جمهورية العراق
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جـــــــــــامعة كربلاء
كلية الادارة و الاقتـصـاد
قســــــم الاحصاء

اختيار افضل طريقة لتقدير معلمات توزيع كابا الاحتمالي مع تطبيق عملي

رسـالــة مــقــدمــة الى مجلس كلية الادارة والاقتصاد في جامعة كربلاء

و هي جزء من متطلبات نيل درجة ماجستير في علوم الاحصاء

من قبل

باقر كريم فهد

بـــإشـــــراف

أ.م .د. مهدي وهاب نعمة

1439 هـ كربلاء 2018 م

بسم الله الرحمن الرحيم

﴿ وَإِن تَعُدُّواْ نِعْمَةَ اللَّهِ لاَ تُحْصُوهَا

إِنَّ اللَّهَ لَغَفُورٌ رَّحِيمٌ ﴾

صدق الله العلي العظيم

سورة النحل الآية ﴿18﴾

الاهـــداء

إلى مَنْ لا معبـود سواه ولا نـعبـد إلا ايّـاه

جل جلاله الله

إلى مَنْ أرسلهم الله رحمة للعالمين

محمد وآله الطاهرين

إلى مَنْ ألهمـني الاعتماد على النـفس والكِفاح

ابـي الكـريم

إلـــى صاحبـة الـدعوات الصادقات والحكم البـالغات

أمي العزيـزة

إلـــى اخوتـي واخواتـي حماهم الله واخص منـهم

د.احمد الاخ الصديـق

الى حبيـبـتـي من الدنـيا ومؤنـسـتـي في الحياة

زوجتي الغاليـه

إلـــى كل مَنْ وقف معي في مسيـرة الحياة المتـعبـة ولاسيـما هذه المسيرة

لكم منـي كل الوفاء

* بـاقـر القيـسي

شكر وتقدير

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

((رَبِّ أَوْزِعْنِي أَنْ أَشْكُرَ نِعْمَتَكَ الَّتِي أَنْعَمْتَ عَلَيَّ وَعَلَى وَالِدَيَّ وَأَنْ أَعْمَلَ صَالِحًا تَرْضَاهُ وَأَدْخِلْنِي بِرَحْمَتِكَ فِي عِبَادِكَ الصَّالِحِينَ)) صدق الله العلي العظيم , (النمل/ 19) .

الحمد لله الاول قبل الوجود والاخر بعد الخلود المطلق عن الحدود الواجب له السجود ,وصلوات الله وصلوات ملائكته وانبيائه ورسله وجميع خلقه على محمد وآل محمد والسلام عليه وعليهم ورحمة الله وبركاته . الحمد لله الذي وفقني وأعانني بالصبر والقدرة على إنجاز هذه الرسالة المتواضعة.

من لم يشكر المخلوق لم يشكر الخالق فالشكر للعم (المهندس الحقوقي نعمة فهد حسين) كما اتقدم ببالغ الشكر والامتنان الى اساتذتي والذين لهم الفضل الكبير(أ د. عواد كاظم الخالدي و أ د. عبد الحسين حسن الطائي وأ د. عدنان نجم الدين و أ م د. شروق عبد الرضا و أ م د. جاسم ناصر حسين و أ م د. إنعام عبد الرحمن و أ د. فياض عبد الله) وأتقدم بالشكر الجزيل الى رئيس وأعضاء لجنة المناقشة المحترمين لقبولهم مناقشة رسالتي وفقهم الله .

كما يطيب لي ان اتقدم باصدق الشكر والامتنان للاصدقاء (بشار خالد علي وعلي محمد جواد ومحمد حسن بندر). كما يسرني ان اشكر الجنود المجهولين الذي شجعوني لاتمام هذه المسيرة القاسية عليَ فكانت كلماتهم بمثابة السلاح الذي ينتصر به المقاتل في المعركة فهم اخوتي حقاً لهم مني كل الاحترام.

ومن الله التوفيق والسداد

باقر

قائمة المحتويات

قائمة الجداول

قائمة الاشكال

قائمة الرموز والمصطلحات

المصطلح باللغة العربية	المصطلح باللغة الانكليزية	الرمز
دالة الكثافة الاحتمالية	Probability density function	pdf
دالة التوزيع التراكمي	Cumulativ distribution function	F
التباين	Variance	σ^2
المتوسط	Mean	μ
دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع	true Probability density function	true pdf
معامل الاختلاف	Coefficients of Variation	C.V
معامل التفلطح	Coefficient of Kurtosis	C.K
معامل الالتواء	Coefficient of Skeuedness	C.S
طريقة المقدرات التجزيئية	Method of Percentiles Estimator	Per
طريقة الامكان الأعظم.	Method of Maximum Likelihood.	MLE
طريقة العزوم في حالة التحيز	Method of Length Biased Moments	LBM
طريقة العزوم الخطية	Method of Linear Moments	LM
طريقة العزوم الكمية الخطية	Method of Linear Quantile moments	LQM

