



جمهورية العراق
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة كربلاء / كلية الإدارة والاقتصاد
قسم الإحصاء

مقارنة بين توزيعات مختلفة لاختيار افضل توزيع لتقدير دالة البقاء لمرضى كورونا

رسالة مقدمة الى مجلس كلية الادارة والاقتصاد في جامعة كربلاء
وهي جزء من متطلبات نيل درجة الماجستير في علوم الاحصاء

تقدّمت بها

اقبال قاسم رمضان

بإشراف

أ.م.د ريسان عبد الامام زعلان

2022 م

1443 هـ

كربلاء المقدسة

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

﴿قَالُوا سُبْحَانَكَ لَا عِلْمَ لَنَا إِلَّا مَا عَلَّمْتَنَا إِنَّكَ أَنْتَ الْعَلِيمُ الْحَكِيمُ﴾

صدق الله العلي العظيم

سورة البقرة: الآية (32)

إقرار لجنة المناقشة

نشهد نحن أعضاء لجنة المناقشة بأننا قد اطلعنا على الرسالة الموسومة
(مقارنة بين توزيعات مختلفة لاختيار افضل توزيع لتقدير دالة البقاء
لمرضى كورونا) والمقدمة من قبل الطالبة "اقبال قاسم رمضان" وناقشنا الطالبة
في محتوياتها وفيما له علاقة بها، ووجدنا بأنها جديرة بنيل درجة ماجستير علوم في
الإحصاء بتقدير () .


أ.د. شروق عبد الرضا سعيد

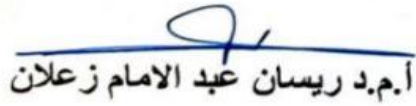
عضواً

2022 / /


أ.د. عواد كاظم شعلان

رئيساً

2022 / /


أ.م.د. ريسان عبد الامام زعلان

عضواً ومشرفاً

2022 / /


م.د. فاطمة عبد الحميد جواد

عضواً

2022 / /

إقرار المشرف

أشهد أن إعداد هذه الرسالة الموسومة (مقارنة بين توزيعات مختلفة لاختيار افضل توزيع لتقدير دالة البقاء لمرضى كورونا) والتي تقدمت بها الطالبة " اقبال قاسم رمضان " قد جرى بإشرافي في قسم الاحصاء - كلية الادارة والاقتصاد - جامعة كربلاء، وهي جزء من متطلبات نيل درجة ماجستير علوم في الاحصاء.


أ.م. د. ريسان عبد الامام زعلان

التاريخ: / / 2022

توصية رئيس قسم الاحصاء

بناءً على توصية الاستاذ المشرف، أشرح الرسالة للمناقشة.



أ.د. شروق عبد الرضا السباح

رئيس قسم الاحصاء

التاريخ: / / 2022

إقرار الخبير اللغوي

أشهد أن الرسالة الموسومة (مقارنة بين توزيعات مختلفة لاختيار افضل توزيع لتقدير دالة البقاء لمرضى كورونا) قد جرى مراجعتها من الناحية اللغوية تحت اشرافي اذ أصبحت خالية من الاخطاء اللغوية ولأجله وقعت.


الخبير اللغوي

أ.م.د بشرى حنون محسن

إقرار رئيس لجنة الدراسات العليا

بناءً على إقرار المشرف العلمي والخبير اللغوي على رسالة الماجستير للطالبة
" اقبال قاسم رمضان " الموسومة بـ (مقارنة بين توزيعات مختلفة لاختيار
افضل توزيع لتقدير دالة البقاء لمرضى كورونا) اشرح هذه الرسالة للمناقشة.

أ.د. محمد حسين كاظم الجبوري

رئيس لجنة الدراسات العليا

معاون العميد للشؤون العلمية والدراسات العليا

مصادقة مجلس الكلية

صادق مجلس كلية الإدارة والاقتصاد/ جامعة كربلاء على قرار لجنة المناقشة.

أ.د. علاء فرحان طالب

عميد كلية الإدارة والاقتصاد- جامعة كربلاء

2022 / 3 / 28

الإهداء

الى مَنْ خلقتني فهو يهديني وأذا مرضت فهو يشفيني ... له الحمد وله الشكر.
الى أولياء أمري في دنياي وآخرتي ... نبينا محمد وآله الطاهرين .
الى من أستمد منها الدفاء والحنان الى مَنْ ربنتي على العفة والكرامة الى من كان دعاؤها نورا أضاء لي
دربي الى... أمي الحنون .
الى كل عزيز غَيَّبَهُ الموت عني الى روح والدي الذي كان ملهماً وأستاذاً للأجيال .
الى أخي الشهيد الذي كان دمه نبراساً لي لأكمل دراستي .
الى أختي التي كانت خير سند لي .
الى أخواني فهم العون والسند لي .
الى زوجي العزيز الذي كان خير عون لي في دراستي .
الى أبنتي وأولادي فلذة كبدي ولهم كل ما أقدم في حياتي .
الى أساتذتي الكرام الذين منحوني القوة والارادة الى أساتذتي في جامعة كربلاء المقدسة وأخص بالذكر منهم
الدكتورة شروق السباح والدكتور مهدي وهاب نصر الله.
الى مشرفي الذي لولاه لما رأيت رسالتي النور دكتور ريسان عبد الامام .
الى زملائي الذين أغرقوني بفضلمهم ومساعدتهم لهم كل الأمتنان.
وكل الحمد والشكر لله عزّ وجل .

أهدي هذا الجهد المتواضع

الباحثة

شكر وتقدير

الحمد لله رب العالمين نحمده حمد الذاكرين ونشكره شكر الشاكرين والصلاة والسلام على سيدنا محمد (ﷺ) خير خلق الله أجمعين وعلى آله الطيبين الطاهرين وصحبه المنتجبين.

لايسعني بعد انجاز رسالتي بفضل الله ورعايته إلا أن أتوجه بفائق الثناء والامتنان لاستاذي الفاضل ريسان عبد الامام زعلان على قبوله الاشراف عليها، فقد كان لارشاداته القيمة وتوجيهاته السديدة أبلغ الأثر في إخراجها على هذا النحو، متمنيةً له العمر المديد والعطاء الدائم.

كما يسعدني ويشرفني أن أتقدم بوافر الشكر والتقدير إلى الأساتذة الافاضل، رئيس وأعضاء لجنة المناقشة على تفضلهم بالموافقة على مناقشة رسالتي.

كما اتقدم بالشكر الى عمادة كلية الادارة والاقتصاد في جامعة كربلاء المقدسة، والى رئاسة قسم الاحصاء، والى جميع اساتذتي الذين افاضوا عليّ من علمهم الغزير وكرمهم الواسع.

واقدم الشكر والتقدير الى جميع العاملين في مكاتب كلية الادارة والاقتصاد جامعة كربلاء وجامعة البصرة لما ابذوه من مساعدة وطيب المعاملة.

شكري وتقديري الى الاستاذ منتظر جمعة مهدي والاستاذ علي حسين نوري لما قدموه من مساعدة ودعم في انجاز الرسالة.

كما أقدم شكري وتقديري الى جميع زملائي في مرحلة الماجستير، متمنيةً للجميع الموفقية والنجاح.

واخيرا أتوجه بالشكر والتقدير والامتنان الى كل من مد لي يد العون والمساعدة ولم اذكره فاستسمحه العذر.

ومن الله السداد والتوفيق...

الباحثة

قائمة المحتويات

الصفحة	الموضوع
أ	الآية
ب	الإهداء
ج	شكر وتقدير
د	قائمة المحتويات
و	قائمة الجداول
و	قائمة الأشكال
ز	قائمة الرموز
ح	المستخلص
6-1	الفصل الاول
1	المقدمة 1-1
2	مشكلة الرسالة 2-1
3	اهداف الرسالة 3-1
3	الدراسات السابقة 4-1
29-7	الفصل الثاني: الجانب النظري
7	تمهيد 1-2
7	دالة البقاء 2-2
8	الدوال المرتبطة بدالة البقاء 3-2
8	دالة الكثافة الاحتمالية 1-3-2
8	دالة الكثافة التجميعية 2-3-2
9	دالة المخاطرة 3-3-2
9	متوسط زمن الفشل أو الوفاة 4-2
10	طرائق التقدير 5-2
10	طريقة الامكان الاعظم 1-5-2
11	طريقة Jackknife 2-5-2
12	التوزيعات الاحتمالية 6-2
13	التوزيع الاسي 1-6-2
15	توزيع مارشال اولكن الاسي 2-6-2
17	توزيع ليندلي 3-6-2
19	توزيع مارشال اولكن ليندلي 4-6-2
21	توزيع داكوم 5-6-2
23	توزيع مارشال اولكن داكوم 6-6-2
27	معايير اختيار أفضل توزيع 7-2
28	المقاييس الاحصائية (متوسط مربعات الخطأ (MSE)، متوسط مربعات الخطأ التكاملي ((IMSE) 8-2
105-30	الفصل الثالث: الجانب التجريبي والتطبيقي

30	تمهيد	1-3
30	القسم الاول - الجانب التجريبي	2-3
30	مفهوم المحاكاة	1-2-3
31	وصف تجربة المحاكاة	2-2-3
35	مناقشة نتائج المحاكاة	3-2-3
35	نتائج محاكاة التوزيع الاسي	1-3-2-3
41	نتائج محاكاة توزيع مارشال اولكن الاسي	2-3-2-3
52	نتائج محاكاة توزيع ليندلي	3-3-2-3
58	نتائج محاكاة توزيع مارشال اولكن ليندلي	4-3-2-3
69	نتائج محاكاة توزيع داکوم	5-3-2-3
80	نتائج محاكاة توزيع مارشال اولكن داکوم	6-3-2-3
91	القسم الثاني - الجانب التطبيقي	3-3
91	البيانات الحقيقية	1-3-3
93	تحليل البيانات	2-3-3
95	اختيار افضل توزيع	3-3-3
96	تقدير دالة البقاء للبيانات الحقيقية	4-3-3
107-106	الفصل الرابع: الاستنتاجات والتوصيات	
106	الاستنتاجات	1-4
107	التوصيات	2-4
111-108	المصادر	
108	المصادر العربية	اولا
109	المصادر الاجنبية	ثانيا
124-112	الملاحق	
112	برنامج محاكاة الجانب التجريبي	
A	Abstract	

قائمة الجداول

رقم الصفحة	عنوان الجدول	رقم الجدول
31	نماذج القيم الافتراضية لمعاملات التوزيعات قيد الدراسة	1-3
35	نتائج تجربة المحاكاة للتوزيع الاسي	2-3
41	نتائج تجربة المحاكاة لتوزيع مارشال اولكن الاسي	3-3
52	نتائج تجربة المحاكاة لتوزيع ليندلي	4-3
58	نتائج تجربة المحاكاة لتوزيع مارشال اولكن ليندلي	5-3
69	نتائج تجربة المحاكاة لتوزيع داکوم	6-3
80	نتائج تجربة المحاكاة لتوزيع مارشال اولكن داکوم	7-3
92	يمثل مدة بقاء المريض المصاب بفيروس كورونا على قيد الحياة من تاريخ الدخول للمستشفى ولحين الوفاة (بالايام)	8-3
93	يبين ابرز احصاءات العينة للبيانات الحقيقية	9-3
94	قيم اختبارات حسن المطابقة	10-3
95	قيم المعايير (AIC, AIC _c)	11-3
96	يبين مقدرات دالة البقاء ودالة الكثافة التجميعية ودالة المخاطرة للبيانات الحقيقية	12-3

قائمة الاشكال

رقم الصفحة	عنوان الشكل	رقم الشكل
38	يوضح نتائج تجربة المحاكاة للتوزيع الاسي	1-3
47	يوضح نتائج تجربة المحاكاة لتوزيع مارشال اولكن الاسي	2-3
55	يوضح نتائج تجربة المحاكاة لتوزيع ليندلي	3-3
64	يوضح نتائج تجربة المحاكاة لتوزيع مارشال اولكن ليندلي	4-3
75	يوضح نتائج تجربة المحاكاة لتوزيع داکوم	5-3
86	يوضح نتائج تجربة المحاكاة لتوزيع مارشال اولكن داکوم	6-3
96	منحنيات دالة الكثافة الاحتمالية للبيانات الحقيقية وللتوزيعات الاحتمالية المحددة في الدراسة	7-3
104	دالة الكثافة التجميعية لتوزيع مارشال اولكن داکوم مقارنة بالتوزيع التجريبي بالنسبة للبيانات الحقيقية	8-3
105	دالة البقاء لتوزيع مارشال اولكن داکوم مقارنة بالتوزيع التجريبي بالنسبة للبيانات الحقيقية	9-3

قائمة الرموز

Mean	المعنى	الرمز
Survival function	دالة البقاء	S(t)
Hazard function	دالة المخاطرة	h(t)
Mean Time To failure	متوسط زمن الفشل أو الوفاة	MTTF
Probability density function	دالة الكثافة الاحتمالية	f(t)
Cumulative distribution function	دالة التوزيع التراكمية	F(t)
Maximum likelihood	الامكان الأعظم	ML
Akaike Information Criteria	معيار معلومات اكاكي	AIC
correction Akaike information Criterion	معيار معلومات اكاكي المصحح	AIC _c
Mean Square Error	متوسط مربعات الخطأ	MSE
Integrative Mean Square Error	متوسط مربعات الخطأ التكاملية	IMSE

المستخلص

تهدف الرسالة الى إيجاد التوزيع الاحتمالي الملائم لتمثيل ووصف بيانات البقاء لعينة من المرضى المصابين بفيروس كورونا(Covid-19) من تاريخ دخولهم المستشفى لحين وفاتهم مقاسة بالأيام، فضلاً عن تقدير دالة البقاء للعينة المذكورة آنفاً.

وتم اجراء تجربة المحاكاة باستعمال طريقة مونت كارلو (Monte carlo) بأحجام عينات مختلفة (30، 50، 100، 200) لبعض التوزيعات الاحتمالية الأساسية ((التوزيع الاسي (Exponential) توزيع ليندلي (Lindley)، توزيع داكوم (Dagum))، والتوزيعات الاحتمالية الموسعة (توزيع مارشال اولكن الاسي (Marshall-Olkin Exponential)، توزيع مارشال اولكن ليندلي (Marshall-Olkin Lindley)، فضلاً عن توزيع مارشال اولكن داكوم (Marshall-Olkin Dagum) الذي تم بناؤه من قبل الطالبة) لغرض اختبار سلوك دالة البقاء والمقارنة بين طريقة الامكان الأعظم وطريقة Jackknife لأختيار أفضل طريقة لتقدير دالة بقاء التوزيعات الاحتمالية المذكورة آنفاً بالإعتماد على المقياس الاحصائي متوسط مربعات الخطأ التكاملية (IMSE).

وعن طريق المعايير (AIC, AICC) تبين انّ التوزيع المقترح (مارشال اولكن داكوم (Marshall-Olkin Dagum)) أكثر ملاءمة لتمثيل ووصف بيانات العينة قيد الدراسة.

الفصل الأول

منهجية الدراسة

1-1 المقدمة

تُعد مرحلة تمثيل ووصف البيانات من أهم مراحل التحليل الاحصائي والتي يكون اعتماد بقية المراحل عليها وذلك من خلال اختيار توزيع مناسب أو ملائم لتمثيل البيانات المدروسة. إذ ان اختيار توزيع غير مناسب يؤدي الى الحصول على نتائج غير صحيحة وبهذه الحالة يكون اتخاذ القرار غير دقيق.

منذ بداية جائحة كورونا (Covid-19) اهتم الباحثين في إيجاد التوزيع الاحتمالي الملائم لتمثيل ووصف بيانات البقاء على قيد الحياة للمرضى المصابين بفيروس كورونا (Covid-19) في سبيل اعطاء فهم أفضل حول سلوك فيروس كورونا (Covid-19) ، بإعتبار أنّ جائحة كورونا هي ظاهرة عشوائية تتبع وفق سلوك احتمالي معين، وإنّ دراسة السلوك العشوائي لظاهرة لها استعمالات عديدة ومن أهم هذه الاستعمالات التنبؤ بسلوكها المستقبلي.

ومن المعلوم إنّ دراسة دوال تحليل البقاء على قيد الحياة لها دور اساسي في مجال الطب، إذ تشكل اهمية كبيرة في قياس طول فترة البقاء على قيد الحياة للمرضى، وبذلك أصبحت دالة البقاء تؤدي دوراً اساسياً في التقدير والتنبؤ.

لذا من المهم قبل القيام بدراسة وتحليل بيانات البقاء للمرضى معرفة التوزيع الاحتمالي الملائم لها، إذ تم في هذه الدراسة اختيار ودراسة بعض من التوزيعات الاحتمالية الأساسية ((التوزيع الاسي (Exponential) ، توزيع ليندلي (Lindley) ، توزيع داكوم (Dagum))، وتوزيعات احتمالية موسعة (توزيع مارشال اولكن الاسي (Marshall-Olkin Exponential) ، توزيع مارشال اولكن ليندلي (Marshall-Olkin Lindley) ، فضلاً عن توزيع مارشال اولكن داكوم (Marshall-Olkin Dagum)) الذي تم بناؤه من قبل الباحثة) لايجاد التوزيع الاحتمالي الأفضل لتمثيل بيانات البقاء لعينة من المرضى المصابين بفيروس كورونا (Covid-19) من تاريخ دخولهم المستشفى لحين الوفاة مقاسة بالأيام في محافظة البصرة، فضلاً عن تقدير دالة البقاء للعينة المذكورة آنفاً.

ولتحقيق أهداف الرسالة قسمت الى أربعة فصول، يتضمن الفصل الأول منها لمنهجية الرسالة (المقدمة والمشكلة والهدف والدراسات السابقة)، في حين تضمن الفصل الثاني الجانب

النظري الذي تم فيه التطرق لبعض المفاهيم الأساسية المتعلقة بالدراسة ونبذة عن مجموعة من التوزيعات الاحتمالية، وعرض طريقة الإمكان الأعظم Maximum Likelihood Method (MLE) وطريقة Jackknife لتقدير معلمات ودالة البقاء للتوزيعات، وخصص الفصل الثالث للجانب التجريبي والتطبيقي، اذ تناول الجانب التجريبي مفهوم المحاكاة وتطبيق اسلوب محاكاة مونت كارلو (Monte Carlo) لمعرفة سلوك دالة البقاء واختيار أفضل طريقة تقدير للتوزيعات الاحتمالية قيد الدراسة واما الجانب التطبيقي فقد تضمن تطبيق التوزيعات على بيانات البقاء لعينة من المرضى المصابين بفيروس كورونا (Covid-19) من تاريخ دخولهم المستشفى لحين الوفاة مقاسة بالأيام في محافظة البصرة مع اجراء اختبار حسن المطابقة لتلك البيانات واختيار افضل توزيع لتمثيلها عن طريق معايير اختيار أفضل توزيع (AIC, AIC_C)، كذلك اجراء تقدير لدالة البقاء باستعمال طريقة الإمكان الأعظم Maximum Likelihood Method (MLE) ، وأخيراً الفصل الرابع خصص للاستنتاجات والتوصيات التي خرجت بها الرسالة.

2-1 مشكلة الرسالة

تنبثق مشكلة الرسالة عن طريق الانتشار السريع لأحد الفيروسات الفتاكة والذي سرعان ما تحول الى جائحة سميت جائحة كورونا (Covid-19)، والذي أصاب الملايين في جميع انحاء العالم وتسبب بوفاة آلاف البشر وشل الحركة الاقتصادية والاجتماعية في العالم، مما دعا الى دراسة سلوك هذا الوباء وقياس متوسط طول فترة البقاء على قيد الحياة للمصابين، عن طريق معرفة التوزيع الاحتمالي المناسب لتمثيل ووصف هذا الفيروس بشكل دقيق ليعطي تقديرات تتمتع بخصائص جيدة الى دالة البقاء والتوصل الى نتائج تفيد المهتمين وأصحاب القرار للحد والسيطرة على هذا الوباء.

3-1 أهداف الرسالة

تهدف الرسالة الى:

- 1- المقارنة بين طريقة الامكان الأعظم وطريقة Jackknife لاختيار أفضل طريقة لتقدير دالة بقاء التوزيعات الاحتمالية قيد الدراسة وذلك عن طريق إجراء تجربة المحاكاة باستعمال طريقة مونت كارلو (Monte carlo) بأحجام عينات مختلفة وبالاعتماد على المقياس الاحصائي متوسط مربعات الخطا التكالمي (IMSE).
- 2- إيجاد التوزيع الاحتمالي الملائم لتمثيل ووصف بيانات البقاء لعينة من المرضى المصابين بفيروس كورونا (Covid-19) من تاريخ دخولهم المستشفى لحين وفاتهم مقاسة بالأيام في محافظة البصرة، فضلا عن تقدير دالة البقاء للعينة المذكورة آنفا.

4-1 الدراسات السابقة

تؤدي الدراسات السابقة دوراً مهماً في البحث العلمي، وتشكل مصدراً مهماً لمعلومات غنية للباحث، وتعد أحد المرتكزات الرئيسة في بناء الانموذج الفكري لدراسته، كما تُطلع على تجارب الآخرين للاستفادة منها، ونظراً لأهميتها في البحث العلمي سيتم التطرق الى ما تيسر منها والتي تتناول دالة البقاء وطرائق تقديرها والتطبيقات العملية لها.

في عام (1994) قامت الباحثة (وارتان)^[16] بتقدير دوال البقاء باستعمال الطرائق المعلمية واللامعلمية وفي حالة البيانات الكاملة وغير الكاملة، مع تطبيق عملي لحساب دوال البقاء لمرضى التهاب الكبد الفيروسي.

في عام 1997 قدم الباحثان (Marshall and Olkin)^[31] طريقة جديدة لتوسيع التوزيعات عن طريق إضافة معلمة جديدة الى التوزيع الاساسي، وطبقت على التوزيع الاسي Exponential (distribution) ونتج توزيع جديد موسع يسمى توزيع مارشال اولكن الاسي (Marshall-Olkin Exponential distribution)

في عام (2002) قام الباحثان (Howlader & Hossain)^[28] بتقدير دالة البقاء لتوزيع باريتو (Pareto) من النوع الثاني عن طريق استعمال طريقة بيز حسب أسلوب الباحث (Lindley) وأسلوب الباحثان (Tierney and Kadan) وطريقة الامكان

الأعظم (MLE)، وبدراسة محاكاة (Monte Carlo) وباختيار احجام عينات مختلفة (100،10،20،30،50) توصل الباحثان الى أفضلية أسلوب (Lindley) على طريقة (Tierney and Kadan) وطريقة الامكان الأعظم (MLE) في أحجام العينات الصغيرة والمتوسطة (10،20،30)، وبالنسبة لحجوم العينات الكبيرة تمت التوصية من الباحثين باستعمال احدى هذه الطرائق الثلاثة لتقدير دالة البقاء وذلك لعدم وجود أفضلية لمقدر على آخر في هذه الحالة.

في عام (2005) قام الباحث (ماجد) [17] بتقدير دالة البقاء لتوزيع ويبيل في حالة تلوث البيانات أو احتوائها على شواذ باستعمال طرائق التقدير الحصينة ومقارنتها مع بعض الطرائق الاعتيادية والبيزية وعن طريق توظيف أسلوب المحاكاة وباستعمال معياريين للمقارنة بين الطرائق وهما متوسط مربع الخطأ التكاملي ومتوسط مطلق الخطأ النسبي التكاملي تبين كفاءة الطرائق الحصينة في تقدير دالة البقاء، وفي الجانب التطبيقي من الدراسة تم استعمال الطريقة الحصينة لتقدير دالة البقاء لبيانات مرضى السرطان في القطر اليمني.

في عام (2012) قام الباحث (جاسم) [12] بتقدير دالة البقاء للتوزيع الآسي المبتور بطرائق الإمكان الأعظم وطريقة بيز الأولى (باستعمال معلومات جفري المسبقة) والثانية (باستعمال توسيع معلومات جفري المسبقة) وطريقة المربعات الصغرى وطريقة جاك نايف بالاعتماد أولاً على طريقة الإمكان الأعظم كطريقة جاك نايف أولى وثانياً على طريقة بيز الأولى كطريقة جاك نايف ثانية والمقارنة بينهم باستخدام المحاكاة، لهذا الغرض اعتمد الباحث على حجوم عينات مختلفة هي (100،50،30،20،10)، لقد أظهرت نتائج البحث تفوق طريقة بيز الثانية على جميع طرائق التقدير المعتمدة ولكافة حجوم العينات.

وفي نفس العام قدم الباحث (Ghitane et al) [25] توزيع مارشال اولكن ليندلي (Marshall-Olkin Lindley Distribution) عن طريق اضافة معلمة جديدة الى توزيع ليندلي (Lindley distribution)، وناقشا بعض خصائص التوزيع، وتم تقدير معلماته بطريقة الامكان الاعظم، وطبق التوزيع على بيانات حقيقية لاثبات ان التوزيع المقترح الجديد يتناسب بشكل افضل مع التوزيع الاصلي مع البيانات.

في عام (2015) قامت الباحثة (ابتهال) [10] بتقدير دالة البقاء ودوال احتمالية أخرى (دالة الكثافة، الدالة التوزيعية ودالة المخاطرة) لبيانات حقيقية لأوقات الفشل المقاسة بالأيام أثناء مكوث مرضى

سرطان الرئة من المستوى الأول في المستشفى قيد العلاج، وجرى استعمال ثلاث طرائق معلمية (طريقة الإمكان الأعظم ml، طريقة التقليص sh وطريقة الاختبار الأولي المقدره pr)، وتطبيق طرائق اللامعلمية (طريقة التجريب EM، طريقة نيلسون NE وطريقة بوركوف BE) ومقارنة أفضلية طرائق التقدير باستعمال معياري متوسط مربعات الخطأ MSE ومتوسط الخطأ النسبي المطلق (MAPE).

في عام (2018) قام الباحث (عبد الله) ^[4] بتقدير دالة البقاء لتوزيع ويبل ذو المعلمتين والدوال المرتبطة بها (دالة الكثافة الاحتمالية $f(t)$ ، ودالة التوزيع التراكمي $F(t)$ ، ودالة الخطورة $h(t)$) لمرضى سرطان الثدي، اذ تم استعمال مجموعة من الطرائق المعلمية و اللامعلمية للتقدير، اذ استخدم ثلاث طرائق معلمية هي (طريقة الإمكان الأعظم (M.L.E) ، طريقة العزوم (M.O.M) ، وطريقة المربعات الصغرى (O.L.S)، أما الطرائق اللامعلمية فقد استخدم ثلاث طرائق لامعلمية وهي (طريقة كيرنل Kernel Method، طريقة نيلسون Nelson Method(NL) والطريقة التجريبية (Empirical Method(EM) وبعد ذلك عمل الباحث مقارنة بين طرائق تقدير دالة البقاء وبالاعتماد على متوسط مربعات الخطأ (MSE) لجميع الطرائق المدروسة لبيان الأفضل بين الطرائق حيث بينت نتائج المقارنة لتقدير دالة البقاء لمرضى سرطان الثدي، ان طريقة (الإمكان الأعظم (M.L.E أعطت أفضل النتائج لتقدير دالة البقاء بالنسبة للطرائق المعلمية اما نتائج المقارنة بين الطرائق اللامعلمية بينت أنّ طريقة (كيرنل نوع Cr.V) أعطت نتائج أفضل.

في عام 2019 تطرق الباحث (احمد) ^[14] الى التوزيعات المركبة وقام بتقدير دالة البقاء لتوزيع احتمالي مركب (ويبل-رايلي) باستعمال ثلاث طرائق تقدير، وفي الجانب التطبيقي قدر دالة البقاء لعينة من المرضى المصابين بسرطان الثدي في محافظة ذي قار.

في عام 2020 تطرق الباحث (ادهم) ^[3] الى التوزيعات الاحتمالية المختلطة وقام بتقدير دالة البقاء لتوزيع احتمالي مختلط (الاسي-كاما من الرتبة الثانية) بأكثر من طريقة تقدير، وفي الجانب التطبيقي قدر دالة البقاء لعينة من المرضى المصابين بمرض الفشل الكلوي في محافظة بغداد.

في عام 2020 قامت الباحثة (سلوى) ^[5] بتقدير دالة البقاء لتوزيع بيركس المعمم باستعمال أربع طرائق تقدير (الإمكان الأعظم، المربعات الصغرى، البيزية القياسية والغير معلومتية) وبعد ذلك عملت الباحثة مقارنة بين طرائق تقدير دالة البقاء لبيان الأفضل بين الطرائق حيث بينت نتائج المقارنة

إنّ طريقة (الإمكان الأعظم M.L.E) أعطت أفضل النتائج لتقدير دالة البقاء، وفي الجانب التطبيقي قدرت دالة البقاء لعينة تبلغ (200) من المرضى المصابين بسرطان الثدي في محافظة البصرة.

وبذلك تكون هذه الرسالة استكمالاً وإضافة للجهود العلمية التي بذلها الباحثون، إذ سيتم استعمال بعض التوزيعات الاحتمالية لدراسة السلوك العشوائي لفترة بقاء المرضى المصابين بفيروس كورونا في محافظة البصرة، فضلاً عن استعمال نفس التوزيعات الاحتمالية بعد تطويرها بواسطة الباحثين (Marshall and Olkin)

الفصل الثاني

الجانب النظري

1-2 تمهيد

في هذا الفصل سنقوم بإستعراض المفاهيم الأساسية ذات العلاقة بموضوع الدراسة، ونبذة عن بعض التوزيعات الاحتمالية الأساسية ((التوزيع الاسي (Exponential) ، توزيع ليندلي (Lindley) ، توزيع داكوم (Dagum))، وتوزيعات احتمالية موسعة (توزيع مارشال اولكن الاسي (Marshall-Olkin Exponential))، توزيع مارشال اولكن ليندلي (Marshall-Olkin Lindley) ، فضلاً عن توزيع مارشال اولكن داكوم (Marshall-Olkin Dagum) (الذي تم بناؤه من قبل الباحثة)، وتقدير معلمات ودالة البقاء لكل توزيع بطريقة الإمكان الأعظم (MLE) وطريقة Jackknife.

2-2 دالة البقاء (Survival Function) [22][30][29]

دالة البقاء هي احتمال بقاء الفرد على قيد الحياة حتى الوقت المحدد t ، وهي مكملة لدالة التوزيع التراكمية $F(t)$ ، وغاليا ما يرمز لها بالرمز $S(t)$ ، وتعرف دالة البقاء رياضيا حسب الصيغة الآتية:

$$S(t) = p_r(T > t) , t \geq 0$$

$$S(t) = 1 - p_r(T \leq t)$$

$$S(t) = 1 - F(t) \quad (1 - 2)$$

إذ إنّ

T : يمثل متغير زمن البقاء أو الزمن المستغرق لحدوث الحدث (time to events) وهو حدث الموت (المتغير العشوائي الذي يشير إلى وقت البقاء حتى حدوث الموت).

t : يمثل زمن البقاء على قيد الحياة (الوقت المحدد).

ومن خصائص دالة البقاء (Survival function) إنّها ستكون :

1- دالة غير متزايدة (non-increasing) (متناقصة مع الزمن)

2- دالة احتمالية $0 \leq S(t) \leq 1$ أي أنّها كقيمة عددية محصورة بين الصفر (0) والواحد (1).

إذ إنّ دالة البقاء هي التي تعطي احتمال البقاء على قيد الحياة قبل الزمن t مباشرة ، أو بشكل عام هي احتمالية عدم وقوع الحدث موضوع الاهتمام بالزمن t ، على سبيل المثال يعطي احتمال بقاء المريض على قيد الحياة بعد الوقت المحدد.

عندما يكون الوقت مساويا للصفر اي ($t=0$) فان دالة البقاء تكون مساوية للواحد ($S(t)=1$) وهذا يعني احتمال بقاء الشخص المصاب على قيد الحياة عند الزمن ($t=0$) يساوي واحد.

3-2 الدوال المرتبطة بدالة البقاء

1-3-2 دالة الكثافة الاحتمالية Probability Density function [35]

تمثل احتمال حدوث الحدث (الموت) في المدة ($t, t + \Delta t$)، والتي يرمز لها $f(t)$ ، والتعبير الرياضي لها يكون على النحو الآتي:

$$f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\text{pr}[t < T < t + \Delta t]}{\Delta t} , \quad t \geq 0, \quad \Delta t_i = t_i - t_{i-1}$$

إذ إنّ Δt تمثل التغير في قيمة المتغير العشوائي T

ولدالة الكثافة الاحتمالية خصائص هي :

$$\diamond f(t) \geq 0 \text{ موجبة}$$

$$\diamond \text{مجموع المساحة تحت منحنى } f(t) \text{ مساوية دائما للواحد الصحيح أي إنّ :}$$

$$\int_0^{\infty} f(t) dt = 1$$

2-3-2 دالة الكثافة التجميعية cumulative Density function [2][33]

وهي احتمالية حدوث الحدث (الموت) قبل الوقت t ويرمز لها $F(t)$ وتعرف على أنّها مكملة لدالة البقاء، بالإمكان التعبير عنها رياضيا كما يلي :

$$F(t) = \text{pr} (T \leq t) = \int_0^t f(u) du = 1 - S(t), \quad t \geq 0$$

اذ ان:

t يمثل الوقت حتى حدوث الحدث (الموت)

$f(u)$ دالة الكثافة الاحتمالية لزمن t

وإنّ دالة الكثافة التجميعية تمتلك عدة خصائص:

- ❖ تكون دالة متزايدة مع الزمن (تتناسب طردياً مع الزمن).
- ❖ محددة في الفترة $(0, t]$ وغير سالبة قيمتها موجبة بين الصفر والواحد .

3-3-2 دالة المخاطرة Hazard function^[19]

دالة المخاطرة وهي الدالة التي يرمز لها بالرمز $h(t)$ لوقت البقاء T وهي احتمالية وقوع حدث يحدث في مدة زمنية قصيرة، إذا كان T متغيراً عشوائياً له دالة توزيع تراكمية ودالة كثافة احتمالية فإن:

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{P(T \leq t + \Delta t | T > t)}{\Delta t}, \quad t > 0$$

ويمكن كتابة دالة المخاطرة كنسبة بين دالة الكثافة الاحتمالية $f(t)$ ودالة البقاء $S(t)$ وحسب الصيغة الآتية:

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = \frac{f(t)}{1 - F(t)} \quad (2 - 2)$$

4-2 متوسط زمن الفشل أو الوفاة (MTTF) (Mean Time To failure)^{[27][32]}

هو من المقاييس المستعملة في موضوع البقاء على قيد الحياة والذي يعرف على أنه القيمة المتوقعة لزمن البقاء على قيد الحياة قبل حصول الوفاة ويعبر عنه رياضياً كما يلي:

$$MTTF = E(t) = \int_0^{\infty} tf(t)dt \quad (3 - 2)$$

5-2 طرائق التقدير

هناك العديد من الطرائق المستعملة لتقدير معالم التوزيعات الاحتمالية، وفي هذه الرسالة سيتم استعمال طريقة الإمكان الأعظم Maximum Likelihood Estimation(MLE) وطريقة Jackknife المعتمدة على مقدر الإمكان الأعظم لتقدير معالم ودالة البقاء للتوزيعات الاحتمالية قيد الدراسة.

1-5-2 طريقة الإمكان الأعظم Maximum Likelihood Estimation(MLE) [9][11]

اذ تُعد هذه الطريقة واحدة من بين طرائق الاستدلال الاحصائي التي لها استعمالات واسعة في التقدير كونها تتميز بعدة خصائص منها:

(1) الكفاية (*Sufficient*)

(2) أقل تباين (*Minimum Variance*)

(3) الثبات (*Invariance*)

(4) عدم التحيز (*Unbiased*) بازياد حجم العينة.

(5) الاتساق (*consistency*)

(6) الكفاءة (*Efficiency*)

فضلاً عن أنها تكون أكثر دقة بازياد حجم العينة، وان مقدر الإمكان الأعظم هو الذي يجعل لوغارتيم دالة الإمكان في نهايتها العظمى.

لنفرض إنّ لدينا عينة عشوائية بالحجم n (t_1, t_2, \dots, t_n) من توزيع احتمالي معين، فإنّ دالة الإمكان الأعظم تعرف على النحو الآتي:

$$L(t_1, t_2, \dots, t_n) = \prod_{i=1}^n f(t_i; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$$

اما اللوغاريتيم الطبيعي لدالة الإمكان الأعظم

$$\ln(L(t_1, t_2, \dots, t_n)) = \ln(\prod_{i=1}^n f(t_i; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k))$$

واللحصول على مقدرات الإمكان الأعظم $\hat{\theta}_j$ نعمل على اشتقاق المعادلة المذكورة آنفا بالنسبة لكل معلمة θ_j ومساواتها للصفر ثم حل المعادلات الناتجة بالطرائق التحليلية الاعتيادية أو الطرائق العددية.

$$\frac{\partial}{\partial \theta_j} \ln(L(t_1, t_2, \dots, t_n)) = \frac{\partial}{\partial \theta_j} \left[\ln \left(\prod_{i=1}^n f(t_i; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) \right) \right] = 0$$

2-5-2 طريقة Jackknife [12]

طبقت هذه الطريقة لأول مرة من قبل الباحث Quenouille في عام 1949 إذ يستخرج مقدر

Jackknife على النحو الآتي:

$$\hat{\theta}_{\text{Jackknife}} = n\hat{\theta} - (n-1)\theta_*$$

إذ إن:

$\hat{\theta}$ تمثل مقدر المعلمة θ وفقاً لأحدى طرائق التقدير

$$\theta_* = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{\theta}_i}{n} \text{ تساوي}$$

إذ يتم تقدير المعلمات ودالة البقاء للتوزيعات الاحتمالية قيد الدراسة حسب أسلوب Jackknife بالاعتماد على طريقة الإمكان الأعظم وعلى النحو الآتي:

$$\hat{\theta}_{\text{Jackknife}} = n\hat{\theta}_{\text{mle}} - (n-1)\theta_*$$

إذ إن:

$\hat{\theta}_{\text{mle}}$: مقدر المعلمة بطريقة الإمكان الأعظم

$\hat{\theta}_i$: يتم ايجاد وفق الاسلوب التالي:

1- ايجاد $\hat{\theta}_1$ وذلك بحذف المتغير الأول t_1 من مجموعة المتغيرات (t_1, t_2, \dots, t_n) وايجاد $\hat{\theta}_1$

حسب طريقة الإمكان الأعظم بدون المتغير الأول

2- ايجاد $\hat{\theta}_2$ وذلك بترجيع المتغير الأول t_1 الى مجموعة المتغيرات (t_1, t_2, \dots, t_n) وحذف

المتغير الثاني t_2 من هذه المتغيرات وايجاد $\hat{\theta}_2$ حسب طريقة الإمكان الأعظم بدون

المتغير الثاني.

3- وهكذا نستمر بإيجاد $\hat{\theta}_i$ إلى أن نجد $\hat{\theta}_n$.

4- إيجاد θ_*

5- نطبق صيغة Jackknife

$$\hat{\theta}_{\text{Jackknife}} = n\hat{\theta}_{\text{mle}} - (n-1)\theta_*$$

وعليه يمكن إيجاد مقدر دالة البقاء $\hat{S}_{\text{Jackknife(mle)}}(t)$ للتوزيعات الاحتمالية

6-2 التوزيعات الاحتمالية Probability distributions

تُعد مرحلة تمثيل البيانات ضمن توزيع احتمالي يناسبها من أهم مراحل التحليل الاحصائي التي تعتمد عليها بقية المراحل وتعرف هذه المرحلة بمرحلة نمذجة البيانات والتي تستعمل لتوزيعات احتمالية معروفة لتمثيل بيانات الظواهر المدروسة والتنبؤ بها.

لذلك لا بد لنا من معرفة تلك الظواهر أي التوزيعات الاحتمالية التي تسلكها لكي يتم تفسير السلوك العشوائي الذي تسلكه وتكون دراستنا للظواهر إما عن طريق توزيعات جاهزة أو توزيعات مطورة لوصف وقياس ماتوول اليه تلك الظاهرة من نتائج احتمالية.

أهتم العديد من الباحثين بدراسة ظاهرة جائحة كورونا (Covid-19) لما لهذه الظاهرة من تأثير في إصابة الملايين في جميع انحاء العالم وتسببت بوفاة آلاف البشر وشل الحركة الاقتصادية والاجتماعية في العالم، وبذلك تكون هذه الرسالة استكمالاً واطافة للجهود العلمية التي بذلها الباحثون، إذ سيتم استعمال بعض التوزيعات الاحتمالية لدراسة السلوك العشوائي لفترة بقاء المرضى المصابين بفيروس كورونا في محافظة البصرة، فضلاً عن استعمال نفس التوزيعات الاحتمالية بعد تطويرها بواسطة طريقة الباحثين (Marshall and Olkin)^[31] التي تولد عائلة جديدة من خلال إضافة معلمة جديدة الى التوزيع الأساسي والتوزيع الجديد الناتج يسمى باسم عائلة مارشال اولكن Marshall and Olkin ، وتنشأ هذه الطريقة باستعمال دالة البقاء لأي توزيع $\bar{F}(t)$ ، فنحصل على دالة البقاء للتوزيع الجديد $\bar{G}(t; \alpha)$ وتكون بالصيغة الآتية:

$$\bar{G}(t; \alpha) = \frac{\alpha \bar{F}(t)}{1 - \bar{\alpha} \bar{F}(t)} , \bar{\alpha} = 1 - \alpha , \alpha > 0 \quad (4-2)$$

إذ إن:

Marshall and Olkin : تمثل دالة البقاء للتوزيع الجديد لعائلة

$\bar{G}(t; \alpha)$: تمثل دالة البقاء للتوزيع الأساسي

Marshall and Olkin : إن دالة الكثافة الاحتمالية p.d.f ودالة التوزيع التراكمية c.d.f للتوزيع الجديد لعائلة Marshall and Olkin تكون على النحو الآتي:

$$g(t; \alpha) = \frac{\alpha f(t)}{[1 - \bar{\alpha} \bar{F}(t)]^2}, t > 0, \quad \bar{\alpha} = 1 - \alpha, \alpha > 0 \quad (5 - 2)$$

اذ ان :

Marshall and Olkin : تمثل دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الجديد لعائلة

$g(t; \alpha)$: تمثل دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الأساسي

$$G(t; \alpha) = \frac{F(t)}{1 - \bar{\alpha} \bar{F}(t)}, \quad \bar{\alpha} = 1 - \alpha, \alpha > 0 \quad (6 - 2)$$

اذ ان :

Marshall and Olkin : تمثل دالة التوزيع التراكمية للتوزيع الجديد لعائلة

$G(t; \alpha)$: تمثل دالة التوزيع التراكمية للتوزيع الأساسي.

1-6-2 التوزيع الاسي Exponential distribution^[15]

في نظرية الاحصاء الرياضي، التوزيع الاسي (Exponential distribution) هو توزيع احتمالي مستمر اشتق اسمه من الدالة الاسية، ويستعمل هذا التوزيع في تخمين الفترات الزمنية بين وقوع الأحداث.

