة توقع بيز وطريقة بيز الهرمي في ظل دوال الخسارة المستعملة في عملية التقدير لدالة البقاء كونها قد أمتلكت اقل متوسط مربعات الخطاء التكالمي. في حين كانت الأفضلية لطريقة بيز الهرمي في ظل دالة خسارة انتروبي العامة عند حجم عينة (25) فرد في عملية التقدير لدالة البقاء. تفوق طريقة توقع بيز في ظل دالة خسارة انتروبي العامة عند حجم عينة (50) فرد في عملية التقدير لدالة البقاء. تفوق طريقة بيز القياسي في ظل دالة خسارة تربيعية وطريقة توقع بيز في ظل دالة خسارة انتروبي العامة عند حجم عينة(75) فرد. في حين تفوق طريقة بيز الهرمي في ظل دالة خسارة أنتروبي العامة عند حجم عينة (100) فرد كونها قد أمتلكت أقل قيمة لمتوسط مربعات الخطاء التكالمي.
4. تبين في مقارنة المقدرات البيزية جميعها لدالة البقاء تفوق مقدر توقع بيز في ظل دالة خسارة انتروبي العامة على المقدرات المستعملة معه بالمقارنة جميعاً إذ حازت على أكبر نسبة للأفضلية في التقدير. تليها طريقة بيز الهرمي في ظل دالة خسارة أنتروبي العامة. في حين تساوى في نسبة الأفضلية طريقتا بيز القياسية في ظل دالة خسارة تربيعية وطريقة توقع بيز في ظل دالة خسارة تربيعية. في حين كانت طريقتا بيز القياسية في ظل دالة خسارة أنتروبي العامة وطريقة بيز الهرمي في ظل دالة خسارة تربيعية الاقل بنسب أفضلية التقدير.
5. تبين أن قيمة المعيار الاحصائي متوسط مربعات الخطأ التكالمي لدالة البقاء تتناقص بزيادة حجم العينة في اغلب الاحيان وهذا ما ينسجم مع النظرية الاحصائية الخاصة بهذا المعيار.
6. ظهر تقارب بين أغلب مقدرات طرائق تقدير دالة البقاء  $S(t)$  المستعملة في هذه الرسالة كلما زاد حجم العينة وهذا يؤكد ملائمة الطرق المستعملة.

7. توجد علاقة عكسية بين وقت البقاء ودالة البقاء فزيادة وقت البقاء يجعل دالة البقاء تميل الى التناقص.
8. قيم دالة الكثافة التجميعية تقع بين الصفر والواحد وهي في حالة تزايد وتناسب طرديا مع الزمن.
9. عن طريق أستعمال اختبار حسن المطابقة كانت الأفضلية واضحة لتوزيع ليندلي ذي الثلاث معلمات في تمثيل البيانات الحقيقية.

### (Recommendations)

### 5-2 التوصيات:

- 1- يوصي الباحث بأستعمال طريقة توقع بيز في تقدير دالة البقاء  $s(t)$  للتوزيعات المختلطة با نسبة لحجوم العينات المتوسطة والكبيرة.
- 2 – يوصي الباحث بأستعمال طريقة بيز الهرمي لتقدير دالة البقاء للتوزيعات المختلطة بالنسبة لحجوم العينات الصغيرة والمتوسطة.
- 3-يوصي الباحث الى التوسع بأستعمال ودراسة توزيعات مختلطة أخرى لتحديد مؤشرات دالة البقاء او بأجراء بحوث للمقارنة بين طريقة توقع بيز القياسية وطريقة بيز الهرمية بأستعمال دالة خسارة تربيعية ودالة خسارة انتروبي العامة.
- 4- -الاهتمام بالحصول على البيانات مرض فايروس كورونا في جميع محافظات العراق لحساب دالة البقاء ودالة المخاطرة.
- 5- تعد مرض فايروس كورونا من الامراض الانتقالية سريعة الانتشار فلا بد من إقامة دورات توعية ومختبرات خاصة للكشف عن الفايروس والوقاية من انتشاره.
- 6- تطبيق توزيع ليندلي ذي الثلاث معلمات في مجالات اخرى غير الجانب الطبي مثل الجانب الهندسي والصناعي.
- 7- يرجى الأخذ بالحسبان من قبل المؤسسات الصحية نسبة انخفاض مستوى الاوكسجين  $O_2$  للمرضى بسبب الالتهاب الرئوي الحاد نتيجة الإصابة بالفايروس ولذا يتطلب الامر القيام بدراسات اخرى حتى يؤدي الى تقليل المضاعفات للمرضى .
- 8- يوصي الباحث بأنشاء برنامج إرشادي لتخفيض مستوى قلق الموت لدى الفئات العمرية الاكثر أحتمال الإصابة بفايروس (COVID-19).