المستخلص

يعد توزيع كابا من التوزيعات الاحتمالية المستمرة الذي يدرس السلوك العشوائي للظواهر المهمة حياتياً وعلمياً. وقد طورهذا التوزيع على يد العالم Hosking وعلماء آخرون . ان هذا التوزيع يدرس بعض الظواهر الطبيعية مثل ظاهرة تساقط الامطار وظاهرة تغير المناخ . وكذلك استعمل هذا التوزيع في دراسة ظواهر حديثة الاكتشاف مثل ظاهرة الرياح الشمسية و خواص البلازما وغيرها من الظواهر فمن هنا تاتي أهمية هذا التوزيع . وان له صيغاً مختلفة وسنتناول في هذه الرسالة صيغته الناتجة من حاصل خلط توزيع كاما وتوزيع اللوغارتم الطبيعي , والتي يدرس عن طريقها الظواهر الطبيعية . وكان اهتمام الباحث باشتقاق خواص التوزيع . واستعمل خمسة طرائق لتقدير المعالم الثلاث (α ,β , θ) للتوزيع بعد اكمال العمليات الرياضية للتوصل الى الصيغ النهائية لهذه الطرائق . كانت الطرائق التي تم استعمالها هي : طريقة الامكان الاعظم , وطريقة العزوم الكمية الخطية , وطريقة المقدرات التجزيئية , وطريقة العزوم الخطية , وطريقة العزوم في حالة التحيز , ولكي نختار من هذه الطرائق افضلها في تقدير معالم الثلاث للتوزيع وقد تم استعمل اسلوب المحاكاة للتوصل الى معرفة اي الطرائق هي الافضل في تقدير معالم التوزيع . اجريت المحاكاة لعشر مجموعات من البيانات الافتراضية ولخمس حجوم من العينات (150,100,75,50,25) . كانت النتائج جيدة في تحديد الطريقة الافضل التي كانت هي طريقة العزوم الكمية الخطية هي الافضل من بقية الطرائق عند جميع حجوم العينات المختلفة . لذلك تم استخدام هذه الطريقة في الجانب التطبيقي والذي يدرس ظاهرة تساقط الامطار في محافظة بغداد حين استعملنا بيانات حقيقية لمحطة الارصاد محافظة بغداد الرئيسة . وقد تم الحصول على هذه البيانات من الجهاز المركزي للاحصاء .

تم التوصل في الرسالة الى استنتاجات كان اهمها :

1- وجد أن أفضل التقديرات لمعالم توزيع كابا كانت عند طريقة العزوم الكمية الخطية .

2- تم الاثبات في الجانب التجريبي للتوزيع بان القيم التقديرية للمعالم (α,β,θ) متقاربة جدا مع القيم الافتراضية .

3- عند اجراء اختبار حسن المطابقة (Goodness of fit) و عند مقارنة قيمة (P-value) لمعيار (Chi2) مع (0.01) في الجانب التطبيقي تبين للباحث ان البيانات في محطة ارصاد محافظة بغداد تسلك وفق الفرضية البديلة (H_1: $X \sim Kappa$) اي تتوزع توزيع كابا .

اضافة الى التوصيات التي كان اهمها :

1– توسيع نطاق البحث لكي يتضمن الصيغ الست الاخرى لتوزيع كابا لما لذلك من اهمية في دراسة الظواهر الحياتيه وظاهرة تغير المناخ وظواهر الفضاء الخارجي التي يدرسها التوزيع.

2– استعمال طرائق اخرى للتقدير, غير التي اعتمدها الباحث مثل LH- Moment وطريقة TL- Moment والطرائق البيزية وغيرها لمعرفة مدى الدقة لتلك الطرائق.