إن دالة الكثافة الاحتمالية pdf (probability density function) للمتغير العشوائي T الذي يتبع التوزيع الاسي كالاتي:

$$f(t; \theta) = \theta e^{-\theta t} \quad \theta > 0, \quad t > 0 \quad (7 - 2)$$

اما دالة التوزيع التراكمية CDF (Cumulative distribution function) لمتغير عشوائي يتبع التوزيع الاسي تعطى بالصيغة التالية :

$$F(t; \theta) = 1 - e^{-\theta t} \quad (8 - 2)$$

وإن دالة البقاء للتوزيع الاسي تكون على النحو الآتي:

$$S(t; \theta) = e^{-\theta t} \quad (9 - 2)$$

وللحصول على تقدير معلمة ودالة البقاء للتوزيع الاسي باستعمال طريقة الإمكان الأعظم نتبع الخطوات الآتية:

$$L(t_1, t_2 \dots t_n, \theta) = f(t_1, \theta) \cdot f(t_2, \theta) \dots f(t_n, \theta)$$

$$L(t_i; \theta) = \prod_{i=1}^n f(t_i, \theta)$$

تعويض دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الاسي (7-2) في الصيغة المذكورة آنفاً:

$$L(t_i; \theta) = \prod_{i=1}^n [\theta e^{-\theta t}]$$

$$L(t_i; \theta) = \theta^n e^{-\theta \sum_{i=1}^n t_i}$$

وبأخذ اللوغارتم لطرفي الصيغة آنفاً نحصل على:

$$\ln L(t_i; \theta) = n \ln \theta - \theta \sum_{i=1}^n t_i$$

وبأخذ المشتقة الجزئية الأولى للصيغة آنفاً بالنسبة للمعلمة (θ) ومساواتها الى الصفر نحصل على :

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^n t_i = 0$$

$$\frac{n}{\theta} = \sum_{i=1}^n t_i$$

ان تقدير الإمكان الأعظم للمعلمة θ هو

$$\hat{\theta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n t_i} = \frac{1}{\bar{T}} \quad (10 - 2)$$

وبعد تعويض المقدّر ($\hat{\theta}$) في دالة البقاء (9-2) نحصل على مقدر الإمكان الأعظم لدالة بقاء التوزيع الاسي.

$$\hat{S}(t) = e^{-\hat{\theta}_{MLE}t} \quad (11 - 2)$$

2-6-2 توزيع مارشال اولكن الاسي Marshall-Olkin Exponential distribution [17] [31]

قدم توزيع مارشال اولكن الاسي (Marshall-Olkin Exponential distribution) عام 1997 من قبل الباحثين (Marshall and Olkin) عن طريق إضافة معلمة جديدة الى التوزيع الاسي (Exponential distribution)

ان دالة الكثافة الاحتمالية pdf (probability density function) للمتغير العشوائي T الذي يتبع توزيع مارشال اولكن الاسي (Marshall-Olkin Exponential distribution) تكون على الشكل الآتي:

$$f(t; \alpha, \theta) = \frac{\alpha \theta e^{\theta t}}{(e^{\theta t} - \bar{\alpha})^2}, t > 0, (\alpha, \theta) > 0, \bar{\alpha} = 1 - \alpha \quad (12 - 2)$$

اذ ان

α تمثل معلمة الشكل (shape parameter)

θ تمثل معلمة القياس (scale parameter)

اما دالة البقاء (Survival function) لمتغير عشوائي يتبع مارشال اولكن الاسي (Marshall-Olkin Exponential distribution) تكون على النحو الآتي:

$$S(t; \alpha, \theta) = \frac{1}{e^{\theta t} - \bar{\alpha}} \quad (13 - 2)$$

واللحصول على تقدير معلمات ودالة البقاء لتوزيع مارشال اولكن الاسي Marshall-Olkin (Exponential distribution) باستعمال طريقة الإمكان الأعظم نتبع الخطوات الآتية:

$$L(t_1, t_2 \dots t_n; \alpha, \theta) = f(t_1; \alpha, \theta). f(t_2; \alpha, \theta) \dots f(t_n; \alpha, \theta)$$

$$L(t_i; \alpha, \theta) = \prod_{i=1}^n f(t_i; \alpha, \theta)$$

تعويض دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع مارشال اولكن الاسي (12-2) في الصيغة المذكورة آنفاً:

$$L(t_i; \alpha, \theta) = \prod_{i=1}^n \left[\frac{\alpha \theta e^{\theta t}}{(e^{\theta t} - \alpha)^2} \right]$$

وبأخذ اللوغارتم لطرفي الصيغة آنفاً نحصل على:

$$\ln L(\alpha, \theta) = n \ln \alpha + n \ln \theta + \theta \sum_{i=1}^n t_i - 2 \sum_{i=1}^n \ln(\alpha - 1 + e^{\theta t_i})$$

وبأخذ المشتقة الجزئية الأولى للصيغة آنفاً بالنسبة للمعلمة (α, θ) ومساواتها للصفر نحصل على :

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} - 2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha - 1 + e^{\theta t_i}} = 0 \quad (14 - 2)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^n t_i - 2 \sum_{i=1}^n \frac{t_i e^{\theta t_i}}{\alpha - 1 + e^{\theta t_i}} = 0 \quad (15 - 2)$$

المعادلات (14-2) و(15-2) معادلات غير خطية لا يمكن حلها بالطرائق التحليلية الاعتيادية ولذلك تم حلها باستعمال الطريقة العددية (نيوتن رافسون) للحصول على مقدرات طريقة الإمكان الأعظم $(\hat{\theta}_{MLE}, \hat{\alpha}_{MLE})$ ، وتعويض المقدرات $(\hat{\theta}_{MLE}, \hat{\alpha}_{MLE})$ في دالة البقاء (13-2) نحصل على مقدر الإمكان الأعظم لهذه الدالة.

$$\hat{S}(t; \alpha, \theta) = \frac{1}{e^{\hat{\theta}_{MLE} t} - 1 + \hat{\alpha}_{MLE}} \quad (16 - 2)$$

3-6-2 توزيع ليندلي (Lindley Distribution) [1][26][8]

توزيع ليندلي (Lindley Distribution) أحد التوزيعات المختلطة المستمرة الناتجة من خلط متغيرين عشوائيين أحدهما يتبع توزيع كاما (Gamma Distribution) بمعلمة قياس (θ) ومعلمة شكل (2) والآخر يتبع التوزيع الاسي بمعلمة قياس (θ) .

يعرف المتغير العشوائي (T) الذي يتبع توزيع ليندلي Lindley Distribution بدالتي كثافة احتمالية وتوزيعية بالمعادلات الآتية:

$$f(t; \theta) = \frac{\theta^2}{1 + \theta} (1 + t)e^{-\theta t}, \quad t > 0, \quad \theta > 0 \quad (17 - 2)$$

$$F(t; \theta) = 1 - \left(1 + \frac{\theta t}{1 + \theta}\right) e^{-\theta t} \quad (18 - 2)$$

اما دالة بقاء تتعرف بالمعادلة (19-2).

$$L(t; \theta) = \left(1 + \frac{\theta t}{1 + \theta}\right) e^{-\theta t} \quad (19 - 2)$$

وللحصول على تقدير معلمة ودالة البقاء توزيع ليندلي Lindley Distribution باستعمال طريقة الإمكان الأعظم كآلاتي:

$$L(t_1, t_2 \dots t_n; \theta) = f(t_1; \theta).f(t_2; \theta) \dots f(t_n; \theta)$$

$$L(t_i; \theta) = \prod_{i=1}^n f(t_i; \theta)$$

تعويض دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ليندلي (17-2) في الصيغة المذكورة آنفاً:

$$L(t_i; \theta) = \prod_{i=1}^n \left[\frac{\theta^2}{1 + \theta} (1 + t) e^{-\theta t} \right]$$

$$L(t_i; \theta) = \frac{\theta^{2n}}{(1 + \theta)^n} e^{-\theta \sum_{i=1}^n t_i} \prod_{i=1}^n (1 + t_i)$$

وبأخذ اللوغارتم لطرفي الصيغة آنفاً نحصل على:

$$\ln L(t_i; \theta) = 2n \ln \theta - n \ln(1 + \theta) + \sum_{i=1}^n \ln(1 + t_i) - \theta \sum_{i=1}^n t_i$$

وبأخذ المشتقة الجزئية الأولى للصيغة آنفاً بالنسبة للمعلمة (θ) ومساواتها للصفر:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \frac{2n}{\theta} - \frac{n}{1 + \theta} - \sum_{i=1}^n t_i = 0$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \frac{2n(1 + \theta) - n\theta - \theta(1 + \theta) \sum_{i=1}^n t_i}{\theta(1 + \theta)} = 0$$

$$2n(1 + \hat{\theta}) - n\hat{\theta} - \hat{\theta}(1 + \hat{\theta}) \sum_{i=1}^n t_i = 0$$

قسمة الطرفين على n :

$$2(1 + \hat{\theta}) - \hat{\theta} - \hat{\theta}(1 + \hat{\theta})\bar{t} = 0$$

وبحل الصيغة انفا نحصل على مقدر طريقة الإمكان الأعظم للمعلمة (θ) :

$$\hat{\theta}_{MLE} = \frac{-(1 - \bar{t}) + \sqrt{(\bar{t} - 1)^2 + 8\bar{t}}}{2\bar{t}} \quad (20 - 2)$$

وبعد تعويض المقدر $(\hat{\theta})$ في دالة البقاء (2-19) نحصل على مقدر الإمكان الأعظم لدالة بقاء توزيع ليندلي.

$$\hat{S}(t; \theta) = \left(1 + \frac{\hat{\theta}_{MLE} t}{1 + \hat{\theta}_{MLE}}\right) e^{-\hat{\theta}_{MLE} t} \quad (21 - 2)$$

4-6-2 توزيع مارشال اولكن ليندلي Marshall-Olkin Lindley distribution

قدم توزيع مارشال اولكن ليندلي (Marshall-Olkin Lindley Distribution) عام 2012 من قبل الباحث (Ghitane) وآخرين عن طريق اضافة معلمة جديدة الى توزيع ليندلي (Lindley distribution).

إن دالة الكثافة الاحتمالية pdf (probability density function) للمتغير العشوائي T الذي يتبع توزيع مارشال اولكن ليندلي (Marshall-Olkin Lindley distribution) تكون على الشكل الآتي:

$$f(t; \theta, \alpha) = \frac{\alpha \frac{\theta^2(1+t)e^{-\theta t}}{\theta+1}}{\left[1 - \bar{\alpha} \left(1 + \frac{\theta t}{\theta+1}\right) e^{-\theta t}\right]^2}, t > 0, (\theta, \alpha) > 0, \quad (22 - 2)$$

وان دالة البقاء (Survival function) لتوزيع مارشال اولكن ليندلي (Marshall-Olkin Lindley distribution) تكون على النحو الآتي:

$$S(t; \theta, \alpha) = \frac{\alpha \left(1 + \frac{\theta t}{\theta+1}\right) e^{-\theta t}}{1 - \bar{\alpha} \left(1 + \frac{\theta t}{\theta+1}\right) e^{-\theta t}}, \quad \bar{\alpha} = 1 - \alpha \quad (23 - 2)$$

وللحصول على تقدير معلمة ودالة البقاء لتوزيع مارشال اولكن ليندلي (Marshall-Olkin Lindley distribution) باستعمال طريقة الإمكان الأعظم نتبع الخطوات الآتية:

$$L(t_1, t_2 \dots t_n; \alpha, \theta) = f(t_1; \alpha, \theta) \cdot f(t_2; \alpha, \theta) \dots f(t_n; \alpha, \theta)$$

$$L(t_i; \alpha, \theta) = \prod_{i=1}^n f(t_i; \alpha, \theta)$$

تعويض دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع مارشال اولكن ليندلي (22 - 2) في الصيغة المذكورة آنفاً:

$$L(t_i; \alpha, \theta) = \prod_{i=1}^n \left[\frac{\alpha \frac{\theta^2(1+t_i)e^{-\theta t_i}}{\theta+1}}{\left[1 - \bar{\alpha} \left(1 + \frac{\theta t_i}{\theta+1}\right) e^{-\theta t_i}\right]^2} \right]$$

بالإمكان كتابة الصيغة المذكورة آنفا بالشكل الآتي:

$$L(t_i; \alpha, \theta) = \prod_{i=1}^n \left[\frac{\alpha f(t_i; \theta)}{\left[1 - \bar{\alpha} S(t_i; \theta)\right]^2} \right]$$

$$L(t_i; \alpha, \theta) = \alpha^n \prod_{i=1}^n \frac{f(t_i; \theta)}{\left[1 - \bar{\alpha} S(t_i; \theta)\right]^2}$$

وبأخذ اللوغارتم لطرفي الصيغة آنفاً نحصل على:

$$\ln L(t_i; \alpha, \theta) = n \ln \alpha + \sum_{i=1}^n \ln[f(t_i; \theta)] - 2 \sum_{i=1}^n \ln[1 - \bar{\alpha} S(t_i; \theta)]$$

وبأخذ المشتقة الجزئية الأولى للصيغة آنفاً بالنسبة للمعلمة (θ, α) ومساواتها للصفر:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} - 2 \sum_{i=1}^n \frac{S(t_i; \theta)}{1 - \bar{\alpha} S(t_i; \theta)} = 0 \quad (24 - 2)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^n \frac{\dot{f}(t_i; \theta)}{f(t_i; \theta)} - 2\bar{\alpha} \sum_{i=1}^n \frac{f(t_i; \theta)}{1 - \bar{\alpha} S(t_i; \theta)} = 0 \quad (25 - 2)$$

$$\text{Where } \dot{f}(t_i; \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} f(t_i; \theta)$$

المعادلات (24-2) و(25-2) معادلات غير خطية لا يمكن حلها بالطرائق التحليلية الاعتيادية ولذلك تم حلها باستعمال الطريقة العددية (نيوتن رافسون) للحصول على مقدرات طريقة الإمكان الأعظم $(\hat{\alpha}_{MLE}, \hat{\theta}_{MLE})$ ، وتعويض المقدرات $(\hat{\alpha}_{MLE}, \hat{\theta}_{MLE})$ في دالة البقاء (23-2) نحصل على مقدر الإمكان الأعظم لهذه الدالة.

$$\hat{S}(t; \theta, \alpha) = \frac{\hat{\alpha}_{MLE} \left(1 + \frac{\hat{\theta}_{MLE} t}{\hat{\theta}_{MLE} + 1}\right) e^{-t\hat{\theta}_{MLE}}}{1 - \hat{\alpha} \left(1 + \frac{\hat{\theta}_{MLE} t}{\hat{\theta}_{MLE} + 1}\right) e^{-t\hat{\theta}_{MLE}}} \quad (26 - 2)$$

[20]Dagum Distribution 5-6-2 توزيع داكوم

اقترح توزيع داكوم (Dagum Distribution) من قبل الباحث (Dagum,C) عام 1977 لنمذجة بيانات الدخل كبديل عن النماذج (Pareto) و (Log- normal)، وتم استخدامه في عدة مجالات مختلفة (تحليل المعولية والبقاء والعلاقة بين الدخل والثروة).

وإنّ شكل دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع داكوم (Dagum Distribution) تأخذ الصيغة الآتية:

$$f(t, \beta, \lambda, \delta) = \beta \lambda \delta t^{-\delta-1} (1 + \lambda t^{-\delta})^{-\beta-1}, t > 0, (\beta, \lambda, \delta) > 0 \quad (27 - 2)$$

إذ أن:

λ تمثل معلمة القياس (Scale Parameter)

β, δ معلمات شكل (Shape Parameter)

اما دالة التوزيع التراكمية فتكون بالشكل الآتي:

$$F(t) = (1 + \lambda t^{-\delta})^{-\beta} \quad (28 - 2)$$

وان دالة البقاء (Survival function) تكون على النحو الآتي:

$$S(t) = 1 - (1 + \lambda t^{-\delta})^{-\beta} \quad (29 - 2)$$

وللحصول على تقدير معلمات ودالة البقاء لتوزيع داكوم (Dagum Distribution) باستعمال طريقة الإمكان الأعظم نتبع الخطوات الآتية:

$$L(t_1, t_2 \dots t_n; \beta, \lambda, \delta) = f(t_1; \beta, \lambda, \delta) \cdot f(t_2; \beta, \lambda, \delta) \dots f(t_n; \beta, \lambda, \delta)$$

$$L(t_i; \beta, \lambda, \delta) = \prod_{i=1}^n f(t_i; \beta, \lambda, \delta)$$

تعويض دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع داکوم (Dagum Distribution) (27-2) في الصيغة المذكورة آنفاً:

$$L(t_i; \beta, \lambda, \delta) = \prod_{i=1}^n [\beta \lambda \delta t^{-\delta-1} (1 + \lambda t^{-\delta})^{-\beta-1}]$$

$$L(t_i; \beta, \lambda, \delta) = (\beta \lambda \delta)^n \prod_{i=1}^n t_i^{-\delta-1} (1 + \lambda t_i^{-\delta})^{-\beta-1}$$

وبأخذ اللوغارتم لطرفي الصيغة آنفاً نحصل على:

$$L(t_i; \beta, \lambda, \delta) = n \ln \beta + n \ln \lambda + n \ln \delta - (\delta + 1) \sum_{i=1}^n \ln t_i - (\beta + 1) \sum_{i=1}^n \ln(1 + \lambda t_i^{-\delta})$$

وبأخذ المشتقة الجزئية الأولى للصيغة آنفاً بالنسبة للمعلمات (β, λ, δ) ومساواتها للصفر نحصل على :

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta} = \frac{n}{\beta} - \sum_{i=1}^n \ln(1 + \lambda t_i^{-\delta}) = 0 \quad (30 - 2)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - (\beta + 1) \sum_{i=1}^n \frac{t_i^{-\delta}}{1 + \lambda t_i^{-\delta}} = 0 \quad (31 - 2)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \delta} = \frac{n}{\delta} - \sum_{i=1}^n \ln t_i + (\beta + 1) \sum_{i=1}^n \frac{\lambda t_i^{-\delta} \ln t_i}{1 + \lambda t_i^{-\delta}} = 0 \quad (32 - 2)$$

المعادلات (30-2) و(31-2) و(32-2) معادلات غير خطية لا يمكن حلها بالطرائق التحليلية الاعتيادية ولذلك تم حلها باستعمال الطريقة العددية (نيوتن رافسون) للحصول على مقدرات طريقة الإمكان الأعظم $(\hat{\beta}_{MLE}, \hat{\lambda}_{MLE}, \hat{\delta}_{MLE})$ ، وتعويض المقدرات

الدالة $\hat{\beta}_{MLE}, \hat{\lambda}_{MLE}, \hat{\delta}_{MLE}$ في دالة البقاء (29-2) نحصل على مقدر الإمكان الأعظم لهذه الدالة.

$$\hat{S}(t) = 1 - (1 + \lambda_{MLE} t^{-\delta_{MLE}})^{-\beta_{MLE}} \quad (33 - 2)$$

6-6-2 توزيع مارشال اولكن داكوم Marshall-Olkin Dagum Distribution

تم في هذه الرسالة العمل على اشتقاق توزيع مارشال اولكن داكوم (Marshall-Olkin Dagum Distribution) بتطبيق طريقة Marshall-Olkin على توزيع داكوم (Dagum Distribution) ، وان التوزيع الناتج لم يتم التطرق اليه في اي عمل بحثي سابق.

وللحصول على دالة الكثافة الاحتمالية pdf (probability density function) للمتغير العشوائي T الذي يتبع توزيع مارشال اولكن داكوم (Marshall-Olkin Dagum distribution) نعوض دالة الكثافة الاحتمالية (27-2) ودالة البقاء (29-2) لتوزيع داكوم في المعادلة (5-2) فتكون دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع مارشال اولكن داكوم (Marshall-Olkin Dagum distribution) بالشكل الاتي:

$$g(t; \alpha, \beta, \lambda, \delta) = \frac{\alpha \beta \lambda \delta t^{-\delta-1} (1 + \lambda t^{-\delta})^{-\beta-1}}{[1 - \alpha (1 - (1 + \lambda t^{-\delta})^{-\beta})]^2}, t > 0, (\alpha, \beta, \lambda, \delta > 0) \quad (34 - 2)$$

ولاثبات الصيغة (34-2) المذكورة آنفاً انها دالة احتمالية:

$$\int_0^{\infty} g(t; \alpha, \beta, \lambda, \delta) dt = 1$$

$$\alpha \beta \lambda \delta \int_0^{\infty} \frac{t^{-\delta-1} (1 + \lambda t^{-\delta})^{-\beta-1}}{[1 - (1 - \alpha) (1 - (1 + \lambda t^{-\delta})^{-\beta})]^2} dt$$

$$\text{Let } (1 + \lambda t^{-\delta}) = u \rightarrow t^{-\delta} = \frac{u-1}{\lambda} \rightarrow t = \left(\frac{u-1}{\lambda}\right)^{-\frac{1}{\delta}}, dt = -\frac{1}{\delta \lambda} \left(\frac{u-1}{\lambda}\right)^{-\frac{1}{\delta}-1} du ,$$

$$t = 0 \rightarrow u = 1, t = \infty \rightarrow u = \infty$$

$$\alpha \beta \lambda \delta \int_1^{\infty} \frac{\left(\frac{u-1}{\lambda}\right)^{1+\frac{1}{\delta}} u^{-\beta-1}}{[1-(1-\alpha)(1-u^{-\beta})]^2} * -\frac{1}{\delta \lambda} \left(\frac{u-1}{\lambda}\right)^{-\frac{1}{\delta}-1} du$$

$$\alpha \beta \int_1^{\infty} \frac{-u^{-\beta-1}}{[u^{-\beta} + \alpha - \alpha u^{-\beta}]^2} du$$

$$\alpha \beta \int_1^{\infty} \frac{-u^{-\beta-1}}{[u^{-\beta}(1-\alpha) + \alpha]^2} du$$

Let $u^{-\beta} = z \rightarrow u = z^{-\frac{1}{\beta}}$, $du = -\frac{1}{\beta} z^{-\frac{1}{\beta}-1} dz$, $u = 1 \rightarrow z = 1, u = \infty \rightarrow z = 0$

$$\alpha \beta \int_0^1 \frac{-z^{1+\frac{1}{\beta}}}{[z(1-\alpha) + \alpha]^2} * -\frac{1}{\beta} z^{-\frac{1}{\beta}-1} dz$$

$$\alpha \int_0^1 \frac{1}{[z - z\alpha + \alpha]^2} dz$$

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} \int_0^1 (1-\alpha)[z - z\alpha + \alpha]^{-2} dz$$

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} \left[\frac{[z - z\alpha + \alpha]^{-2+1}}{-2+1} \right]_0^1$$

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} \left[-(1) + \left(\frac{1}{\alpha}\right) \right]$$

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} \left(\frac{-\alpha + 1}{\alpha} \right) = 1$$

وبذلك فإنه يتحقق كون الدالة في الصيغة (11-2) هي احتمالية.

ونحصل على دالة البقاء (Survival function) لتوزيع مارشال اولكن داكوم (Marshall-Olkin Dagum distribution) عن طريق تعويض دالة البقاء لتوزيع داكوم (29-2) في المعادلة (4-2) وكما يأتي:

$$\bar{G}(t) = \frac{\alpha [1 - (1 + \lambda t^{-\delta})^{-\beta}]}{1 - \bar{\alpha} [1 - (1 + \lambda t^{-\delta})^{-\beta}]} , \bar{\alpha} = 1 - \alpha , \alpha > 0 \quad (35 - 2)$$

وللحصول على تقدير معالم ودالة البقاء لتوزيع مارشال اولكن داكوم (Marshall-Olkin Dagum distribution) باستعمال طريقة الإمكان الأعظم نتبع الخطوات الآتية:

$$L(t_1, t_2 \dots t_n; \alpha, \beta, \lambda, \delta) = f(t_1; \alpha, \beta, \lambda, \delta) \cdot f(t_2; \alpha, \beta, \lambda, \delta) \dots f(t_n; \alpha, \beta, \lambda, \delta)$$

$$L(t_i; \alpha, \beta, \lambda, \delta) = \prod_{i=1}^n f(t_i; \alpha, \beta, \lambda, \delta)$$

تعويض دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع مارشال اولكن داكوم (34-2) في الصيغة المذكورة آنفاً:

$$L(t_i; \alpha, \beta, \lambda, \delta) = \prod_{i=1}^n \left[\frac{\alpha \beta \lambda \delta t^{-\delta-1} (1 + \lambda t^{-\delta})^{-\beta-1}}{[1 - \bar{\alpha} (1 - (1 + \lambda t^{-\delta})^{-\beta})]^2} \right]$$

بالامكان كتابة الصيغة المذكورة آنفاً بالشكل الآتي:

$$L(t_i; \alpha, \beta, \lambda, \delta) = \prod_{i=1}^n \left[\frac{\alpha f(t_i; \beta, \lambda, \delta)}{[1 - \bar{\alpha} S(t_i; \beta, \lambda, \delta)]^2} \right]$$

$$L(t_i; \alpha, \beta, \lambda, \delta) = \alpha^n \sum_{i=1}^n \frac{f(t_i; \beta, \lambda, \delta)}{[1 - \bar{\alpha} S(t_i; \beta, \lambda, \delta)]^2}$$

وبأخذ اللوغارتم لطرفي الصيغة آنفاً نحصل على:

$$\ln L(t_i; \alpha, \beta, \lambda, \delta) = n \ln \alpha + \sum_{i=1}^n \ln[f(t_i; \beta, \lambda, \delta)] - 2 \sum_{i=1}^n \ln[1 - \bar{\alpha} S(t_i; \beta, \lambda, \delta)]$$

وبأخذ المشتقة الجزئية الأولى للصيغة آنفاً بالنسبة للمعلمات $(\alpha, \beta, \lambda, \delta)$ ومساواتها للصفر:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} - 2 \sum_{i=1}^n \frac{S(t_i; \beta, \lambda, \delta)}{1 - S(t_i; \beta, \lambda, \delta) + \alpha S(t_i; \beta, \lambda, \delta)} = 0 \quad (36 - 2)$$

$$\begin{aligned} \text{where } 1 - \bar{\alpha} S(t_i; \beta, \lambda, \delta) &= 1 - (1 - \alpha) S(t_i; \beta, \lambda, \delta) \\ &= 1 - S(t_i; \beta, \lambda, \delta) + \alpha S(t_i; \beta, \lambda, \delta) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^n \frac{\frac{\partial}{\partial \beta} f(t_i; \beta, \lambda, \delta)}{f(t_i; \beta, \lambda, \delta)} + 2 \sum_{i=1}^n \frac{\frac{\partial}{\partial \beta} [1 - \bar{\alpha} S(t_i; \beta, \lambda, \delta)]}{1 - \bar{\alpha} S(t_i; \beta, \lambda, \delta)} = 0 \quad (37 - 2)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^n \frac{\frac{\partial}{\partial \lambda} f(t_i; \beta, \lambda, \delta)}{f(t_i; \beta, \lambda, \delta)} + 2 \sum_{i=1}^n \frac{\frac{\partial}{\partial \lambda} [1 - \bar{\alpha} S(t_i; \beta, \lambda, \delta)]}{1 - \bar{\alpha} S(t_i; \beta, \lambda, \delta)} = 0 \quad (38 - 2)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \delta} = \sum_{i=1}^n \frac{\frac{\partial}{\partial \delta} f(t_i; \beta, \lambda, \delta)}{f(t_i; \beta, \lambda, \delta)} - 2 \sum_{i=1}^n \frac{\frac{\partial}{\partial \delta} [1 - \bar{\alpha} S(t_i; \beta, \lambda, \delta)]}{1 - \bar{\alpha} S(t_i; \beta, \lambda, \delta)} = 0 \quad (39 - 2)$$

المعادلات (36-2) و(37-2) و(38-2) و(39-2) معادلات غير خطية لا يمكن حلها بالطرائق التحليلية الاعتيادية ولذلك تم حلها باستعمال الطريقة العددية (نيوتن رافسون) للحصول على مقدرات طريقة الإمكان الأعظم $(\hat{\alpha}_{MLE}, \hat{\beta}_{MLE}, \hat{\lambda}_{MLE}, \hat{\delta}_{MLE})$ ، وتعويض المقدرات $\hat{\alpha}_{MLE}, \hat{\beta}_{MLE}, \hat{\lambda}_{MLE}, \hat{\delta}_{MLE}$ في دالة البقاء (35-2) نحصل على مقدر الإمكان الأعظم لهذه الدالة.

$$\bar{G}(t) = \frac{\hat{\alpha}_{MLE} \left[1 - (1 + \hat{\lambda}_{MLE} t^{-\hat{\delta}_{MLE}})^{-\hat{\beta}_{MLE}} \right]}{1 - \bar{\alpha} \left[1 - (1 + \hat{\lambda}_{MLE} t^{-\hat{\delta}_{MLE}})^{-\hat{\beta}_{MLE}} \right]} \quad (40 - 2)$$

7-2 معايير اختيار أفضل توزيع

تعد عملية اختيار التوزيع الملائم لبيانات العينة من العمليات المهمة جدا في الاستدلال الاحصائي.

وللحصول على أفضل توزيع من التوزيعات الاحتمالية لتمثيل ووصف البيانات سيتم استعمال بعض المعايير الاحصائية للمفاضلة بين التوزيعات في هذه الدراسة، إذ إن التوزيع الذي يمتلك أقل قيمة لهذه المعايير يكون الأفضل:

1- معيار معلومات اكاكي (AIC) (Akaike information criterion) [34][36]

اقترح من قبل الباحث Akaike عام 1973 وتقوم فكرته على حساب قيمة AIC لكل توزيع من التوزيعات، والتوزيع الذي يمتلك أقل قيمة لهذه المعايير يكون الأفضل وصيغته العامة كالآتي:

$$AIC = -2\text{Log}(L) + 2r \quad (41 - 2)$$

اذ ان:

$\text{Log}(L)$: لوغاريتم دالة الإمكان الأعظم (Log Likelihood function) لمشاهدات العينة.

r: عدد معلمات التوزيع

2- معيار معلومات اكاكي المصحح (AIC_c) (Akaike information Criterion) [18][23]

وهو معيار لأختيار أفضل توزيع من مجموعة التوزيعات وصيغته الرياضية كالآتي:

$$AIC_c = AIC + \frac{2(r + 1)}{n - r - 1} \quad (42 - 2)$$

اذ ان:

AIC : معيار اكاكي

r : عدد معلمات التوزيع

n : حجم العينة

8-2 المقاييس الاحصائية (متوسط مربعات الخطأ (MSE)، متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE)^[13])

1- متوسط مربعات الخطأ (MSE)

تكون صيغته بالنسبة لمعاملات التوزيع احتمالي على الشكل الآتي:

$$MSE[\theta] = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R (\hat{\theta}_i - \theta)^2 \quad (44 - 2)$$

إذ أن:

θ : تمثل القيم الافتراضية لمعاملات التوزيع.

$\hat{\theta}_i$: تمثل القيم المقدرة للمعاملات حسب الطريقة المستعملة للتقدير.

R : تمثل عدد تكرارات التجربة.

اما صيغة متوسط مربعات الخطأ (MSE) بالنسبة لدالة بقاء التوزيع احتمالي تكون على الشكل الآتي:

$$MSE[\hat{S}(t_j)] = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R (\hat{S}_i(t_j) - S_i(t_j))^2, \quad j = 1, 2, \dots, K \quad (45 - 2)$$

إذ ان:

$S_i(t_j)$ تمثل القيم الحقيقية لدالة بقاء التوزيع.

$\hat{S}_i(t_j)$: تمثل القيم المقدرة لدالة بقاء التوزيع حسب الطريقة المستعملة للتقدير.

R : تمثل عدد تكرارات التجربة.

K : تمثل عدد مشاهدات التجربة (قيم t_j).

2- متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) بالنسبة لدالة بقاء التوزيع احتمالي:

لكون متوسط مربعات الخطأ (MSE) يحسب لكل (t_j) من الزمن فان (IMSE) يمثل تكامل للمساحة الكلية (t_j) واختزالها بقيمة واحدة تعد عامة للزمن وإن صيغة هذا المقياس هي:

$$IMSE[\hat{S}(t_j)] = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K \left[\frac{1}{R} \sum_{i=1}^R (\hat{S}_i(t_j) - S_i(t_j))^2 \right]$$

$$IMSE[\hat{S}(t_j)] = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K MSE[\hat{S}(t_j)] \quad (46 - 2)$$

الفصل الثالث

الجانب التجريبي والتطبيقي

3-1 تمهيد

تم تقسيم هذا الفصل الى قسمين اساسيين، إذ سنعرض في القسم الأول الجانب التجريبي والذي نطبق فيه تجربة المحاكاة على بيانات مولدة بإستعمال أسلوب مونت-كارلو (Monte-Carlo) لغرض اختيار الطريقة الأفضل لتقدير دالة بقاء التوزيعات الاحتمالية قيد الدراسة.

اما القسم الثاني يمثل الجانب التطبيقي ويتضمن إيجاد التوزيع الاحتمالي الملائم لتمثيل ووصف بيانات البقاء لعينة من المرضى المصابين بفيروس كورونا (Covid-19) من تاريخ دخولهم المستشفى لحين الوفاة مقاسة بالأيام في محافظة البصرة بالاعتماد على المعايير (AIC, AIC_C)، فضلاً عن تقدير دالة البقاء للعينة المذكورة آنفاً.

وتم الحصول على جميع نتائج القسمين باستعمال برنامج (Mathematica 12.2)

3-2 القسم الأول: الجانب التجريبي**3-2-1 مفهوم المحاكاة [2][6]**

تعرف المحاكاة بأنها عملية تمثيل وتقليد للواقع الحقيقي أي إيجاد صورة طبق الأصل من أي نظام أو نموذج دون أخذ ذلك النظام أو للنموذج ذاته، وكثيراً ما نجد في الواقع الحقيقي أن هناك عمليات تكون معقدة الفهم ولاسيما في بعض المشكلات أو النظريات الإحصائية والهندسية التي يكون تحليلها تحليلاً (منطقياً) باستعمال البراهين الرياضية أمراً في غاية الصعوبة ما يؤدي الى ترجمة هذه النظريات الى مجتمعات حقيقية، ثم سحب عدداً من العينات العشوائية منها للوصول الى الحلول المثلى لهذه المشكلات ولتحليل ذلك فمن الأفضل أن توصف هذه العمليات بصورة مشابهة للصور الحقيقية بنماذج معينة ففهم الانموذج يحقق لنا قدراً من الإدراك للعملية الأصلية أو الواقع الحقيقي عن طريق محاكاة الأنموذج.

ويعتمد أسلوب المحاكاة على توليد الإعداد العشوائية التي تكون في كل سلسلة من الأعداد العشوائية مستقلة عن الأخرى، أي إنّ تجربة المحاكاة ماهي الا عبارة عن نوع معين من أنواع المعاينة إذ تحسب هذه العينة من المجتمع الافتراضي الممثل للظاهرة المدروسة بدلاً من إن تسحب من المجتمع الحقيقي ومن ثم يتم تطبيق الأساليب الإحصائية والرياضية المناسبة للوصول إلى النتائج المطلوبة لغرض اجراء المقارنة والتحليل.

وتوجد أكثر من طريقة للمحاكاة مثل (التناظرية Analog، المختلطة Mixed، مونت كارلو Monte Carlo) إلا إنَّ طريقة مونت كارلو Monte Carlo أكثر استعمالاً وتمتاز بالمرونة عن طريق تكرار العملية لمرات عدة والتي عن طريقها يتم توليد عينة من المشاهدات تتبع سلوك توزيع احتمالي معين وتكون هذه المشاهدات تتمتع بخاصية الاستقلالية.

2-2-3 وصف تجربة المحاكاة:

تم تنفيذ المحاكاة باعتماد اربعة حجوم للعينات (200,100,50,30) لمعرفة مدى تأثير حجم العينة في دقة نتائج طرائق التقدير، وكذلك تم اعتماد مجموعة نماذج من القيم الافتراضية لمعاملات توزيعات الدراسة ((التوزيع الاسي (Exp) ، توزيع ليندلي (Lin) ، توزيع داکوم (Dag))، توزيع مارشال اولكن الاسي (M-O- Exp)، توزيع مارشال اولكن ليندلي (M-O- Lin) ، توزيع مارشال اولكن داکوم (M-O- Dag) والمبينة في الجدول (1-3) أدناه، وتكرار التجربة 1000 مرة لكل نموذج من نماذج القيم الافتراضية وذلك بهدف الحصول على أعلى تجانس ممكن.

جدول (1-3)

نماذج القيم الافتراضية لمعاملات التوزيعات قيد الدراسة

Model	Exp	M-O-Exp		Lin	M-O-Lin		Dag			M-O-Dag			
	θ	θ	α	θ	θ	α	δ	β	λ	δ	β	λ	α
1	0.2	0.2	0.5	0.2	0.2	0.5	2.5	0.5	1	2.5	0.5	1	0.5
2	1	0.2	2	1	0.2	2	2.5	0.5	3	2.5	0.5	3	0.5
3	2	1	0.5	2	1	0.5	1.5	1.5	1	1.5	1.5	1	1
4	-	1	2	-	1	2	1.5	0.5	10	1.5	0.5	10	1
5	-	2	0.5	-	2	0.5	2.5	1.5	2.5	2.5	1.5	2.5	1
6	-	2	2	-	2	2	1	1	1	1	1	1	0.5

وقد تم استعمال طريقة معكوس دالة التوزيع التراكمية لتوليد المشاهدات العشوائية (البيانات) بطريقة التحويل المعكوس لكل توزيع من التوزيعات الاحتمالية قيد الدراسة وكما يأتي :

اولاً: توليد أرقام عشوائية U_i تتبع التوزيع المنتظم ضمن الفترة (0,1)

$$U_i \sim U(0,1), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

U_i : يمثل متغير عشوائي مستمر يتبع التوزيع المنتظم يتم توليده بإستعمال البرنامج على وفق الصيغة الآتية :

$$U = [0 \leq p \leq 1], p \sim \text{UniformDistribution}[]$$

ثانياً: تحويل البيانات المولدة من الخطوة (أولاً) التي تتبع التوزيع المنتظم الى بيانات تتبع التوزيعات الاحتمالية قيد الدراسة وكما هو مبين أدناه باستخدام مفهوم معكوس الدالة (Inverse Function)، فإذا كانت لدينا الدالة F الآتية:

$$u = F(t) \quad (1-3)$$

فان معكوس الدالة F^{-1} يمكن كتابتها على النحو الآتي:

$$t = F^{-1}(u) \quad (2-3)$$

1- التوزيع الاسي:

$$u = F(t)$$

$$u = 1 - e^{-\theta t}$$

$$1 - u = e^{-\theta t}$$

$$\ln(1 - u) = -\theta t$$

$$t = \frac{-\ln(1 - u)}{\theta}$$

2- توزيع مارشال اولكن الاسي [31]

$$t = \frac{1}{\theta} \ln \frac{(\bar{u} + \lambda u)}{\bar{u}}, \bar{u} = 1 - u$$

3- توزيع ليندلي

$$t = \frac{-1 - \theta - \text{product log}[e^{-1-\theta} (-1 + u)(1 + \theta)]}{\theta}$$

4- توزيع مارشال اولكن ليندلي [25]

$$t = \frac{-1 - \theta - \text{product log} \left[\frac{e^{-1-\theta} (u - 1)(1 + \theta)}{1 + u(\lambda - 1)} \right]}{\theta}$$

5- توزيع داكوم [20]

$$t = \left[\frac{1}{\theta} \left(u^{-\frac{1}{\beta}} - 1 \right) \right]^{-\frac{1}{\alpha}}$$

6- توزيع مارشال اولكن داكوم

$$u = F(t)$$

باستعمال دالة التوزيع التراكمية c.d.f في الصيغة (6-2):

$$u = \frac{F(t)}{1 - \bar{\alpha} \bar{F}(t)} = \frac{F(t)}{1 - \bar{\alpha} (1 - F(t))} = \frac{F(t)}{1 - \bar{\alpha} + \bar{\alpha} F(t)}$$

$$u - u\bar{\alpha} + u\bar{\alpha}F(t) = F(t) \rightarrow u - u\bar{\alpha} = F(t)(1 - u\bar{\alpha})$$

$$\frac{u - u\bar{\alpha}}{1 - u\bar{\alpha}} = F(t)$$

تعويض دالة التوزيع التراكمية بالصيغة (28-2):

$$\frac{u - u\bar{\alpha}}{1 - u\bar{\alpha}} = (1 + \lambda t^{-\delta})^{-\beta}$$

$$\left(\frac{u - u\bar{\alpha}}{1 - u\bar{\alpha}} \right)^{-\frac{1}{\beta}} = 1 + \lambda t^{-\delta}$$

$$\frac{1}{\lambda} \left(\left(\frac{u - u\bar{\alpha}}{1 - u\bar{\alpha}} \right)^{-\frac{1}{\beta}} - 1 \right) = t^{-\delta}$$

$$t = \left[\frac{1}{\lambda} \left(\left(\frac{u - u\bar{\alpha}}{1 - u\bar{\alpha}} \right)^{-\frac{1}{\beta}} - 1 \right) \right]^{-\frac{1}{\delta}}$$

وبعد تنفيذ برنامج المحاكاة الذي تم كتابته باستعمال برنامج Mathematica تم الحصول على النتائج والتي تمثل مقدرات دالة البقاء باستعمال طريقة الإمكان الأعظم (S_MLE) وطريقة Jackknife (S_Jac) ومتوسط مربعات الخطأ MSE ومتوسط مربعات الخطأ التكاملية IMSE، ثم تحدد أفضل طريقة تقدير دالة البقاء بالاعتماد على متوسط مربعات الخطأ التكاملية (IMSE).

ولخصت نتائج المحاكاة للتوزيعات الاحتمالية قيد الدراسة من الجدول (2-3) الى الجدول (7-3).

3-2-3 مناقشة نتائج المحاكاة

1-3-2-3 نتائج محاكاة التوزيع الاسي

تم تلخيص نتائج محاكاة التوزيع الاسي في الجدول (2-3) والشكل (1-3) ادناه.