9- استعمال تقريب ليندلي في الطرائق البيزية في تقدير المعلمات ودالة البقاء لأنه يعطي نتائج دقيقة.

10- نتيجة ما توصل اليه من الجانب التطبيقي للبيانات الحقيقية المتمثلة بأوقات البقاء للمرضى الى ضرورة أبقاء الشخص المصاب بفايروس (COVID-19) لمدة لا تقل عن شهر حسب حالة المريض تحت العلاج والعناية الخاصة الى ان يتعافى كليا لمغادرة المستشفى.

11- استعمال دوال خسارة اخرى غير دالة الخسارة التريبيعية و دالة خسارة و دالة خسارة انتروبي العامة (General Entropy Loss) لمعرفة سلوك مقدرات بيز في ظل وجود تلك الدوال.

12- نتائج المستحصلة من الجانب التطبيقي (الحقيقي) المتمثلة بأوقات البقاء بالساعات تحت العلاج لحين الوفاة للمصابين بفايروس مرض (COVID-19) التأكيد على ضرورة استعمال التوزيعات الأولية التي تم ذكرها انفا في أيجاد تقدير بيز في حال اتباع البيانات الحقيقية توزيع ليندلي ذي الثلاث معلمات.

13- يوصي دائرة صحة كربلاء بضرورة أخذ النتائج الذي تم التوصل اليها في الجانب التطبيقي.

السلامة

\* القرآن الكريم

### (Arabic References)

### المصادر العربية:

- 1- الدريعي ، مهدي علي عبد الحسين (2016) " بعض طرائق تقدير معلمات دالة المعولية لنموذج احتمالي مركب مع تطبيق عملي " رسالة ماجستير ، كلية الادارة والاقتصاد – جامعة بغداد.
- 2- ثائرة نجم عبدالله ، واخرون ( 2011 ) ، ( تقدير معلمة القياس لتوزيع ليندلي –دراسة مقارنة فيأوقات الانتظار) مجلة الرافدين الجامعة للعلوم ،العدد (43)، ص(266-278).
- 3- جليل ، طالب شريف ، واخرون (2013) ، " أيجاد معولية نظام التوالي بطريقة جديدة "،المجلة العراقية للعلوم الاحصائية ،العدد (23)، ص (98-75).
- 4- جاسم ، فراس منذر ، ( 2015 ) ، (دراسة مقارنة في تقدير دالة المعولية لانموذج ليندلي الاجهاد والمتانة ) مجلة الادارة والاقتصاد ،العدد (103)، ص(265-273).
- 5-حنان صبحي عبدالله عبيد، آمال صالح عبود الكعبي & ابراهيم طه العجلوني. (2020). تحليل جيو طبي للمنحنى الوبائي لجائحة كورونا المستجد والاستراتيجيات المقترحة للحد من انتشاره.مجلة ميسان للدراسات الأكاديمية.11-19(39).
- 6- عبد علي، احمد تركي ، (2019) "أستعمال أسلوب بيز والبرمجة الهدفية في تقدير معالم الانحدار" رسالة ماجستير، كلية الادارة والاقتصاد- جامعة كربلاء.

### (Foreign References)

### المصادر الأجنبية:

- 7- Ali, S., Aslam, M., & Kazmi, S. M. A. (2013). A study of the effect of the loss function on Bayes estimate, posterior risk and hazard function for Lindley distribution. Applied Mathematical Modelling, 37(8), 6068-6078.
- 8- Asgharzadeh, A., Bakouch, H. S., Nadarajah, S., & Sharafi, F. (2016). A new weighted Lindley distribution with application. Brazilian Journal of Probability and Statistics, 30(1), 1-27.