الفصل الأول

المقدمـة
والاستعراض المرجعي

1.1 المقدمة : *Introduction*

اهتمامات علم الاحصاء كثيرة من ابرزها دراسة الظواهر التي تتبع السلوك العشوائي , بل يتعدى ذلك الى تقدير ما تؤول اليه تلك الظواهر في المستقبل .لذلك لابد لنا من معرفة تلك الظواهر اي التوزيعات تسلكها لكي يتم تفسر السلوك العشوائي الذي تسلكه تلك الظواهر .و تكون دراستنا للظواهر اما عن طريق توزيعات جاهزة اوتوزيات تم خلطها لوصف وقياس ما تؤول إليه تلك الظاهرة من نتائج احتمالية , تلك التوزيعات تدعى التوزيعات الاحصائية الاحتمالية Propability statistical Distribution والتي تكون على ثلاث انواع متقطعة , ومتصلة ، و مختلطة . وكل توزيع من تلك التوزيعات يصف ويدرس مجموعة معينة من الظواهر أو الحوادث الطبيعية أو الحياتية أو الظواهر المكتشفة حديثا , التي يتطلب دراسة البعض منها تطوير التوزيع لكي يلائم تعقيد حالة هذه الظواهر.ولكل توزيع احتمالي هنالك قيم ثابتة تحدد مواصفات ذلك التوزيع الاحتمالي والتي تدعى معلمات التوزيع Parameters.

ان من تلك التوزيعات المهمة توزيع كابا Kappa Distribution والذي سيعتمد في هذه الرساله صيغته الناتجة من خلط توزيع كاما Gamma distribution وتوزيع اللوغارتم الطبيعي Log –Normal distribution . يعد هذا التوزيع من التوزيعات الاحتمالية المستمرة المختلطة المهمة وهو يصف السلوك العشوائي لظواهر ذات اهميه في حياة الفرد والمجتمع . ان توزيع كابا الذي سنستعمله في دراستنا لكميات الامطار الذي تطلب الامر دراسته والبحث في خصائصه وطرائق تقدير معلماته , وتفسير النتائج عند استعمال طرائق التقدير لمعالم التوزيع وذلك بعدد من طرائق التقدير المعروفة وتم اختيار افضل تلك الطرائق التي سنتناولها في الفصل الثاني والتي تقودنا الى افضل تقديرات للظاهرة تساقط الامطار في محافضة بغداد.

2.1 مشكلة البحث: *problem of the Thesis*

في المجالات المختلفة التي يدرسها علم الاحصاء هناك ظواهر يصعب تقدير معالمها او يصعب التوصل الى معرفة التوزيع الملائم لدراستها او بناء توزيع ملائم في بعض الاحيان , وهذا الامر يختلف لاختلاف بيئة البيانات والتطبيقات المختلفة . من ابرز المجالات التي تتجلى فيها هذه المسئلة هي ظاهرة هطول الامطار حين توصل الباحث الى ان هذا التوزيع بصيغته المدروسه في هذه الرساله هو يتلائم مع دراسة الامطار . لذا قام الباحث بالعمل على تقدير معالم توزيع كابا ذا الثلاث معالم (α, β , θ) الناتجة عن خلط توزيعين مأخوذين من عائلة التوزيعات المستمرة Continuous distrbution وهما توزيع كاما Gamma distribution وتوزيع اللوغارتم الطبيعي Log –Normal distribution لدراسة ظاهرة تساقط الامطار في محافظة بغداد .

(3.1) هدف البحث: *An Objective Of The Thesis*

تعد التوزيعات الاحتمالية باقسامها المستمرة والمتقطعة والمختلطه اداة الاحصاء المهمة في دراسة وتحليل نتائج دراسة الظواهر المختلفة , لذا سيكون هدف دراستنا معرفة وايجاد خصائص احد هذه التوزيعات وهو توزيع كابا Kappa distrbution وطرائق التقدير لمعلمات التوزيع وان الطرائق التي سنتناولها هي طريقة الامكان الاعظم Maximum Likelihood وطريقة العزوم الخطية L-Moments وطريقة العزوم في حالة التحيز Length Biased Moments وطريقة العزوم الكمية الخطية LQ-Moments وطريقة المقدرات التجزيئية Percentiles Estimator وذلك لغرض ان نعرف اي الطرائق هي الافضل في تقدير معلمات التوزيع ليتم

استخدامها في الجانب التطبيقي لغرض تقدير معلمات التوزيع عند ظاهرة تساقط الامطار في محافظة بغداد وذلك لاهمية هذه الظاهره .

تضمنت الدراسة أربعة فصول ،تكون الفصل الاول من المقدمة ومشكلة البحث وهدف البحث واهم الدراسات السابقة التي تناولت توزيع كابا .

تم التطرق في الفصل الثاني الجانب النظري للدراسة بما احتواه من تعريف بتوزيع كابا Kappa Distribution وخصائصة واهم طرائق تقدير معلمات التوزيع ونبذه عن توزيع كاما Gamma distribution وتوزيع اللوغارتم الطبيعي Log –Normal distribution وبعض خصائصهما.