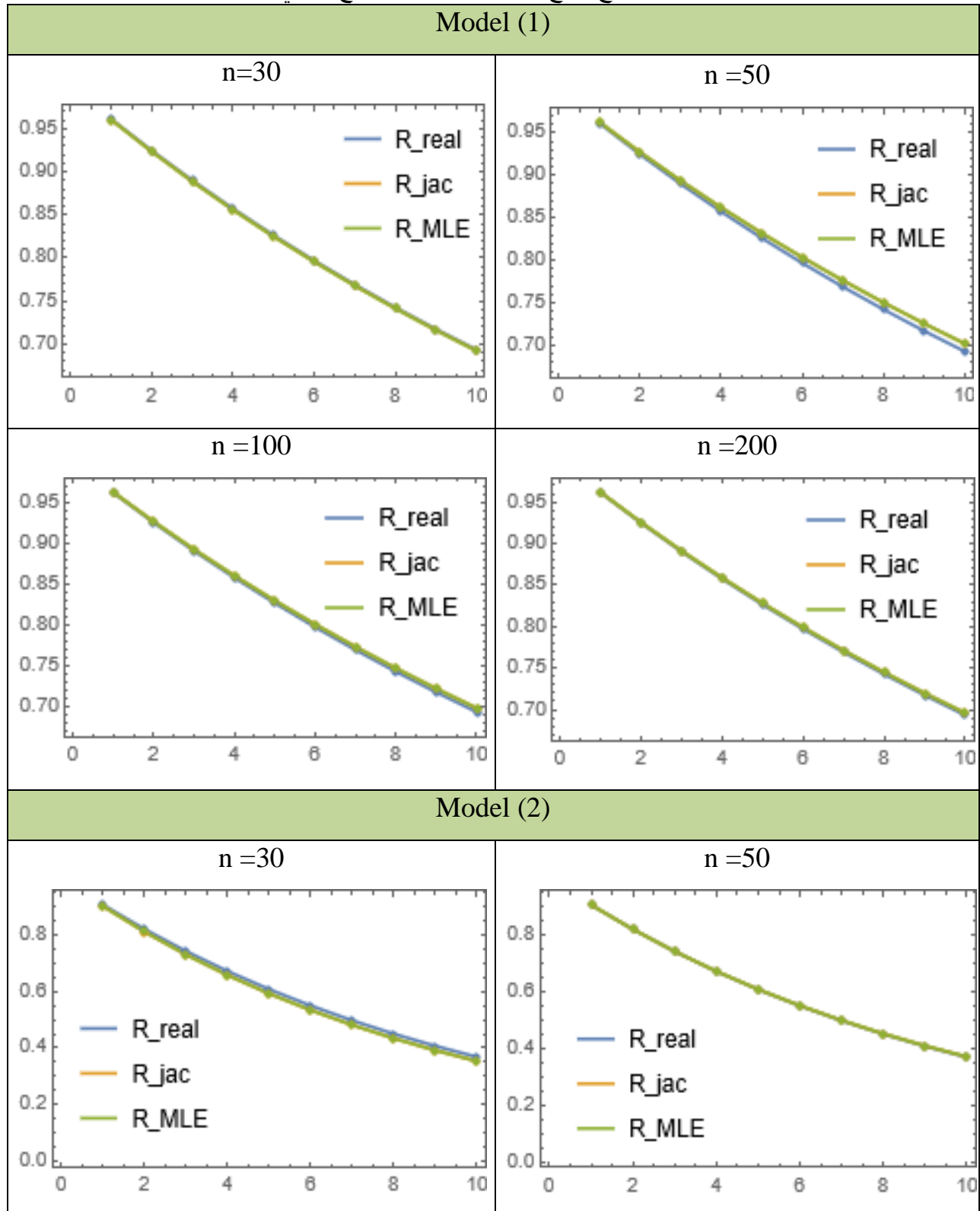
جدول (2-3)
نتائج تجربة المحاكاة للتوزيع الاسي

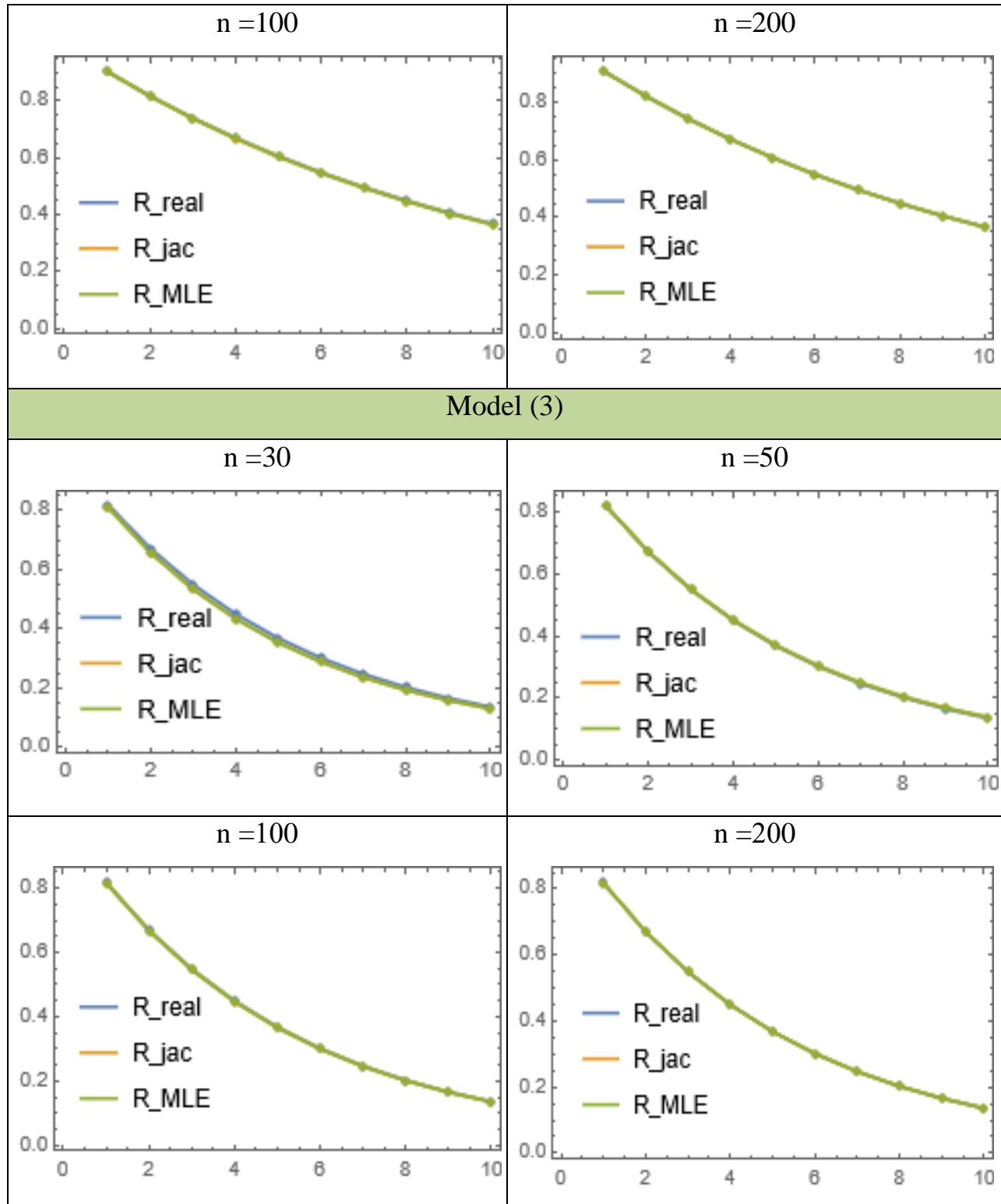
Model 1 ($\theta = 0.2$)									
ti	S_real	S_MLE				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.96117	0.96041	0.96250	0.96185	0.96158	0.000196	0.000085	0.000059	0.000025
0.2	0.92454	0.92334	0.92714	0.92587	0.92533	0.000670	0.000292	0.000205	0.000085
0.3	0.88994	0.88852	0.89372	0.89188	0.89107	0.001298	0.000565	0.000400	0.000167
0.4	0.85721	0.85571	0.86207	0.85971	0.85865	0.001996	0.000868	0.000618	0.000259
0.5	0.82621	0.82472	0.83204	0.82922	0.82792	0.002710	0.001175	0.000841	0.000354
0.6	0.79682	0.79537	0.80351	0.80026	0.79876	0.003404	0.001472	0.001057	0.000447
0.7	0.76891	0.76753	0.77636	0.77274	0.77106	0.004057	0.001749	0.001259	0.000536
0.8	0.74238	0.74107	0.75049	0.74654	0.74470	0.004655	0.001999	0.001443	0.000617
0.9	0.71714	0.71588	0.72580	0.72157	0.71960	0.005192	0.002221	0.001606	0.000691
1	0.69309	0.69186	0.70223	0.69774	0.69568	0.005664	0.002412	0.001746	0.000755
IMSE						0.002984	0.001284	0.000923	0.000394
ti	S_real	S_jac				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.96117	0.96042	0.96251	0.96185	0.96158	0.000203	0.000087	0.000060	0.000025
0.2	0.92454	0.92336	0.92715	0.92587	0.92533	0.000693	0.000299	0.000207	0.000086
0.3	0.88994	0.88856	0.89373	0.89188	0.89107	0.001340	0.000579	0.000403	0.000168
0.4	0.85721	0.85576	0.86209	0.85971	0.85865	0.002060	0.000890	0.000623	0.000260
0.5	0.82621	0.82479	0.83207	0.82922	0.82793	0.002795	0.001206	0.000848	0.000356
0.6	0.79682	0.79546	0.80355	0.80027	0.79877	0.003510	0.001510	0.001066	0.000450
0.7	0.76891	0.76764	0.77640	0.77275	0.77106	0.004182	0.001794	0.001270	0.000538
0.8	0.74238	0.74119	0.75054	0.74655	0.74470	0.004798	0.002051	0.001455	0.000620
0.9	0.71714	0.71601	0.72586	0.72158	0.71961	0.005350	0.002279	0.001619	0.000694
1	0.69309	0.69200	0.70228	0.69775	0.69568	0.005836	0.002475	0.001761	0.000759
IMSE						0.003077	0.001317	0.000931	0.000395
Best / sample size (n)						S_MLE	S_MLE	S_MLE	S_MLE
Best / model						S_MLE			

Model 2 ($\theta = 1$)									
ti	S_real	S_MLE				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.90484	0.89964	0.90488	0.90393	0.90457	0.000335	0.000105	0.000071	0.000043
0.2	0.81873	0.80965	0.81890	0.81716	0.81829	0.001070	0.000343	0.000231	0.000139
0.3	0.74082	0.72894	0.74120	0.73878	0.74028	0.001927	0.000630	0.000423	0.000254
0.4	0.67032	0.65653	0.67095	0.66798	0.66974	0.002745	0.000913	0.000613	0.000368
0.5	0.60653	0.59152	0.60743	0.60402	0.60595	0.003440	0.001163	0.000781	0.000469
0.6	0.54881	0.53315	0.55000	0.54622	0.54826	0.003978	0.001367	0.000917	0.000550
0.7	0.49659	0.48071	0.49806	0.49400	0.49610	0.004352	0.001519	0.001018	0.000610
0.8	0.44933	0.43358	0.45108	0.44681	0.44892	0.004573	0.001621	0.001085	0.000650
0.9	0.40657	0.39121	0.40859	0.40416	0.40624	0.004662	0.001676	0.001121	0.000671
1	0.36788	0.35311	0.37014	0.36561	0.36764	0.004641	0.001691	0.001130	0.000676
IMSE						0.003172	0.001103	0.000739	0.000443
ti	S_real	S_jac				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.90484	0.89953	0.90484	0.90392	0.90457	0.000348	0.000109	0.000072	0.000043
0.2	0.81873	0.80947	0.81884	0.81715	0.81829	0.001112	0.000355	0.000234	0.000139
0.3	0.74082	0.72872	0.74112	0.73877	0.74027	0.002001	0.000651	0.000429	0.000255
0.4	0.67032	0.65627	0.67086	0.66796	0.66973	0.002849	0.000943	0.000621	0.000370
0.5	0.60653	0.59126	0.60734	0.60399	0.60594	0.003567	0.001202	0.000791	0.000471
0.6	0.54881	0.53288	0.54991	0.54620	0.54826	0.004122	0.001412	0.000928	0.000553
0.7	0.49659	0.48045	0.49797	0.49398	0.49609	0.004506	0.001568	0.001031	0.000613
0.8	0.44933	0.43334	0.45100	0.44679	0.44891	0.004733	0.001673	0.001098	0.000653
0.9	0.40657	0.39100	0.40851	0.40414	0.40624	0.004822	0.001730	0.001134	0.000674
1	0.36788	0.35292	0.37007	0.36559	0.36764	0.004797	0.001745	0.001143	0.000679
IMSE						0.003286	0.001139	0.000748	0.000445
Best / sample size (n)						S_MLE	S_MLE	S_MLE	S_MLE
Best / model						S_MLE			

Model 3 ($\theta = 2$)									
ti	S_real	S_MLE				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.81873	0.80964	0.81890	0.81716	0.81828	0.001070	0.000343	0.000231	0.000139
0.2	0.67032	0.65651	0.67094	0.66798	0.66972	0.002744	0.000913	0.000613	0.000368
0.3	0.54881	0.53313	0.54999	0.54622	0.54824	0.003977	0.001367	0.000917	0.000550
0.4	0.44933	0.43356	0.45107	0.44680	0.44889	0.004572	0.001620	0.001085	0.000650
0.5	0.36788	0.35309	0.37012	0.36560	0.36762	0.004639	0.001691	0.001130	0.000675
0.6	0.30119	0.28795	0.30385	0.29926	0.30112	0.004356	0.001629	0.001086	0.000648
0.7	0.24660	0.23516	0.24957	0.24504	0.24670	0.003881	0.001485	0.000987	0.000587
0.8	0.20190	0.19230	0.20508	0.20071	0.20215	0.003333	0.001302	0.000863	0.000512
0.9	0.16530	0.15745	0.16860	0.16445	0.16568	0.002784	0.001107	0.000732	0.000432
1	0.13534	0.12909	0.13868	0.13479	0.13582	0.002278	0.000920	0.000606	0.000356
IMSE						0.003363	0.001238	0.000825	0.000492
ti	S_real	S_jac				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.81873	0.80946	0.81884	0.81714	0.81828	0.001112	0.000355	0.000234	0.000139
0.2	0.67032	0.65626	0.67085	0.66796	0.66971	0.002848	0.000943	0.000621	0.000370
0.3	0.54881	0.53286	0.54990	0.54619	0.54824	0.004120	0.001412	0.000928	0.000552
0.4	0.44933	0.43332	0.45098	0.44678	0.44889	0.004731	0.001673	0.001098	0.000653
0.5	0.36788	0.35289	0.37005	0.36559	0.36761	0.004795	0.001745	0.001143	0.000679
0.6	0.30119	0.28781	0.30380	0.29925	0.30112	0.004498	0.001680	0.001098	0.000651
0.7	0.24660	0.23506	0.24953	0.24503	0.24670	0.004006	0.001532	0.000999	0.000590
0.8	0.20190	0.19224	0.20505	0.20070	0.20215	0.003438	0.001343	0.000873	0.000514
0.9	0.16530	0.15744	0.16859	0.16445	0.16568	0.002871	0.001142	0.000740	0.000434
1	0.13534	0.12910	0.13868	0.13479	0.13582	0.002348	0.000949	0.000613	0.000358
IMSE						0.003477	0.001277	0.000835	0.000494
Best / sample size (n)						S_MLE	S_MLE	S_MLE	S_MLE
Best / model						S_MLE			

الشكل (1-3)
يوضح نتائج تجربة المحاكاة للتوزيع الاسي





من خلال النتائج المبينة في الجدول (2-3) نلاحظ مايلي:

- 1- إنّ الأفضلية لطريقة الإمكان الأعظم (S_MLE) مقارنة بطريقة Jackknife (S_Jac) في تقدير دالة البقاء للتوزيع الاسي لإمتلاكها أقل متوسط مربعات خطأ تكاملي (IMSE) حسب احجام العينات والنماذج المفترضة كافة.
 - 2- إنّ تقديرات دالة البقاء باستعمال طريقة الإمكان الأعظم وطريقة Jackknife قد اظهرتا متوسط أقرب الى القيم الحقيقية لدالة البقاء وذلك للنماذج واحجام العينات المفترضة كافة.
 - 3- إنّ قيم دالة البقاء الحقيقية والمقدرة تتناقص بزيادة الزمن (t_i) وهي على الدوام تقع قيمها ضمن الفترة (1,0).
 - 4- ان قيم المقياس الاحصائي (MSE) والمقياس (IMSE) تتناقص بازدياد حجم العينة.
- وكذلك الشكل (1-3) يوضح ماتوصل اليه في ما يخص اقتراب القيم التقديرية لدالة البقاء من القيم الحقيقية عند كل حجم من حجوم العينات المفترضة.

2-3-2-3 نتائج محاكاة توزيع مارشال اولكن الاسي

تم تلخيص نتائج محاكاة توزيع مارشال اولكن الاسي في الجدول (3-3) والشكل (2-3) ادناه.

جدول (3-3)
نتائج تجربة المحاكاة لتوزيع مارشال اولكن الاسي

Model 1 ($\theta = 0.2, \alpha = 0.5$)									
ti	S_real	S_MLE				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.96117	0.96041	0.96250	0.96185	0.96158	0.000196	0.000085	0.000059	0.000025
0.2	0.92454	0.92334	0.92714	0.92587	0.92533	0.000670	0.000292	0.000205	0.000085
0.3	0.88994	0.88852	0.89372	0.89188	0.89107	0.001298	0.000565	0.000400	0.000167
0.4	0.85721	0.85571	0.86207	0.85971	0.85865	0.001996	0.000868	0.000618	0.000259
0.5	0.82621	0.82472	0.83204	0.82922	0.82792	0.002710	0.001175	0.000841	0.000354
0.6	0.79682	0.79537	0.80351	0.80026	0.79876	0.003404	0.001472	0.001057	0.000447
0.7	0.76891	0.76753	0.77636	0.77274	0.77106	0.004057	0.001749	0.001259	0.000536
0.8	0.74238	0.74107	0.75049	0.74654	0.74470	0.004655	0.001999	0.001443	0.000617
0.9	0.71714	0.71588	0.72580	0.72157	0.71960	0.005192	0.002221	0.001606	0.000691
1	0.69309	0.69186	0.70223	0.69774	0.69568	0.005664	0.002412	0.001746	0.000755
IMSE						0.002984	0.001284	0.000923	0.000394
ti	S_real	S_jac				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.96117	0.96042	0.96251	0.96185	0.96158	0.000203	0.000087	0.000060	0.000025
0.2	0.92454	0.92336	0.92715	0.92587	0.92533	0.000693	0.000299	0.000207	0.000086
0.3	0.88994	0.88856	0.89373	0.89188	0.89107	0.001340	0.000579	0.000403	0.000168
0.4	0.85721	0.85576	0.86209	0.85971	0.85865	0.002060	0.000890	0.000623	0.000260
0.5	0.82621	0.82479	0.83207	0.82922	0.82793	0.002795	0.001206	0.000848	0.000356
0.6	0.79682	0.79546	0.80355	0.80027	0.79877	0.003510	0.001510	0.001066	0.000450
0.7	0.76891	0.76764	0.77640	0.77275	0.77106	0.004182	0.001794	0.001270	0.000538
0.8	0.74238	0.74119	0.75054	0.74655	0.74470	0.004798	0.002051	0.001455	0.000620
0.9	0.71714	0.71601	0.72586	0.72158	0.71961	0.005350	0.002279	0.001619	0.000694
1	0.69309	0.69200	0.70228	0.69775	0.69568	0.005836	0.002475	0.001761	0.000759
IMSE						0.003077	0.001317	0.000931	0.000395
Best / sample size (n)						S_MLE	S_MLE	S_MLE	S_MLE
Best / model						S_MLE			

Model 2 ($\theta = 0.2, \alpha = 2$)									
ti	S_real	S_MLE				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.99000	0.98976	0.99029	0.99015	0.99010	0.000017	0.000008	0.000005	0.000002
0.2	0.98000	0.97954	0.98059	0.98031	0.98020	0.000068	0.000032	0.000020	0.000008
0.3	0.97001	0.96936	0.97091	0.97048	0.97031	0.000147	0.000070	0.000045	0.000018
0.4	0.96002	0.95921	0.96123	0.96065	0.96042	0.000253	0.000121	0.000077	0.000032
0.5	0.95004	0.94910	0.95157	0.95083	0.95055	0.000383	0.000182	0.000116	0.000048
0.6	0.94007	0.93901	0.94193	0.94103	0.94068	0.000534	0.000253	0.000163	0.000067
0.7	0.93011	0.92896	0.93230	0.93124	0.93082	0.000703	0.000332	0.000215	0.000089
0.8	0.92017	0.91893	0.92268	0.92146	0.92097	0.000888	0.000419	0.000272	0.000113
0.9	0.91024	0.90894	0.91308	0.91170	0.91114	0.001087	0.000512	0.000333	0.000139
1	0.90033	0.89899	0.90350	0.90195	0.90133	0.001298	0.000610	0.000399	0.000166
IMSE						0.000538	0.000254	0.000165	0.000068
ti	S_real	S_jac				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.99000	0.98976	0.99029	0.99015	0.99010	0.000018	0.000009	0.000005	0.000002
0.2	0.98000	0.97954	0.98059	0.98031	0.98020	0.000070	0.000033	0.000021	0.000008
0.3	0.97001	0.96937	0.97091	0.97048	0.97031	0.000152	0.000072	0.000045	0.000018
0.4	0.96002	0.95922	0.96123	0.96065	0.96042	0.000262	0.000123	0.000077	0.000032
0.5	0.95004	0.94911	0.95157	0.95083	0.95055	0.000395	0.000186	0.000117	0.000048
0.6	0.94007	0.93902	0.94193	0.94103	0.94068	0.000551	0.000259	0.000164	0.000068
0.7	0.93011	0.92897	0.93230	0.93124	0.93082	0.000725	0.000340	0.000217	0.000089
0.8	0.92017	0.91896	0.92269	0.92146	0.92097	0.000916	0.000429	0.000274	0.000113
0.9	0.91024	0.90897	0.91309	0.91170	0.91114	0.001122	0.000524	0.000336	0.000139
1	0.90033	0.89902	0.90351	0.90195	0.90133	0.001339	0.000624	0.000402	0.000167
IMSE						0.000555	0.000260	0.000166	0.000069
Best / sample size (n)						S_MLE	S_MLE	S_MLE	S_MLE
Best / model						S_MLE			

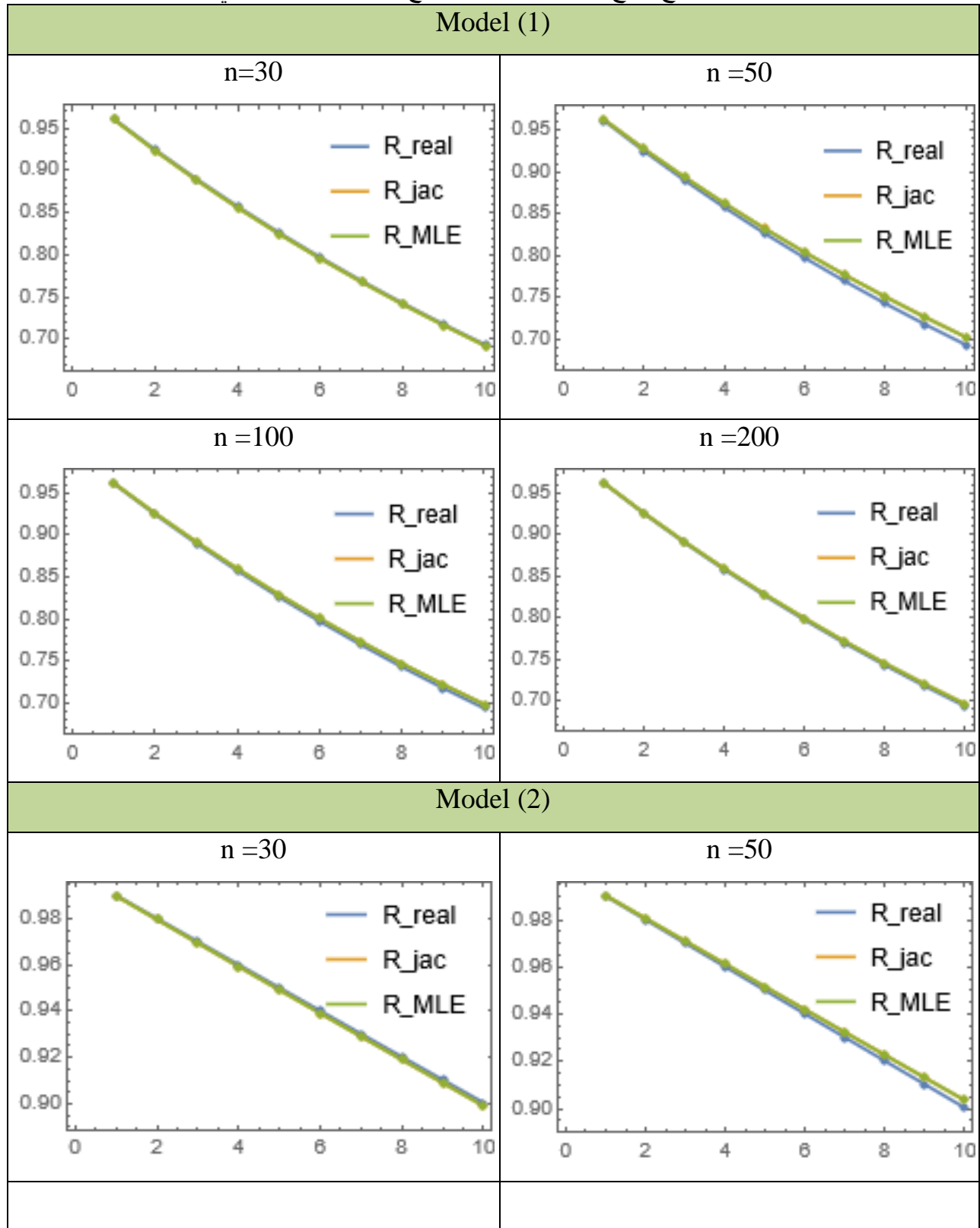
Model 3 ($\theta = 1, \alpha = 0.5$)									
ti	S_real	S_MLE				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.82621	0.82472	0.83205	0.82923	0.82794	0.002710	0.001176	0.000841	0.000354
0.2	0.69309	0.69187	0.70224	0.69776	0.69569	0.005665	0.002413	0.001746	0.000755
0.3	0.58833	0.58664	0.59864	0.59339	0.59117	0.007124	0.002955	0.002142	0.000956
0.4	0.50412	0.50104	0.51413	0.50871	0.50678	0.007450	0.002994	0.002159	0.001000
0.5	0.43527	0.43021	0.44414	0.43890	0.43753	0.007150	0.002775	0.001985	0.000957
0.6	0.37818	0.37094	0.38550	0.38062	0.37994	0.006575	0.002463	0.001745	0.000878
0.7	0.33031	0.32097	0.33594	0.33150	0.33154	0.005925	0.002147	0.001506	0.000788
0.8	0.28976	0.27862	0.29374	0.28978	0.29049	0.005294	0.001866	0.001297	0.000702
0.9	0.25515	0.24258	0.25762	0.25411	0.25542	0.004720	0.001633	0.001124	0.000624
1	0.22540	0.21179	0.22656	0.22346	0.22527	0.004209	0.001444	0.000987	0.000558
IMSE						0.005682	0.002187	0.001553	0.000757
ti	S_real	S_jac				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.82621	0.82480	0.83208	0.82924	0.82794	0.002795	0.001206	0.000848	0.000356
0.2	0.69309	0.69201	0.70230	0.69778	0.69570	0.005836	0.002476	0.001762	0.000759
0.3	0.58833	0.58679	0.59870	0.59341	0.59117	0.007340	0.003035	0.002161	0.000961
0.4	0.50412	0.50114	0.51419	0.50873	0.50678	0.007680	0.003078	0.002179	0.001005
0.5	0.43527	0.43025	0.44418	0.43890	0.43753	0.007378	0.002856	0.002004	0.000962
0.6	0.37818	0.37091	0.38551	0.38062	0.37994	0.006793	0.002538	0.001763	0.000882
0.7	0.33031	0.32088	0.33591	0.33150	0.33154	0.006128	0.002215	0.001522	0.000792
0.8	0.28976	0.27848	0.29370	0.28977	0.29049	0.005480	0.001929	0.001311	0.000705
0.9	0.25515	0.24240	0.25756	0.25410	0.25542	0.004888	0.001689	0.001137	0.000628
1	0.22540	0.21159	0.22647	0.22344	0.22527	0.004359	0.001495	0.000998	0.000560
IMSE						0.005868	0.002252	0.001569	0.000761
Best / sample size (n)						S_MLE	S_MLE	S_MLE	S_MLE
Best / model						S_MLE			

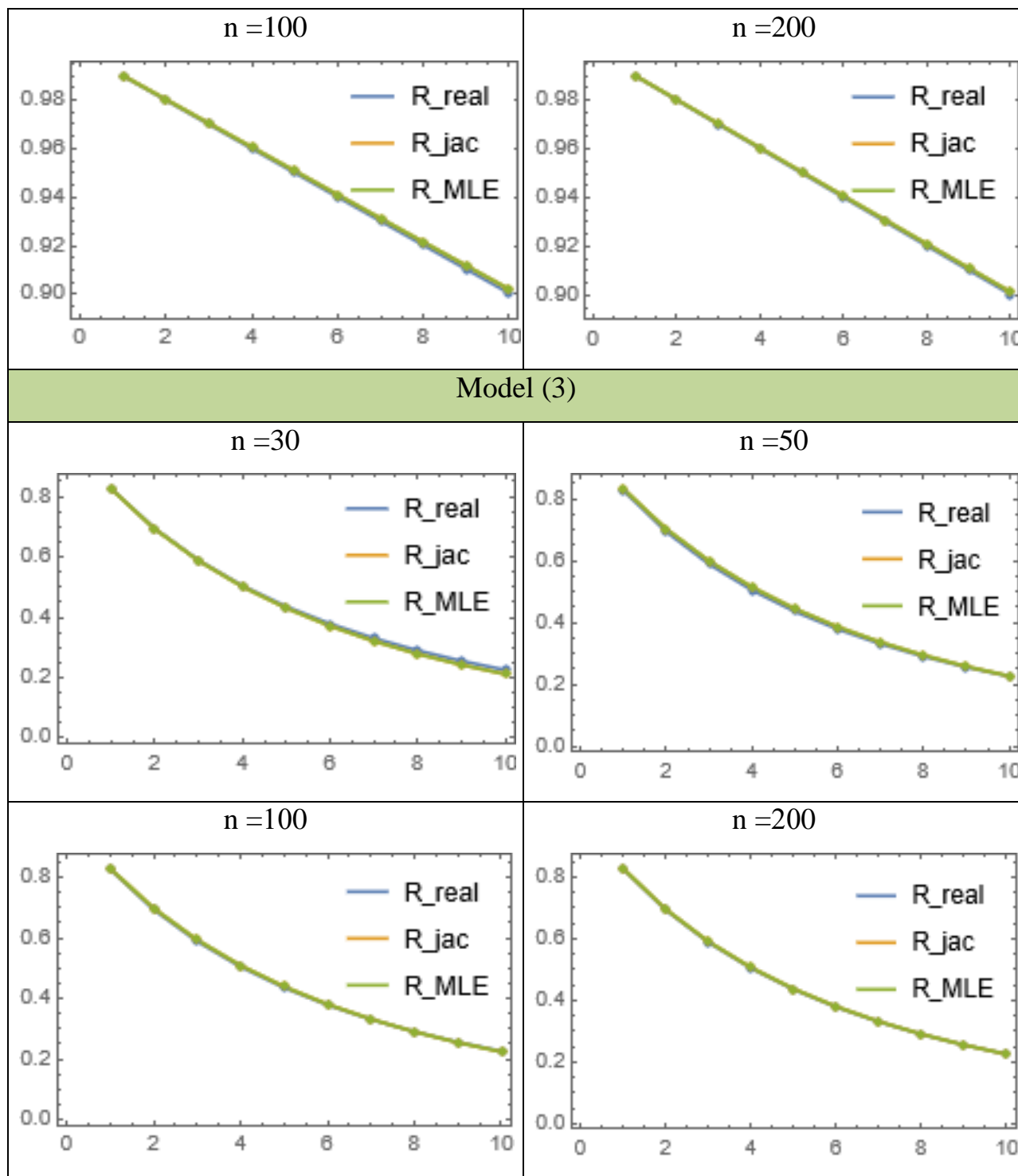
Model 4 ($\theta = 1, \alpha = 2$)									
ti	S_real	S_MLE				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.95004	0.94910	0.95158	0.95084	0.95055	0.000383	0.000182	0.000116	0.000048
0.2	0.90033	0.89900	0.90352	0.90197	0.90133	0.001298	0.000610	0.000399	0.000166
0.3	0.85112	0.84971	0.85593	0.85356	0.85257	0.002470	0.001144	0.000762	0.000320
0.4	0.80263	0.80127	0.80892	0.80579	0.80447	0.003699	0.001688	0.001141	0.000484
0.5	0.75508	0.75377	0.76265	0.75883	0.75724	0.004847	0.002176	0.001489	0.000639
0.6	0.70869	0.70731	0.71726	0.71286	0.71108	0.005826	0.002570	0.001777	0.000772
0.7	0.66362	0.66199	0.67290	0.66804	0.66616	0.006588	0.002852	0.001988	0.000877
0.8	0.62005	0.61793	0.62973	0.62453	0.62264	0.007120	0.003021	0.002118	0.000951
0.9	0.57810	0.57528	0.58788	0.58247	0.58067	0.007429	0.003086	0.002174	0.000995
1	0.53788	0.53417	0.54749	0.54199	0.54036	0.007542	0.003063	0.002165	0.001013
IMSE						0.004720	0.002039	0.001413	0.000626
ti	S_real	S_jac				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.95004	0.94911	0.95158	0.95084	0.95055	0.000395	0.000186	0.000117	0.000048
0.2	0.90033	0.89903	0.90353	0.90197	0.90133	0.001339	0.000624	0.000402	0.000167
0.3	0.85112	0.84976	0.85594	0.85356	0.85257	0.002545	0.001171	0.000768	0.000322
0.4	0.80263	0.80135	0.80895	0.80579	0.80447	0.003809	0.001728	0.001151	0.000486
0.5	0.75508	0.75388	0.76269	0.75883	0.75724	0.004989	0.002228	0.001502	0.000642
0.6	0.70869	0.70742	0.71730	0.71287	0.71108	0.005996	0.002633	0.001792	0.000776
0.7	0.66362	0.66210	0.67295	0.66805	0.66616	0.006782	0.002923	0.002005	0.000881
0.8	0.62005	0.61805	0.62977	0.62454	0.62264	0.007331	0.003098	0.002137	0.000955
0.9	0.57810	0.57538	0.58792	0.58248	0.58067	0.007652	0.003167	0.002193	0.001000
1	0.53788	0.53424	0.54753	0.54200	0.54036	0.007772	0.003146	0.002185	0.001018
IMSE						0.004861	0.002090	0.001425	0.000629
Best / sample size (n)						S_MLE	S_MLE	S_MLE	S_MLE
Best / model						S_MLE			

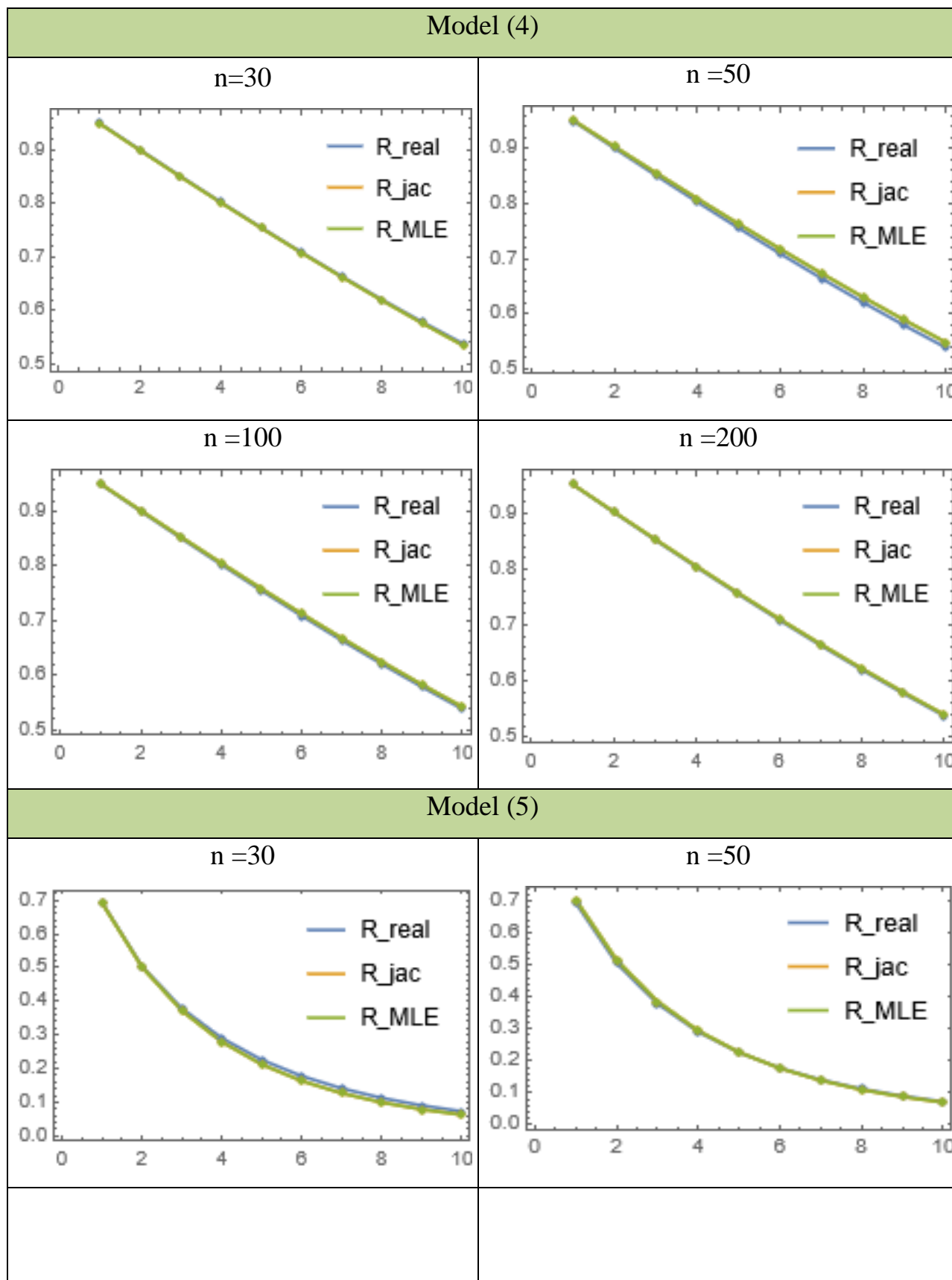
Model 5 ($\theta=2, \alpha= 0.5$)									
ti	S_real	S_MLE				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.69309	0.69189	0.70227	0.69778	0.69571	0.005664	0.002413	0.001747	0.000755
0.2	0.50412	0.50105	0.51415	0.50872	0.50680	0.007450	0.002995	0.002159	0.001000
0.3	0.37818	0.37095	0.38550	0.38062	0.37995	0.006575	0.002463	0.001745	0.000878
0.4	0.28976	0.27862	0.29373	0.28977	0.29049	0.005294	0.001867	0.001297	0.000702
0.5	0.22540	0.21179	0.22653	0.22345	0.22527	0.004209	0.001443	0.000987	0.000558
0.6	0.17730	0.16277	0.17643	0.17403	0.17656	0.003349	0.001166	0.000789	0.000451
0.7	0.14064	0.12639	0.13859	0.13666	0.13954	0.002655	0.000972	0.000653	0.000370
0.8	0.11228	0.09909	0.10967	0.10805	0.11101	0.002091	0.000819	0.000547	0.000307
0.9	0.09010	0.07839	0.08738	0.08594	0.08880	0.001635	0.000688	0.000458	0.000254
1	0.07258	0.06253	0.07005	0.06872	0.07135	0.001273	0.000574	0.000378	0.000209
IMSE						0.004020	0.001540	0.001076	0.000548
ti	S_real	S_jac				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.69309	0.69202	0.70233	0.69779	0.69571	0.005836	0.002476	0.001762	0.000759
0.2	0.50412	0.50116	0.51420	0.50873	0.50680	0.007680	0.003079	0.002180	0.001005
0.3	0.37818	0.37092	0.38551	0.38062	0.37995	0.006793	0.002538	0.001763	0.000882
0.4	0.28976	0.27848	0.29368	0.28976	0.29049	0.005480	0.001929	0.001311	0.000705
0.5	0.22540	0.21159	0.22645	0.22343	0.22526	0.004358	0.001495	0.000998	0.000560
0.6	0.17730	0.16254	0.17634	0.17401	0.17655	0.003465	0.001209	0.000798	0.000453
0.7	0.14064	0.12617	0.13849	0.13663	0.13953	0.002743	0.001007	0.000661	0.000372
0.8	0.11228	0.09890	0.10958	0.10803	0.11101	0.002156	0.000847	0.000554	0.000308
0.9	0.09010	0.07822	0.08730	0.08592	0.08879	0.001683	0.000710	0.000463	0.000255
1	0.07258	0.06240	0.06998	0.06870	0.07134	0.001308	0.000591	0.000382	0.000210
IMSE						0.004150	0.001588	0.001087	0.000551
Best / sample size (n)						S_MLE	S_MLE	S_MLE	S_MLE
Best / model						S_MLE			

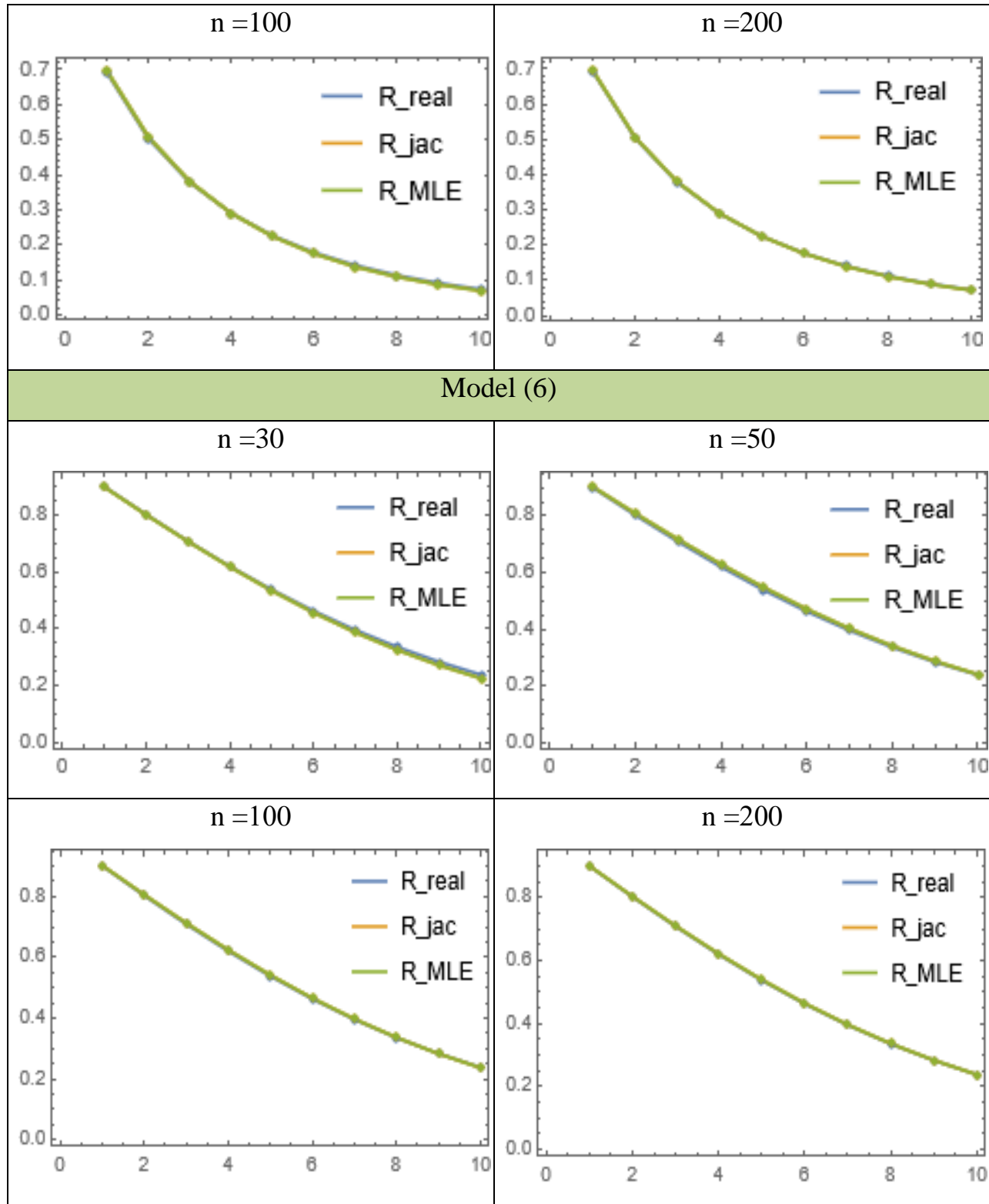
Model 6 ($\theta=2, \alpha=2$)									
ti	S_real	S_MLE				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.90033	0.89901	0.90351	0.90198	0.90135	0.001298	0.000610	0.000399	0.000166
0.2	0.80263	0.80129	0.80891	0.80579	0.80449	0.003699	0.001688	0.001141	0.000484
0.3	0.70869	0.70732	0.71725	0.71287	0.71110	0.005826	0.002570	0.001777	0.000772
0.4	0.62005	0.61795	0.62972	0.62454	0.62266	0.007121	0.003020	0.002119	0.000951
0.5	0.53788	0.53417	0.54749	0.54200	0.54037	0.007543	0.003063	0.002165	0.001013
0.6	0.46295	0.45702	0.47157	0.46618	0.46508	0.007318	0.002836	0.002011	0.000987
0.7	0.39563	0.38733	0.40268	0.39768	0.39726	0.006723	0.002493	0.001764	0.000910
0.8	0.33596	0.32557	0.34123	0.33676	0.33706	0.005971	0.002143	0.001508	0.000813
0.9	0.28370	0.27181	0.28726	0.28336	0.28431	0.005193	0.001837	0.001280	0.000712
1	0.23841	0.22575	0.24052	0.23715	0.23860	0.004451	0.001585	0.001092	0.000618
IMSE						0.005514	0.002184	0.001526	0.000743
ti	S_real	S_jac				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.90033	0.89904	0.90352	0.90198	0.90135	0.001339	0.000624	0.000402	0.000167
0.2	0.80263	0.80137	0.80894	0.80580	0.80449	0.003809	0.001728	0.001151	0.000487
0.3	0.70869	0.70744	0.71729	0.71287	0.71110	0.005997	0.002633	0.001792	0.000776
0.4	0.62005	0.61806	0.62977	0.62455	0.62266	0.007331	0.003098	0.002137	0.000956
0.5	0.53788	0.53425	0.54753	0.54201	0.54037	0.007773	0.003145	0.002185	0.001018
0.6	0.46295	0.45704	0.47158	0.46618	0.46508	0.007551	0.002918	0.002030	0.000992
0.7	0.39563	0.38727	0.40268	0.39767	0.39726	0.006946	0.002570	0.001783	0.000915
0.8	0.33596	0.32546	0.34120	0.33675	0.33706	0.006176	0.002213	0.001524	0.000817
0.9	0.28370	0.27166	0.28722	0.28335	0.28430	0.005374	0.001899	0.001295	0.000716
1	0.23841	0.22559	0.24046	0.23713	0.23860	0.004607	0.001641	0.001105	0.000621
IMSE						0.005690	0.002247	0.001540	0.000746
Best / sample size (n)						S_MLE	S_MLE	S_MLE	S_MLE
Best / model						S_MLE			

الشكل (2-3)
يوضح نتائج تجربة المحاكاة لتوزيع مارشال اولكن الاسي









من خلال النتائج المبينة في الجدول (3-3) نلاحظ مايلي:

- 1- إنّ الافضلية لطريقة الإمكان الأعظم (S_MLE) مقارنة بطريقة Jackknife (S_Jac) في تقدير دالة بقاء توزيع مارشال اولكن الاسي لإمتلاكها أقل متوسط مربعات خطأ تكاملي (IMSE) حسب احجام العينات والنماذج المفترضة كافة.
 - 2- إنّ تقديرات دالة البقاء باستعمال طريقة الإمكان الأعظم وطريقة Jackknife قد اظهرتا متوسط اقرب الى القيم الحقيقية لدالة البقاء وذلك للنماذج واحجام العينات المفترضة كافة.
 - 3- إنّ قيم دالة البقاء الحقيقية والمقدرة تتناقص بزيادة الزمن (t_i) وهي على الدوام تقع قيمها ضمن الفترة (1،0).
 - 4- إنّ قيم المقياس الاحصائي (MSE) والمقياس (IMSE) تتناقص بازدياد حجم العينة.
- وكذلك الشكل (2-3) يوضح ماتوصل اليه في ما يخص اقتراب القيم التقديرية لدالة البقاء من القيم الحقيقية عند كل حجم من حجوم العينات المفترضة.