- 9- Aryuyuen, S., Bodhisuwan, W, & Volodin, A. (2020). Discrete with Distribution Generalized Odd Lindley–Weibull Applications. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 41(6), 945-955.
- 10-Al-Nasir ,Abdul Majeed & Al-Kutubi, Hadeel S.m (2006), " Extension of 10 Jeffery Prior Information " , *Iraqi Journal of Statistical Science*.
- 11-Amin, A. A. (2020). Bayesian analysis of double seasonal autoregressive models. *Sankhya B*, 82(2), 328-352.
- 12- Berger.J.O.(1985)."Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis "Second Edition ,Springer – Verlag New York.
- 13-Cordeiro, G. M., Afify, A. Z., Yousof, H. M., Cakmakyapan, S., & Ozel, G. (2018). The Lindley Weibull distribution: properties and applications. *Anais da Academia Brasileira de Ciências*, 90, 2579-2598.
- 14- Kim, C., & Han, K. (2015). Bayesian estimation of generalized exponential distribution under progressive first failure censored sample. *Applied Mathematical Sciences*, 9(41), 2037-2047.
- 15- Davy, M., Doncarli, C., & Tourneret, J. Y. (2002). Classification of chirp signals using hierarchical Bayesian learning and MCMC methods. *IEEE transactions on Signal Processing*, 50(2), 377-388.
- 16-Dube, M., Garg, R., & Krishna, H. (2016). On progressively first failure censored Lindley distribution. *Computational statistics*, 31(1), 139-163.
- 17- Ghitany, M. E., Alqallaf, F., Al-Mutairi, D. K., & Husain, H. A. (2011). A two-parameter weighted Lindley distribution and its applications to survival data. *Mathematics and Computers in simulation*, 81(6), 1190-1201.
- 18- Guure, C. B., Ibrahim, N. A., Adam, M. B., Bosomprah, S., & Ahmed, A. O. (2014). Bayesian parameter and reliability estimate of Weibull failure time distribution. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 37(3).

- 19- Hassanein, W. A. (2018). Statistical inference of the lifetime performance index for Lindley distribution under progressive first-failure censoring scheme applied to HPLC data. *International Journal of Biomathematics*, 11(05), 1850073.
- 20-Han, M.,(2008)."Expected Bayesian estimation and hierarchical Bayesian estimation of failure rate" ,*Journal of Chen university* ,pp. 339-407.
- 21- Han, M. (2009). E-Bayesian estimation and hierarchical Bayesian estimation of failure rate. *Applied Mathematical Modelling*, 33(4), 1915-1922.
- 22-Han, M.,(2006)."E-Bayesian Method to Estimate Failure Rate ,The Sixth International Symposium" on Operations Research, Its Applications (ISORA'06)Xinjiang, China.
- 23- Han, M. (2019). E-Bayesian estimations of parameter and its evaluation standard: E-MSE (expected mean square error) under different loss functions. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 1-18.
- 24-Hafez, E. H., Riad, F. H., Mubarak, S. A., & Mohamed, M. S. (2020). Study on lindley distribution accelerated life tests: application and numerical simulation. *Symmetry*, 12(12), 2080.
- 25- Jodrá, P. (2010). Computer generation of random variables with Lindley or Poisson–Lindley distribution via the Lambert W function. *Mathematics and Computers in Simulation*, 81(4), 851-859.
- 26- Ibrahim, M., Mohammed, W., & Yousof, H. M. (2020). Bayesian and Classical Estimation for the One Parameter Double Lindley Model. *Pakistan Journal of Statistics and Operation Research*, 409-420.

- 27- Jaheen, Z. F., & Okasha, H. M. (2011). E-Bayesian estimation for the Burr type XII model based on type-2 censoring. *Applied Mathematical Modelling*, 35(10), 4730-4737.
- 28 Krishna, H., & Kumar, K. (2011). Reliability estimation in Lindley distribution with progressively type II right censored sample. *Mathematics and Computers in Simulation*, 82(2), 281-294.
- 29-Kinyanjui, J., & Korir, B. (2020). Bayesian Estimation of Parameters of Weibull Distribution Using Linex Error Loss Function. *International Journal of Statistics and Probability*, 9(2), 1-38.
- 30-Li, D. ;Wang ,J. ;Chen , D.(2012)."Expected Bayesian Estimation and Hierarchical Bayes Estimation for Estate Probability in Engineering", *Journal Engineering Procedia*,5,349-354,Puplished by Elsevier Ltd.
- 31-Press, S. J., & Tanur, J. M. (2012). *The subjectivity of scientists and the Bayesian approach* (Vol. 775). John Wiley & Sons.
- 32-Lindley, D. V. (1958). Fiducial distributions and Bayes' theorem. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 20(1), 102-107.
- 33- Lindley, D. V. (1980). Approximate bayesian methods. *Trabajos de estadística y de investigación operativa*, 31(1), 223-245.
- 34- Li, C. P., & Hao, H. B. (2019). E-Bayesian estimation and hierarchical Bayesian estimation of Poisson distribution parameter under entropy loss function. *IJAM*, 49, 369-374.
- 35- Mesfioui, M., & Abouammoh, A. M. (2017). On a multivariate Lindley distribution. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 46(16), 8027-8045.