والثالث تناول تجربة محاكاة لبيانات عشوائية تم توليدها باستعمال برنامج ماتلاب الاصدار (MATLAB R2012a) بطريقة المعكوس لدالة (C D F) لقيم افتراضية لمعالم توزيع كابا واحجام عينات (75,50,25, 100, 150) لتجربة مكررة 1000 مرة .

كذلك تضمن هذا الفصل الجانب التطبيقي لبيانات حقيقية لكميات الامطار التي تم تقديرها في المحطة الارصادية لمحافظة بغداد للمدة (1966-2015) وهذه البيانات هي من هيأة الارصاد الجوية العراقية .

وان الفصل الرابع تطرق ألى اهم الاستنتاجبات والتوصيات التي تم التوصل اليها .

(4.1) الإستعراض المرجعي: *Literature Review*

يعد توزيع كابا من التوزيعات المستخدمة في الدراسات العلمية وفي تطبيقات متعددة ومتنوعة لها اهمية كبيرة في الحياة العملية. لذلك لابد من ان نستعرض بعض الدراسات التي تناولت هذا التوزيع لتكون الباب الذي سيفتح لنا باباً لغرض اكمال ماقام به الباحثين من دراسات وبحوث فيما يتعلق بهذا التوزيع وكالاتي:

في عام 1973 تناول الباحثان W.Milke, Paul ; S .Johnson ,Earl [39] طرائق للحصول على تقديرات الامكان الاعظم والفرضيات الخاصة بها لتوزيع كابا بثلاثة معالم وهي طريقة العزوم وطريقة الامكان الاعظم ووفقاً لتلك الطرائق التي تم تطبيقها على بيانات محسوبة لهطول الامطار وتدفق البخار وتم التوصل الى ان توزيع كابا اكثر ملائمة لبيانات هطول الامطار من توزيع كاما والتوزيع اللوغاريتمي الطبيعي حين التقدير بطريقتي العزوم وطريقة الامكان الاعظم .

في عام 1992 قارن (Robert A. Monserud and Rik Leemans)[7] بين خرائط الغطاء النباتي التي تنتج مجموعات من الانماط المكانية المشاهدة (الحقيقية) ومحاكاة للخرائط النباتية على منطقة هولد جريد واثبتت المقارنة ان توزيع كابا مقياس مفيد ومباشر لتوافق مختلف انواع خرائط الغطاء النباتي وان توزيع كابا وجدت مفيدة للغاية في ترتيب التوافق سواء بسلسلة من الخرائط او بمختلف المناطق النباتية داخل الخريطة.

وفي عام 1994 طور (J. R. M. Hosking)[16] توزيع كابا بثلاثة معالم الى توزيع كابا باربعة معالم ودرس خصاص التوزيع الجديد وقدر معالم التوزيع بطرائق مختلفة وهي طريقة العزوم وطريقة العزوم الموزونة الاحتمالية وطريقة العزوم الخطية وقد كانت طريقة العزوم الموزونة الاحتمالية هي الافضل .

وفي عام 1999 استعمل الباحث (B.P.Parida)[10] طريقة العزوم الخطية L-Moment لتقدير معالم توزيع كابا باربعة معالم وهي (u,k,h,α) وتم عمل محاكاة لمجموعاة من البيانات الحقيقية لتقدير الكمية الموثوق بها من الامطار الساقطة في الهند وتوصل الباحث الى ان طريقة L-Moment بالامكان اعتمادها في توزيع كابا ذو الاربعة معالم من اجل الحصول على تقديرات جيده لمعلمات التوزيع .

وفي عام 2000 قارن الباحث (**Connie Winchester**)[11] بين توزيع كابا باربعة معالم وبين توزيع القيمة العمومية المتطرفة باستعمال طريقة الامكان الاعظم كطريقة بديلة عن الطريقة التي قدرت بها معالم توزيع القيمة المتطرفة العمومية وهي طريقة العزوم الخطية L-Moment وتبين بعد اجراء المحاكاة ان طريقة (maximum likelood) هي الافضل من طريقة (L-moment) في تقدير بعض الكوارث الطبيعيه مثل الفيضانات والرياح العاصفه والامطار الشديده.

وفي عام 2002 قدر ($J.S.Park\ and\ H.S.Jung$)[17] كميات مياه الامطار الساقطة في جنوب كوريا باستعمال طريقة الامكان الاعظم باستعمال خوارزمية حسابية لايجاد مقدر الامكان الاعظم لتوزيع كابا رباعي المعالم بتصغير دالة الامكان الاعظم اللوغاريتية السالبة وتوصل الباحث الى ان طريقة طريقة الامكان الاعظم بالامكان اعتمادها في توزيع كابا ذو الاربعة معالم من اجل الحصول على تقديرات جيده لمعلمات التوزيع حين قام بتصغير دالة الامكان الاعظم اللوغاريتية السالبة.