3-3-2-3 نتائج محاكاة توزيع ليندلي

تم تلخيص نتائج محاكاة توزيع ليندلي في الجدول (4-3) والشكل (3-3) ادناه.

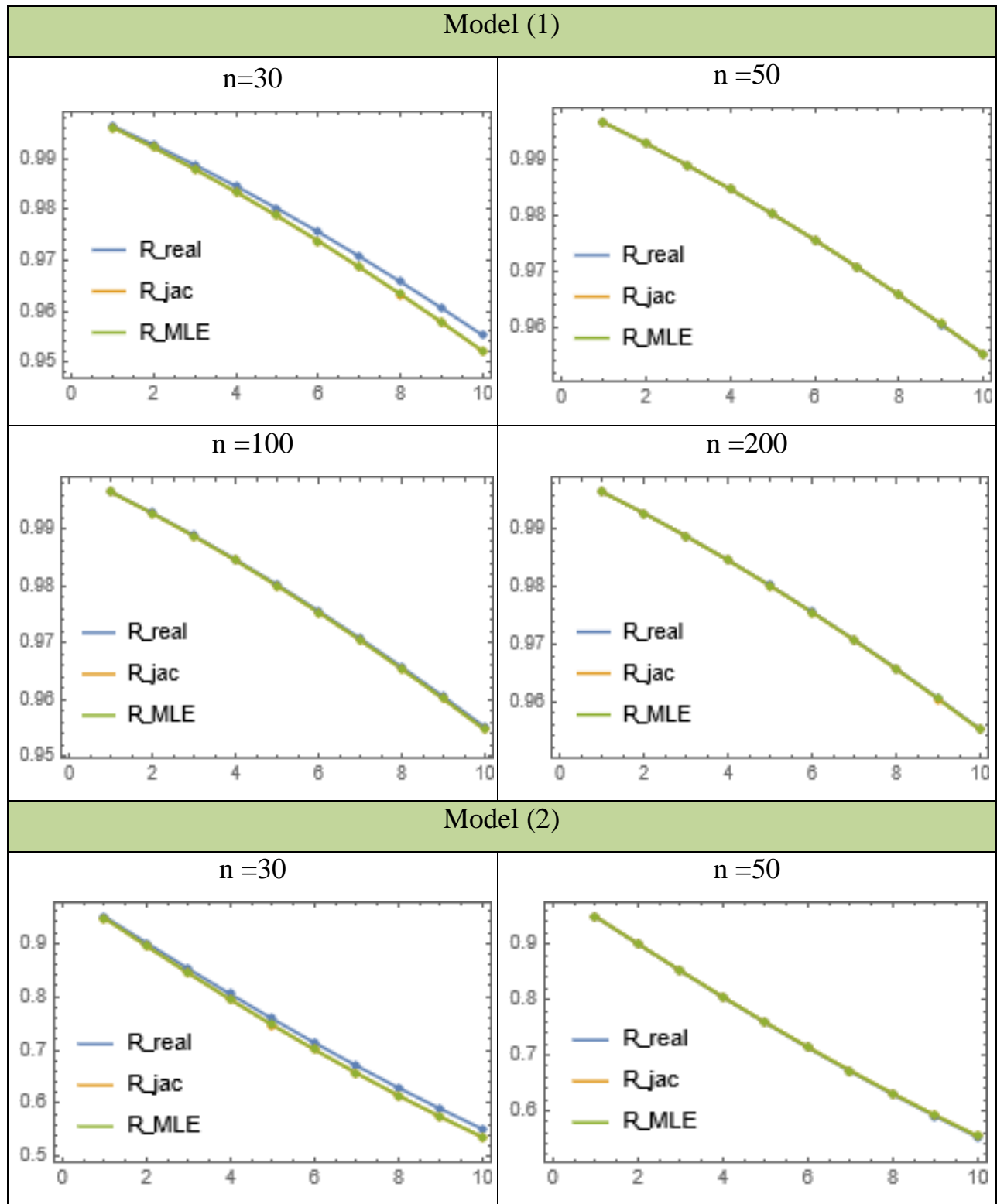
جدول (4-3)
نتائج تجربة المحاكاة لتوزيع ليندلي

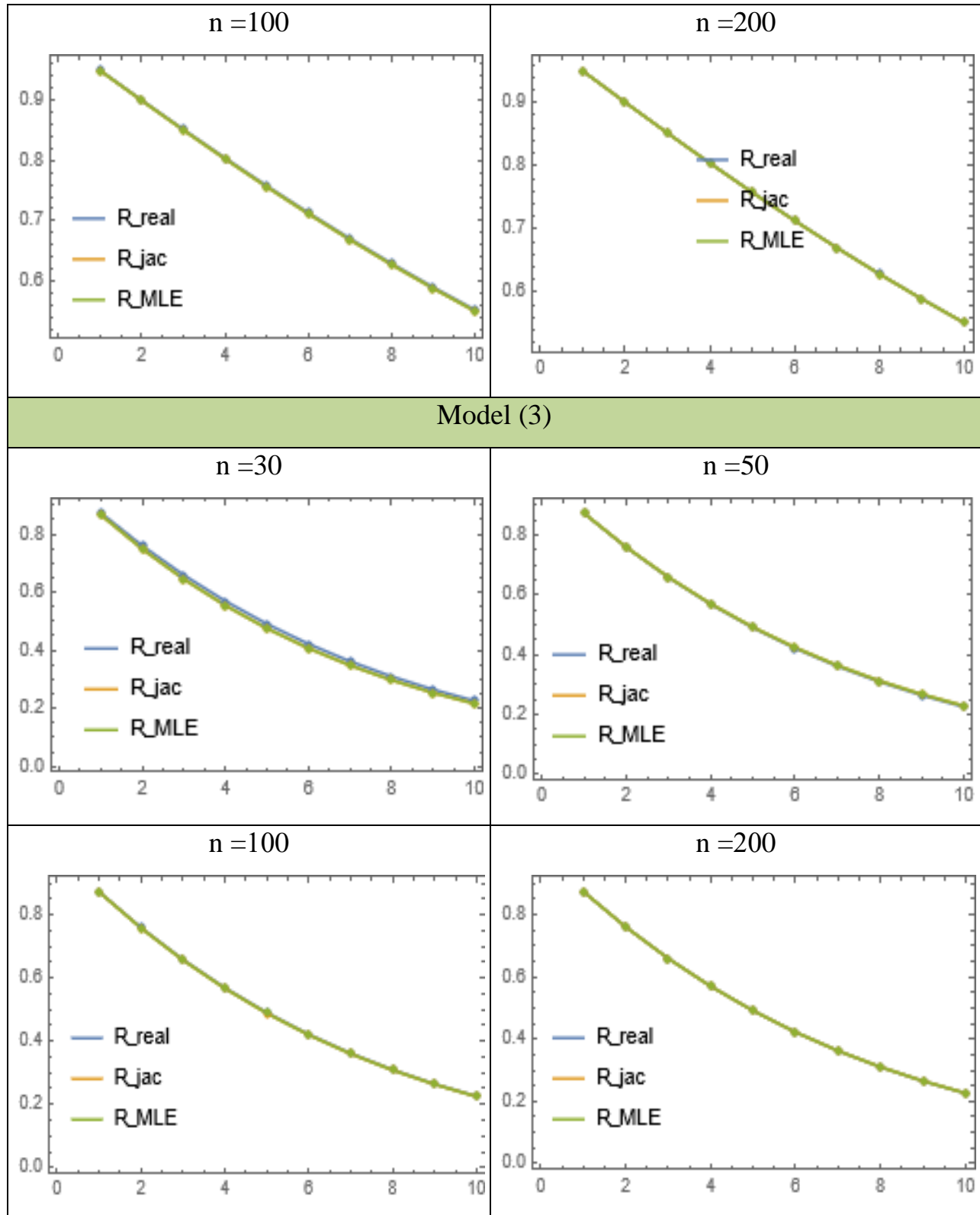
Model 1 ($\theta = 0.2$)									
ti	S_real	S_MLE				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.99654	0.99627	0.99654	0.99649	0.99652	8.704E-07	2.639E-07	1.811E-07	1.078E-07
0.2	0.99282	0.99227	0.99283	0.99273	0.99279	3.690E-06	1.121E-06	7.692E-07	4.581E-07
0.3	0.98885	0.98802	0.98887	0.98872	0.98882	8.755E-06	2.666E-06	1.829E-06	1.090E-06
0.4	0.98466	0.98352	0.98468	0.98448	0.98461	1.634E-05	4.988E-06	3.421E-06	2.038E-06
0.5	0.98024	0.97879	0.98027	0.98001	0.98018	2.670E-05	8.169E-06	5.603E-06	3.338E-06
0.6	0.97561	0.97384	0.97565	0.97534	0.97554	4.006E-05	1.228E-05	8.424E-06	5.020E-06
0.7	0.97078	0.96868	0.97083	0.97046	0.97070	5.661E-05	1.740E-05	1.193E-05	7.111E-06
0.8	0.96576	0.96333	0.96582	0.96539	0.96566	7.654E-05	2.357E-05	1.617E-05	9.636E-06
0.9	0.96056	0.95779	0.96064	0.96013	0.96045	9.998E-05	3.086E-05	2.117E-05	1.262E-05
1	0.95519	0.95207	0.95527	0.95470	0.95506	1.270E-04	3.931E-05	2.696E-05	1.607E-05
IMSE						0.00004566	0.0000141	0.0000096	0.0000057
ti	S_real	S_jac				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.99654	0.99627	0.99654	0.99649	0.99652	9.065E-07	2.730E-07	1.833E-07	1.084E-07
0.2	0.99282	0.99226	0.99282	0.99273	0.99279	3.842E-06	1.160E-06	7.786E-07	4.604E-07
0.3	0.98885	0.98800	0.98886	0.98872	0.98882	9.116E-06	2.758E-06	1.851E-06	1.095E-06
0.4	0.98466	0.98350	0.98467	0.98448	0.98461	1.701E-05	5.158E-06	3.463E-06	2.048E-06
0.5	0.98024	0.97876	0.98026	0.98001	0.98018	2.780E-05	8.447E-06	5.671E-06	3.354E-06
0.6	0.97561	0.97380	0.97564	0.97533	0.97554	4.170E-05	1.270E-05	8.527E-06	5.044E-06
0.7	0.97078	0.96864	0.97082	0.97045	0.97069	5.892E-05	1.799E-05	1.208E-05	7.146E-06
0.8	0.96576	0.96328	0.96581	0.96538	0.96566	7.965E-05	2.437E-05	1.636E-05	9.683E-06
0.9	0.96056	0.95773	0.96062	0.96013	0.96045	1.040E-04	3.191E-05	2.142E-05	1.268E-05
1	0.95519	0.95201	0.95525	0.95470	0.95506	1.322E-04	4.064E-05	2.728E-05	1.615E-05
IMSE						0.00004751	0.0000145	0.0000098	0.0000058
Best / sample size (n)						S_MLE	S_MLE	S_MLE	S_MLE
Best / model						S_MLE			

Model 2 ($\theta = 1$)									
ti	S_real	S_MLE				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.95008	0.94703	0.95018	0.94960	0.94996	1.228E-04	3.844E-05	2.636E-05	1.563E-05
0.2	0.90060	0.89489	0.90085	0.89971	0.90039	4.469E-04	1.417E-04	9.711E-05	5.761E-05
0.3	0.85194	0.84394	0.85236	0.85071	0.85166	9.091E-04	2.917E-04	1.999E-04	1.186E-04
0.4	0.80438	0.79446	0.80500	0.80287	0.80406	1.453E-03	4.716E-04	3.231E-04	1.917E-04
0.5	0.75816	0.74666	0.75900	0.75643	0.75782	2.030E-03	6.667E-04	4.566E-04	2.709E-04
0.6	0.71346	0.70071	0.71452	0.71156	0.71311	2.602E-03	8.643E-04	5.917E-04	3.511E-04
0.7	0.67039	0.65669	0.67170	0.66839	0.67006	3.139E-03	1.055E-03	7.216E-04	4.281E-04
0.8	0.62906	0.61468	0.63062	0.62699	0.62876	3.621E-03	1.230E-03	8.412E-04	4.990E-04
0.9	0.58953	0.57470	0.59134	0.58743	0.58927	4.035E-03	1.385E-03	9.467E-04	5.614E-04
1	0.55182	0.53676	0.55387	0.54973	0.55161	4.372E-03	1.516E-03	1.036E-03	6.141E-04
IMSE						0.0022730	0.0007660	0.0005240	0.0003108
ti	S_real	S_jac				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.95008	0.94697	0.95016	0.94959	0.94996	1.277E-04	3.975E-05	2.668E-05	1.571E-05
0.2	0.90060	0.89478	0.90081	0.89970	0.90039	4.646E-04	1.464E-04	9.829E-05	5.789E-05
0.3	0.85194	0.84378	0.85230	0.85069	0.85165	9.445E-04	3.014E-04	2.023E-04	1.192E-04
0.4	0.80438	0.79427	0.80494	0.80286	0.80405	1.508E-03	4.873E-04	3.270E-04	1.927E-04
0.5	0.75816	0.74646	0.75893	0.75641	0.75781	2.106E-03	6.888E-04	4.620E-04	2.722E-04
0.6	0.71346	0.70048	0.71445	0.71154	0.71310	2.698E-03	8.928E-04	5.987E-04	3.528E-04
0.7	0.67039	0.65646	0.67162	0.66837	0.67005	3.254E-03	1.089E-03	7.302E-04	4.302E-04
0.8	0.62906	0.61444	0.63054	0.62697	0.62875	3.752E-03	1.270E-03	8.511E-04	5.014E-04
0.9	0.58953	0.57447	0.59125	0.58741	0.58926	4.178E-03	1.430E-03	9.578E-04	5.642E-04
1	0.55182	0.53654	0.55379	0.54971	0.55161	4.525E-03	1.566E-03	1.048E-03	6.171E-04
IMSE						0.0023558	0.0007912	0.0005302	0.0003123
Best / sample size (n)						S_MLE	S_MLE	S_MLE	S_MLE
Best / model						S_MLE			

Model 3 ($\theta = 2$)									
ti	S_real	S_MLE				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.87331	0.86648	0.87357	0.87222	0.87302	6.306E-04	2.011E-04	1.371E-04	8.149E-05
0.2	0.75970	0.74839	0.76036	0.75792	0.75927	1.872E-03	6.130E-04	4.175E-04	2.483E-04
0.3	0.65857	0.64464	0.65972	0.65644	0.65814	3.107E-03	1.043E-03	7.099E-04	4.220E-04
0.4	0.56915	0.55398	0.57080	0.56690	0.56877	4.052E-03	1.394E-03	9.473E-04	5.628E-04
0.5	0.49051	0.47513	0.49264	0.48831	0.49024	4.626E-03	1.627E-03	1.105E-03	6.555E-04
0.6	0.42167	0.40680	0.42425	0.41965	0.42154	4.849E-03	1.742E-03	1.181E-03	6.998E-04
0.7	0.36168	0.34779	0.36463	0.35989	0.36169	4.790E-03	1.755E-03	1.188E-03	7.027E-04
0.8	0.30958	0.29696	0.31284	0.30807	0.30974	4.530E-03	1.690E-03	1.142E-03	6.741E-04
0.9	0.26448	0.25329	0.26797	0.26326	0.26478	4.143E-03	1.572E-03	1.060E-03	6.242E-04
1	0.22556	0.21583	0.22921	0.22463	0.22597	3.690E-03	1.421E-03	9.563E-04	5.618E-04
IMSE						0.0036289	0.0013058	0.0008842	0.0005233
ti	S_real	S_jac				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.87331	0.86634	0.87352	0.87221	0.87302	6.555E-04	2.079E-04	1.387E-04	8.189E-05
0.2	0.75970	0.74818	0.76029	0.75790	0.75927	1.944E-03	6.335E-04	4.226E-04	2.495E-04
0.3	0.65857	0.64439	0.65963	0.65642	0.65813	3.221E-03	1.078E-03	7.184E-04	4.241E-04
0.4	0.56915	0.55374	0.57071	0.56688	0.56877	4.197E-03	1.439E-03	9.586E-04	5.655E-04
0.5	0.49051	0.47490	0.49256	0.48829	0.49023	4.786E-03	1.680E-03	1.118E-03	6.587E-04
0.6	0.42167	0.40661	0.42418	0.41963	0.42154	5.013E-03	1.798E-03	1.195E-03	7.032E-04
0.7	0.36168	0.34763	0.36457	0.35988	0.36169	4.948E-03	1.811E-03	1.201E-03	7.062E-04
0.8	0.30958	0.29684	0.31279	0.30806	0.30974	4.677E-03	1.744E-03	1.155E-03	6.774E-04
0.9	0.26448	0.25320	0.26794	0.26325	0.26477	4.275E-03	1.621E-03	1.072E-03	6.273E-04
1	0.22556	0.21578	0.22919	0.22462	0.22597	3.806E-03	1.466E-03	9.672E-04	5.646E-04
IMSE						0.0037524	0.0013478	0.0008946	0.0005258
Best / sample size (n)						S_MLE	S_MLE	S_MLE	S_MLE
Best / model						S_MLE			

الشكل (3-3)
يوضح نتائج تجربة المحاكاة لتوزيع ليندلي





من خلال النتائج المبينة في الجدول (3-4) نلاحظ مايلي:

- 1- إنّ الافضلية لطريقة الإمكان الأعظم (S_MLE) مقارنة بطريقة Jackknife (S_Jac) في تقدير دالة البقاء لتوزيع ليندلي لإمتلاكها أقل متوسط مربعات خطأ تكاملي (IMSE) حسب احجام العينات والنماذج المفترضة كافة.
 - 2- إنّ تقديرات دالة البقاء باستعمال طريقة الإمكان الأعظم وطريقة Jackknife قد اظهرتا متوسط أقرب الى القيم الحقيقية لدالة البقاء وذلك للنماذج واحجام العينات المفترضة كافة.
 - 3- إن قيم دالة البقاء الحقيقية والمقدرة تتناقص بزيادة الزمن (t_i) وهي على الدوام تقع قيمها ضمن الفترة (1,0).
 - 4- إن قيم المقياس الاحصائي (MSE) والمقياس (IMSE) تتناقص بازدياد حجم العينة.
- وكذلك الشكل (3-3) يوضح ماتوصل اليه في ما يخص اقتراب القيم التقديرية لدالة البقاء من القيم الحقيقية عند كل حجم من حجوم العينات المفترضة.

3-2-3 نتائج محاكاة توزيع مارشال اولكن ليندلي

تم تلخيص نتائج محاكاة توزيع مارشال اولكن ليندلي في الجدول (3-5) والشكل (3-4) ادناه.

جدول (3-5)
نتائج تجربة المحاكاة لتوزيع مارشال اولكن ليندلي

Model 1 ($\theta = 0.2, \alpha = 0.5$)									
ti	S_real	S_MLE				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.99310	0.99105	0.99393	0.99352	0.99331	1.493E-05	3.041E-06	4.003E-07	1.193E-06
0.2	0.98573	0.98155	0.98745	0.98661	0.98618	6.218E-05	1.286E-05	1.684E-06	5.043E-06
0.3	0.97795	0.97158	0.98060	0.97930	0.97864	1.447E-04	3.042E-05	3.961E-06	1.192E-05
0.4	0.96978	0.96117	0.97340	0.97162	0.97073	2.645E-04	5.651E-05	7.324E-06	2.213E-05
0.5	0.96125	0.95038	0.96588	0.96360	0.96246	4.224E-04	9.180E-05	1.184E-05	3.592E-05
0.6	0.95239	0.93926	0.95807	0.95525	0.95388	6.186E-04	1.368E-04	1.757E-05	5.345E-05
0.7	0.94323	0.92784	0.94997	0.94662	0.94501	8.523E-04	1.918E-04	2.452E-05	7.482E-05
0.8	0.93379	0.91617	0.94163	0.93772	0.93587	1.122E-03	2.570E-04	3.272E-05	1.001E-04
0.9	0.92411	0.90428	0.93306	0.92857	0.92649	1.425E-03	3.323E-04	4.216E-05	1.292E-04
1	0.91422	0.89223	0.92427	0.91921	0.91689	1.758E-03	4.177E-04	5.279E-05	1.620E-04
IMSE						0.0006684	0.0001530	0.0000195	0.0000596
ti	S_real	S_jac				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.99310	0.99104	0.99393	0.99352	0.99331	1.538E-05	3.102E-06	4.147E-07	1.197E-06
0.2	0.98573	0.98154	0.98745	0.98661	0.98618	6.403E-05	1.312E-05	1.745E-06	5.060E-06
0.3	0.97795	0.97156	0.98061	0.97930	0.97864	1.489E-04	3.101E-05	4.106E-06	1.196E-05
0.4	0.96978	0.96115	0.97341	0.97162	0.97073	2.721E-04	5.761E-05	7.592E-06	2.220E-05
0.5	0.96125	0.95036	0.96589	0.96360	0.96246	4.344E-04	9.359E-05	1.228E-05	3.603E-05
0.6	0.95239	0.93923	0.95808	0.95525	0.95388	6.358E-04	1.394E-04	1.821E-05	5.362E-05
0.7	0.94323	0.92781	0.94999	0.94662	0.94501	8.756E-04	1.955E-04	2.543E-05	7.506E-05
0.8	0.93379	0.91614	0.94165	0.93772	0.93587	1.152E-03	2.619E-04	3.394E-05	1.004E-04
0.9	0.92411	0.90426	0.93308	0.92858	0.92649	1.462E-03	3.387E-04	4.373E-05	1.296E-04
1	0.91422	0.89221	0.92430	0.91921	0.91689	1.804E-03	4.257E-04	5.477E-05	1.625E-04
IMSE						0.0006864	0.0001560	0.0000202	0.0000598
Best / sample size (n)						S_MLE	S_MLE	S_MLE	S_MLE
Best / model						S_MLE			

Model 2 ($\theta = 0.2, \alpha=2$)									
ti	S_real	S_MLE				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.99827	0.99764	0.99854	0.99837	0.99833	1.250E-06	2.729E-07	2.139E-08	1.062E-07
0.2	0.99640	0.99509	0.99696	0.99662	0.99652	5.373E-06	1.177E-06	9.205E-08	4.582E-07
0.3	0.99440	0.99237	0.99527	0.99475	0.99459	1.293E-05	2.842E-06	2.218E-07	1.106E-06
0.4	0.99227	0.98949	0.99348	0.99275	0.99254	2.446E-05	5.399E-06	4.206E-07	2.102E-06
0.5	0.99002	0.98644	0.99158	0.99065	0.99037	4.050E-05	8.979E-06	6.981E-07	3.495E-06
0.6	0.98766	0.98324	0.98959	0.98843	0.98809	6.158E-05	1.371E-05	1.064E-06	5.336E-06
0.7	0.98518	0.97989	0.98749	0.98610	0.98570	8.817E-05	1.973E-05	1.528E-06	7.674E-06
0.8	0.98258	0.97640	0.98530	0.98367	0.98320	1.207E-04	2.716E-05	2.100E-06	1.056E-05
0.9	0.97988	0.97277	0.98302	0.98113	0.98059	1.597E-04	3.612E-05	2.787E-06	1.403E-05
1	0.97708	0.96902	0.98065	0.97850	0.97789	2.055E-04	4.673E-05	3.600E-06	1.813E-05
IMSE						0.0000720	0.0000162	0.0000013	0.0000063
ti	S_real	S_jac				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.99827	0.99764	0.99854	0.99837	0.99833	1.278E-06	2.775E-07	2.257E-08	1.065E-07
0.2	0.99640	0.99509	0.99696	0.99662	0.99652	5.494E-06	1.197E-06	9.714E-08	4.594E-07
0.3	0.99440	0.99237	0.99527	0.99475	0.99459	1.322E-05	2.890E-06	2.341E-07	1.109E-06
0.4	0.99227	0.98948	0.99348	0.99275	0.99254	2.500E-05	5.491E-06	4.439E-07	2.108E-06
0.5	0.99002	0.98644	0.99158	0.99065	0.99037	4.140E-05	9.132E-06	7.369E-07	3.505E-06
0.6	0.98766	0.98324	0.98959	0.98843	0.98809	6.293E-05	1.395E-05	1.123E-06	5.351E-06
0.7	0.98518	0.97989	0.98749	0.98610	0.98570	9.009E-05	2.007E-05	1.613E-06	7.695E-06
0.8	0.98258	0.97640	0.98530	0.98367	0.98320	1.233E-04	2.762E-05	2.217E-06	1.059E-05
0.9	0.97988	0.97277	0.98302	0.98113	0.98059	1.631E-04	3.673E-05	2.943E-06	1.407E-05
1	0.97708	0.96901	0.98065	0.97850	0.97789	2.099E-04	4.752E-05	3.801E-06	1.818E-05
IMSE						0.0000736	0.0000165	0.0000013	0.0000063
Best / sample size (n)						S_MLE	S_MLE	S_MLE	S_MLE
Best / model						S_MLE			

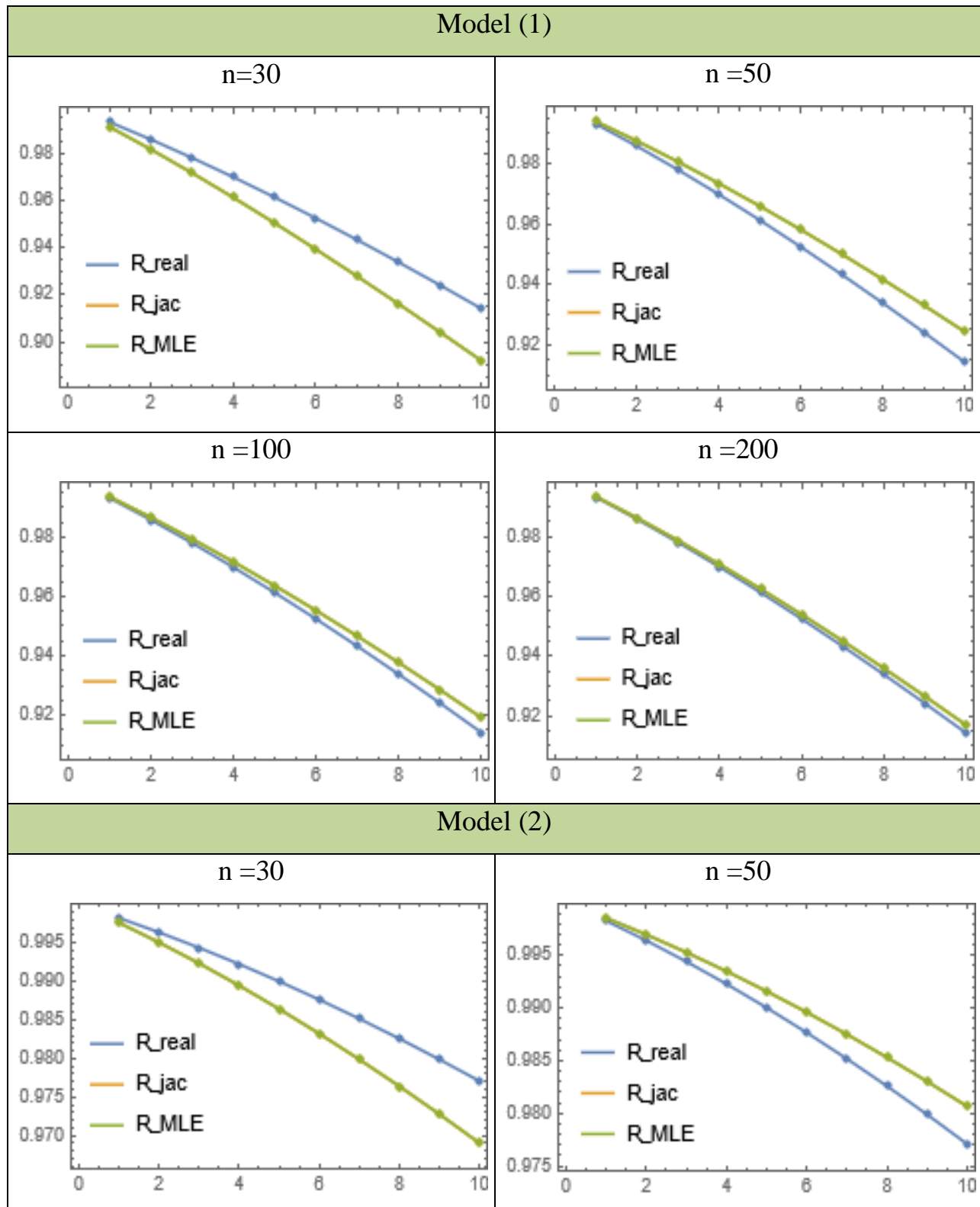
Model 3 ($\theta = 1, \alpha = 0.5$)									
ti	S_real	S_MLE				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.90491	0.87954	0.91682	0.91047	0.90757	2.239E-03	5.471E-04	6.032E-05	2.116E-04
0.2	0.81918	0.77955	0.83987	0.82861	0.82392	5.781E-03	1.635E-03	1.815E-04	6.031E-04
0.3	0.74207	0.69512	0.76879	0.75404	0.74830	8.610E-03	2.729E-03	3.093E-04	9.675E-04
0.4	0.67278	0.62287	0.70321	0.68625	0.67996	1.034E-02	3.571E-03	4.205E-04	1.227E-03
0.5	0.61052	0.56037	0.64276	0.62471	0.61819	1.112E-02	4.077E-03	5.081E-04	1.369E-03
0.6	0.55455	0.50584	0.58707	0.56890	0.56233	1.117E-02	4.259E-03	5.727E-04	1.410E-03
0.7	0.50420	0.45793	0.53582	0.51828	0.51179	1.075E-02	4.178E-03	6.178E-04	1.375E-03
0.8	0.45885	0.41556	0.48869	0.47238	0.46603	1.003E-02	3.908E-03	6.473E-04	1.288E-03
0.9	0.41796	0.37791	0.44539	0.43074	0.42457	9.154E-03	3.522E-03	6.648E-04	1.172E-03
1	0.38104	0.34430	0.40566	0.39296	0.38698	8.218E-03	3.081E-03	6.729E-04	1.043E-03
IMSE						0.0087405	0.0031507	0.0004655	0.0010668
ti	S_real	S_jac				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.90491	0.87950	0.91669	0.90990	0.90757	2.289E-03	5.516E-04	5.744E-05	2.122E-04
0.2	0.81918	0.77955	0.83966	0.82764	0.82392	5.900E-03	1.648E-03	1.723E-04	6.050E-04
0.3	0.74207	0.69515	0.76854	0.75282	0.74830	8.779E-03	2.750E-03	2.929E-04	9.706E-04
0.4	0.67278	0.62293	0.70293	0.68490	0.67996	1.055E-02	3.600E-03	3.976E-04	1.231E-03
0.5	0.61052	0.56045	0.64248	0.62335	0.61819	1.133E-02	4.112E-03	4.805E-04	1.374E-03
0.6	0.55455	0.50592	0.58681	0.56759	0.56233	1.139E-02	4.301E-03	5.429E-04	1.415E-03
0.7	0.50420	0.45799	0.53558	0.51710	0.51179	1.097E-02	4.225E-03	5.886E-04	1.380E-03
0.8	0.45885	0.41561	0.48849	0.47137	0.46603	1.024E-02	3.961E-03	6.216E-04	1.293E-03
0.9	0.41796	0.37793	0.44523	0.42994	0.42457	9.357E-03	3.579E-03	6.452E-04	1.177E-03
1	0.38104	0.34430	0.40554	0.39239	0.38698	8.411E-03	3.144E-03	6.619E-04	1.048E-03
IMSE						0.0089214	0.0031873	0.0004461	0.0010707
Best / sample size (n)						S_MLE	S_MLE	S_MLE	S_MLE
Best / model						S_MLE			

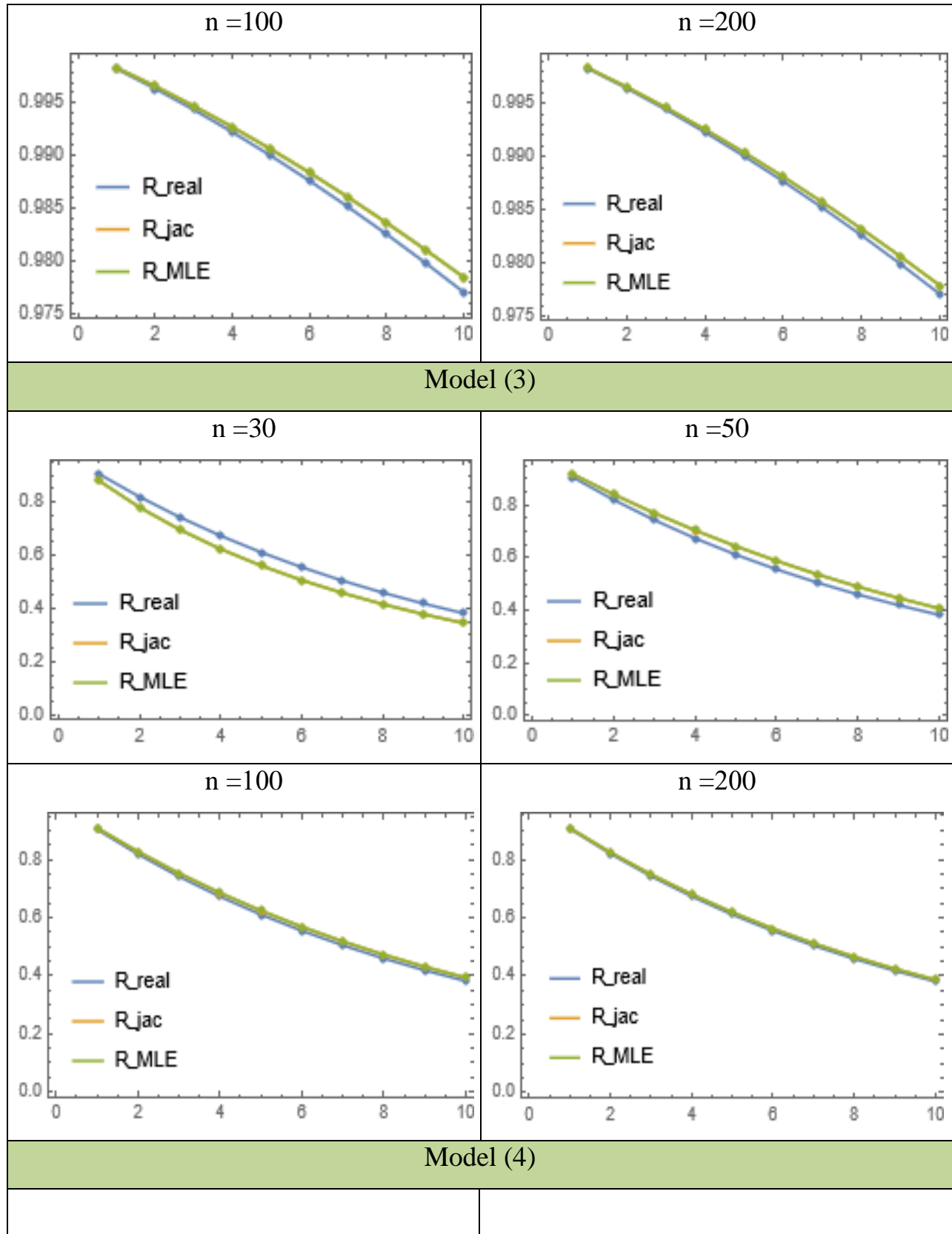
Model 4 ($\theta = 1, \alpha = 2$)									
ti	S_real	S_MLE				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.97440	0.96483	0.97855	0.97597	0.97532	2.758E-04	6.257E-05	4.654E-06	2.491E-05
0.2	0.94770	0.92947	0.95594	0.95081	0.94955	1.020E-03	2.460E-04	1.814E-05	9.589E-05
0.3	0.92005	0.89413	0.93226	0.92463	0.92281	2.103E-03	5.389E-04	3.945E-05	2.055E-04
0.4	0.89159	0.85901	0.90760	0.89756	0.89522	3.399E-03	9.241E-04	6.737E-05	3.448E-04
0.5	0.86245	0.82423	0.88202	0.86971	0.86691	4.796E-03	1.380E-03	1.005E-04	5.036E-04
0.6	0.83277	0.78992	0.85560	0.84122	0.83800	6.194E-03	1.882E-03	1.376E-04	6.719E-04
0.7	0.80268	0.75617	0.82844	0.81218	0.80859	7.516E-03	2.402E-03	1.774E-04	8.398E-04
0.8	0.77230	0.72305	0.80062	0.78274	0.77880	8.701E-03	2.916E-03	2.189E-04	9.987E-04
0.9	0.74176	0.69063	0.77222	0.75299	0.74875	9.706E-03	3.396E-03	2.614E-04	1.141E-03
1	0.71119	0.65895	0.74334	0.72307	0.71856	1.051E-02	3.821E-03	3.042E-04	1.262E-03
IMSE						0.0054216	0.0017568	0.0001330	0.0006088
ti	S_real	S_jac				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.97440	0.96483	0.97855	0.97597	0.97532	2.815E-04	6.361E-05	4.925E-06	2.498E-05
0.2	0.94770	0.92947	0.95594	0.95081	0.94955	1.040E-03	2.500E-04	1.919E-05	9.615E-05
0.3	0.92005	0.89415	0.93227	0.92463	0.92281	2.143E-03	5.477E-04	4.175E-05	2.061E-04
0.4	0.89159	0.85904	0.90761	0.89756	0.89522	3.462E-03	9.390E-04	7.127E-05	3.457E-04
0.5	0.86245	0.82428	0.88203	0.86972	0.86691	4.882E-03	1.402E-03	1.063E-04	5.050E-04
0.6	0.83277	0.78998	0.85563	0.84122	0.83800	6.304E-03	1.911E-03	1.454E-04	6.737E-04
0.7	0.80268	0.75625	0.82847	0.81219	0.80859	7.648E-03	2.440E-03	1.873E-04	8.422E-04
0.8	0.77230	0.72315	0.80065	0.78274	0.77880	8.853E-03	2.962E-03	2.309E-04	1.002E-03
0.9	0.74176	0.69073	0.77226	0.75300	0.74876	9.877E-03	3.450E-03	2.753E-04	1.145E-03
1	0.71119	0.65906	0.74339	0.72308	0.71856	1.069E-02	3.882E-03	3.199E-04	1.265E-03
IMSE						0.0055186	0.0017847	0.0001402	0.0006106
Best / sample size (n)						S_MLE	S_MLE	S_MLE	S_MLE
Best / model						S_MLE			