- 36- Metiri, F., Zeghdoudi, H., & Remita, M. R. (2016). On Bayes estimates of Lindley distribution under linux loss function: informative and non informative priors. *Global journal of Pure and Applied Mathematics*, 12, 391-400.
- 37- Mazucheli, J., & Achcar, J. A. (2011). The Lindley distribution applied to competing risks lifetime data. *Computer methods and programs in biomedicine*, 104(2), 188-192.
- 38 -Naji, L. F., & Rasheed, H. A. (2019). Estimate the Two Parameters of Gamma Distribution Under Entropy Loss Function. *Iraqi Journal of Science*, 127-134.
- 39-Reuven, Y. R.,(1981)"Simulation and theMonte Carlo Method " John Wiley & Sons New York Chichester Brisbane Toronto Singapore.
- 40-Rinne.H, (2014),The Hazard Rate Theory and Inference [http://geb.uni-giessen.de/geb/volltexte/2014/10793/pdf/RinneHorst\\_hazardrate\\_2014.pdf](http://geb.uni-giessen.de/geb/volltexte/2014/10793/pdf/RinneHorst_hazardrate_2014.pdf).
- 41- Sankaran, M. (1970). 275. note: The discrete poisson-lindley distribution. *Biometrics*, 145-149.
- 42- Shanker, R., Shukla, K. K., Shanker, R., & Tekie, A. L. (2017). A Three-parameter Lindley distribution. *American Journal of Mathematics and Statistics*, 7(1), 15-26.
- 43-Shankar, R., Kamlesh, K. K., & Fesshaye, H. (2017). A two parameter lindley distribution: Its properties and applications. *Biostatistics and Biometrics Open Access Journal*, 1(4), 85-90.
- 44- Sharma, V. K., Singh, S. K., & Singh, U. (2017). Classical and Bayesian methods of estimation for power Lindley distribution with application to

- waiting time data. *Communications for Statistical Applications and Methods*, 24(3), 193-209.
- 45- Sparapani, R. A., Logan, B. R., McCulloch, R. E., & Laud, P. W. (2016). Nonparametric survival analysis using Bayesian additive regression trees (BART). *Statistics in medicine*, 35(16), 2741-2753.
- 46- Satheesh Kumar, C., & Jose, R. (2019). On double Lindley distribution and some of its properties. *American Journal of Mathematical and Management Sciences*, 38(1), 23-43.
- 47-Srivastava, R., & Tanna, V. (2007). Double stage shrinkage estimator of the scale parameter of an exponential life model under general entropy loss function. *Communications in Statistics—Theory and Methods*, 36(2), 283-295.
- 48- Triana, Y., & Purwadi, J. (2019, November). Exponential Distribution Parameter Estimation with Bayesian SELF Method in Survival Analysis. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1373, No. 1, p. 012050). IOP Publishing.
- 49-Zakerzadeh, H., & Dolati, A. (2009). Generalized lindley distribution. *Computational Statistics & Data Analysis*, 52(8), 3889-3901.
- 50- Zakerzadeh, H., & Mahmoudi, E. (2012). A new two parameter lifetime distribution: model and properties. arXiv preprint arXiv:1204.4248.

الله

**طريقة الأمكان الأعظم (ML): (Maximum Likelihood Method) [16]**

تعد طريقة الأمكان الأعظم (ML) من طرائق التقدير التقليدية المهمة في عملية التقدير وأكثرها استخداماً كونها تمتاز بخصائص جيدة منها الكفاية والثبات والاتساق وعدم التحيز وتملك أقل تباين، وتكون أكثر دقة عندما يكون حجم العينة كبير، وأول من صاغ هذه الطريقة هو العالم (C. F. Gauss) وقام بتطبيقها لأول مرة الباحث (S. A. Fisher) في عام (1922)، وتتميز المقدرات المستخرجة على وفق طريقة الأمكان الأعظم بانها لها بعض خصائص المقدر الجيد (Best Estimate)، وان مبدأ وهدف هذه الطريقة هو إيجاد قيم تقديرية للمعاملات التي نريد تقديرها، وذلك بجعل دالة الأمكان في نهايتها العظمى.