وفي عام 2003 **استعمل (V. P. Singh, F.ASCE, and Z. Q. Deng)**[38] طريقة Entropy based لتقدير معالم توزيع كابا باربعة معالم باستخدام أربعة مجموعات من كميات امطار سنوية ساقطة و ذروة تدفق التفريغ لمياه الفيضان السنوي واظهرت نتائج الدراسة طريقة Entropy based و طرق العزوم والعزوم الخطية والامكان الاعظم وطريقة الاحتمال الموزون افضل ملائمة لتوزيع كابا مع طريقة مختلطة من طريقتين في تقدير معلمات التوزيع .

وفي عام 2004 بين الباحث (John J.Podesta)[19] بان دالة تشتت البلازما التي تستعمل لغراض اضهار خواص بعض الحالات التي تكون سرعة الجزيئات فيها تتوزع توزيع كابا .إذ اشتقت صيغة باستعمال المعادلات التفاضلية الاعتيادية سميت باسم الصيغة فوق الهندسية لكاوس التي تم اعتمادها في دراسة معلمات التوزيع وتم التوصل الى نمذجه واضحة لتلك الخواص.

وفي عام 2005 تناول الباحثان (Jeong, Soo Park And Young , A Hwang)[30]

طرائق تقدير معالم توزيع كابا بثلاثة معالم وهي طريقة العزوم Momets و طريقة العزوم الخطية L-moments وطريقة الامكان الاعظم MLE في تحليل كمية الفيضان واستعملا طريقة المحاكاة مونتي كارلوا للمقارنة بين تقديرات تلك الطرائق بالاستناد الى المعيار الاحصائي متوسط مربعات الخطا MSE باحجام عينات مختلفة وتوصلا بان تقديرات الامكان الاعظم هي الافضل عندما يكون حجم العينة كبيراً وان طريقة العزوم وطريقة العزوم الخطية اكثر ملائمة في حال كون حجم العينة صغيراً .

وفي عام 2006 قارن الباحثان (Bo-Yoon, Jeong-soo park)[18] طرائق مختلفلة لتقدير معالم توزيع كابا بثلاثة معالم وهي طريقة العزوم Moments و طريقة العزوم الخطية L-moments وطريقة الامكان الاعظم MLE في تحليل كمية الفيضان واستعملا طريقة المحاكاة مونتي كارلوا للمقارنة بين تقديرات تلك الطرائق بالاستناد الى المعيار الاحصائي متوسط مربعات الخطا MSE باحجام عينات مختلفة وتوصلا بان تقديرات الامكان الاعظم هي الافضل عندما

يكون حجم العينة كبيراً وان طريقة العزوم وطريقة العزوم الخطية اكثر ملائمة في حال كون حجم العينة صغيراً .

وفي العام نفسه طبق (Gi-Heon Song)[25] **واخرون** توزيع واكبي $Wakeby\ distribution$ و توزيع كابا $Kappa\ distribution$ لتقدير كمية الفيضانات في جنوب كوريا باستعمال طريقة العزوم الخطية وطابق البيانات مع التوزيع باستعمال اختبار كولمكروف سميرنوف $Kologrov - smirnov\ test$ وقارن النتائج باستعمال معيار متوسط مربعات خطا الجذر النسبي ومتوسط مربعات الخطا النسبي لتصميم الفيضانات وبين بان توزع واكبي اكثر دقة من توزيع كابا .

وفي العام2007 حدد (Jeong-Soo Park, Tae Yoo)[29] الشكل الدقيق لمصفوفة معلومات فيشر لتوزيع كابا رباعي المعالم وبينوا بان الشرط الضروري لوجود مصفوفة معلومات فيشر Fisher information matrix.

وفي عام 2010 طور الباحثان (Ani Shabri ,Abdul Aziz Jemain)[33] طريقة العزوم الخطية L-Moment وقارناها مع طريقة العزوم عن طريق ثمانية مجاميع من البيانات التي لها توزيع كابا باربعة معالم الناتج عن توليفة من توزيعات تتضمن توزيع القيمة العمومية المتطرفة والتوزيع اللوجستي المعمم وتوزيع باريتو المعمم وتوصلا بان الطريقتين كفؤتان في التقدير .