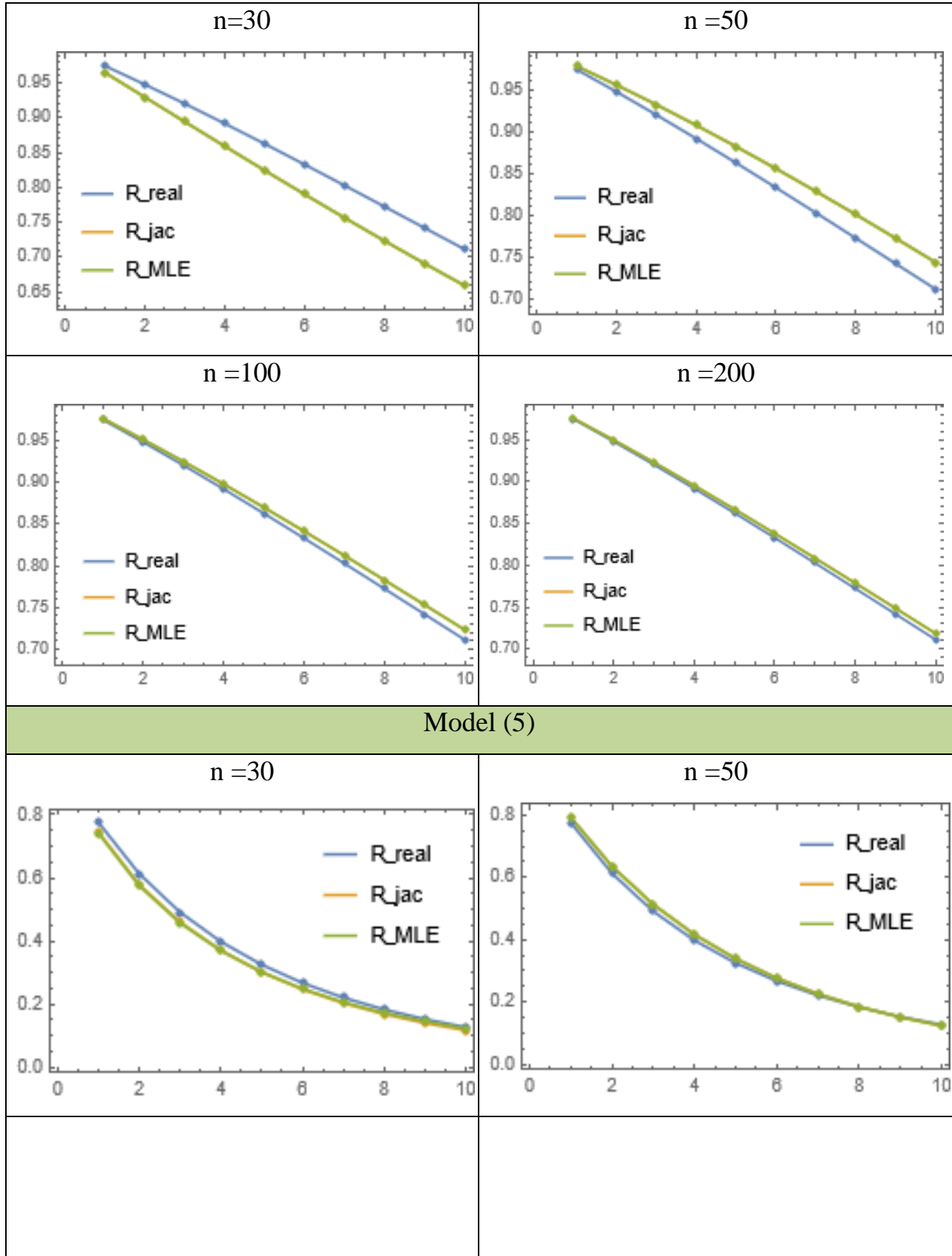
Model 5 ($\theta = 2, \alpha=0.5$)									
ti	S_real	S_MLE				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.77512	0.74098	0.79199	0.78796	0.77053	6.438E-03	1.949E-03	6.411E-04	1.300E-03
0.2	0.61251	0.57472	0.63517	0.62883	0.60783	9.350E-03	3.452E-03	1.162E-03	2.092E-03
0.3	0.49095	0.45696	0.51318	0.50647	0.48697	8.694E-03	3.493E-03	1.282E-03	2.034E-03
0.4	0.39777	0.36908	0.41649	0.41076	0.39442	7.044E-03	2.800E-03	1.199E-03	1.648E-03
0.5	0.32495	0.30148	0.33900	0.33492	0.32205	5.497E-03	1.973E-03	1.052E-03	1.227E-03
0.6	0.26716	0.24849	0.27647	0.27423	0.26460	4.333E-03	1.290E-03	8.997E-04	8.805E-04
0.7	0.22076	0.20640	0.22579	0.22530	0.21845	3.516E-03	8.163E-04	7.629E-04	6.265E-04
0.8	0.18313	0.17264	0.18461	0.18560	0.18107	2.940E-03	5.241E-04	6.449E-04	4.514E-04
0.9	0.15239	0.14533	0.15109	0.15324	0.15056	2.516E-03	3.581E-04	5.435E-04	3.342E-04
1	0.12712	0.12306	0.12376	0.12675	0.12553	2.185E-03	2.684E-04	4.562E-04	2.562E-04
IMSE						0.0052511	0.0016924	0.0008644	0.0010850
ti	S_real	S_jac				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.77512	0.74385	0.79202	0.78797	0.77053	6.910E-03	1.994E-03	6.509E-04	1.303E-03
0.2	0.61251	0.57815	0.63523	0.62884	0.60784	1.015E-02	3.533E-03	1.180E-03	2.097E-03
0.3	0.49095	0.45966	0.51323	0.50648	0.48697	9.441E-03	3.580E-03	1.302E-03	2.039E-03
0.4	0.39777	0.37044	0.41651	0.41076	0.39442	7.524E-03	2.880E-03	1.218E-03	1.652E-03
0.5	0.32495	0.30129	0.33898	0.33491	0.32205	5.649E-03	2.043E-03	1.068E-03	1.231E-03
0.6	0.26716	0.24678	0.27641	0.27422	0.26459	4.180E-03	1.349E-03	9.131E-04	8.838E-04
0.7	0.22076	0.20333	0.22571	0.22528	0.21845	3.118E-03	8.679E-04	7.744E-04	6.292E-04
0.8	0.18313	0.16841	0.18452	0.18558	0.18106	2.360E-03	5.689E-04	6.546E-04	4.537E-04
0.9	0.15239	0.14016	0.15100	0.15321	0.15055	1.811E-03	3.967E-04	5.518E-04	3.362E-04
1	0.12712	0.11716	0.12368	0.12672	0.12552	1.401E-03	3.011E-04	4.633E-04	2.579E-04
IMSE						0.0052541	0.0017513	0.0008776	0.0010883
Best / sample size (n)						S_MLE	S_MLE	S_MLE	S_MLE
Best / model						S_MLE			

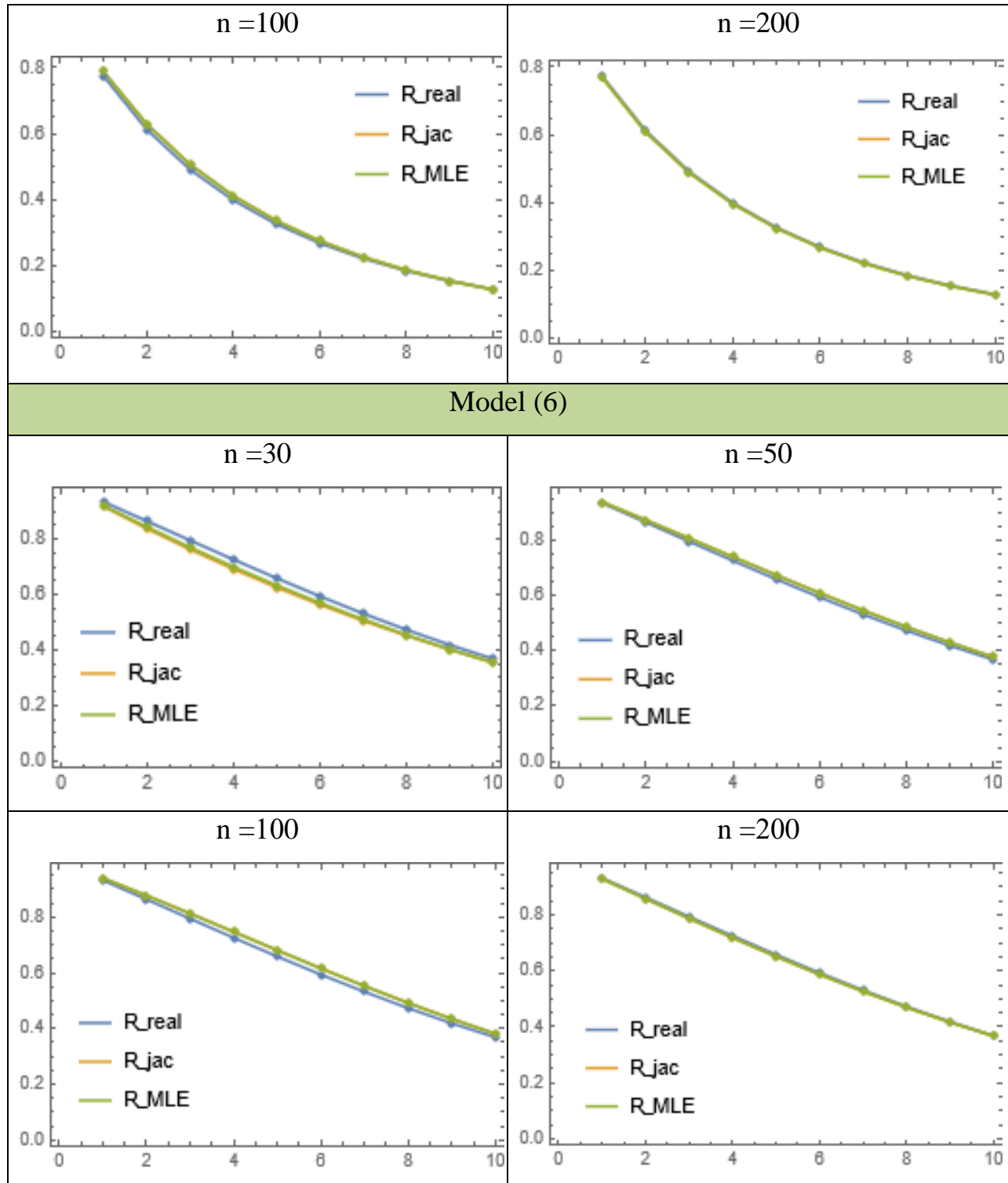
Model 6 ($\theta = 2, \alpha = 2$)									
ti	S_real	S_MLE				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.93237	0.91914	0.93676	0.94010	0.92908	1.398E-03	2.595E-04	1.726E-04	1.523E-04
0.2	0.86344	0.84217	0.87175	0.87738	0.85798	4.146E-03	8.734E-04	6.054E-04	4.861E-04
0.3	0.79415	0.76886	0.80565	0.81263	0.78751	6.848E-03	1.613E-03	1.167E-03	8.539E-04
0.4	0.72543	0.69902	0.73922	0.74676	0.71846	8.839E-03	2.296E-03	1.740E-03	1.160E-03
0.5	0.65817	0.63259	0.67326	0.68074	0.65152	9.908E-03	2.800E-03	2.232E-03	1.359E-03
0.6	0.59321	0.56958	0.60859	0.61555	0.58733	1.011E-02	3.070E-03	2.588E-03	1.439E-03
0.7	0.53122	0.51009	0.54600	0.55216	0.52644	9.631E-03	3.112E-03	2.788E-03	1.417E-03
0.8	0.47279	0.45427	0.48623	0.49143	0.46925	8.706E-03	2.970E-03	2.838E-03	1.320E-03
0.9	0.41832	0.40232	0.42992	0.43409	0.41607	7.563E-03	2.710E-03	2.761E-03	1.178E-03
1	0.36809	0.35438	0.37755	0.38071	0.36709	6.385E-03	2.395E-03	2.591E-03	1.018E-03
IMSE						0.0073535	0.0022099	0.0019484	0.0010383
ti	S_real	S_jac				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.93237	0.91552	0.93676	0.94010	0.92908	1.373E-03	2.671E-04	1.741E-04	1.527E-04
0.2	0.86344	0.83606	0.87175	0.87738	0.85798	4.135E-03	8.984E-04	6.105E-04	4.876E-04
0.3	0.79415	0.76130	0.80567	0.81264	0.78751	6.920E-03	1.658E-03	1.177E-03	8.565E-04
0.4	0.72543	0.69098	0.73925	0.74677	0.71846	9.020E-03	2.359E-03	1.754E-03	1.164E-03
0.5	0.65817	0.62492	0.67330	0.68075	0.65152	1.017E-02	2.876E-03	2.249E-03	1.363E-03
0.6	0.59321	0.56302	0.60863	0.61556	0.58734	1.037E-02	3.154E-03	2.607E-03	1.444E-03
0.7	0.53122	0.50522	0.54603	0.55217	0.52644	9.819E-03	3.198E-03	2.808E-03	1.422E-03
0.8	0.47279	0.45148	0.48625	0.49143	0.46925	8.766E-03	3.055E-03	2.857E-03	1.325E-03
0.9	0.41832	0.40181	0.42992	0.43409	0.41607	7.470E-03	2.791E-03	2.780E-03	1.183E-03
1	0.36809	0.35619	0.37754	0.38070	0.36709	6.144E-03	2.471E-03	2.608E-03	1.023E-03
IMSE						0.0074183	0.0022728	0.0019625	0.0010420
Best / sample size (n)						S_MLE	S_MLE	S_MLE	S_MLE
Best / model						S_MLE			

الشكل (4-3)
يوضح نتائج تجربة المحاكاة لتوزيع مارشال اولكن ليندلي









من خلال النتائج المبينة في الجدول (3-5) نلاحظ مايلي:

- 1- إنَّ الافضلية لطريقة الإمكان الأعظم (S_MLE) مقارنة بطريقة Jackknife (S_Jac) في تقدير دالة بقاء توزيع مارشال اولكن ليندلي لإمتلاكها أقل متوسط مربعات خطأ تكاملي (IMSE) حسب احجام العينات والنماذج المفترضة كافة.
 - 2- إنَّ تقديرات دالة البقاء باستعمال طريقة الإمكان الأعظم وطريقة Jackknife قد اظهرتا متوسط أقرب الى القيم الحقيقية لدالة البقاء وذلك للنماذج واحجام العينات المفترضة كافة.
 - 3- إنَّ قيم دالة البقاء الحقيقية والمقدرة تتناقص بزيادة الزمن (t_i) وهي على الدوام تقع قيمها ضمن الفترة (1,0).
 - 4- إنَّ قيم المقياس الاحصائي (MSE) والمقياس (IMSE) تتناقص بازدياد حجم العينة.
- وكذلك الشكل (3-4) يوضح ماتوصل اليه في ما يخص اقتراب القيم التقديرية لدالة البقاء من القيم الحقيقية عند كل حجم من حجوم العينات المفترضة.

5-3-2-3 نتائج محاكاة توزيع داکوم

تم تلخيص نتائج محاكاة توزيع داکوم في الجدول (6-3) والشكل (5-3) ادناه.

جدول (6-3)
نتائج تجربة المحاكاة لتوزيع داکوم

Model 1 ($\delta=2.5, \beta=0.5, 1=\lambda$)									
ti	S_real	S_MLE				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.94386	0.93774	0.94735	0.94471	0.94498	1.540E-03	4.764E-04	3.852E-04	1.299E-04
0.2	0.86743	0.86138	0.87152	0.87016	0.86942	3.655E-03	1.138E-03	9.227E-04	2.768E-04
0.3	0.78325	0.77609	0.78529	0.78690	0.78545	5.349E-03	2.038E-03	1.300E-03	4.300E-04
0.4	0.69686	0.68953	0.69692	0.70088	0.69897	6.797E-03	3.170E-03	1.555E-03	6.291E-04
0.5	0.61242	0.60637	0.61164	0.61662	0.61438	7.811E-03	4.227E-03	1.743E-03	8.446E-04
0.6	0.53304	0.52909	0.53248	0.53736	0.53487	8.306E-03	4.951E-03	1.859E-03	1.017E-03
0.7	0.46078	0.45888	0.46095	0.46510	0.46243	8.353E-03	5.245E-03	1.887E-03	1.108E-03
0.8	0.39664	0.39620	0.39753	0.40081	0.39807	8.078E-03	5.155E-03	1.831E-03	1.116E-03
0.9	0.34081	0.34107	0.34208	0.34467	0.34194	7.594E-03	4.797E-03	1.714E-03	1.063E-03
1	0.29289	0.29317	0.29409	0.29632	0.29369	6.983E-03	4.294E-03	1.565E-03	9.731E-04
IMSE						0.0064465	0.0035492	0.0014763	0.0007588
ti	S_real	S_jac				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.94386	0.93708	0.94726	0.94471	0.94498	2.188E-03	5.018E-04	3.888E-04	1.307E-04
0.2	0.86743	0.86083	0.87150	0.87017	0.86942	4.251E-03	1.190E-03	9.308E-04	2.788E-04
0.3	0.78325	0.77549	0.78535	0.78691	0.78545	5.870E-03	2.123E-03	1.312E-03	4.329E-04
0.4	0.69686	0.68889	0.69708	0.70088	0.69897	7.256E-03	3.301E-03	1.571E-03	6.328E-04
0.5	0.61242	0.60579	0.61192	0.61662	0.61438	8.227E-03	4.417E-03	1.762E-03	8.491E-04
0.6	0.53304	0.52864	0.53289	0.53736	0.53487	8.687E-03	5.207E-03	1.880E-03	1.022E-03
0.7	0.46078	0.45860	0.46144	0.46510	0.46244	8.701E-03	5.522E-03	1.909E-03	1.113E-03
0.8	0.39664	0.39610	0.39749	0.40082	0.39807	8.391E-03	5.322E-03	1.852E-03	1.121E-03
0.9	0.34081	0.34112	0.34206	0.34467	0.34195	7.871E-03	5.005E-03	1.734E-03	1.067E-03
1	0.29289	0.29335	0.29418	0.29633	0.29369	7.223E-03	4.487E-03	1.583E-03	9.772E-04
IMSE						0.0068666	0.0037074	0.0014922	0.0007625
Best / sample size (n)						S_MLE	S_MLE	S_MLE	S_MLE
Best / model						S_MLE			

Model 2 ($\delta=2.5, \beta=0.5, 3=\lambda$)									
ti	S_real	S_MLE				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.96755	0.91703	0.95478	0.95827	0.96684	2.468E-02	9.837E-03	4.212E-03	8.488E-05
0.2	0.92301	0.87678	0.91101	0.91568	0.92185	2.402E-02	9.745E-03	4.155E-03	2.084E-04
0.3	0.87285	0.83085	0.86157	0.86710	0.87103	2.339E-02	9.582E-03	4.075E-03	3.235E-04
0.4	0.81936	0.78111	0.80846	0.81478	0.81680	2.260E-02	9.349E-03	3.991E-03	4.387E-04
0.5	0.76411	0.72925	0.75348	0.76048	0.76090	2.176E-02	9.124E-03	3.942E-03	5.630E-04
0.6	0.70837	0.67675	0.69819	0.70561	0.70472	2.119E-02	8.952E-03	3.945E-03	6.927E-04
0.7	0.65327	0.62477	0.63943	0.65137	0.64940	2.380E-02	8.629E-03	3.996E-03	8.146E-04
0.8	0.59971	0.57423	0.57381	0.59867	0.59586	2.576E-02	9.384E-03	4.044E-03	9.142E-04
0.9	0.54843	0.52577	0.52171	0.54823	0.54479	2.328E-02	9.486E-03	4.324E-03	9.815E-04
1	0.50000	0.47986	0.47487	0.50054	0.49668	2.064E-02	8.857E-03	4.212E-03	1.013E-03
IMSE						0.0231118	0.0092945	0.0040895	0.0006035
ti	S_real	S_jac				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.96755	0.94163	0.95427	0.96399	0.96685	4.737E-02	9.843E-03	9.541E-03	8.578E-05
0.2	0.92301	0.90140	0.90986	0.92140	0.92188	4.407E-02	9.806E-03	8.979E-03	2.120E-04
0.3	0.87285	0.85550	0.85971	0.87278	0.87108	4.053E-02	9.769E-03	8.337E-03	3.318E-04
0.4	0.81936	0.80589	0.80584	0.82042	0.81687	3.694E-02	9.744E-03	7.663E-03	4.542E-04
0.5	0.76411	0.75392	0.75009	0.76605	0.76099	3.343E-02	9.814E-03	7.013E-03	5.883E-04
0.6	0.70837	0.69503	0.69400	0.71111	0.70483	3.010E-02	1.004E-02	6.421E-03	7.302E-04
0.7	0.65327	0.62758	0.63794	0.65679	0.64954	2.700E-02	9.223E-03	5.892E-03	8.667E-04
0.8	0.59971	0.57190	0.58013	0.60388	0.59602	2.415E-02	1.253E-02	5.414E-03	9.826E-04
0.9	0.54843	0.52328	0.52887	0.54945	0.54496	2.155E-02	1.338E-02	4.970E-03	1.059E-03
1	0.50000	0.47759	0.48146	0.50145	0.49648	1.918E-02	1.211E-02	4.545E-03	1.118E-03
IMSE						0.0324321	0.0106257	0.0068777	0.0006429
Best / sample size (n)						S_MLE	S_MLE	S_MLE	S_MLE
Best / model						S_MLE			

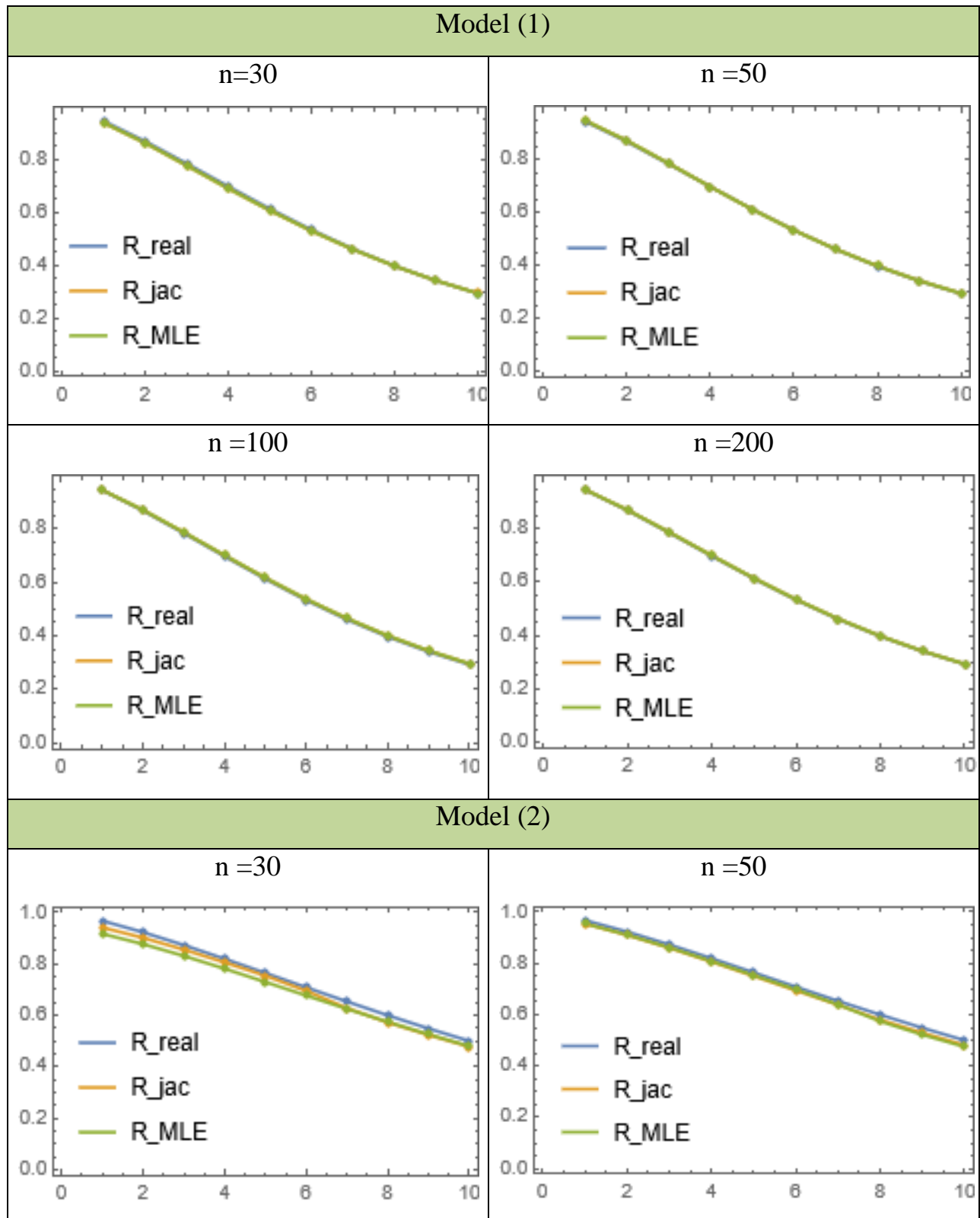
Model 3 ($\delta=1.5, \beta=1.5, 1=\lambda$)									
ti	S_real	S_MLE				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.99463	0.99345	0.99458	0.99418	0.99504	8.539E-05	9.240E-05	1.602E-05	1.013E-05
0.2	0.97648	0.97881	0.98128	0.97669	0.97887	3.822E-04	4.098E-04	9.807E-05	8.219E-05
0.3	0.94698	0.95150	0.95774	0.94791	0.95144	7.357E-04	1.052E-03	2.251E-04	2.090E-04
0.4	0.90928	0.91221	0.92385	0.91052	0.91510	1.046E-03	1.792E-03	3.811E-04	3.348E-04
0.5	0.86650	0.86576	0.88244	0.86780	0.87299	1.500E-03	2.424E-03	5.854E-04	4.438E-04
0.6	0.82127	0.81650	0.83711	0.82250	0.82796	2.207E-03	2.942E-03	8.399E-04	5.432E-04
0.7	0.77553	0.76727	0.79065	0.77664	0.78214	3.093E-03	3.381E-03	1.120E-03	6.359E-04
0.8	0.73063	0.71968	0.74487	0.73160	0.73700	4.012E-03	3.757E-03	1.394E-03	7.178E-04
0.9	0.68743	0.67456	0.70084	0.68822	0.69348	4.845E-03	4.068E-03	1.635E-03	7.839E-04
1	0.64645	0.63227	0.65910	0.64700	0.65214	5.522E-03	4.311E-03	1.830E-03	8.313E-04
IMSE						0.0023427	0.0024230	0.0008124	0.0004592
ti	S_real	S_jac				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.99463	0.98142	0.99457	0.99418	0.99504	1.196E-02	9.277E-05	1.626E-05	1.019E-05
0.2	0.97648	0.96581	0.98126	0.97669	0.97887	1.291E-02	4.121E-04	9.943E-05	8.255E-05
0.3	0.94698	0.93908	0.95773	0.94792	0.95145	1.273E-02	1.058E-03	2.285E-04	2.099E-04
0.4	0.90928	0.90082	0.92389	0.91053	0.91510	1.218E-02	1.808E-03	3.869E-04	3.363E-04
0.5	0.86650	0.85560	0.88253	0.86781	0.87300	1.169E-02	2.451E-03	5.937E-04	4.458E-04
0.6	0.82127	0.80706	0.83722	0.82250	0.82796	1.131E-02	2.978E-03	8.508E-04	5.459E-04
0.7	0.77553	0.75505	0.79078	0.77665	0.78214	1.345E-02	3.426E-03	1.134E-03	6.391E-04
0.8	0.73063	0.70811	0.74500	0.73160	0.73700	1.390E-02	3.808E-03	1.409E-03	7.216E-04
0.9	0.68743	0.66409	0.70097	0.68822	0.69348	1.359E-02	4.126E-03	1.652E-03	7.882E-04
1	0.64645	0.62283	0.65922	0.64700	0.65214	1.319E-02	4.375E-03	1.848E-03	8.359E-04
IMSE						0.0126909	0.0024534	0.0008219	0.0004615
Best / sample size (n)						S_MLE	S_MLE	S_MLE	S_MLE
Best / model						S_MLE			

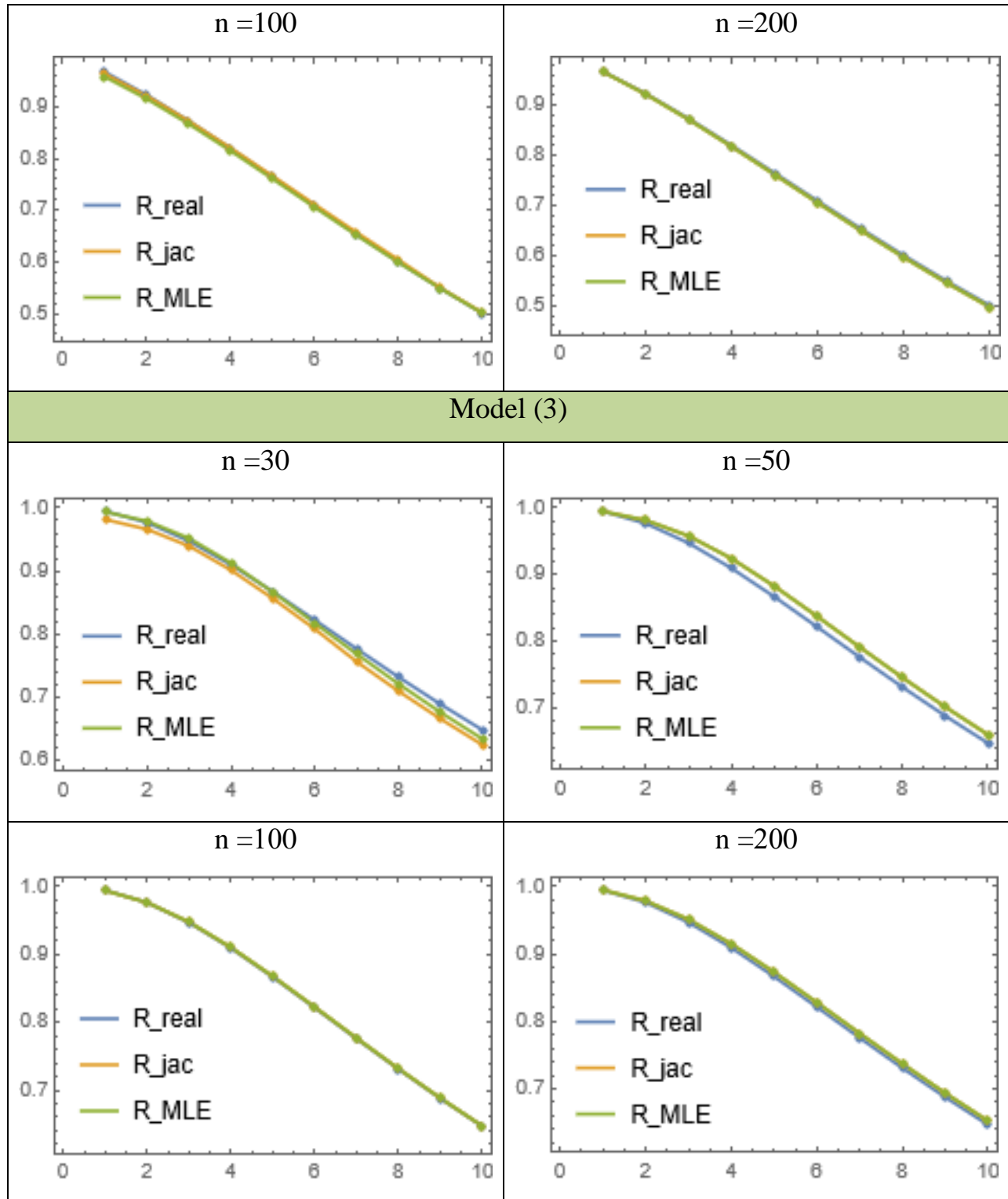
Model 4 ($\delta=1.5, \beta=0.5, 10=\lambda$)									
ti	S_real	S_MLE				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.94386	0.94607	0.93976	0.94679	0.94293	9.143E-04	1.142E-03	3.646E-04	2.125E-04
0.2	0.90585	0.91012	0.90233	0.91061	0.90553	1.590E-03	1.692E-03	6.328E-04	3.480E-04
0.3	0.87285	0.87700	0.86930	0.87879	0.87316	1.968E-03	1.961E-03	8.378E-04	4.430E-04
0.4	0.84292	0.84581	0.83896	0.84964	0.84381	2.198E-03	2.076E-03	1.004E-03	5.152E-04
0.5	0.81521	0.81633	0.81072	0.82244	0.81664	2.350E-03	2.119E-03	1.145E-03	5.744E-04
0.6	0.78926	0.78847	0.78423	0.79683	0.79119	2.466E-03	2.134E-03	1.270E-03	6.259E-04
0.7	0.76479	0.76215	0.75928	0.77257	0.76719	2.579E-03	2.146E-03	1.381E-03	6.729E-04
0.8	0.74159	0.73730	0.73571	0.74948	0.74444	2.705E-03	2.164E-03	1.483E-03	7.172E-04
0.9	0.71953	0.71381	0.71337	0.72745	0.72279	2.850E-03	2.191E-03	1.578E-03	7.594E-04
1	0.69849	0.69160	0.69216	0.70639	0.70213	3.012E-03	2.226E-03	1.665E-03	8.000E-04
IMSE						0.0022633	0.0019850	0.0011361	0.0005668
ti	S_real	S_jac				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.94386	0.94600	0.93976	0.94679	0.94293	9.451E-04	1.156E-03	3.679E-04	2.133E-04
0.2	0.90585	0.91012	0.90236	0.91062	0.90554	1.648E-03	1.716E-03	6.385E-04	3.495E-04
0.3	0.87285	0.87706	0.86933	0.87880	0.87316	2.053E-03	1.991E-03	8.454E-04	4.449E-04
0.4	0.84292	0.84594	0.83899	0.84965	0.84381	2.310E-03	2.112E-03	1.013E-03	5.174E-04
0.5	0.81521	0.81654	0.81074	0.82246	0.81664	2.489E-03	2.159E-03	1.156E-03	5.769E-04
0.6	0.78926	0.78875	0.78424	0.79684	0.79120	2.629E-03	2.179E-03	1.281E-03	6.287E-04
0.7	0.76479	0.76251	0.75929	0.77258	0.76719	2.759E-03	2.196E-03	1.394E-03	6.760E-04
0.8	0.74159	0.73771	0.73571	0.74949	0.74444	2.896E-03	2.220E-03	1.497E-03	7.205E-04
0.9	0.71953	0.71427	0.71337	0.72746	0.72279	3.047E-03	2.252E-03	1.592E-03	7.629E-04
1	0.69849	0.69209	0.69217	0.70639	0.70213	3.211E-03	2.292E-03	1.680E-03	8.037E-04
IMSE						0.0023987	0.0020273	0.0011463	0.0005694
Best / sample size (n)						S_MLE	S_MLE	S_MLE	S_MLE
Best / model						S_MLE			

Model 5 ($\delta=2.5, \beta=1.5, 2.5=\lambda$)									
ti	S_real	S_MLE				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.99996	0.99981	0.99967	0.99984	0.99994	9.369E-08	3.627E-07	6.914E-08	9.856E-09
0.2	0.99940	0.99867	0.99826	0.99893	0.99942	3.129E-06	5.736E-06	1.786E-06	4.048E-07
0.3	0.99731	0.99572	0.99494	0.99640	0.99761	2.534E-05	2.799E-05	1.175E-05	3.664E-06
0.4	0.99233	0.98987	0.98862	0.99113	0.99330	1.083E-04	8.353E-05	4.425E-05	1.672E-05
0.5	0.98303	0.97945	0.97798	0.98164	0.98489	3.099E-04	1.906E-04	1.165E-04	4.743E-05
0.6	0.96821	0.96266	0.96172	0.96633	0.97077	6.979E-04	3.701E-04	2.302E-04	9.373E-05
0.7	0.94712	0.93851	0.93893	0.94413	0.94980	1.359E-03	6.393E-04	3.740E-04	1.464E-04
0.8	0.91958	0.90693	0.90943	0.91491	0.92170	2.314E-03	1.002E-03	5.539E-04	2.073E-04
0.9	0.88600	0.86872	0.87382	0.87944	0.88701	3.457E-03	1.448E-03	7.895E-04	2.912E-04
1	0.84728	0.82541	0.83322	0.83902	0.84691	4.656E-03	1.956E-03	1.083E-03	4.083E-04
IMSE						0.0012931	0.0005723	0.0003205	0.0001215
ti	S_real	S_jac				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.99996	0.99978	0.99967	0.99984	0.99994	2.125E-07	3.820E-07	7.103E-08	9.962E-09
0.2	0.99940	0.99859	0.99824	0.99892	0.99942	4.409E-06	5.946E-06	1.817E-06	4.076E-07
0.3	0.99731	0.99560	0.99492	0.99640	0.99761	2.967E-05	2.884E-05	1.191E-05	3.683E-06
0.4	0.99233	0.98972	0.98860	0.99113	0.99330	1.178E-04	8.579E-05	4.471E-05	1.680E-05
0.5	0.98303	0.97933	0.97798	0.98164	0.98489	3.277E-04	1.954E-04	1.176E-04	4.766E-05
0.6	0.96821	0.96262	0.96173	0.96634	0.97077	7.286E-04	3.790E-04	2.323E-04	9.423E-05
0.7	0.94712	0.93856	0.93896	0.94414	0.94980	1.411E-03	6.548E-04	3.776E-04	1.473E-04
0.8	0.91958	0.90709	0.90948	0.91493	0.92170	2.394E-03	1.026E-03	5.592E-04	2.086E-04
0.9	0.88600	0.86899	0.87387	0.87946	0.88701	3.564E-03	1.482E-03	7.969E-04	2.930E-04
1	0.84728	0.82573	0.83328	0.83903	0.84691	4.782E-03	1.999E-03	1.093E-03	4.106E-04
IMSE						0.0013360	0.0005857	0.0003235	0.0001222
Best / sample size (n)						S_MLE	S_MLE	S_MLE	S_MLE
Best / model						S_MLE			

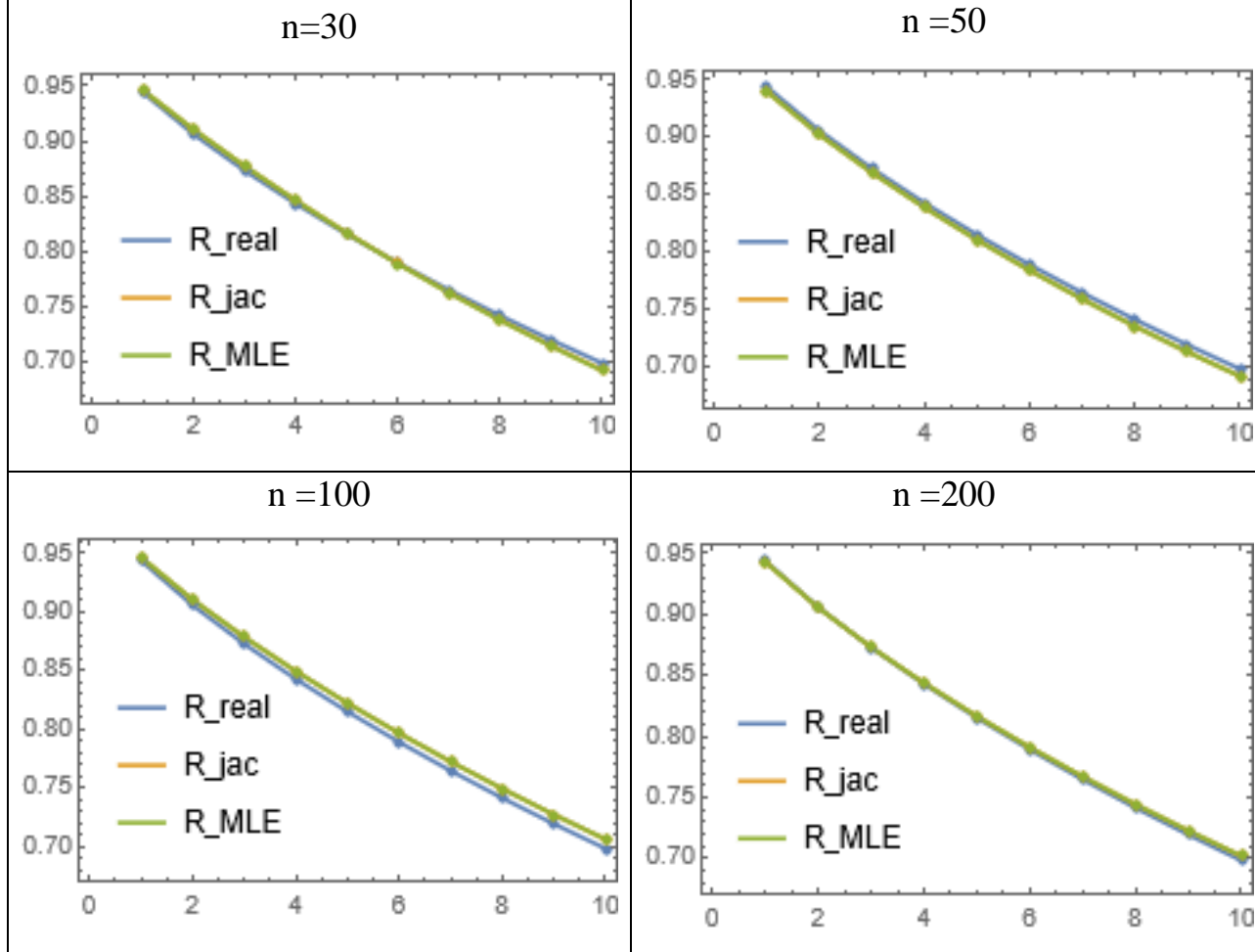
Model 6 ($\delta=1, \beta=1, 1=\lambda$)									
ti	S_real	S_MLE				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.90909	0.90001	0.92019	0.91007	0.90814	2.331E-03	1.175E-03	6.075E-04	3.166E-04
0.2	0.83333	0.82922	0.84449	0.83300	0.83269	3.843E-03	2.006E-03	9.750E-04	4.565E-04
0.3	0.76923	0.77044	0.77909	0.76754	0.76843	4.995E-03	2.820E-03	1.246E-03	5.326E-04
0.4	0.71429	0.72025	0.72305	0.71150	0.71307	5.904E-03	3.532E-03	1.432E-03	5.928E-04
0.5	0.66667	0.67667	0.67468	0.66302	0.66491	6.647E-03	4.090E-03	1.537E-03	6.462E-04
0.6	0.62500	0.63836	0.63250	0.62062	0.62264	7.261E-03	4.487E-03	1.578E-03	6.934E-04
0.7	0.58824	0.60434	0.59538	0.58323	0.58527	7.765E-03	4.742E-03	1.572E-03	7.338E-04
0.8	0.55556	0.57389	0.56243	0.54998	0.55200	8.174E-03	4.878E-03	1.535E-03	7.676E-04
0.9	0.52632	0.54644	0.53295	0.52021	0.52219	8.498E-03	4.922E-03	1.481E-03	7.950E-04
1	0.50000	0.52154	0.50642	0.49341	0.49535	8.745E-03	4.895E-03	1.417E-03	8.168E-04
IMSE						0.0064163	0.0037548	0.0013380	0.0006351
ti	S_real	S_jac				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.90909	0.90012	0.91632	0.90896	0.90814	2.397E-03	4.546E-03	1.604E-03	3.180E-04
0.2	0.83333	0.82934	0.84128	0.83199	0.83270	3.968E-03	4.881E-03	1.818E-03	4.590E-04
0.3	0.76923	0.77055	0.77649	0.76662	0.76843	5.159E-03	5.347E-03	1.970E-03	5.358E-04
0.4	0.71429	0.72036	0.72063	0.71067	0.71307	6.093E-03	5.661E-03	2.059E-03	5.966E-04
0.5	0.66667	0.67678	0.67126	0.66224	0.66491	6.850E-03	6.447E-03	2.087E-03	6.505E-04
0.6	0.62500	0.63846	0.62912	0.61991	0.62264	7.471E-03	6.982E-03	2.064E-03	6.980E-04
0.7	0.58824	0.60444	0.59234	0.58256	0.58527	7.978E-03	7.054E-03	2.005E-03	7.387E-04
0.8	0.55556	0.57398	0.55972	0.54935	0.55200	8.387E-03	6.986E-03	1.924E-03	7.726E-04
0.9	0.52632	0.54652	0.53056	0.51962	0.52219	8.708E-03	6.849E-03	1.832E-03	8.000E-04
1	0.50000	0.52161	0.50430	0.49285	0.49535	8.952E-03	6.666E-03	1.735E-03	8.218E-04
IMSE						0.0065964	0.0061418	0.0019097	0.0006391
Best / sample size (n)						S_MLE	S_MLE	S_MLE	S_MLE
Best / model						S_MLE			