لتكن  $x_1, x_2, \dots, x_n$  مشاهدات عشوائية بحجم عينة  $n$  تتبع توزيع ليندلي ذي الثلاث معاملات فان دالة الأمكان للمشاهدات يمكن صياغتها بالشكل الآتي:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(x, \theta, \alpha, \beta)$$

$$= \prod_{i=1}^n \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} (\alpha + \beta x_i) e^{-\theta x_i}$$

$$= \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right)^n \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta \bar{x}}$$

بأخذ اللوغاريتم الطبيعي لدالة الأمكان الأعظم لغرض تحويلها الى الشكل الخطي وكما يلي:

$$\ln L = n \ln \left( \frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta} \right) + \sum_{i=1}^n \ln(\alpha + \beta x_i) - n\theta \bar{x}$$

$i = 1, 2, \dots, n$

$$\frac{d \ln L}{d \theta} = \frac{2n}{\theta} - \frac{n\alpha}{(\alpha\theta + \beta)} - n\bar{x} = 0 \quad \dots (1)$$

$$\frac{d \ln L}{d \alpha} = \frac{-n\theta}{(\alpha\theta + \beta)} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{(\alpha + \beta x_i)} = 0 \quad \dots (2)$$

$$\frac{d \ln L}{d \beta} = \frac{-n}{(\alpha\theta + \beta)} + \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{(\alpha + \beta x_i)} = 0 \quad \dots (3)$$

$$\bar{x} = \frac{\alpha\theta + 2\beta}{\theta(\alpha\theta + \beta)} \quad \dots (4)$$

وللحصول على تقدير للمعاملات المجهولة تتم مساواة المشتقة أنفاً بالصفر، أذ تنتج منظومة من المعادلات اللاخطية، ولا يمكن استعمال الطرائق الاعتيادية في التقدير ولا بد من استعمال الطرائق العددية لحلها. حيث يتم استخدام طرق عددية لأيجاد مقدرات طريقة الأماكن الأعظم  $(\alpha, \theta, \beta)$  طريقة نيوتن رفسن وان تقدير دالة البقاء سيكون :

$$\hat{S}(t)_{ML} = \left[ 1 + \frac{\theta_{ML}\beta_{ML}x_i}{\theta_{ML}\alpha_{ML} + \beta_{ML}} \right] e^{-\theta_{ML}x_i} \quad \dots (5)$$

## ABSTRACT:

The process of Appreciation staying function is one of the important topics that they take a huge space in the statistics researches in spite of, what is written by studies and researches about it. These studies are different according to the different methods used, which they are traditional, or Bayesian in order to get estimates of a high level of efficiency.

In this thesis we concentrate on the AI Bayesian methods to find special estimates, it's by using the survival function, and some of its indicators of Lindely distribution whose have three tutors. It's in the situation when we have the basic information about the tutors in the shape of potential primary function for the two shape tutors, and assessment tutor. It's by using three of AI Bayesian methods. They are the following: the standard Bayes method, the expected Bayesian method, and hierarchical Bayesian method. These derivations appreciated methods aim to reach to the formulas that its estimates are used by a squared error loss function, and a general Entropy loss function, because of the difficult of these special mathematics processes to count estimates appreciation staying function by using AI Bayesian methods so that it is used the suggestion of scholar Lindley which is a approximately style in year (1980).

In the experimentation side we find the employment the simulation style through the use of Mont- Carlo method. It generates the random data for a sample consists of five sizes (10-25-50-75-100), which they follow Lindley distribution that it consists three tutors, and it selects supposition values for the tutors:  $(\alpha, \beta, \theta)$  with a nine samples, in order to get new estimates of a high accuracy. These new estimates have the characteristics that they require to be available in a perfect estimated which it's depended on it in the approximately process, and is relied on the simulation results. it's by the use of (IMSE) the mean of The squares of integral error statistics criterion. It's obvious expected Bayesian method under general Entropy loss function and Hierarchical Bayesian method under, general Entropy loss function are more perfected to approximate survival function.

The study was conducted on a real sample with a size of (50) observations, representing the stay times in hours under treatment until death for those infected with the virus (COVID-19) which was obtained from the Fever Department at Al-Hussein Teaching Hospital in Karbala Governorate for the period between (8/5/2020) until (7/17/2020) The Bayesian prediction method and the hierarchical Bayes method were used in light of the general entropy loss function in relation to the study sample (patients COVID-19) the study concluded that the estimation methods used On the practical side, appropriate and accurate estimations are given to the study data and are consistent with what the researcher has reached on the experimental.

**Ministry of Higher Education And  
Scientific Research  
University of Karbala  
Faculty of Management and Economics  
Department of Statistics**



## **The Bayes estimate of the survival function for A Three-Parameter Lindley Distribution with practical application**

A thesis submitted to the council of the college of Administration & Economics\ University of Karbala as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Statistics Sciences

**By**

**Karma Nasser Hussein Al-Abadi**

**Under supervision**

**Ass.Prof.Dr Awad kazem Shaalan Al-Khalidi**

**2021A.D.**

**1443A.H.**

**Holy Karbala**