وفي عام 2011 استحصل (Samir K.Ashour; Dr.El-A.Elsherpieny Sayed;Y.Abdelall,Yassmen **)**[21]

مقدرات الامكان الاعظم MLE's للمعالم غير معلومة و مصفوفة التباين والتباين المشترك المتماثلة لتوزيع كابا باربعة معالم لبيانات مراقبة من من النوع الثاني Type II consored data وبينوا بان النتائج التي تم الحصول عليها للبيانات الكاملة قد تعد حالة خاصة من الحالة الحالية التي استعملت من قبلهم .

وفي عام 2012 استعمل (Bungon Kumphon)[22] طريقة Maximum Entropy وطريقة الامكان الاعظم Maximum Liklihood لتقدير معالم توزيع كابا بثلاثة معالم وطبقها على بيانات متقطعة وتم اشتقاق هاتين الطريقتين بشكل مفصل للوصول الى التقدير الصحيح لمعالم توزيع كابا.

وفي عام 2013 حلل (Ishfaq Ahmad) واخرون [9] السلوك العشوائي للرياح الموسمية في باكستان بوصفها مهمة جدا في التاثيربالزراعة فعن طريق توزيع كابا باربعة معالم في 26 محطة ارصاد جوية للمدة من 1960 ولغاية 2006 وقدر معالم التوزيع باستعمال طريقة العزوم الخطية L-Moment واستعملوا تلك التقديرات في حساب اجزاء مدد العودة من 2 الى 500 سنة وقارن الاجزاء المقدرة للامطار الموسمية واستنتجوا بان المقدرات المحسوبة بعد الخمس سنوات بانها متوافقة بصورة جيدة .

وفي العام نفسة اختبر الباحثان (G.Livadiotis .D.G.Mccomas)[24] الاسس الفيزيائية والتطور النظري لتوزيع كابا الذي ينشأ من ميكانيكية احصائية غير واسعة النطاق واعد آن توزيع كابا هو بديل بسيط وسهل عن توزيع ماكسويل Maxwell distrinution والمستعمل الى جانب توزيع كابا في دراسة الظواهر الفيزيائية .

وفي عام 2014 قدم كل من (Inam Abdulrahman Noaman , Dhwyia S. Hassan Layla M. Nassir)[32]

ثلاثة طرائق لتقدير معالم توزيع كابا بمعلمتين وهذه الطرائق هي طريقة الامكان الاعظم وطريقة Maximum Entropy وطريقة العزوم الخطية واشتقوا طريقة العزوم الخطية من الارتبة r وتوصلوا الى ان طريقة الامكان الاعظم هي الافضل من الطريقة Maximum Entropy وطريقة العزوم الخطية.

وفي العام نفسة درس (Md. Sharwar Murshed , Yun Am Seo Jeong-Soo Park)[27]

التاثير وقابلية طريقة العزوم الخطية ذات الرتب العالية لتقدير شروط ذيل التوزيع بمطابتقها مع معالم توزيع كابا باربعة معالم واستعمل طريقة LH-Moment لتقدير معالم التوزيع باستعمال المحاكاة مونتي كارلو .

وفي عام 2017 عرض (Thomas Rodding Kjeldsena, Hyunjun Ahn and Ilaria Prosdocimic)[31] تطورات جديدة تمكن من استعمال توزيع كابا باربعة معالم مع طرائق حسن المطابقة المعروفة لتحليل الترددات الحاصلة من جراء الفيضانات بالاستناد الى طريقة العزوم الخطية L-Moments ونجح الاطار الجديد في تطبيق 564 مجموعة من الترددات ووجدوا بان الطرائق المطورة افضل من الطرائق المستعملة سابقا في الوصف الاحتمالي للفيضانات في بريطانيا واثبتوا بان هذه النتائج في التحليل للفيضانات تتبع توزيع كابا الاحتمالي بدلا من التوزيعات الاحتمالية التقليدية مثل توزيع القيمة المتطرفة العمومية والتوزيع اللوجستي المعمم المطلق والفائدة من هذه الدراسة هوتحديد واختيار التوزيع المناسب للفيضانات .

وفي العام نفسه بين (D.J. Dupuis , C. Winchester)[12] بان توزيع كابا باربعة معالم ليس دائما متوافق مع كل الدراسات واوضحا ذلك عن طريق دراسة محاكاة لمقارنة طرائق مختلفة في تقدير معالم توزيع كابا لاكثرمن اربعة معالم وهي طريقة الامكان الاعظم وطريقة العزوم الخطية واستنتجا بان طريقة الامكان الاعظم هي الافضل في التقدير.

وفي هذه الرساله سوف يكون التركيزعلى دراسة توزيع كابا ذو الثلاث معالم المخلوط من توزيعي كاما وتوزيع اللوغارتم الطبيعي ، الذي سيتم بعد تقدير معالم التوزيع بعدد من الطرق المختلفة واختيار افضل تلك الطرق لدراسة ظاهرة تساقط الامطارفي محافظة بغداد وايضاً سيكون من ضمن الاهتمامات في هذه الرسالة ايجاد بعض خصائص التوزيع .