الشكل (5-3)
يوضح نتائج تجربة المحاكاة لتوزيع داكوم

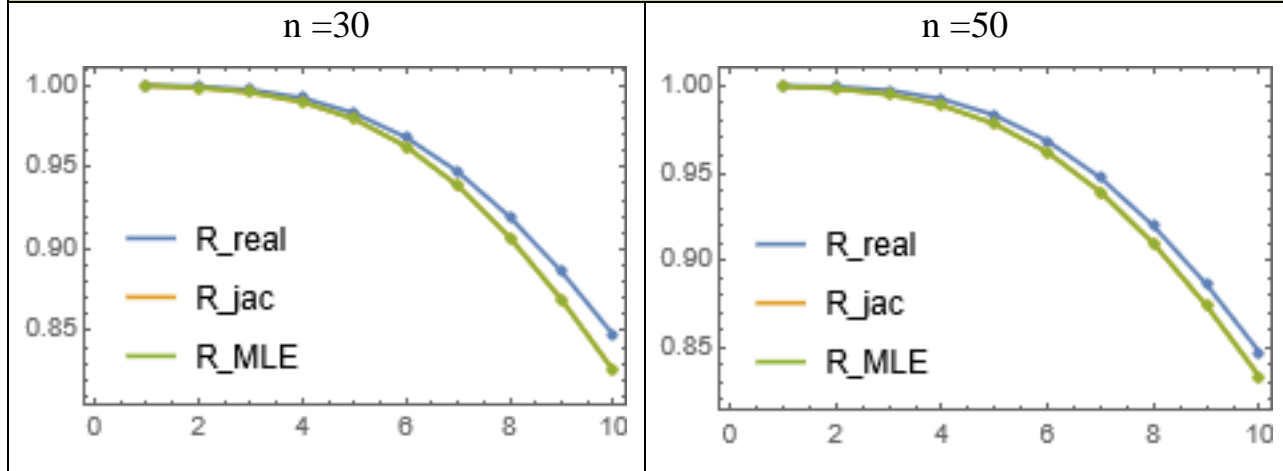


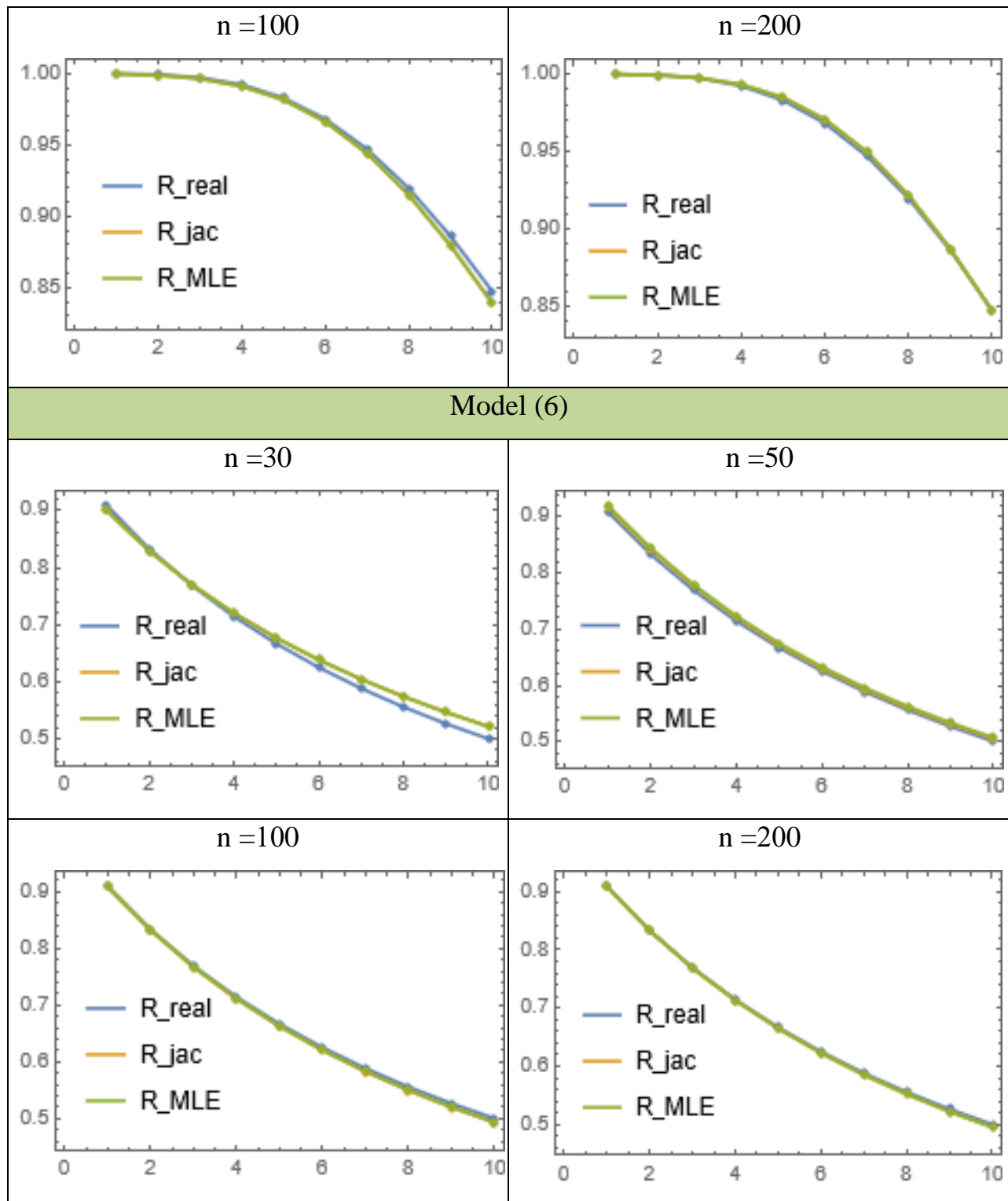


Model (4)



Model (5)





من خلال النتائج المبينة في الجدول (3-6) نلاحظ مايلي:

- 1- إنّ الافضلية لطريقة الإمكان الأعظم (S_MLE) مقارنة بطريقة Jackknife (S_Jac) في تقدير دالة بقاء توزيع داکوم لإمتلاكها أقل متوسط مربعات خطأ تكاملي (IMSE) حسب احجام العينات والنماذج المفترضة كافة.
 - 2- إنّ تقديرات دالة البقاء باستعمال طريقة الإمكان الأعظم وطريقة Jackknife قد اظهرتا متوسط اقرب الى القيم الحقيقية لدالة البقاء وذلك للنماذج واحجام العينات المفترضة كافة.
 - 3- إنّ قيم دالة البقاء الحقيقية والمقدرة تتناقص بزيادة الزمن (t_i) وهي على الدوام تقع قيمها ضمن الفترة (1,0).
 - 4- إنّ قيم المقياس الاحصائي (MSE) والمقياس (IMSE) تتناقص بازدياد حجم العينة.
- وكذلك الشكل (3-5) يوضح ماتوصل اليه في ما يخص اقتراب القيم التقديرية لدالة البقاء من القيم الحقيقية عند كل حجم من حجوم العينات المفترضة.

6-3-2-3 نتائج محاكاة توزيع مارشال اولكن داکوم

تم تلخيص نتائج محاكاة توزيع مارشال اولكن داکوم في الجدول (7-3) والشكل (6-3) ادناه.

جدول (7-3)
نتائج تجربة المحاكاة لتوزيع مارشال اولكن داکوم

Model 1 ($\delta=2.5, \beta=0.5, 1=\lambda, \alpha=0.5$)									
ti	S_real	S_MLE				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.89368	0.88185	0.90092	0.88896	0.88288	1.650E-03	9.368E-04	6.368E-04	4.531E-04
0.2	0.76590	0.75714	0.76511	0.76076	0.75053	2.930E-03	1.866E-03	1.242E-03	7.024E-04
0.3	0.64373	0.64058	0.63462	0.63817	0.62723	3.217E-03	2.571E-03	1.396E-03	8.271E-04
0.4	0.53475	0.53692	0.52329	0.52917	0.51979	2.848E-03	3.138E-03	1.282E-03	8.378E-04
0.5	0.44136	0.44719	0.43288	0.43665	0.42948	2.313E-03	3.454E-03	1.206E-03	7.709E-04
0.6	0.36337	0.37114	0.36071	0.36045	0.35511	1.947E-03	3.572E-03	1.242E-03	6.802E-04
0.7	0.29936	0.30783	0.30319	0.29875	0.29456	1.792E-03	3.590E-03	1.323E-03	5.995E-04
0.8	0.24738	0.25582	0.25707	0.24919	0.24551	1.742E-03	3.557E-03	1.384E-03	5.374E-04
0.9	0.20541	0.21338	0.21976	0.20940	0.20582	1.700E-03	3.487E-03	1.398E-03	4.894E-04
1	0.17157	0.17879	0.18925	0.17736	0.17363	1.628E-03	3.376E-03	1.368E-03	4.481E-04
IMSE						0.0021766	0.0029547	0.0012479	0.0006346
ti	S_real	S_jac				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.89368	0.88254	0.90076	0.88899	0.88389	1.908E-03	9.808E-04	6.465E-04	4.521E-04
0.2	0.76590	0.75570	0.76506	0.76079	0.75000	3.099E-03	1.914E-03	1.254E-03	7.179E-04
0.3	0.64373	0.63856	0.63490	0.63816	0.62552	3.327E-03	2.657E-03	1.410E-03	8.687E-04
0.4	0.53475	0.53544	0.52384	0.52918	0.51781	2.949E-03	3.254E-03	1.305E-03	8.721E-04
0.5	0.44136	0.44667	0.43351	0.43669	0.42790	2.438E-03	3.575E-03	1.234E-03	7.816E-04
0.6	0.36337	0.37157	0.36125	0.36051	0.35429	2.115E-03	3.681E-03	1.264E-03	6.770E-04
0.7	0.29936	0.30904	0.30354	0.29882	0.29458	2.016E-03	3.677E-03	1.337E-03	5.996E-04
0.8	0.24738	0.25757	0.25720	0.24925	0.24632	2.021E-03	3.619E-03	1.389E-03	5.528E-04
0.9	0.20541	0.21545	0.21965	0.20944	0.20727	2.023E-03	3.522E-03	1.397E-03	5.236E-04
1	0.17157	0.18102	0.18893	0.17739	0.17557	1.982E-03	3.387E-03	1.362E-03	4.987E-04
IMSE						0.0023878	0.0030268	0.0012599	0.0006544
Best / sample size (n)						S_MLE	S_MLE	S_MLE	S_MLE
Best / model						S_MLE			

Model 2 ($\delta=2.5, \beta=0.5, 3=\lambda, \alpha=0.5$)									
ti	S_real	S_MLE				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.96755	0.96210	0.92162	0.96422	0.96913	6.668E-04	5.991E-03	1.601E-04	1.032E-04
0.2	0.92301	0.91923	0.88214	0.91842	0.92651	1.721E-03	6.152E-03	3.781E-04	2.815E-04
0.3	0.87285	0.87096	0.83434	0.86776	0.87782	2.736E-03	6.170E-03	5.927E-04	4.398E-04
0.4	0.81936	0.81798	0.78084	0.81440	0.82537	3.384E-03	6.577E-03	8.134E-04	5.555E-04
0.5	0.76411	0.76167	0.72430	0.75986	0.77083	3.478E-03	6.634E-03	1.046E-03	6.335E-04
0.6	0.70837	0.70434	0.66700	0.70536	0.71559	3.343E-03	6.722E-03	1.282E-03	6.844E-04
0.7	0.65327	0.64793	0.61067	0.65187	0.66084	3.291E-03	6.662E-03	1.505E-03	7.157E-04
0.8	0.59971	0.59370	0.55655	0.60017	0.60753	3.391E-03	7.843E-03	1.695E-03	7.307E-04
0.9	0.54843	0.54235	0.50548	0.55082	0.55642	3.579E-03	8.576E-03	1.839E-03	7.306E-04
1	0.50000	0.49419	0.45794	0.50423	0.50808	3.765E-03	8.101E-03	1.928E-03	7.165E-04
IMSE						0.0029356	0.0069428	0.0011239	0.0005591
ti	S_real	S_jac				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.96755	0.92676	0.96555	0.96432	0.96914	3.494E-02	4.714E-02	1.655E-04	1.041E-04
0.2	0.92301	0.88475	0.92566	0.91867	0.92654	3.282E-02	4.345E-02	4.030E-04	2.853E-04
0.3	0.87285	0.83737	0.87696	0.86817	0.87787	3.050E-02	3.930E-02	6.555E-04	4.492E-04
0.4	0.81936	0.78572	0.82118	0.81498	0.82544	2.796E-02	3.501E-02	9.359E-04	5.735E-04
0.5	0.76411	0.73136	0.76278	0.76062	0.77093	2.519E-02	3.094E-02	1.251E-03	6.634E-04
0.6	0.70837	0.67592	0.70341	0.70630	0.71572	2.230E-02	2.728E-02	1.593E-03	7.295E-04
0.7	0.65327	0.61848	0.64393	0.65300	0.66099	2.054E-02	2.406E-02	1.941E-03	7.790E-04
0.8	0.59971	0.56581	0.58078	0.60145	0.60771	1.899E-02	2.126E-02	2.255E-03	8.145E-04
0.9	0.54843	0.51675	0.52615	0.54907	0.55663	1.688E-02	1.878E-02	2.642E-03	8.350E-04
1	0.50000	0.47082	0.47643	0.50240	0.50781	1.497E-02	1.659E-02	2.823E-03	8.458E-04
IMSE						0.0245087	0.0303787	0.0014665	0.0006079
Best / sample size (n)						S_MLE	S_MLE	S_MLE	S_MLE
Best / model						S_MLE			

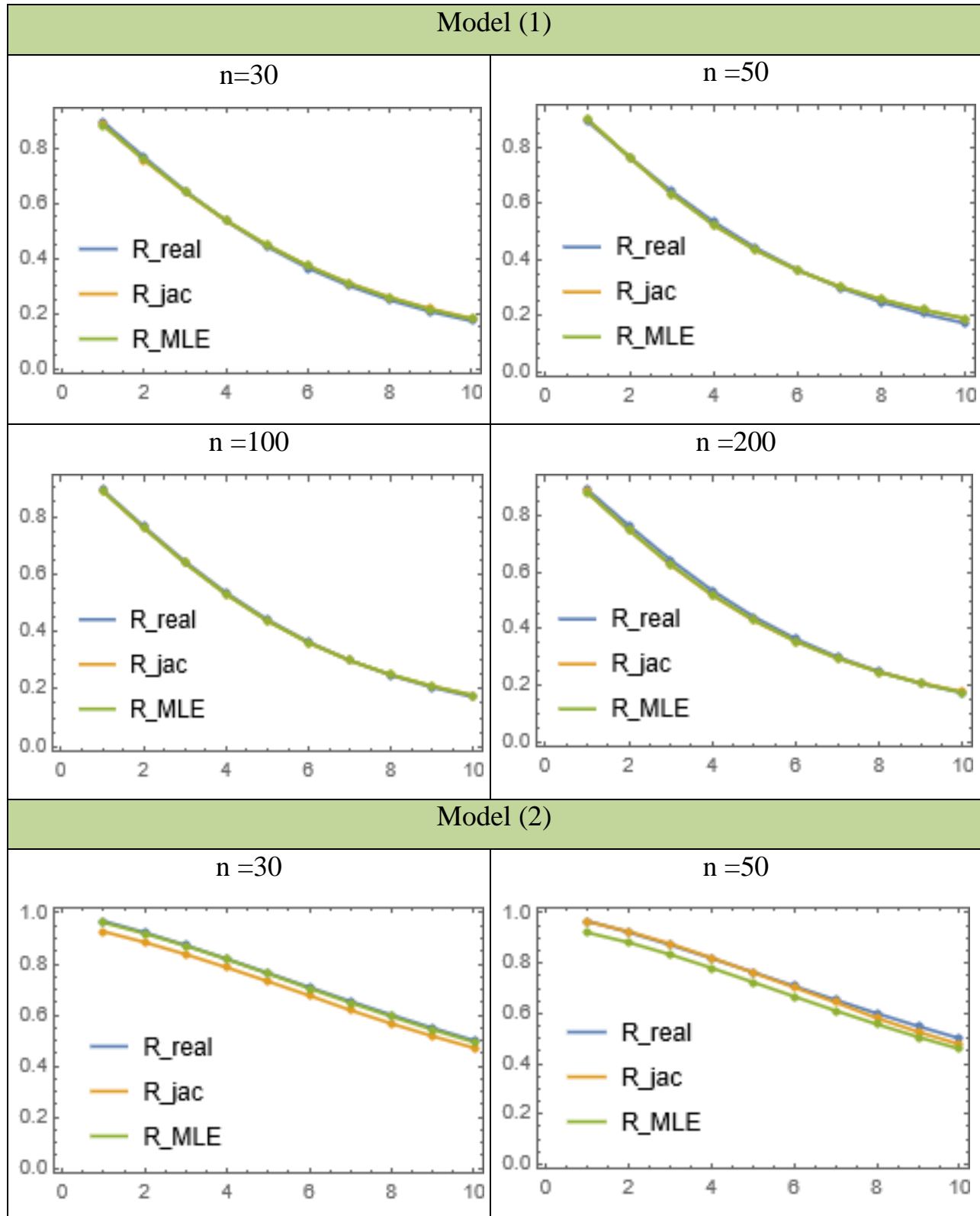
Model 3 ($\delta=1.5, \beta=1.5, 1=\lambda, \alpha=1$)									
ti	S_real	S_MLE				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.82492	0.84643	0.83840	0.81957	0.83874	3.008E-03	3.388E-03	1.786E-04	6.668E-04
0.2	0.71347	0.73835	0.71642	0.70911	0.72623	3.952E-03	3.436E-03	2.366E-04	7.387E-04
0.3	0.62433	0.64979	0.61755	0.62192	0.63456	4.172E-03	3.347E-03	3.928E-04	7.268E-04
0.4	0.55066	0.57567	0.53762	0.55026	0.55837	4.106E-03	3.486E-03	5.672E-04	6.893E-04
0.5	0.48892	0.51293	0.47269	0.49021	0.49445	3.939E-03	3.657E-03	7.195E-04	6.308E-04
0.6	0.43671	0.45943	0.41948	0.43927	0.44043	3.748E-03	3.738E-03	8.380E-04	5.590E-04
0.7	0.39226	0.41355	0.37542	0.39569	0.39450	3.557E-03	3.711E-03	9.239E-04	4.840E-04
0.8	0.35417	0.37397	0.33854	0.35813	0.35521	3.367E-03	3.601E-03	9.823E-04	4.137E-04
0.9	0.32135	0.33965	0.30735	0.32558	0.32140	3.178E-03	3.438E-03	1.019E-03	3.526E-04
1	0.29289	0.30972	0.28074	0.29721	0.29217	2.988E-03	3.248E-03	1.040E-03	3.022E-04
IMSE						0.0036014	0.0035049	0.0006898	0.0005564
ti	S_real	S_jac				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.82492	0.84596	0.83846	0.81957	0.83874	3.122E-03	3.427E-03	1.881E-04	6.693E-04
0.2	0.71347	0.73834	0.71644	0.70910	0.72623	4.105E-03	3.494E-03	2.522E-04	7.423E-04
0.3	0.62433	0.65045	0.61755	0.62192	0.63456	4.410E-03	3.419E-03	4.127E-04	7.312E-04
0.4	0.55066	0.57712	0.53761	0.55027	0.55837	4.426E-03	3.567E-03	5.894E-04	6.943E-04
0.5	0.48892	0.51513	0.47268	0.49022	0.49445	4.288E-03	3.741E-03	7.426E-04	6.360E-04
0.6	0.43671	0.46223	0.41946	0.43928	0.44043	4.065E-03	3.822E-03	8.612E-04	5.642E-04
0.7	0.39226	0.41673	0.37539	0.39570	0.39450	3.798E-03	3.793E-03	9.465E-04	4.891E-04
0.8	0.35417	0.37732	0.33851	0.35814	0.35521	3.514E-03	3.679E-03	1.004E-03	4.185E-04
0.9	0.32135	0.34295	0.30732	0.32559	0.32140	3.232E-03	3.512E-03	1.040E-03	3.571E-04
1	0.29289	0.31281	0.28070	0.29722	0.29217	2.965E-03	3.318E-03	1.060E-03	3.063E-04
IMSE						0.0037925	0.0035770	0.0007097	0.0005608
Best / sample size (n)						S_MLE	S_MLE	S_MLE	S_MLE
Best / model						S_MLE			

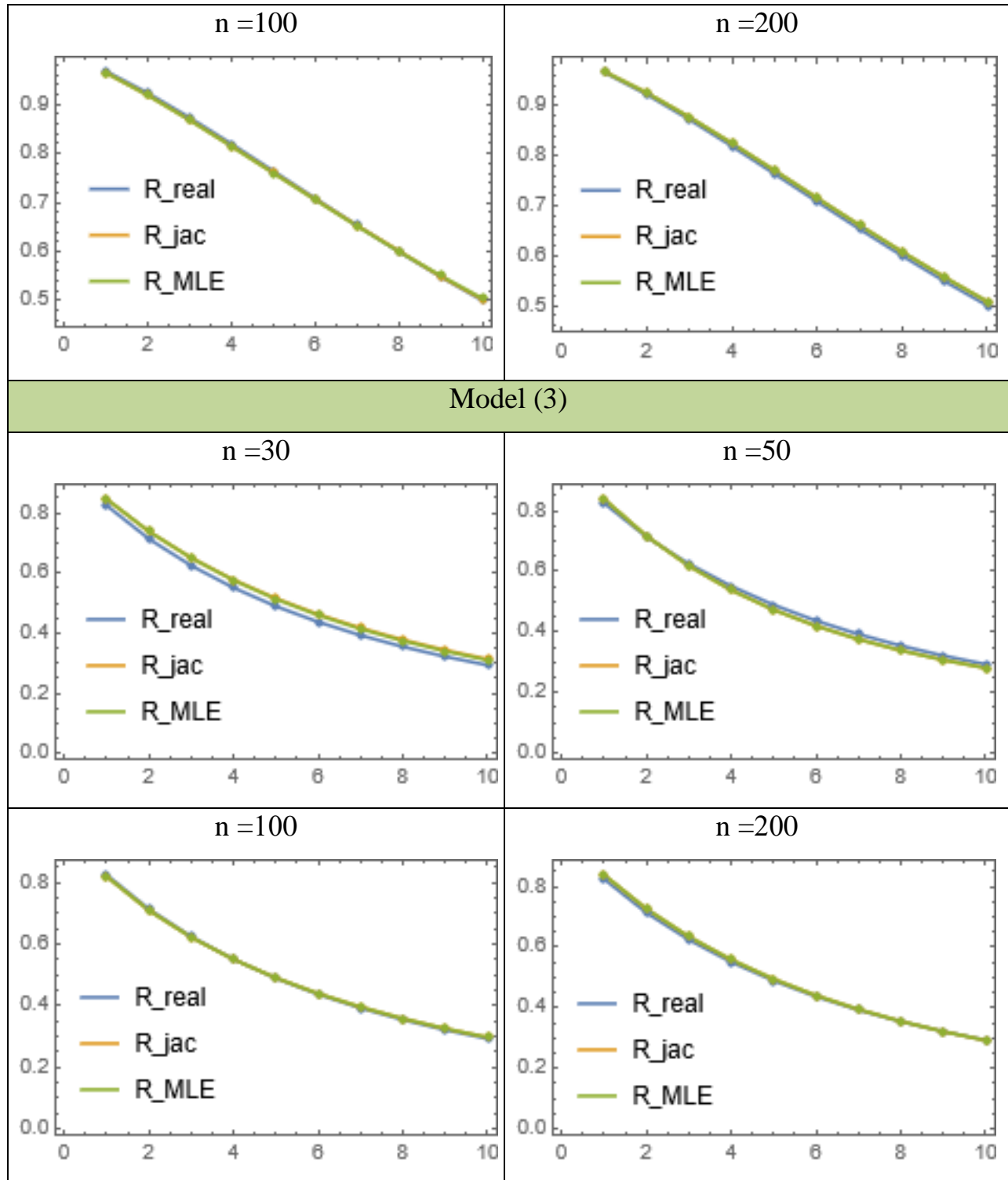
Model 4 ($\delta=1.5, \beta=0.5, 10=\lambda, \alpha=1$)									
ti	S_real	S_MLE				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.94386	0.95330	0.95464	0.93652	0.95352	7.730E-04	6.554E-04	4.161E-04	1.992E-04
0.2	0.90585	0.91771	0.91981	0.89686	0.91880	1.528E-03	1.119E-03	6.464E-04	3.443E-04
0.3	0.87285	0.88523	0.88756	0.86292	0.88757	2.261E-03	1.373E-03	7.813E-04	4.320E-04
0.4	0.84292	0.85499	0.85711	0.83241	0.85856	2.963E-03	1.486E-03	8.612E-04	4.800E-04
0.5	0.81521	0.82659	0.82820	0.80437	0.83127	3.621E-03	1.517E-03	9.082E-04	5.022E-04
0.6	0.78926	0.79981	0.80068	0.77829	0.80540	4.224E-03	1.507E-03	9.354E-04	5.083E-04
0.7	0.76479	0.77446	0.77447	0.75384	0.78076	4.764E-03	1.483E-03	9.506E-04	5.052E-04
0.8	0.74159	0.75041	0.74948	0.73078	0.75725	5.237E-03	1.460E-03	9.586E-04	4.973E-04
0.9	0.71953	0.72754	0.72565	0.70895	0.73475	5.643E-03	1.448E-03	9.624E-04	4.877E-04
1	0.69849	0.70576	0.70291	0.68821	0.71320	5.983E-03	1.449E-03	9.637E-04	4.782E-04
IMSE						0.0036997	0.0013497	0.0008384	0.0004434
ti	S_real	S_jac				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.94386	0.95236	0.95429	0.93652	0.95352	8.331E-04	6.728E-04	4.199E-04	2.000E-04
0.2	0.90585	0.91688	0.91952	0.89686	0.91881	1.628E-03	1.147E-03	6.521E-04	3.457E-04
0.3	0.87285	0.88448	0.88736	0.86292	0.88757	2.380E-03	1.407E-03	7.886E-04	4.339E-04
0.4	0.84292	0.85432	0.85701	0.83241	0.85856	3.096E-03	1.529E-03	8.699E-04	4.823E-04
0.5	0.81521	0.82601	0.82821	0.80437	0.83127	3.765E-03	1.570E-03	9.184E-04	5.048E-04
0.6	0.78926	0.79933	0.80081	0.77829	0.80540	4.378E-03	1.570E-03	9.470E-04	5.112E-04
0.7	0.76479	0.77409	0.77471	0.75384	0.78077	4.928E-03	1.554E-03	9.636E-04	5.083E-04
0.8	0.74159	0.75017	0.74985	0.73078	0.75725	5.411E-03	1.539E-03	9.730E-04	5.007E-04
0.9	0.71953	0.72744	0.72613	0.70895	0.73476	5.829E-03	1.532E-03	9.781E-04	4.913E-04
1	0.69849	0.70581	0.70351	0.68821	0.71320	6.183E-03	1.537E-03	9.807E-04	4.819E-04
IMSE						0.0038433	0.0014058	0.0008491	0.0004460
Best / sample size (n)						S_MLE	S_MLE	S_MLE	S_MLE
Best / model						S_MLE			

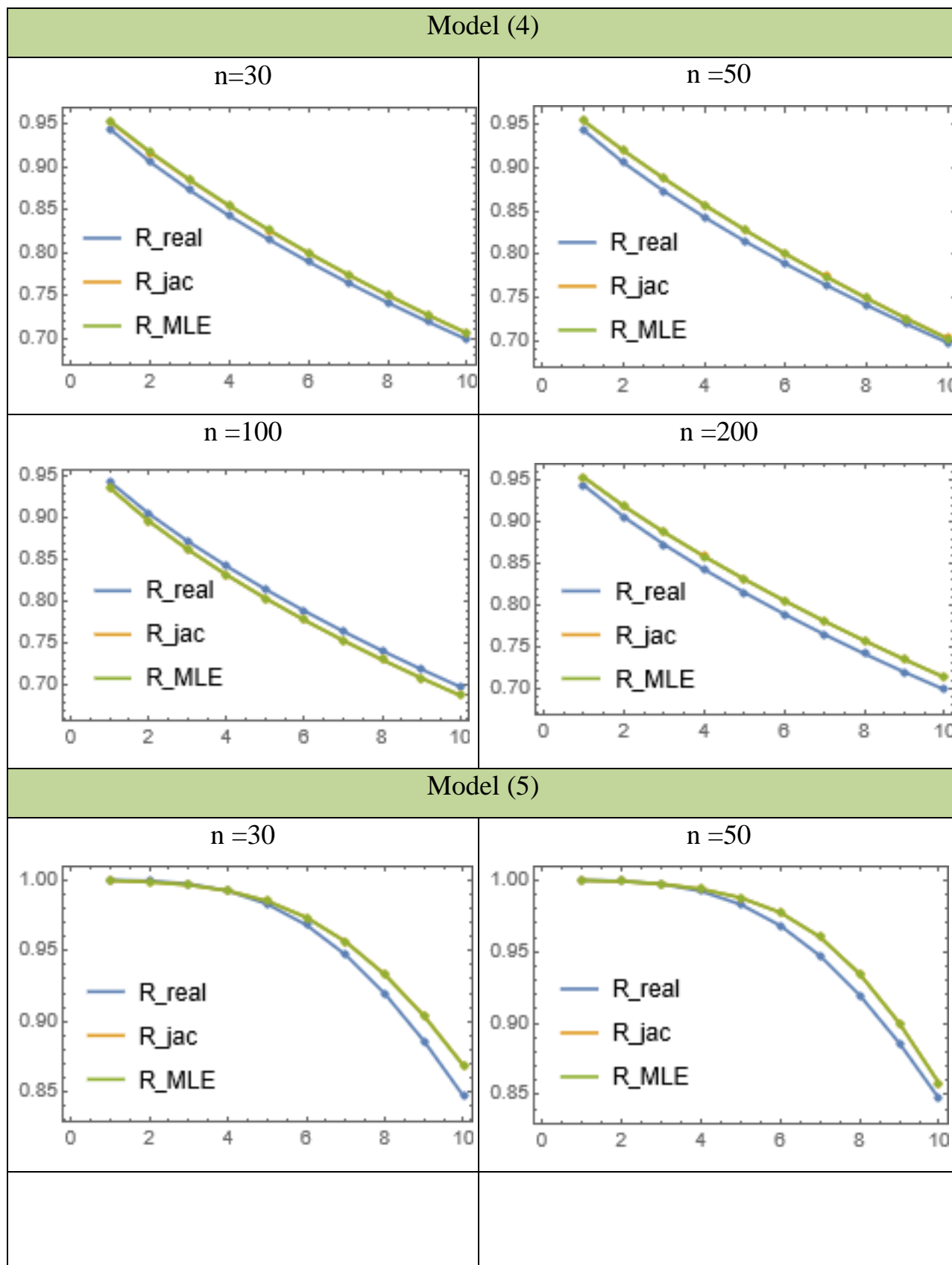
Model 5 ($\delta=2.5, \beta=1.5, 2.5=\lambda, \alpha=1$)									
ti	S_real	S_MLE				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.99996	0.99969	0.99989	0.99988	0.99992	5.969E-07	4.801E-08	3.703E-08	1.703E-08
0.2	0.99940	0.99866	0.99919	0.99912	0.99939	7.524E-06	2.186E-06	1.166E-06	6.926E-07
0.3	0.99731	0.99650	0.99737	0.99698	0.99777	3.230E-05	2.028E-05	8.420E-06	5.956E-06
0.4	0.99233	0.99241	0.99383	0.99239	0.99403	9.225E-05	9.848E-05	3.259E-05	2.600E-05
0.5	0.98303	0.98519	0.98773	0.98374	0.98675	2.149E-04	3.267E-04	8.232E-05	7.443E-05
0.6	0.96821	0.97351	0.97738	0.96914	0.97445	4.392E-04	7.951E-04	1.391E-04	1.578E-04
0.7	0.94712	0.95631	0.96023	0.94720	0.95591	8.034E-04	1.450E-03	1.642E-04	2.677E-04
0.8	0.91958	0.93302	0.93443	0.91772	0.93051	1.314E-03	2.089E-03	1.548E-04	3.851E-04
0.9	0.88600	0.90364	0.89989	0.88158	0.89842	1.925E-03	2.552E-03	1.535E-04	4.919E-04
1	0.84728	0.86871	0.85796	0.84027	0.86046	2.562E-03	2.802E-03	1.996E-04	5.780E-04
IMSE						0.0007391	0.0010136	0.0000936	0.0001988
ti	S_real	S_jac				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.99996	0.99969	0.99989	0.99988	0.99992	6.251E-07	5.220E-08	3.851E-08	1.721E-08
0.2	0.99940	0.99867	0.99918	0.99911	0.99939	7.587E-06	2.274E-06	1.194E-06	6.965E-07
0.3	0.99731	0.99650	0.99736	0.99697	0.99777	3.228E-05	2.075E-05	8.552E-06	5.978E-06
0.4	0.99233	0.99240	0.99382	0.99238	0.99402	9.232E-05	9.991E-05	3.297E-05	2.608E-05
0.5	0.98303	0.98519	0.98773	0.98374	0.98676	2.172E-04	3.299E-04	8.318E-05	7.465E-05
0.6	0.96821	0.97358	0.97739	0.96915	0.97446	4.502E-04	8.010E-04	1.409E-04	1.583E-04
0.7	0.94712	0.95648	0.96026	0.94721	0.95591	8.325E-04	1.460E-03	1.672E-04	2.686E-04
0.8	0.91958	0.93328	0.93448	0.91773	0.93052	1.370E-03	2.106E-03	1.595E-04	3.864E-04
0.9	0.88600	0.90396	0.89994	0.88158	0.89843	2.016E-03	2.579E-03	1.607E-04	4.936E-04
1	0.84728	0.86903	0.85802	0.84028	0.86046	2.684E-03	2.839E-03	2.097E-04	5.802E-04
IMSE						0.0007703	0.0010238	0.0000964	0.0001995
Best / sample size (n)						S_MLE	S_MLE	S_MLE	S_MLE
Best / model						S_MLE			

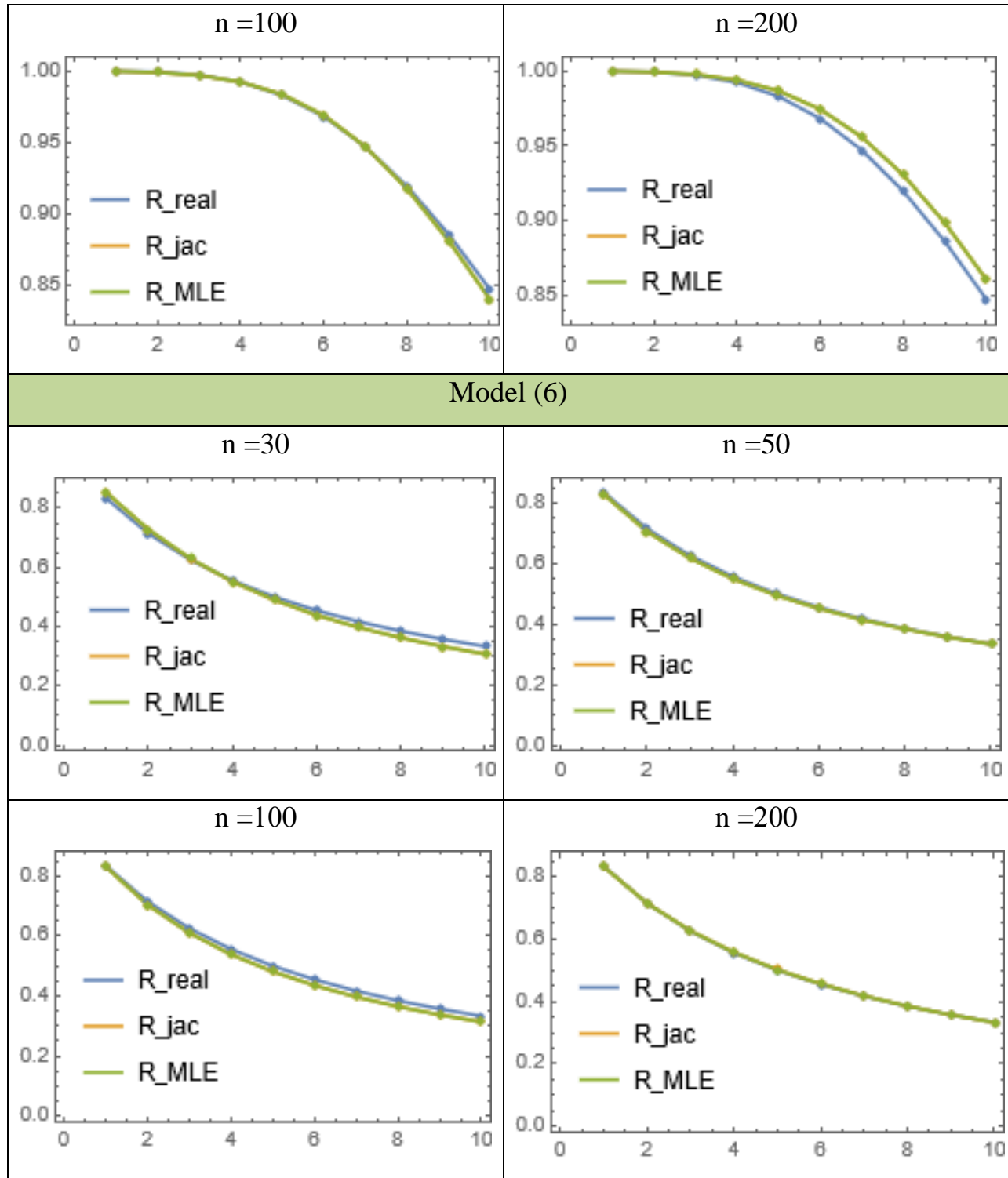
Model 6 ($\delta=1, \beta=1, 1=\lambda, \alpha=0.5$)									
ti	S_real	S_MLE				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.83333	0.85321	0.82664	0.82979	0.83183	3.681E-03	3.376E-03	3.076E-04	2.179E-04
0.2	0.71429	0.72848	0.70468	0.70332	0.71449	6.673E-03	5.792E-03	4.284E-04	4.929E-04
0.3	0.62500	0.63008	0.61615	0.60976	0.62627	8.117E-03	6.356E-03	6.466E-04	8.119E-04
0.4	0.55556	0.55208	0.54824	0.53795	0.55728	8.997E-03	6.115E-03	8.565E-04	1.049E-03
0.5	0.50000	0.48957	0.49424	0.48111	0.50174	9.577E-03	5.600E-03	1.038E-03	1.188E-03
0.6	0.45455	0.43879	0.45018	0.43497	0.45602	9.884E-03	5.031E-03	1.193E-03	1.250E-03
0.7	0.41667	0.39695	0.41352	0.39678	0.41771	9.948E-03	4.494E-03	1.324E-03	1.260E-03
0.8	0.38462	0.36198	0.38250	0.36464	0.38512	9.825E-03	4.016E-03	1.437E-03	1.239E-03
0.9	0.35714	0.33240	0.35591	0.33723	0.35707	9.570E-03	3.603E-03	1.531E-03	1.201E-03
1	0.33333	0.30709	0.33285	0.31358	0.33267	9.232E-03	3.250E-03	1.610E-03	1.156E-03
IMSE						0.0085505	0.0047633	0.0010372	0.0009865
ti	S_real	S_jac				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.83333	0.85291	0.82659	0.82970	0.83188	3.721E-03	3.396E-03	3.177E-04	2.196E-04
0.2	0.71429	0.72770	0.70471	0.70313	0.71473	6.727E-03	5.851E-03	4.539E-04	5.061E-04
0.3	0.62500	0.62917	0.61626	0.60958	0.62655	8.217E-03	6.444E-03	6.831E-04	8.300E-04
0.4	0.55556	0.55124	0.54839	0.53781	0.55755	9.143E-03	6.220E-03	8.981E-04	1.066E-03
0.5	0.50000	0.48889	0.49441	0.48102	0.50197	9.765E-03	5.712E-03	1.080E-03	1.201E-03
0.6	0.45455	0.43832	0.45035	0.43493	0.45621	1.011E-02	5.144E-03	1.233E-03	1.257E-03
0.7	0.41667	0.39669	0.41367	0.39678	0.41784	1.021E-02	4.603E-03	1.362E-03	1.262E-03
0.8	0.38462	0.36195	0.38263	0.36468	0.38521	1.011E-02	4.120E-03	1.470E-03	1.236E-03
0.9	0.35714	0.33257	0.35601	0.33730	0.35712	9.867E-03	3.701E-03	1.561E-03	1.194E-03
1	0.33333	0.30744	0.33292	0.31368	0.33267	9.539E-03	3.342E-03	1.636E-03	1.145E-03
IMSE						0.0087399	0.0048533	0.0010695	0.0009917
Best / sample size (n)						S_MLE	S_MLE	S_MLE	S_MLE
Best / model						S_MLE			

الشكل (6-3)
يوضح نتائج تجربة المحاكاة لتوزيع مارشال اولكن داکوم









من خلال النتائج المبينة في الجدول (3-7) نلاحظ مايلي:

- 1- إنّ الافضلية لطريقة الإمكان الأعظم (S_MLE) مقارنة بطريقة Jackknife (S_Jac) في تقدير دالة بقاء توزيع مارشال اولكن داكوم لإمتلاكها أقل متوسط مربعات خطأ تكاملي (IMSE) حسب احجام العينات والنماذج المفترضة كافة.
 - 2- إنّ تقديرات دالة البقاء باستعمال طريقة الإمكان الأعظم وطريقة Jackknife قد اظهرتا متوسط أقرب الى القيم الحقيقية لدالة البقاء وذلك للنماذج واحجام العينات المفترضة كافة.
 - 3- إنّ قيم دالة البقاء الحقيقية والمقدرة تتناقص بزيادة الزمن (t_i) وهي على الدوام تقع قيمها ضمن الفترة (1,0).
 - 4- إنّ قيم المقياس الاحصائي (MSE) والمقياس (IMSE) تتناقص بازدياد حجم العينة.
- وكذلك الشكل (3-6) يوضح ماتوصل اليه في ما يخص اقتراب القيم التقديرية لدالة البقاء من القيم الحقيقية عند كل حجم من حجوم العينات المفترضة.