الفصل الثاني

الجانب النظري

1.2 المقدمة : Introduction

تمثل التوزيعات الاحتمالية الوسيلة الابرز لدراسة الظواهر ويجرى من خلالها تحليل النتائج , وهي ايضا تصف سلوك الظاهرة من وجهة نظر احتمالية , ومن ثم التنبؤ بما تكون عليه الظاهرة او الحوادث في المستقبل لذلك لابد من الاهتمام بدراسة تلك التوزيعات وخصائصها , والتي واحدا منها هو توزيع كابا Kappa Distribution الذي يعد من التوزيعات الاحتمالية المهمة في دراسة الكثير من الظواهر المهمة في الحياة وفي الفضاء الخارجي كما اسلفنا .

سنتناول في هذا الفصل نبذة عن توزيع كاما Gamma distribution ومجموعة من خصائصة, ونبذة عن توزيع اللوغارتم الطبيعي Log –Normal distribution ومجموعة من الخصائصة.ونحن نورد هذان التوزيعان لان حاصل خلطهما يكون لنا صيغة توزيع كابا Kappa Distribution وان هذه الصيغة قدمت في الدراسة المنشورة عام 1946 التي قدمها الباحثان (JR Paul W.Milke ; Earl S .Johnson) .التي يدرس عن طريقها ظاهرة تساقط الامطار وغيرها من الظواهر الحياتيه . سنورد ايضا تمهيد عن توزيع كابا وخصائصة مثل المتوسط Mean والتباين Variation ومعامل الاختلاف Coefficients of Variation ومعامل التفلطح Coefficient of kurtosis ومعامل الالتواء Coefficient of skewedness,ونشتق بعض طرائق التقدير التي هي طريقة الامكان الاعظم Maximum likelihood طريقة العزوم الخطية L- Moments , وطريقة العزوم في حالة التحيز Length-biased moments, وطريقة المقدرات التجزيئية Percentiles Estimators, وطريقة العزوم الكمية الخطية LQ-Moments estimation .

2.2 توزيع كاما Gamma distribution [8][2]

يعد توزيع كاما (Gamma distribution) من التوزيعات المهمة في دراسة المشاكل التي يكون الزمن احد عواملها . كدراسة مدة اشتغال معدات مصنع معين ,او يدرس عدد ساعات العمل الانتاجية لمكينه معينة . ايضا دراسة العطلات والتوقفات لمكائن مصنع معين . يعد من التوزيعات المهمة التي تدخل في دراسة موضوع المعولية والتطبيقات البيئية والصحية.

1.2.2 خصائص توزيع كاما : Gamma distribution characteristics

1.1.2.2 دالة الكثافة الاحتمالية Probability density function

$$f(x;\alpha)=\begin{cases} \frac{\lambda e^{-\lambda x}\,(\lambda\, x)^{\alpha-1}}{[\Gamma(\alpha)]} & , \quad (x>0 \quad , \quad (\lambda\,,\alpha)>0\,) \\ 0 & , \qquad otherwise \end{cases} \quad \dots (2.1)$$

حيث (α , λ) هما معالم التوزيع.

2.1.2.2 دالة التوزيع التراكمية (F) Cumulativ distribution function

$$F(x)=\left(1-\sum_{k=\alpha}^{\alpha-1}\frac{e^{-\lambda x}(\lambda x)^{k}}{k!}\right) \qquad \dots (2.2)$$

المتوسط Mean

$$\mu = \frac{\alpha}{\lambda}$$

التباين Variation

$$\sigma^2 = \frac{\alpha}{\lambda}$$

3.2 توزيع اللوغارتم الطبيعي Log –Normal Distribution [1]

يعد التوزيع اللوغارتم الطبيعي(Log –Normal distribution) من التوزيعات المهمة .الذي لاتقل اهميتة عن التوزيع الطبيعي في الجوانب التطبيقية للنظرية الاحصائية . هو من اهم التوزيعات التي تدخل في موضوع مراقبة جودة الانتاج وفي الدراسات الدراسات المتعلقة بعلم الحشرات والكيمياء الجيلوجية وفي موضوعات اخرى يدخل فيها الاحصاء كاداة للتحليل .