3-3 القسم الثاني: الجانب التطبيقي

خصص هذا القسم لاستعراض تحليل بيانات عينة الدراسة المتمثلة ببيانات البقاء لعينة من المرضى المصابين بفيروس كورونا (Covid-19) من تاريخ دخولهم المستشفى لحين الوفاة مقاسة بالأيام في محافظة البصرة، فضلا عن تقدير دالة البقاء للعينة المذكورة آنفاً.

1-3-3 البيانات الحقيقية**فيروس كورونا Covid-19**

هو أحد فصائل الفيروسات المعروفة والواسعة الانتشار والتي تسبب اعراضا مثل الحمى ونزلات البرد وغيرها، تم اكتشاف فيروس كورونا (سارس 2) من قبل منظمة الصحة العالمية ولأول مرة في الصين في 31 كانون الأول / ديسمبر 2019 في مدينة ووهان الصينية، انتشر هذا الفيروس من مدن الصين الشعبية الى الدول الأخرى وأصبح يمثل جائحة عالمية يهدد حياة الانسان وسبباً أزمة اقتصادية واجتماعية وصحية.

قد تظهر علامات وأعراض Covid-19 بعد يومين إلى 14 يوماً من التعرض له. وتسمى المدة اللاحقة للتعرض والسابقة لظهور الأعراض "مدة الحضانة". يمكن أن تتضمن العلامات والأعراض الشائعة (هي الحمى والسعال وضيق التنفس والإرهاق، ولكن في الحالات المتقدمة من المرض فقد يصاب المريض بالآم، وانسداد الأنف، والرشح، وآلام في الحلق وإسهال)، وقد تشمل الأعراض المبكرة فقدان حاستي الذوق أو الشم.

على الرغم من أن أعراض معظم المصابين بـ Covid-19 تتراوح بين خفيفة إلى معتدلة، يمكن أن يسبب المرض مضاعفات طبية شديدة وأن يؤدي إلى الوفاة بالنسبة لبعض الأشخاص، إن كبار السن أو من لديهم مشاكل صحية أصلاً أكثر عرضة للإصابة بالمرض الشديد عند العدوى بـ Covid-19 ولا بد لمن يعانون ارتفاع درجات الحرارة والسعال وضيق التنفس الحصول على دعم طبي. ينتقل وباء Covid-19 عن طريق تعرض الأشخاص لرذاذ المرضى الناتج عن السعال والعطس ولمسهم للفم والأنف والعينين، كما ينتقل عن طريق لمس اليدين للأسطح الملوثة بالرذاذ الحامل للفيروس.

ويعد هذا المرض أو الوباء من أمراض العصر الحالية التي من الأهمية اجراء الدراسات عنها وتطبيق البيانات الناتجة عنها على الطرائق الاحصائية والرياضية التي يتناولها الباحثون .

تم جمع البيانات والتي تتمثل في مدة بقاء المريض على قيد الحياة لحين الوفاة للمرضى المصابين بفايروس كورونا COVID-19 من سجلات المرضى الراقدين في مستشفى البصرة التعليمي في محافظة البصرة، اذ تم أخذ عينة عشوائية بحجم (n=155) مريض مصاب وتمثلت هذه البيانات بقياس أوقات البقاء (Lifetimes) بالأيام تحت العلاج لحين الوفاة وقد تم اعتبار مدة البقاء منذ التشخيص واخذ العلاج ولحين الوفاة واعتبارا من 2020/7/1 لغاية 2020/8/31 ، والجدول الآتي يوضح البيانات الحقيقية قيد الدراسة.

جدول (8-3)

يمثل مدة بقاء المريض المصاب بفايروس كورونا على قيد الحياة من تاريخ الدخول للمستشفى ولحين الوفاة (بالأيام)

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4
4	4	4	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	6	6
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7
7	7	7	7	7	8	8	8	8	8	9	9	9	9	9
9	9	10	10	10	10	10	10	10	10	10	11	11	11	12
12	12	12	12	13	13	13	14	14	14	14	14	15	15	15
15	15	15	15	16	16	16	16	16	16	17	17	17	18	18
18	18	19	19	20	20	21	22	22	22	24	25	27	31	33
33	34	34	46	47										

والجدول (9-3) ادناه يبين أبرز مؤشرات البيانات الحقيقية

جدول (9-3)

يبين أبرز احصاءات العينة للبيانات الحقيقية

Min	1
Mean	9.8
Variance	73.1535
Skewness	1.7151
Kurtosis	6.7778
Median	7
Standard Deviation	8.55298
Max	47

2-3-3 تحليل البيانات

لغرض معرفة مدى ملاءمة البيانات الحقيقية في الجدول (8-3) للتوزيعات الاحتمالية ((
 التوزيع الاسي (Exp) ، توزيع ليندلي (Lin) ، توزيع داکوم (Dag))، توزيع مارشال اولكن
 الاسي (M-O- Exp) ، توزيع مارشال اولكن ليندلي (M-O- Lin) ، توزيع مارشال اولكن داکوم
 ((M-O- Dag)) فقد تم اجراء اختبار حسن المطابقة للبيانات الحقيقية عن طريق اختبارين
 (Cramer- Von Mises, Anderson-Darling) وبحسب الفرضية :

$$H_0 = \text{البيانات تلائم التوزيع}$$

$$H_1 = \text{البيانات لا تلائم التوزيع}$$

وتكون صيغة الاختبارين (Cramer- Von Mises, Anderson-Darling)^[24] بالشكل الآتي:

-1-Anderson-Darling

$$A_d^* = n \sum_{i=0}^n \frac{[F_n(x) - F(x)]f(x)}{F(x)[1 - F(x)]} \quad (3 - 3)$$

إذ إن:

تمثل دالة التوزيع التجريبي $F_n(x)$:

-2- Cramer- Von Mises

$$W_d^* = n \sum_{i=0}^n [F_n(x) - F(x)f(x)] \quad (4 - 3)$$

ويوضح الجدول (10-3) أدناه قيم اختبارات حسن المطابقة لعينة الدراسة.

جدول (10-3)

قيم اختبارات حسن المطابقة

Distributions	Cramer- V		Anderson-D		Decision
	statistic	P-Value	statistic	P-Value	
Exp	0.257202	0.0592779	1.95775	0.0675301	don't reject H ₀
M-O- Exp	0.0747671	0.722657	0.793402	0.485481	don't reject H ₀
Lin	0.229116	0.0551755	1.67465	0.0704462	don't reject H ₀
M-O- Lin	0.0909669	0.63099	0.774992	0.499082	don't reject H ₀
Dag	0.121316	0.490113	0.937944	0.391233	don't reject H ₀
M-O- Dag	0.0830434	0.674444	0.722426	0.540037	don't reject H ₀

يتبين من الجدول (10-3) الآتي:

1- ان قيمة P-Value للاختبارات (Anderson-Darling ، Cramer- Von Mises) أكبر من مستوى المعنوية (0.05) وهذا يؤدي الى عدم رفض فرضية العدم (ملاءمة البيانات الحقيقية للتوزيعات الاحتمالية قيد الدراسة).

2- إن قيمة P-Value للتوزيعات الاساسية ((التوزيع الاسي (Exp) ، توزيع ليندلي (Lin) ، توزيع داكوم (Dag))) أصغر من قيمة P-Value للتوزيعات الموسعة (توزيع مارشال ولكن الاسي (M-O- Exp) ، توزيع مارشال ولكن ليندلي (M-O- Lin) توزيع مارشال ولكن داكوم (M-O- Dag))) وهذا يدل على أنّ التوزيعات الموسعة أكثر ملائمة للعينة قيد الدراسة.

3-3-3 اختيار أفضل توزيع

سيتم استعمال معيار معلومات اكايكي (AIC) ومعيار معلومات اكايكي المصحح (AICc) لغرض تحديد أفضل توزيع يمثل ويصف عينة الدراسة وحصلنا على قيم المعايير الموضحة في الجدول (11-3) أدناه باستعمال برنامج (Mathematica 12.2)

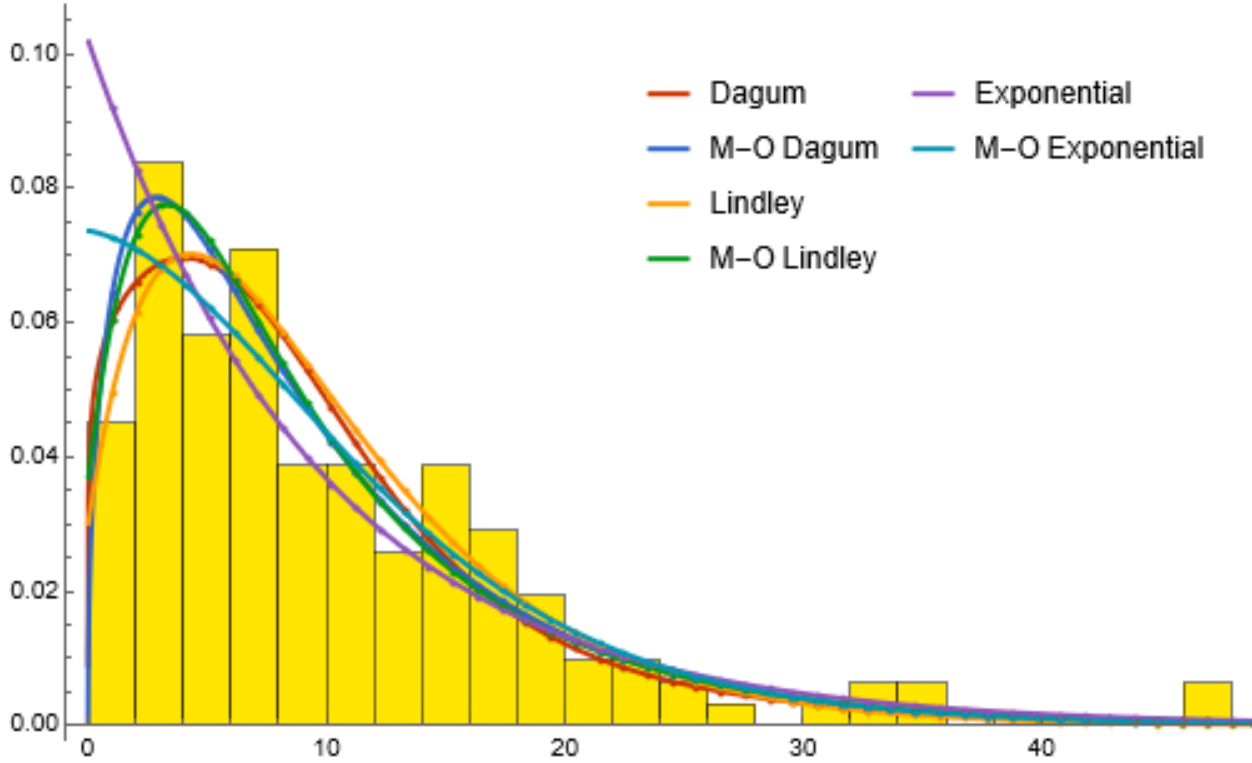
جدول (11-3)

قيم المعايير (AICc ، AIC)

Distributions	Estimate of Parameter	AIC	AICc
Exp	$\theta = 0.102041$	1280.59	1280.62
M-O- Exp	$\theta = 0.137716$	1279.73	1279.79
	$\alpha = 1.86832$		
Lin	$\theta = 0.187938$	1278.18	1278.21
M-O- Lin	$\theta = 0.140191$	1276.7	1276.77
	$\alpha = 0.471975$		
Dag	$\delta = 2.77604$	1279.67	1279.79
	$\beta = 0.411169$		
	$\lambda = 1280.38$		
M-O- Dag	$\delta = 4.14075$	1272.41	1272.61
	$\beta = 0.346163$		
	$\lambda = 807244.$		
	$\alpha = 0.186914$		

يتضح من الجدول (11-3) أعلاه افضلية توزيع مارشال اولكن داکوم (M-O- Dag) مقارنة بالتوزيعات الاحتمالية قيد الدراسة نتيجة امتلاكه أقل قيمة للمعايير (AICc ، AIC)، وبذلك يعد هو التوزيع الأفضل في تمثيل ووصف عينة الدراسة المتمثلة ببيانات البقاء لعينة من المرضى المصابين بفيروس كورونا (Covid-19) من تاريخ دخولهم المستشفى لحين الوفاة مقاسة بالأيام في محافظة البصرة.

والشكل (7-3) أدناه يوضح دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيعات الاحتمالية قيد الدراسة.



شكل (3-7) منحنيات دالة الكثافة الاحتمالية للبيانات الحقيقية وللتوزيعات الاحتمالية المحددة في الدراسة

4-3-3 تقدير دالة البقاء للبيانات الحقيقية

بعد ان تبين من القسم التجريبي أفضل طريقة الإمكان الأعظم في تقدير دالة البقاء لتوزيع مارشال اولكن داكوم، تم تقدير دالة البقاء على قيد الحياة و دالة الكثافة التجميعية ودالة المخاطرة بواسطتها للبيانات الحقيقية وتم ادراج النتائج في الجدول (3-12) الآتي:

جدول (3-12)

يبين مقدرات دالة البقاء و دالة الكثافة التجميعية ودالة المخاطرة للبيانات الحقيقية

i	t_i	$S(t)$	$F(t)$	$h(t)$
1.	1	0.953564	0.0464364	0.0671664
2.	1	0.953564	0.0464364	0.0671664
3.	1	0.953564	0.0464364	0.0671664

i	t_i	S(t)	F(t)	h(t)
4.	1	0.953564	0.0464364	0.0671664
5.	1	0.953564	0.0464364	0.0671664
6.	1	0.953564	0.0464364	0.0671664
7.	1	0.953564	0.0464364	0.0671664
8.	1	0.953564	0.0464364	0.0671664
9.	1	0.953564	0.0464364	0.0671664
10.	1	0.953564	0.0464364	0.0671664
11.	1	0.953564	0.0464364	0.0671664
12.	1	0.953564	0.0464364	0.0671664
13.	1	0.953564	0.0464364	0.0671664
14.	1	0.953564	0.0464364	0.0671664
15.	2	0.882154	0.117846	0.0865655
16.	2	0.882154	0.117846	0.0865655
17.	2	0.882154	0.117846	0.0865655
18.	2	0.882154	0.117846	0.0865655
19.	2	0.882154	0.117846	0.0865655
20.	2	0.882154	0.117846	0.0865655
21.	2	0.882154	0.117846	0.0865655
22.	2	0.882154	0.117846	0.0865655
23.	2	0.882154	0.117846	0.0865655
24.	2	0.882154	0.117846	0.0865655
25.	2	0.882154	0.117846	0.0865655

i	t_i	S(t)	F(t)	h(t)
26.	2	0.882154	0.117846	0.0865655
27.	2	0.882154	0.117846	0.0865655
28.	2	0.882154	0.117846	0.0865655
29.	2	0.882154	0.117846	0.0865655
30.	3	0.804076	0.195924	0.0978628
31.	3	0.804076	0.195924	0.0978628
32.	3	0.804076	0.195924	0.0978628
33.	3	0.804076	0.195924	0.0978628
34.	3	0.804076	0.195924	0.0978628
35.	3	0.804076	0.195924	0.0978628
36.	3	0.804076	0.195924	0.0978628
37.	3	0.804076	0.195924	0.0978628
38.	3	0.804076	0.195924	0.0978628
39.	3	0.804076	0.195924	0.0978628
40.	3	0.804076	0.195924	0.0978628
41.	4	0.726352	0.273648	0.104925
42.	4	0.726352	0.273648	0.104925
43.	4	0.726352	0.273648	0.104925
44.	4	0.726352	0.273648	0.104925
45.	4	0.726352	0.273648	0.104925
46.	4	0.726352	0.273648	0.104925
47.	4	0.726352	0.273648	0.104925

i	t_i	S(t)	F(t)	h(t)
48.	4	0.726352	0.273648	0.104925
49.	5	0.652414	0.347586	0.109461
50.	5	0.652414	0.347586	0.109461
51.	5	0.652414	0.347586	0.109461
52.	5	0.652414	0.347586	0.109461
53.	5	0.652414	0.347586	0.109461
54.	5	0.652414	0.347586	0.109461
55.	5	0.652414	0.347586	0.109461
56.	5	0.652414	0.347586	0.109461
57.	5	0.652414	0.347586	0.109461
58.	5	0.652414	0.347586	0.109461
59.	6	0.583842	0.416158	0.112431
60.	6	0.583842	0.416158	0.112431
61.	6	0.583842	0.416158	0.112431
62.	6	0.583842	0.416158	0.112431
63.	6	0.583842	0.416158	0.112431
64.	6	0.583842	0.416158	0.112431
65.	6	0.583842	0.416158	0.112431
66.	6	0.583842	0.416158	0.112431
67.	6	0.583842	0.416158	0.112431
68.	6	0.583842	0.416158	0.112431
69.	6	0.583842	0.416158	0.112431

i	t_i	S(t)	F(t)	h(t)
70.	6	0.583842	0.416158	0.112431
71.	7	0.521202	0.478798	0.114429
72.	7	0.521202	0.478798	0.114429
73.	7	0.521202	0.478798	0.114429
74.	7	0.521202	0.478798	0.114429
75.	7	0.521202	0.478798	0.114429
76.	7	0.521202	0.478798	0.114429
77.	7	0.521202	0.478798	0.114429
78.	7	0.521202	0.478798	0.114429
79.	7	0.521202	0.478798	0.114429
80.	7	0.521202	0.478798	0.114429
81.	8	0.464503	0.535497	0.115833
82.	8	0.464503	0.535497	0.115833
83.	8	0.464503	0.535497	0.115833
84.	8	0.464503	0.535497	0.115833
85.	8	0.464503	0.535497	0.115833
86.	9	0.413471	0.586529	0.116886
87.	9	0.413471	0.586529	0.116886
88.	9	0.413471	0.586529	0.116886
89.	9	0.413471	0.586529	0.116886
90.	9	0.413471	0.586529	0.116886
91.	9	0.413471	0.586529	0.116886

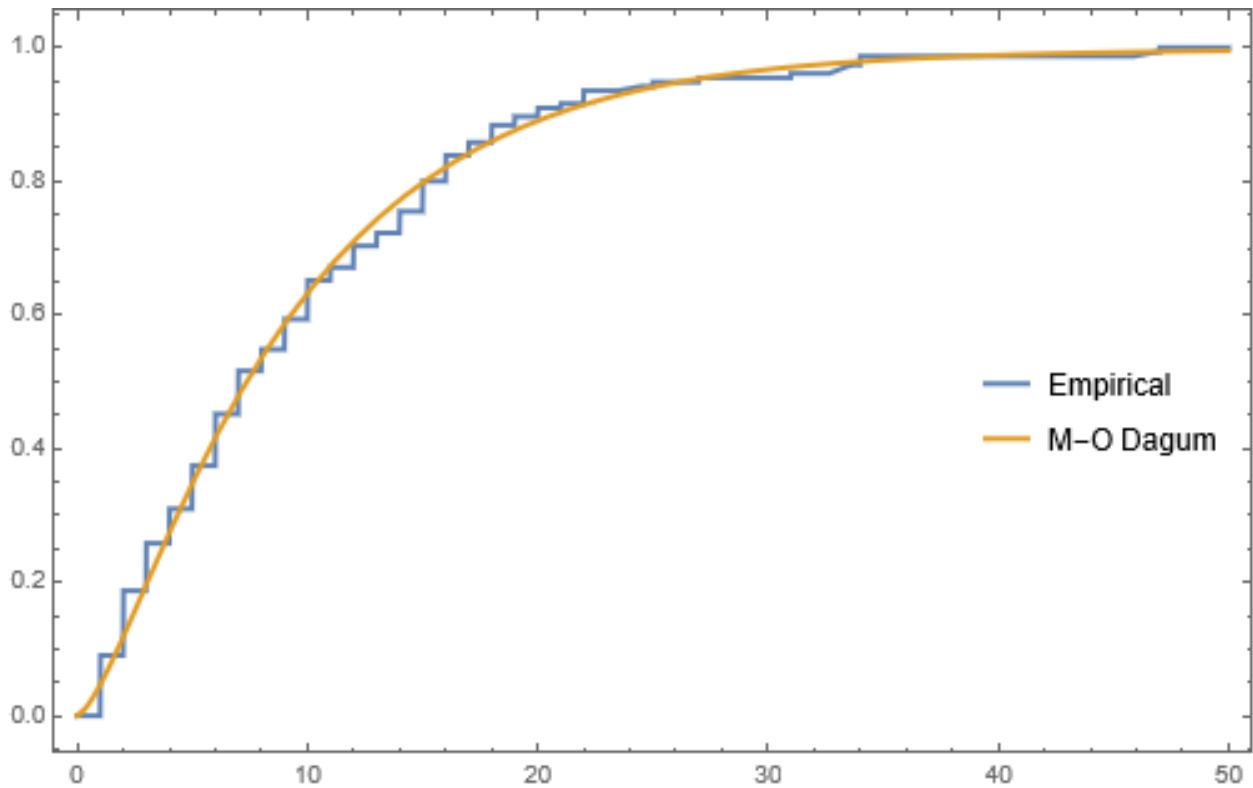
i	t_i	S(t)	F(t)	h(t)
92.	9	0.413471	0.586529	0.116886
93.	10	0.367697	0.632303	0.117747
94.	10	0.367697	0.632303	0.117747
95.	10	0.367697	0.632303	0.117747
96.	10	0.367697	0.632303	0.117747
97.	10	0.367697	0.632303	0.117747
98.	10	0.367697	0.632303	0.117747
99.	10	0.367697	0.632303	0.117747
100.	10	0.367697	0.632303	0.117747
101.	10	0.367697	0.632303	0.117747
102.	11	0.326727	0.673273	0.118511
103.	11	0.326727	0.673273	0.118511
104.	11	0.326727	0.673273	0.118511
105.	12	0.290108	0.709892	0.119233
106.	12	0.290108	0.709892	0.119233
107.	12	0.290108	0.709892	0.119233
108.	12	0.290108	0.709892	0.119233
109.	12	0.290108	0.709892	0.119233
110.	13	0.257409	0.742591	0.11994
111.	13	0.257409	0.742591	0.11994
112.	13	0.257409	0.742591	0.11994
113.	14	0.228235	0.771765	0.120634

i	t_i	S(t)	F(t)	h(t)
114.	14	0.228235	0.771765	0.120634
115.	14	0.228235	0.771765	0.120634
116.	14	0.228235	0.771765	0.120634
117.	14	0.228235	0.771765	0.120634
118.	15	0.202229	0.797771	0.121307
119.	15	0.202229	0.797771	0.121307
120.	15	0.202229	0.797771	0.121307
121.	15	0.202229	0.797771	0.121307
122.	15	0.202229	0.797771	0.121307
123.	15	0.202229	0.797771	0.121307
124.	15	0.202229	0.797771	0.121307
125.	16	0.17907	0.82093	0.121938
126.	16	0.17907	0.82093	0.121938
127.	16	0.17907	0.82093	0.121938
128.	16	0.17907	0.82093	0.121938
129.	16	0.17907	0.82093	0.121938
130.	16	0.17907	0.82093	0.121938
131.	17	0.158468	0.841532	0.122499
132.	17	0.158468	0.841532	0.122499
133.	17	0.158468	0.841532	0.122499
134.	18	0.140164	0.859836	0.122962
135.	18	0.140164	0.859836	0.122962

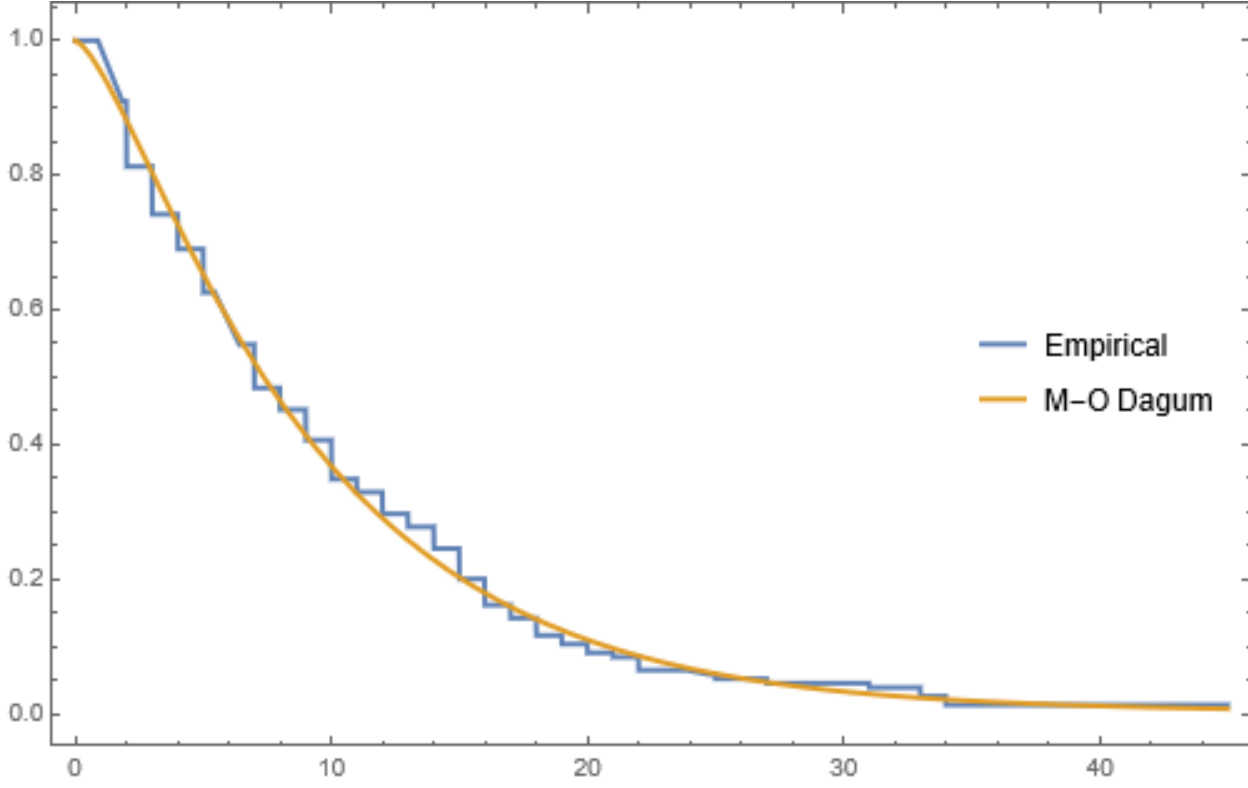
i	t_i	S(t)	F(t)	h(t)
136.	18	0.140164	0.859836	0.122962
137.	18	0.140164	0.859836	0.122962
138.	19	0.123924	0.876076	0.123298
139.	19	0.123924	0.876076	0.123298
140.	20	0.109537	0.890463	0.123479
141.	20	0.109537	0.890463	0.123479
142.	21	0.0968119	0.903188	0.123483
143.	22	0.0855725	0.914427	0.123296
144.	22	0.0855725	0.914427	0.123296
145.	22	0.0855725	0.914427	0.123296
146.	24	0.0669281	0.933072	0.122313
147.	25	0.0592453	0.940755	0.121521
148.	27	0.0465564	0.953444	0.119384
149.	31	0.0292095	0.970791	0.113391
150.	33	0.0233642	0.976636	0.109856
151.	33	0.0233642	0.976636	0.109856
152.	34	0.0209527	0.979047	0.10802
153.	34	0.0209527	0.979047	0.10802
154.	46	0.00654118	0.993459	0.0865826
155.	47	0.0060034	0.993997	0.0850074
Sum	1519	77.49998	77.50002	16.62555
Mean	9.8	0.5	0.5	0.107262

يتبين من الجدول (3-12) المذكور آنفاً:

- 1- إنّ دالة البقاء متناقصة بزيادة الزمن (أي تتناسب عكسياً مع الزمن) وهذا ما يتناسب مع النظرية الاحصائية.
- 2- قيم دالة الكثافة التجميعية تقع قيمها بين الصفر والواحد، وهي في تزايد وتتناسب طردياً مع الزمن.
- 3- إنّ مجموع قيم دالة البقاء $S(t)$ وقيم دالة الكثافة التجميعية CDF يساوي واحداً أي إن أحدهما متمم للآخر.
- 4- متوسط قيم دالة البقاء هو (0.5) أي أن متوسط احتمال بقاء المريض المصاب بالفايروس يساوي 50% لكل عشرة ايام تقريباً.
- 5- بلغ متوسط الوقت للوفاة MTTF (9.8) أي أن متوسط وقت وفاة المريض المصاب بالفايروس يبلغ عشرة ايام تقريباً.



شكل (3-8) دالة الكثافة التجميعية لتوزيع مارشال اولكن داكوم مقارنة بالتوزيع التجريبي بالنسبة للبيانات الحقيقية



شكل (9-3) شكل دالة البقاء لتوزيع مارشال اولكن داكوم مقارنة بالتوزيع التجريبي بالنسبة للبيانات الحقيقية

الفصل الرابع

الاستنتاجات والتوصيات

الاستنتاجات والتوصيات

توصلت الباحثة الى مجموعة من الاستنتاجات والتوصيات من خلال الجانب التجريبي والتطبيقي للدراسة.

1-4 الاستنتاجات

- 1- إن دالة البقاء متناقصة بزيادة الزمن (أي تتناسب عكسيا مع الزمن) وهذا مايتطابق مع ما تم عرضه في الجانب النظري.
- 2- قيم دالة الكثافة التجميعية تقع قيمها بين الصفر والواحد، وهي في تزايد وتتناسب طرديا مع الزمن.
- 3- أظهر الجانب التجريبي بالإعتماد على المعيار الاحصائي متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) أفضلية طريقة الإمكان الأعظم مقارنة بطريقة Jackknife في تقدير دالة بقاء التوزيعات الاساسية ((التوزيع الاسي (Exp) ، توزيع ليندلي (Lin) ، توزيع داکوم (Dag)) والتوزيعات الموسعة (توزيع مارشال اولكن الاسي (M-O- Exp)، توزيع مارشال اولكن ليندلي (M-O- Lin) توزيع مارشال اولكن داکوم (M-O- Dag)).
- 4- عن طريق مقارنة نتائج المعايير (AIC, AIC_C) كانت الأفضلية واضحة لتوزيع مارشال اولكن داکوم في تمثيل البيانات الحقيقية (بيانات البقاء لعينة من المرضى المصابين بفيروس كورونا (Covid-19) في محافظة البصرة.
- 5- متوسط قيم دالة البقاء هو (0.5) أي أن متوسط احتمال بقاء المريض المصاب بالفايروس يساوي 50% لكل عشرة ايام تقريبا.

2-4 التوصيات

- 1- استعمال طريقة الإمكان الأعظم لتقدير دالة البقاء للتوزيعات الاحتمالية ((التوزيع الاسي (Exp) ، توزيع ليندلي (Lin) ، توزيع داکوم (Dag))، توزيع مارشال اولكن الاسي (M-O- Exp) ، توزيع مارشال اولكن ليندلي (M-O- Lin) ، توزيع مارشال اولكن داکوم (M-O- Dag)).
- 2- تطبيق التوزيعات الاحتمالية المذكورة آنفاً على حالة البيانات تحت المراقبة.
- 3- إعتقاد الدراسة لدى وزارة الصحة للاستفادة منها لتفسير سلوك أنواع أخرى من الأمراض.
- 4- استعمال طرائق أخرى لتقدير دالة بقاء التوزيعات الاحتمالية قيد الدراسة ومقارنتها مع طريقة الإمكان الأعظم MLE.
- 5- استعمال توزيع مارشال اولكن داکوم المقترح من قبل الباحثة في دراسات البقاء على قيد الحياة.

المصادر

أولاً: المصادر العربية

القران الكريم

- 1- البدران، فراس منذر،(2014)، "تقدير دالة معولية لنموذج ليندلي للاجهاد والمتانة"، رسالة ماجستير، الجامعة المستنصرية، كلية الادارة والاقتصاد.
- 2- الباقر، زينب محمد باقر صادق،(2017)، "تقديرات دالة المعولية لتوزيع بواسون مع تطبيق عملي"، رسالة ماجستير في علوم الاحصاء، جامعة كربلاء/ كلية الادارة والاقتصاد/ قسم الاحصاء.
- 3- البياتي، أدهم محمد صاحب، (2020)، "تقديرات دالة البقاء لنموذج احتمالي مختلط (الاسي-كاما من الرتبة الثانية)"، رسالة ماجستير في علوم الاحصاء، جامعة كربلاء/ كلية الادارة والاقتصاد/ قسم الاحصاء.
- 4- حمزة، عبد الله أحمد (2018)، "دالة البقاء لمريضات سرطان الثدي في منطقة الفرات الاوسط"، رسالة ماجستير/ كلية علوم الحاسوب والرياضيات/ جامعة القادسية.
- 5- السلطان، سلوى نعيم جميل، (2020)، "تقديرات معلمات ودالة البقاء لتوزيع بيركس المعمم مع تطبيق عملي"، رسالة ماجستير في علوم الاحصاء، جامعة كربلاء/ كلية الادارة والاقتصاد/ قسم الاحصاء.
- 6- الشمري، نجاه عبد الجبار رجب، (2008)، "استخدام المحاكاة في مقارنة مقدرات التقمص لمعلمة الشكل لتوزيع وايبل لبيانات المراقبة"، أطروحة دكتوراه في علوم الأحصاء، جامعة بغداد/ كلية الإدارة والأقتصاد /قسم الاحصاء.
- 7- شريم، ماجد هبة الله ، (2005)، دراسة مقارنة لطرق التقدير الحصينة لدالة البقاء مع تطبيق عملي على مرض سرطان دم في اليمن، أطروحة دكتوراه / كلية الإدارة والاقتصاد / جامعة بغداد.
- 8- عبد الله، ثائرة نجم، (2018) "تقدير معلمة القياس لتوزيع ليندلي – دراسة مقارنة في تحليل أوقات الانتظار"، مجلة كلية الرافدين الجامعة للعلوم، العدد 43، 266-278.

- 9- العامري، بهاء عبد الرزاق قاسم،(2021)،"استعمال بعض التوزيعات المبتورة في بناء نظام خبير لتقدير الفترة المثلى لاستبدال المكائن والمعدات مع تطبيق عملي"، اطروحة دكتوراه في علوم الاحصاء، جامعة كربلاء/كلية الادارة والاقتصاد.
- 10- فرحان، إبتهاال حسين؛(2015)،"تقدير دالة البقاء لبيانات حقيقية كاملة لمرض سرطان الرئة"، رسالة ماجستير في علوم الرياضيات، كلية التربية ابن الهيثم، جامعة بغداد.
- 11- فهد، باقر كريم،(2018)،"اختيار أفضل طريقة لتقدير معالم توزيع كايا الاحتمالي مع تطبيق عملي"، رسالة ماجستير في علوم الاحصاء، جامعة كربلاء/كلية الادارة والاقتصاد.
- 12- لازم، جاسم حسن، (2012)، " مقارنة بعض طرائق تقدير دالة البقاء للتوزيع الاسي المبتور"، مجلة العلوم الاقتصادية والادارية، المجلد 18، العدد68، 419-403.
- 13- مهدي، منتظر جمعة، (2021)،"التحويل التكميبي لتوزيع Burr XII مع تطبيق عملي"، رسالة ماجستير في علوم الاحصاء، جامعة كربلاء/كلية الادارة والاقتصاد.
- 14- مجلي، احمد عاجل، (2019)،"تقديرات دالة البقاء لتوزيع احتمالي مركب (ويبل-رايلي) مع تطبيق عملي"، رسالة ماجستير في علوم الاحصاء، جامعة كربلاء/ كلية الادارة والاقتصاد/ قسم الاحصاء.
- 15- هرمز، امير حنا،(1990)،"الاحصاء الرياضي"كتاب منهجي، دار الكتب للطباعة والنشر، جامعة الموصل، العراق.
- 16- وارتان، غادة يوسف، (1994)، "تقدير دوال البقاء للمرضى المصابين بالتهاب الكبد الفايروس في القطر العراقي"، رسالة ماجستير في علوم الاحصاء، جامعة بغداد/ كلية الادارة والاقتصاد/ قسم الاحصاء.

ثانيا: المصادر الاجنبية

- 17- Bdair, O. M. (2012). Different methods of estimation for Marshall-Olkin exponential distribution. Journal of Applied Statistical Science, 19(2), 13-29.

-
-
- 18- Cavanaugh, J. E. (1997), " Unifying the Derivations for the Akaike and Corrected Akaike Information Criteria", *Statistics & Probability Letters* 33, pp.201-208.
- 19- Collett, D, (2003). *Modeling survival data in medical research*, Chapman and Hall, London.
- 20- Dey, S., Al-Zahrani, B., & Basloom, S. (2017). Dagum distribution: Properties and different methods of estimation. *International Journal of Statistics and Probability*, 6(2), 74-92.
- 21- Do Espirito Santo, A. P. J., & Mazucheli, J. (2015). Comparison of estimation methods for the Marshall–Olkin extended Lindley distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 85(17), 3437-3450.
- 22- Ebeling, C.E.,(1997),"An introduction to reliability and maintainability engineering", University of Dayton, McGraw-Hill Companies.
- 23- Frank J. F, and Sergio M. F, and Svetlozar T. R, and Bala G. A,(2014),"Model Selection Criterion:AIC and BIC" , 2014 John Wiley & Sons, Inc Published by John Wiley & Sons, Inc, Vol.95, No.3, pp. (631-636) .
- 24- Famoye, F. (2000). Goodness-of-fit tests for generalized logarithmic series distribution. *Computational statistics & data analysis*, 33(1), 59-67.
- 25- Ghitany, M. E., Al-Mutairi, D. K., Al-Awadhi, F. A., & Al-Burais, M. M. (2012). Marshall-Olkin extended Lindley distribution and its application. *International Journal of Applied Mathematics*, 25(5), 709-721.
- 26- Ghitany, M. E., Atieh, B., & Nadarajah, S. (2008). Lindley distribution and its application. *Mathematics and computers in simulation*, 78(4), 493-506.
- 27- Harry, G. K.,(2012), "Engineering Reliability Failure models". Drexel university-USA.

-
-
- 28- Howlader, H. A., & Hossain, A. M. (2002). Bayesian survival estimation of Pareto distribution of the second kind based on failure-censored data. *Computational statistics & data analysis*, 38(3),pp 301-314.
- 29- Klein, J.P. and Moeschberger, M. L., (2003), "Survival Analysis: Techniques for censored and truncated data", 2nd ed. New York : Springer.
- 30- Lawless, J. F. (2011). *Statistical models and methods for lifetime data* (Vol. 362). John Wiley & Sons.
- 31- Marshall, A. W., & Olkin, I. (1997). A new method for adding a parameter to a family of distributions with application to the exponential and Weibull families. *Biometrika*, 84(3), 641-652.
- 32- Marvin, R., (2004), "System Reliability Theory, Models, Statistical Methods, and Applications". Second edition, Walter, Shewhart & Samuel S. Wilks, Norwegian University of science and Technology, Norwege.
- 33- AL-Nasser, Abdul Majeed ,(2009) "Statistical Reliability" Ithraa Publishing and Distribution ,University of Baghdad.
- 34- Portet, S. , (2020), " A primer on model selection using the Akaike Information Criterion", *KeAi Chinese roots Global impact*, S. Portet / *Infectious Disease Modelling* 5, PP. 111-128.
- 35- Trivedi, K.S. (2002), "Probability and Statistics with Reliability", *Queuing & Computer Science Applications* , Second Edition , Awiley – Interscience publication , John Wiley & SONS , INC.
- 36- Tseng, K-W., (2015), "A simple lecture note on AIC and BIC", : <https://www.researchgate.net/publication/277137869>.

الملاحق

Simulation of ((Exponential Distribution))

```
(*define Exponential distribution*)
Expo[θ_]:= ProbabilityDistribution[E-x θ, {x,0,∞},Assumptions->θ>0];
(*PDF*)
f[x_]:=E-x θ;
(*Replication and samples size*)
r=1000;n1=30;n2=50;n3=100;n4=200;
(*Model*)
θ1 = 0.2; 1; 2
(**defin the models of generating random samples**)
distGen1=Expo[θ1];
(***Generating 1000 random samples of size {25,50,100,200}***)
SeedRandom[0];{data1=RandomVariate[distGen1,{r,n1}];
data2=RandomVariate[distGen1,{r,n2}];
data3=RandomVariate[distGen1,{r,n3}];
data4=RandomVariate[distGen1,{r,n4}];
};

data5 = Table[Delete[data1[[j]], i], {i, 1, n1}, {j, 1, r}]; data6 = Table[Delete[data2[[j]], i], {i, 1,
n2}, {j, 1, r}]; data7 = Table[Delete[data3[[j]], i], {i, 1, n3}, {j, 1, r}]; data8 =
Table[Delete[data4[[j]], i], {i, 1, n4}, {j, 1, r}];

<<Optimization`UnconstrainedProblems`

maximum likelihood
mlm1=Table[res=
FindDistributionParameters[data1[[i]],Expo[θ],ParameterEstimator-
>"MaximumLikelihood"],{i,1,r}];
mlm2=Table[res=
FindDistributionParameters[data2[[i]],Expo[θ],ParameterEstimator-
>"MaximumLikelihood"],{i,1,r}];
mlm3=Table[res=
FindDistributionParameters[data3[[i]],Expo[θ],ParameterEstimator-
>"MaximumLikelihood"],{i,1,r}];
mlm4=Table[res=
FindDistributionParameters[data4[[i]],Expo[θ],ParameterEstimator-
>"MaximumLikelihood"],{i,1,r}];
Jacnife with maximum likelihood
jac1=Table[res=
FindDistributionParameters[data5[[i]][[j]],Expo[θ],ParameterEstimator-
>"MaximumLikelihood"],{i,1,n1},{j,1,r}];
jac2=Table[res=
```

```

FindDistributionParameters[data6[[i]][[j]],Expo[θ],ParameterEstimator-
>"MaximumLikelihood",{i,1,n2},{j,1,r}];
jac3=Table[res=
  FindDistributionParameters[data7[[i]][[j]],Expo[θ],ParameterEstimator-
>"MaximumLikelihood",{i,1,n3},{j,1,r}];
jac4=Table[res=
  FindDistributionParameters[data8[[i]][[j]],Expo[θ],ParameterEstimator-
>"MaximumLikelihood",{i,1,n4},{j,1,r}];

```

(* @MODEL1 @*)

(*Maximum likelihood*)

```

{TableForm[{Mean[{θ}/. mlm1],Mean[{θ}/. mlm2],Mean[{θ}/. mlm3],Mean[{θ}/. mlm4]}
,TableHeadings->{"30","50","100","200"},{"θ"}
],TableForm[{Mean[{{(Subscript[θ, 1]-θ)2}/.mlm1],Mean[{{(Subscript[θ, 1]-
θ)2}/.mlm2],Mean[{{(Subscript[θ, 1]-θ)2}/. mlm3],Mean[{{(Subscript[θ, 1]-θ)2}/. mlm4]}
,TableHeadings->{"30","50","100","200"},{"MSE(θ)"}
]}

```

```

TableForm[{Table[SurvivalFunction[distGen1,t],{t,0.1,1,0.1}],
  Mean[Table[SurvivalFunction[Expo[θ],t],{t,0.1,1,0.1}]/.mlm1],
  Mean[Table[SurvivalFunction[Expo[θ],t],{t,0.1,1,0.1}]/. mlm2],
  Mean[Table[SurvivalFunction[Expo[θ],t],{t,0.1,1,0.1}]/. mlm3],
  Mean[Table[SurvivalFunction[Expo[θ],t],{t,0.1,1,0.1}]/.mlm4],
  Mean[(Table[SurvivalFunction[Expo[θ],t],{t,0.1,1,0.1}]-
Table[SurvivalFunction[distGen1,t],{t,0.1,1,0.1}])2/.mlm1],
  Mean[(Table[SurvivalFunction[Expo[θ],t],{t,0.1,1,0.1}]-
Table[SurvivalFunction[distGen1,t],{t,0.1,1,0.1}])2/.mlm2],
  Mean[(Table[SurvivalFunction[Expo[θ],t],{t,0.1,1,0.1}]-
Table[SurvivalFunction[distGen1,t],{t,0.1,1,0.1}])2/.mlm3],
  Mean[(Table[SurvivalFunction[Expo[θ],t],{t,0.1,1,0.1}]-
Table[SurvivalFunction[distGen1,t],{t,0.1,1,0.1}])2/. mlm4}],
  TableHeadings-
>{"R_real","30","50","100","200","MSE30","MSE50","MSE100","MSE200"},
{"0.1","0.2","0.3","0.4","0.5","0.6","0.7","0.8","0.9","1"}},TableDirections->Column
]//AccountingForm

```

(*Jacnife*)

(*Estimate maen of the parameters for the model with all samples*)

```

{TableForm[{Mean[Mean[{θ}/. jac1]],Mean[Mean[{θ}/. jac2]],Mean[Mean[{θ}/.
jac3]],Mean[Mean[{θ}/. jac4]]}
,TableHeadings->{"30","50","100","200"},{"θ"}
],TableForm[{Mean[Mean[{{(Subscript[θ, 1]-θ)2}/.jac1]],Mean[Mean[{{(Subscript[θ, 1]-
θ)2}/.jac2]],Mean[Mean[{{(Subscript[θ, 1]-θ)2}/. jac3]]
,Mean[Mean[{{(Subscript[θ, 1]-θ)2}/. jac4]]}
,TableHeadings->{"30","50","100","200"},{"MSE(θ)"}
}

```

```

}}
(****Estimate Reliability function for the model****)
TableForm[{ Table[SurvivalFunction[distGen1,t],{t,0.1,1,0.1}],
  Mean[Mean[Table[SurvivalFunction[Expo[θ],t],{t,0.1,1,0.1}]/.jac1]],
  Mean[Mean[Table[SurvivalFunction[Expo[θ],t],{t,0.1,1,0.1}]/.jac2]],
  Mean[Mean[Table[SurvivalFunction[Expo[θ],t],{t,0.1,1,0.1}]/.jac3]],
  Mean[Mean[Table[SurvivalFunction[Expo[θ],t],{t,0.1,1,0.1}]/.jac4]],
  Mean[Mean[(Table[SurvivalFunction[Expo[θ],t],{t,0.1,1,0.1}]-
Table[SurvivalFunction[distGen1,t],{t,0.1,1,0.1}])^2/.jac1]],
  Mean[Mean[(Table[SurvivalFunction[Expo[θ],t],{t,0.1,1,0.1}]-
Table[SurvivalFunction[distGen1,t],{t,0.1,1,0.1}])^2/.jac2]],
  Mean[Mean[(Table[SurvivalFunction[Expo[θ],t],{t,0.1,1,0.1}]-
Table[SurvivalFunction[distGen1,t],{t,0.1,1,0.1}])^2/.jac3]],
  Mean[Mean[(Table[SurvivalFunction[Expo[θ],t],{t,0.1,1,0.1}]-
Table[SurvivalFunction[distGen1,t],{t,0.1,1,0.1}])^2/.jac4]]],
  TableHeadings-
>{{"R_real", "30", "50", "100", "200", "MSE30", "MSE50", "MSE100", "MSE200"},
{"0.1", "0.2", "0.3", "0.4", "0.5", "0.6", "0.7", "0.8", "0.9", "1"}}, TableDirections->Column
  //AccountingForm

```

Simulation of ((M-O Exponential Distribution))

```

(*define Marshal-Olkin Exponential distribution*)
moExpo[θ_,λ_]:= ProbabilityDistribution[(E^-x θ λ)/(1-(1-λ)E^(-x θ))^2,{x,0,∞},Assumptions-
>θ>0&&λ>0];
(*PDF*)
f[x_]:= (E^-x θ λ)/(1-(1-λ)E^(-x θ))^2;
(*Replication and samples size*)
r=1000;n1=30;n2=50;n3=100;n4=200;
(*Model*)
θ1=0.2;1;2;λ1=0.5;1;
(**defin the models of generating random samples**)
distGen1=moExpo[θ1,λ1];
(***Generating 1000 random samples of size {25,50,100,200}***)
SeedRandom[0];{data1=RandomVariate[distGen1,{r,n1}];
data2=RandomVariate[distGen1,{r,n2}];
data3=RandomVariate[distGen1,{r,n3}];
data4=RandomVariate[distGen1,{r,n4}];
};

data5 = Table[Delete[data1[[j]], i], {i, 1, n1}, {j, 1, r}]; data6 = Table[Delete[data2[[j]], i], {i, 1,
n2}, {j, 1, r}]; data7 = Table[Delete[data3[[j]], i], {i, 1, n3}, {j, 1, r}]; data8 =
Table[Delete[data4[[j]], i], {i, 1, n4}, {j, 1, r}];

```

<<Optimization`UnconstrainedProblems`

```

maximum likelihood
mlm1=Table[res=
  FindDistributionParameters[data1[[i]],moExpo[θ,λ],ParameterEstimator-
>"MaximumLikelihood"],{i,1,r}];
mlm2=Table[res=
  FindDistributionParameters[data2[[i]],moExpo[θ,λ],ParameterEstimator-
>"MaximumLikelihood"],{i,1,r}];
mlm3=Table[res=
  FindDistributionParameters[data3[[i]],moExpo[θ,λ],ParameterEstimator-
>"MaximumLikelihood"],{i,1,r}];
mlm4=Table[res=
  FindDistributionParameters[data4[[i]],moExpo[θ,λ],ParameterEstimator-
>"MaximumLikelihood"],{i,1,r}];
Jacnife with maximum likelihood
jac1=Table[res=
  FindDistributionParameters[data5[[i]][[j]],moExpo[θ,λ],ParameterEstimator-
>"MaximumLikelihood"],{i,1,n1},{j,1,r}];
jac2=Table[res=
  FindDistributionParameters[data6[[i]][[j]],moExpo[θ,λ],ParameterEstimator-
>"MaximumLikelihood"],{i,1,n2},{j,1,r}];
jac3=Table[res=
  FindDistributionParameters[data7[[i]][[j]],moExpo[θ,λ],ParameterEstimator-
>"MaximumLikelihood"],{i,1,n3},{j,1,r}];
jac4=Table[res=
  FindDistributionParameters[data8[[i]][[j]],moExpo[θ,λ],ParameterEstimator-
>"MaximumLikelihood"],{i,1,n4},{j,1,r}];

```

(* @MODEL1 @ *)

(*Maximum likelihood*)

```

{TableForm[{Mean[{{θ},{λ}}/. mlm1],Mean[{{θ},{λ}}/. mlm2],Mean[{{θ},{λ}}/.
mlm3],Mean[{{θ},{λ}}/. mlm4]}
,TableHeadings->{"30","50","100","200"},{"θ","λ"}
],TableForm[{Mean[{{(Subscript[θ, 1]-θ)2},{(Subscript[λ, 1]-
λ)2}}/.mlm1],Mean[{{(Subscript[θ, 1]-θ)2},{(Subscript[λ, 1]-λ)2}}/.mlm2],Mean[{{(Subscript[θ,
1]-θ)2},{(Subscript[λ, 1]-λ)2}}/. mlm3],Mean[{{(Subscript[θ, 1]-θ)2},{(Subscript[λ, 1]-λ)2}}/.
mlm4]}
,TableHeadings->{"30","50","100","200"},{"MSE(θ)","MSE(λ)"}
]}
TableForm[{Table[SurvivalFunction[distGen1,t],{t,0.1,1,0.1}],
Mean[Table[SurvivalFunction[moExpo[θ,λ],t],{t,0.1,1,0.1}]/.mlm1],
Mean[Table[SurvivalFunction[moExpo[θ,λ],t],{t,0.1,1,0.1}]/. mlm2],
Mean[Table[SurvivalFunction[moExpo[θ,λ],t],{t,0.1,1,0.1}]/. mlm3],
Mean[Table[SurvivalFunction[moExpo[θ,λ],t],{t,0.1,1,0.1}]/.mlm4],

```

```

Mean[(Table[SurvivalFunction[moExpo[θ,λ],t],{t,0.1,1,0.1}]-
Table[SurvivalFunction[distGen1,t],{t,0.1,1,0.1}])2/.mlm1],
Mean[(Table[SurvivalFunction[moExpo[θ,λ],t],{t,0.1,1,0.1}]-
Table[SurvivalFunction[distGen1,t],{t,0.1,1,0.1}])2/.mlm2],
Mean[(Table[SurvivalFunction[moExpo[θ,λ],t],{t,0.1,1,0.1}]-
Table[SurvivalFunction[distGen1,t],{t,0.1,1,0.1}])2/.mlm3],
Mean[(Table[SurvivalFunction[moExpo[θ,λ],t],{t,0.1,1,0.1}]-
Table[SurvivalFunction[distGen1,t],{t,0.1,1,0.1}])2/.mlm4]),
TableHeadings-
>{{"R_real", "30", "50", "100", "200", "MSE30", "MSE50", "MSE100", "MSE200"},
{"0.1", "0.2", "0.3", "0.4", "0.5", "0.6", "0.7", "0.8", "0.9", "1"}}, TableDirections->Column
]//AccountingForm

```

(* Jacnife*)

```

(*Estimate maen of the parameters for the model with all samples*)
{TableForm[{Mean[Mean[{{θ}, {λ}]/. jac1]], Mean[Mean[{{θ}, {λ}]/.
jac2]], Mean[Mean[{{θ}, {λ}]/. jac3]], Mean[Mean[{{θ}, {λ}]/. jac4]]}
, TableHeadings->{{"30", "50", "100", "200"}, {"θ", "λ"}
], TableForm[{Mean[Mean[{{(Subscript[θ, 1]-θ)2}, {(Subscript[λ, 1]-
λ)2}}/.jac1]], Mean[Mean[{{(Subscript[θ, 1]-θ)2}, {(Subscript[λ, 1]-
λ)2}}/.jac2]], Mean[Mean[{{(Subscript[θ, 1]-θ)2}, {(Subscript[λ, 1]-λ)2}}/. jac3]]
, Mean[Mean[{{(Subscript[θ, 1]-θ)2}, {(Subscript[λ, 1]-λ)2}}/. jac4]]}
, TableHeadings->{{"30", "50", "100", "200"}, {"MSE(θ)", "MSE(λ)"}
]}

```

(*****Estimate Relibility function for the model*****)

```

TableForm[{ Table[SurvivalFunction[distGen1,t],{t,0.1,1,0.1} ],
Mean[Mean[Table[SurvivalFunction[moExpo[θ,λ],t],{t,0.1,1,0.1}]/.jac1]],
Mean[Mean[Table[SurvivalFunction[moExpo[θ,λ],t],{t,0.1,1,0.1}]/. jac2]],
Mean[Mean[Table[SurvivalFunction[moExpo[θ,λ],t],{t,0.1,1,0.1}]/. jac3]],
Mean[Mean[Table[SurvivalFunction[moExpo[θ,λ],t],{t,0.1,1,0.1}]/.jac4]],
Mean[Mean[(Table[SurvivalFunction[moExpo[θ,λ],t],{t,0.1,1,0.1}]-
Table[SurvivalFunction[distGen1,t],{t,0.1,1,0.1}])2/.jac1]],
Mean[Mean[(Table[SurvivalFunction[moExpo[θ,λ],t],{t,0.1,1,0.1}]-
Table[SurvivalFunction[distGen1,t],{t,0.1,1,0.1}])2/.jac2]],
Mean[Mean[(Table[SurvivalFunction[moExpo[θ,λ],t],{t,0.1,1,0.1}]-
Table[SurvivalFunction[distGen1,t],{t,0.1,1,0.1}])2/.jac3]],
Mean[Mean[(Table[SurvivalFunction[moExpo[θ,λ],t],{t,0.1,1,0.1}]-
Table[SurvivalFunction[distGen1,t],{t,0.1,1,0.1}])2/. jac4]]},
TableHeadings-
>{{"R_real", "30", "50", "100", "200", "MSE30", "MSE50", "MSE100", "MSE200"},
{"0.1", "0.2", "0.3", "0.4", "0.5", "0.6", "0.7", "0.8", "0.9", "1"}}, TableDirections->Column
]//AccountingForm

```

Simulation of ((lindely Distribution))

(*define Lindely distribution*)

```

lindly[θ_]:= ProbabilityDistribution[(E-x θ (1+x) θ2)/(1+θ),{x,0,∞},Assumptions->θ>0];
(*PDF*)
f[x_]:= (E-x θ (1+x) θ2)/(1+θ);
(*Replication and samples size*)
r=1000;n1=30;n2=50;n3=100;n4=200;
(*Model*)
θ1=0.2;1;2;
(**defin the models of generating random samples**)
distGen1=lindly[θ1];
(**Generating 1000 random samples of size {25,50,100,200}**)
SeedRandom[0];{data1=RandomVariate[distGen1,{r,n1}];
data2=RandomVariate[distGen1,{r,n2}];
data3=RandomVariate[distGen1,{r,n3}];
data4=RandomVariate[distGen1,{r,n4}];
};

data5 = Table[Delete[data1[[j]], i], {i, 1, n1}, {j, 1, r}]; data6 = Table[Delete[data2[[j]], i], {i, 1,
n2}, {j, 1, r}]; data7 = Table[Delete[data3[[j]], i], {i, 1, n3}, {j, 1, r}]; data8 =
Table[Delete[data4[[j]], i], {i, 1, n4}, {j, 1, r}];

<<Optimization`UnconstrainedProblems`

maximum likelihood
mlm1=Table[res=
FindDistributionParameters[data1[[i]],lindly[θ],ParameterEstimator-
>"MaximumLikelihood"],{i,1,r}];
mlm2=Table[res=
FindDistributionParameters[data2[[i]],lindly[θ],ParameterEstimator-
>"MaximumLikelihood"],{i,1,r}];
mlm3=Table[res=
FindDistributionParameters[data3[[i]],lindly[θ],ParameterEstimator-
>"MaximumLikelihood"],{i,1,r}];
mlm4=Table[res=
FindDistributionParameters[data4[[i]],lindly[θ],ParameterEstimator-
>"MaximumLikelihood"],{i,1,r}];
Jacnife with maximum likelihood
jac1=Table[res=
FindDistributionParameters[data5[[i]][[j]],lindly[θ],ParameterEstimator-
>"MaximumLikelihood"],{i,1,n1},{j,1,r}];
jac2=Table[res=
FindDistributionParameters[data6[[i]][[j]],lindly[θ],ParameterEstimator-
>"MaximumLikelihood"],{i,1,n2},{j,1,r}];
jac3=Table[res=
FindDistributionParameters[data7[[i]][[j]],lindly[θ],ParameterEstimator-
>"MaximumLikelihood"],{i,1,n3},{j,1,r}];
jac4=Table[res=

```



```
FindDistributionParameters[data8[[i]][[j]],lindly[θ],ParameterEstimator-
>"MaximumLikelihood",{i,1,n4},{j,1,r}];
```

(* @MODEL1 @ *)

(*Maximum likelihood*)

```
{TableForm[{Mean[{θ} /. mlm1],Mean[{θ} /. mlm2],Mean[{θ} /. mlm3],Mean[{θ} /. mlm4]}
,TableHeadings->{{"30","50","100","200"},{"θ"}}
],TableForm[{Mean[{(Subscript[θ, 1]-θ)2}/.mlm1],Mean[{(Subscript[θ, 1]-
θ)2}/.mlm2],Mean[{(Subscript[θ, 1]-θ)2}/. mlm3],Mean[{(Subscript[θ, 1]-θ)2}/. mlm4]}
,TableHeadings->{{"30","50","100","200"},{"MSE(θ)"}
]}
TableForm[{Table[SurvivalFunction[distGen1,t],{t,0.1,1,0.1}],
Mean[Table[SurvivalFunction[lindly[θ],t],{t,0.1,1,0.1}]/.mlm1],
Mean[Table[SurvivalFunction[lindly[θ],t],{t,0.1,1,0.1}]/. mlm2],
Mean[Table[SurvivalFunction[lindly[θ],t],{t,0.1,1,0.1}]/. mlm3],
Mean[Table[SurvivalFunction[lindly[θ],t],{t,0.1,1,0.1}]/.mlm4],
Mean[(Table[SurvivalFunction[lindly[θ],t],{t,0.1,1,0.1}]-
Table[SurvivalFunction[distGen1,t],{t,0.1,1,0.1}])2/.mlm1],
Mean[(Table[SurvivalFunction[lindly[θ],t],{t,0.1,1,0.1}]-
Table[SurvivalFunction[distGen1,t],{t,0.1,1,0.1}])2/.mlm2],
Mean[(Table[SurvivalFunction[lindly[θ],t],{t,0.1,1,0.1}]-
Table[SurvivalFunction[distGen1,t],{t,0.1,1,0.1}])2/.mlm3],
Mean[(Table[SurvivalFunction[lindly[θ],t],{t,0.1,1,0.1}]-
Table[SurvivalFunction[distGen1,t],{t,0.1,1,0.1}])2/. mlm4}],
TableHeadings-
>{{"R_real","30","50","100","200","MSE30","MSE50","MSE100","MSE200"},
{"0.1","0.2","0.3","0.4","0.5","0.6","0.7","0.8","0.9","1"}},TableDirections->Column
]//AccountingForm
```

(* Jacnife *)

```
(*Estimate maen of the parameters for the model with all samples*)
{TableForm[{Mean[Mean[{θ} /. jac1]],Mean[Mean[{θ} /. jac2]],Mean[Mean[{θ} /.
jac3]],Mean[Mean[{θ} /. jac4]]}
,TableHeadings->{{"30","50","100","200"},{"θ"}}
],TableForm[{Mean[Mean[{(Subscript[θ, 1]-θ)2}/.jac1]],Mean[Mean[{(Subscript[θ, 1]-
θ)2}/.jac2]],Mean[Mean[{(Subscript[θ, 1]-θ)2}/. jac3]]
,Mean[Mean[{(Subscript[θ, 1]-θ)2}/. jac4]]}
,TableHeadings->{{"30","50","100","200"},{"MSE(θ)"}
]}
]
(*****Estimate Relibility function for the model*****)
TableForm[{Table[SurvivalFunction[distGen1,t],{t,0.1,1,0.1}],
Mean[Mean[Table[SurvivalFunction[lindly[θ],t],{t,0.1,1,0.1}]/.jac1]],
Mean[Mean[Table[SurvivalFunction[lindly[θ],t],{t,0.1,1,0.1}]/. jac2]],
Mean[Mean[Table[SurvivalFunction[lindly[θ],t],{t,0.1,1,0.1}]/. jac3]],
Mean[Mean[Table[SurvivalFunction[lindly[θ],t],{t,0.1,1,0.1}]/.jac4]],
```

```

Mean[Mean[(Table[SurvivalFunction[lindly[θ],t],{t,0.1,1,0.1}]-
Table[SurvivalFunction[distGen1,t],{t,0.1,1,0.1}]]^2/.jac1]],
Mean[Mean[(Table[SurvivalFunction[lindly[θ],t],{t,0.1,1,0.1}]-
Table[SurvivalFunction[distGen1,t],{t,0.1,1,0.1}]]^2/.jac2]],
Mean[Mean[(Table[SurvivalFunction[lindly[θ],t],{t,0.1,1,0.1}]-
Table[SurvivalFunction[distGen1,t],{t,0.1,1,0.1}]]^2/.jac3]],
Mean[Mean[(Table[SurvivalFunction[lindly[θ],t],{t,0.1,1,0.1}]-
Table[SurvivalFunction[distGen1,t],{t,0.1,1,0.1}]]^2/.jac4]],
TableHeadings-
>{{"R_real","30","50","100","200","MSE30","MSE50","MSE100","MSE200"},
{"0.1","0.2","0.3","0.4","0.5","0.6","0.7","0.8","0.9","1"}},TableDirections->Column
]//AccountingForm

```

Simulation of ((Marshal-Olkin Lindly Distribution))

```

(*define Marshal-Olkin Lindely distribution*)
molindly[θ_λ_]:= ProbabilityDistribution[(Ex θ (1+x) θ2 (1+θ) λ)/(E(x θ) (1+θ)+(1+θ+x θ) (-1+λ))2,{x,0,∞},Assumptions->θ>0&&λ>0];
(*PDF*)
f[x_]:=((E-x θ (1+x) θ2)/(1+θ) λ)/(1-(1-λ) (E-(x θ) (1+θ+x θ))/(1+θ))2;
(*Replication and samples size*)
r=1000;n1=30;n2=50;n3=100;n4=200;
(*Model*)
θ1=0.2;1;2;λ1=0.5;1;
(**defin the models of generating random samples**)
distGen1=molindly[θ1,λ1];
(**Generating 1000 random samples of size {25,50,100,200}**)
SeedRandom[10];{data1=RandomVariate[distGen1,{r,n1}];
data2=RandomVariate[distGen1,{r,n2}];
data3=RandomVariate[distGen1,{r,n3}];
data4=RandomVariate[distGen1,{r,n4}];
};

data5 = Table[Delete[data1[[j]], i], {i, 1, n1}, {j, 1, r}]; data6 = Table[Delete[data2[[j]], i], {i, 1, n2}, {j, 1, r}]; data7 = Table[Delete[data3[[j]], i], {i, 1, n3}, {j, 1, r}]; data8 = Table[Delete[data4[[j]], i], {i, 1, n4}, {j, 1, r}];

<<Optimization`UnconstrainedProblems`
Needs["NETLink`"]
<<NETLink`
Needs["IntegratedServices`"]

maximum likelihood
mlm1=Table[res=

```

```

FindDistributionParameters[data1[[i]],molindly[θ,λ],ParameterEstimator-
>"MaximumLikelihood",{i,1,r}];
mlm2=Table[res=
FindDistributionParameters[data2[[i]],molindly[θ,λ],ParameterEstimator-
>"MaximumLikelihood",{i,1,r}];
mlm3=Table[res=
FindDistributionParameters[data3[[i]],molindly[θ,λ],ParameterEstimator-
>"MaximumLikelihood",{i,1,r}];
mlm4=Table[res=
FindDistributionParameters[data4[[i]],molindly[θ,λ],ParameterEstimator-
>"MaximumLikelihood",{i,1,r}];
Jacnife with maximum likelihood
jac1=Table[res=
FindDistributionParameters[data5[[i]][[j]],molindly[θ,λ],ParameterEstimator-
>"MaximumLikelihood",{i,1,n1},{j,1,r}];
jac2=Table[res=
FindDistributionParameters[data6[[i]][[j]],molindly[θ,λ],ParameterEstimator-
>"MaximumLikelihood",{i,1,n2},{j,1,r}];
jac3=Table[res=
FindDistributionParameters[data7[[i]][[j]],molindly[θ,λ],ParameterEstimator-
>"MaximumLikelihood",{i,1,n3},{j,1,r}];
jac4=Table[res=
FindDistributionParameters[data8[[i]][[j]],molindly[θ,λ],ParameterEstimator-
>"MaximumLikelihood",{i,1,n4},{j,1,r}];

```

(* @MODEL1 @ *)

(*Maximum likelihood*)

```

{TableForm[{Mean[{{θ},{λ}}/. mlm1],Mean[{{θ},{λ}}/. mlm2],Mean[{{θ},{λ}}/.
mlm3],Mean[{{θ},{λ}}/. mlm4]}
,TableHeadings->{"30","50","100","200"},{"θ","λ"}
],TableForm[{Mean[{{(Subscript[θ, 1]-θ)2},{(Subscript[λ, 1]-
λ)2}}/.mlm1],Mean[{{(Subscript[θ, 1]-θ)2},{(Subscript[λ, 1]-λ)2}}/.mlm2],Mean[{{(Subscript[θ,
1]-θ)2},{(Subscript[λ, 1]-λ)2}}/. mlm3],Mean[{{(Subscript[θ, 1]-θ)2},{(Subscript[λ, 1]-λ)2}}/.
mlm4]}
,TableHeadings->{"30","50","100","200"},{"MSE(θ)","MSE(λ)"}
]}
TableForm[{Table[SurvivalFunction[distGen1,t],{t,0.1,1,0.1}],
Mean[Table[SurvivalFunction[molindly[θ,λ],t],{t,0.1,1,0.1}]/.mlm1],
Mean[Table[SurvivalFunction[molindly[θ,λ],t],{t,0.1,1,0.1}]/. mlm2],
Mean[Table[SurvivalFunction[molindly[θ,λ],t],{t,0.1,1,0.1}]/. mlm3],
Mean[Table[SurvivalFunction[molindly[θ,λ],t],{t,0.1,1,0.1}]/.mlm4],
Mean[(Table[SurvivalFunction[molindly[θ,λ],t],{t,0.1,1,0.1}]-
Table[SurvivalFunction[distGen1,t],{t,0.1,1,0.1}])2/.mlm1],

```

```

Mean[(Table[SurvivalFunction[molindly[θ,λ],t],{t,0.1,1,0.1}]-
Table[SurvivalFunction[distGen1,t],{t,0.1,1,0.1}])2/.mlm2],
Mean[(Table[SurvivalFunction[molindly[θ,λ],t],{t,0.1,1,0.1}]-
Table[SurvivalFunction[distGen1,t],{t,0.1,1,0.1}])2/.mlm3],
Mean[(Table[SurvivalFunction[molindly[θ,λ],t],{t,0.1,1,0.1}]-
Table[SurvivalFunction[distGen1,t],{t,0.1,1,0.1}])2/.mlm4]],
TableHeadings-
>{{"R_real","30","50","100","200","MSE30","MSE50","MSE100","MSE200"},
{"0.1","0.2","0.3","0.4","0.5","0.6","0.7","0.8","0.9","1"}},TableDirections->Column
]//AccountingForm

```

(* Jacnife *)

```

(*Estimate maen of the parameters for the model with all samples*)
{TableForm[{Mean[Mean[{{θ},{λ}}/.jac1]],Mean[Mean[{{θ},{λ}}/.
jac2]],Mean[Mean[{{θ},{λ}}/.jac3]],Mean[Mean[{{θ},{λ}}/.jac4]]}
,TableHeadings->{{"30","50","100","200"},{"θ","λ"}}
],TableForm[{Mean[Mean[{{(Subscript[θ,1]-θ)2},{(Subscript[λ,1]-
λ)2}}/.jac1]],Mean[Mean[{{(Subscript[θ,1]-θ)2},{(Subscript[λ,1]-
λ)2}}/.jac2]],Mean[Mean[{{(Subscript[θ,1]-θ)2},{(Subscript[λ,1]-λ)2}}/.jac3]]
,Mean[Mean[{{(Subscript[θ,1]-θ)2},{(Subscript[λ,1]-λ)2}}/.jac4]]}
,TableHeadings->{{"30","50","100","200"},{"MSE(θ)","MSE(λ)"}
]}

```

```

(****Estimate Relibility function for the model****)
TableForm[{Table[SurvivalFunction[distGen1,t],{t,0.1,1,0.1}],
Mean[Mean[Table[SurvivalFunction[molindly[θ,λ],t],{t,0.1,1,0.1}]/.jac1]],
Mean[Mean[Table[SurvivalFunction[molindly[θ,λ],t],{t,0.1,1,0.1}]/.jac2]],
Mean[Mean[Table[SurvivalFunction[molindly[θ,λ],t],{t,0.1,1,0.1}]/.jac3]],
Mean[Mean[Table[SurvivalFunction[molindly[θ,λ],t],{t,0.1,1,0.1}]/.jac4]],
Mean[Mean[(Table[SurvivalFunction[molindly[θ,λ],t],{t,0.1,1,0.1}]-
Table[SurvivalFunction[distGen1,t],{t,0.1,1,0.1}])2/.jac1]],
Mean[Mean[(Table[SurvivalFunction[molindly[θ,λ],t],{t,0.1,1,0.1}]-
Table[SurvivalFunction[distGen1,t],{t,0.1,1,0.1}])2/.jac2]],
Mean[Mean[(Table[SurvivalFunction[molindly[θ,λ],t],{t,0.1,1,0.1}]-
Table[SurvivalFunction[distGen1,t],{t,0.1,1,0.1}])2/.jac3]],
Mean[Mean[(Table[SurvivalFunction[molindly[θ,λ],t],{t,0.1,1,0.1}]-
Table[SurvivalFunction[distGen1,t],{t,0.1,1,0.1}])2/.jac4]]],
TableHeadings-
>{{"R_real","50","100","200","MSE30","MSE50","MSE100","MSE200"},
{"0.1","0.2","0.3","0.4","0.5","0.6","0.7","0.8","0.9","1"}},TableDirections->Column
]//AccountingForm

```

Simulation of ((Dagum Distribution))

```

(*define Dagum distribution*)
dagum[α_,β_,θ_]:=ProbabilityDistribution[x-1-α α β (1+θ x-α)-1-β θ ,{x,0,∞},Assumptions-
>α>0&&β>0&&θ>0];
(*PDF*)
f[x_]:=x-1-α α β (1+θ x-α)-1-β θ;

```

```

r=1000;n1=30;n2=50;n3=100;n4=200;
(*Model*)
 $\alpha_1=2.5;1;1.5;$  $\beta_1=0.5;1;1.5;$  $\theta_1=1;0.5;$ 
(**defin the models of generating random samples**)
distGen1=dagum[ $\alpha_1,\beta_1,\theta_1$ ];
(**Generating 1000 random samples of size {25,50,100,200}**)
SeedRandom[];{data1=RandomVariate[distGen1,{r,n1}];
data2=RandomVariate[distGen1,{r,n2}];
data3=RandomVariate[distGen1,{r,n3}];
data4=RandomVariate[distGen1,{r,n4}];
};

<<Optimization`UnconstrainedProblems`

data5 = Table[Delete[data1[[j]], i], {i, 1, n1}, {j, 1, r}]; data6 = Table[Delete[data2[[j]], i], {i, 1,
n2}, {j, 1, r}]; data7 = Table[Delete[data3[[j]], i], {i, 1, n3}, {j, 1, r}]; data8 =
Table[Delete[data4[[j]], i], {i, 1, n4}, {j, 1, r}];

<<Optimization`UnconstrainedProblems`

maximum likelihood
mlm1=Table[res=
FindDistributionParameters[data1[[i]],dagum[ $\alpha,\beta,\theta$ ],ParameterEstimator-
>"MaximumLikelihood"],{i,1,r}];
mlm2=Table[res=
FindDistributionParameters[data2[[i]],dagum[ $\alpha,\beta,\theta$ ],ParameterEstimator-
>"MaximumLikelihood"],{i,1,r}];
mlm3=Table[res=
FindDistributionParameters[data3[[i]],dagum[ $\alpha,\beta,\theta$ ],ParameterEstimator-
>"MaximumLikelihood"],{i,1,r}];
mlm4=Table[res=
FindDistributionParameters[data4[[i]],dagum[ $\alpha,\beta,\theta$ ],ParameterEstimator-
>"MaximumLikelihood"],{i,1,r}];
Jacnife with maximum likelihood
jac1=Table[res=
FindDistributionParameters[data5[[i]][[j]],dagum[ $\alpha,\beta,\theta$ ],ParameterEstimator-
>"MaximumLikelihood"],{i,1,n1},{j,1,r}];
jac2=Table[res=
FindDistributionParameters[data6[[i]][[j]],dagum[ $\alpha,\beta,\theta$ ],ParameterEstimator-
>"MaximumLikelihood"],{i,1,n2},{j,1,r}];
jac3=Table[res=
FindDistributionParameters[data7[[i]][[j]],dagum[ $\alpha,\beta,\theta$ ],ParameterEstimator-
>"MaximumLikelihood"],{i,1,n3},{j,1,r}];
jac4=Table[res=
FindDistributionParameters[data8[[i]][[j]],dagum[ $\alpha,\beta,\theta$ ],ParameterEstimator-
>"MaximumLikelihood"],{i,1,n4},{j,1,r}];

```

(* @MODEL1 @*)

(*Maximum likelihood*)

```
{TableForm[{Mean[{{α},{β},{θ}}/. mlm1],Mean[{{α},{β},{θ}}/.
mlm2],Mean[{{α},{β},{θ}}/. mlm3],Mean[{{α},{β},{θ}}/. mlm4]}
,TableHeadings->{{"30","50","100","200"},{"α","β","θ"}}
],TableForm[{Mean[{{(Subscript[α, 1]-α)2},{(Subscript[β, 1]-β)2},{(Subscript[θ, 1]-
θ)2}}/.mlm1],Mean[{{(Subscript[α, 1]-α)2},{(Subscript[β, 1]-β)2},{(Subscript[θ, 1]-
θ)2}}/.mlm2],Mean[{{(Subscript[α, 1]-α)2},{(Subscript[β, 1]-β)2},{(Subscript[θ, 1]-θ)2}}/.
mlm3],
Mean[{{(Subscript[α, 1]-α)2},{(Subscript[β, 1]-β)2},{(Subscript[θ, 1]-θ)2}}/. mlm4]}
,TableHeadings->{{"30","50","100","200"},{"MSE(α)","MSE(β)","MSE(θ)"}]}
]]
TableForm[{Table[SurvivalFunction[distGen1,t],{t,0.1,1,0.1}],
Mean[Table[SurvivalFunction[dagum[α,β,θ],t],{t,0.1,1,0.1}]/.mlm1],
Mean[Table[SurvivalFunction[dagum[α,β,θ],t],{t,0.1,1,0.1}]/. mlm2],
Mean[Table[SurvivalFunction[dagum[α,β,θ],t],{t,0.1,1,0.1}]/. mlm3],
Mean[Table[SurvivalFunction[dagum[α,β,θ],t],{t,0.1,1,0.1}]/.mlm4],
Mean[(Table[SurvivalFunction[dagum[α,β,θ],t],{t,0.1,1,0.1}]-
Table[SurvivalFunction[distGen1,t],{t,0.1,1,0.1}])2/.mlm1],
Mean[(Table[SurvivalFunction[dagum[α,β,θ],t],{t,0.1,1,0.1}]-
Table[SurvivalFunction[distGen1,t],{t,0.1,1,0.1}])2/.mlm2],
Mean[(Table[SurvivalFunction[dagum[α,β,θ],t],{t,0.1,1,0.1}]-
Table[SurvivalFunction[distGen1,t],{t,0.1,1,0.1}])2/.mlm3],
Mean[(Table[SurvivalFunction[dagum[α,β,θ],t],{t,0.1,1,0.1}]-
Table[SurvivalFunction[distGen1,t],{t,0.1,1,0.1}])2/. mlm4]),
TableHeadings-
>{{"R_real","30","50","100","200","MSE30","MSE50","MSE100","MSE200"},
{"0.1","0.2","0.3","0.4","0.5","0.6","0.7","0.8","0.9","1"}},TableDirections->Column
]//AccountingForm
(*Jacnife*)
(*Estimate maen of the parameters for the model with all samples*)
{TableForm[{Mean[Mean[{{α},{β},{θ}}/. jac1]],Mean[Mean[{{α},{β},{θ}}/.
jac2]],Mean[Mean[{{α},{β},{θ}}/. jac3]],Mean[Mean[{{α},{β},{θ}}/. jac4]]]
,TableHeadings->{{"30","50","100","200"},{"α","β","θ"}}
],TableForm[{Mean[Mean[{{(Subscript[α, 1]-α)2},{(Subscript[β, 1]-β)2},{(Subscript[θ, 1]-
θ)2}}/.jac1]],Mean[Mean[{{(Subscript[α, 1]-α)2},{(Subscript[β, 1]-β)2},{(Subscript[θ, 1]-
θ)2}}/.jac2]],
Mean[Mean[{{(Subscript[α, 1]-α)2},{(Subscript[β, 1]-β)2},{(Subscript[θ, 1]-θ)2}}/. jac3]]
,Mean[Mean[{{(Subscript[α, 1]-α)2},{(Subscript[β, 1]-β)2},{(Subscript[θ, 1]-θ)2}}/. jac4]]]
,TableHeadings->{{"30","50","100","200"},{"MSE(α)","MSE(β)","MSE(θ)"}]}
]]
(*****Estimate Relibility function for the model*****)
```

```

TableForm[{ Table[SurvivalFunction[distGen1,t],{t,0.1,1,0.1}],
  Mean[Mean[Table[SurvivalFunction[dagum[α,β,θ],t],{t,0.1,1,0.1}]/.jac1]],
  Mean[Mean[Table[SurvivalFunction[dagum[α,β,θ],t],{t,0.1,1,0.1}]/.jac2]],
  Mean[Mean[Table[SurvivalFunction[dagum[α,β,θ],t],{t,0.1,1,0.1}]/.jac3]],
  Mean[Mean[Table[SurvivalFunction[dagum[α,β,θ],t],{t,0.1,1,0.1}]/.jac4]],
  Mean[Mean[(Table[SurvivalFunction[dagum[α,β,θ],t],{t,0.1,1,0.1}]-
Table[SurvivalFunction[distGen1,t],{t,0.1,1,0.1}])2/.jac1]],
  Mean[Mean[(Table[SurvivalFunction[dagum[α,β,θ],t],{t,0.1,1,0.1}]-
Table[SurvivalFunction[distGen1,t],{t,0.1,1,0.1}])2/.jac2]],
  Mean[Mean[(Table[SurvivalFunction[dagum[α,β,θ],t],{t,0.1,1,0.1}]-
Table[SurvivalFunction[distGen1,t],{t,0.1,1,0.1}])2/.jac3]],
  Mean[Mean[(Table[SurvivalFunction[dagum[α,β,θ],t],{t,0.1,1,0.1}]-
Table[SurvivalFunction[distGen1,t],{t,0.1,1,0.1}])2/.jac4]]],
  TableHeadings-
>{{"R_real","30","50","100","200","MSE30","MSE50","MSE100","MSE200"},
{"0.1","0.2","0.3","0.4","0.5","0.6","0.7","0.8","0.9","1"}},TableDirections->Column
]//AccountingForm

```

Abstract

The study aims to find the appropriate probability distribution to represent and describe the survival data for a sample of patients infected with Coronavirus (Covid-19) from the date of their admission to the hospital until death measured in days, as well as estimating the survival function of the aforementioned sample.

The simulation experiment was conducted using the Monte Carlo method with different sample sizes (30, 50, 100, 200) for some basic probability distributions (Exponential distribution, Lindley distribution, Dagum distribution), and probability distributions Expanded (Marshall-Olkin Exponential distribution, Marshall-Olkin Lindley distribution, as well as the Marshall-Olkin Dagum distribution that was built by the researcher) For the purpose of testing the survival function behavior and comparing the Maximum Likelihood method and Jackknife method to choose the best method for estimating the survival function of the aforementioned probability distributions based on the statistical scale mean integral error squares (IMSE).

Through the criteria (AIC, AICC), it was found that the proposed distribution (Marshall-Olkin Dagum) is more suitable for representing and describing the data of the sample under study.

**Republic of Iraq
Ministry of higher Education and Scientific
Research
University of Karbala
Faculty of Administration and Economics
Department of statistics**



**Comparison of different distributions to choose
the best distribution to estimate the survival
function for corona patients**

**A Thesis Submitted to
Council of The Administration and Economics/ Karbala
University as Partial fulfillment of the Requirements for the
Degree of Master of Science in Statistics**

Presented by researcher

Iqbal Qasim Ramadhan

Supervised By

Ass. Prof. Raissan Abdulimam Zalan

م 2022

هـ 1443

Holy Karbala