1.3.2 خصائص التوزيع اللوغاريتم الطبيعي:

Log –Normal Distribution Characteristics

1.1.3.2 دالة الكثافة الاحتمالية *Probability Density Function*

$$f(x;\alpha,\sigma^2) = \begin{cases} \frac{1}{x\ \sigma\sqrt{(\alpha)}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x-\mu}{\sigma}\right)^2} & ,x > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad \dots(2.3)$$

2.1.3.2 دالة التوزيع التراكمية (F) Cumulativ distribution *function*

$$F(x)= \phi\left(\frac{\ln x-\mu}{\sigma}\right)$$

إذ $\phi(.)$ تعني الدالة التوزيعية للتوزيع الطبيعي المعياري والتي تستخرج من جداول التوزيع الطبيعي المعياري والتي تكون هي قيمة دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع اللوغاريتم الطبيعي عند $[\frac{\ln x-\mu}{\sigma}]$.

المتوسط Mean

$$\mu = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$$

التباين *Variation*

$$\sigma^2 = e^{2\mu}\left(e^{2\sigma^2} - e^{\sigma^2}\right)$$

4.2 توزيع كابا: Kappa Distribution

توزيع كابا Kappa Distribution هو من التوزيعات الاحتمالية المستمرة الذي يدرس السلوك العشوائي للظواهر المهمة حياتيا وعلميا . وقد مر بتطويرات مهمة على يد (Hosking 1994) وأخرين . اذ قام بالعمل على تطوير طرائق التقدير لمعلماته (Hutson 1998) و (Ani shabri & Abdul Aziz 2010) و (Samir 2011) (Dhwyia Hassan, Inam Abdulrahman, Layla Nassir 2014) . بحيث استنتج الباحثين في هذه الدراسات الطريقة الافضل لدراسة الظاهرة التي تناولوها اي طريقة تكون هي الافضل في التقدير معلمات التوزيع , بعض علماء الاحصاء جعل من صيغة التوزيع تلائم الظواهر الحديثة الاكتشاف والتي يدرسها التوزيع , وذلك بتطوير صيغة التوزيع من احتوائها على معلمتين الى ثلاث معالم وصولا الى اربع معالم الصيغة الاصعب في الشكل المختصة بدراسة الفضاء الخارجي . كثيرا ما استعمل التوزيع في دراسة ظواهر الفضاء الخارجي والغلاف الجوي مثلاً سرع الجزيئات وخصائصها في بلازما الفضاء ودرجة حرارة البلازما , ويدرس ظاهرة الرياح الشمسية ودرجات الحرارة القصوى وأطياف تدفق الطاقة . وايضا يدرس الظواهر الحياتية والطبيعية مثل نمذجة السلوك العشوائي للرياح العاصفة والفيضانات والامطار ورصد ظاهرة تغير المناخ, ويدرس التطبيقات الاحصائية الميكانيكية والظواهر الجوية وتكون صيغة التوزيع في هذه الدراسة ناتجة عن حاصل خلط توزيع كاما Gamma distribution وتوزيع اللوغارتم الطبيعي Log – Normal distribution . هذه الصيغة كما اسلفنا هي اداة مهمة في دراسة الظواهر الطبيعية والحياتية وان هذه الصيغة كانت في الدراسة المنشورة عام 1946 التي قدمها الباحثان Paul W.Milke ,JR ; Earl S .Johnson .ايضا هناك صيغة يكون التوزيع محتويا على ثلاث معالم ولكن تكون تلك الصيغة هي صيغة قياسية غير ناتجة عن خلط توزيعين مختصة بدراسة ظواهر خارج نطاق اهتمامنا في هذه الدراسة.

نفرض ان .($x_1,x_2,....x_n$) متغير عشوائي له توزيع كابا فان دالة الكثافة الاحتمالية له كالاتي :

$$f(x)=\begin{cases} \frac{\alpha\theta}{\beta}\ \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta-1}\ \left(\alpha+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}\right)^{-\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)} & (\ if \quad x>0\ ) \\ 0 & ,(x\le 0) \end{cases} \quad ...\ (2.4)$$

دالة التوزيع التراكمي كالاتي (F): **Cumulativ distribution function**

$$F(x)=\begin{cases} \left[\frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}}{\alpha+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}}\right]^{\frac{1}{\alpha}} & (\ if \quad x>0\ ) \\ 0 & ,\ (0\ge x) \end{cases} \quad ...\ (2.5)$$

حيث ان $(\alpha\ ,\theta)$ هما معلمتا الشكل لتوزيع كابا

وان هي (β) معلمة القياس لتوزيع كابا

1.4.2 خصائص توزيع كابا : Kappa Distribution Characteristics

1.1.4.2 العزم الرائي غير المركزي لتوزيع كابا حول نقطة الاصل :

r^{th} Centeral Moment about Origin for Kappa distribution

$$E(x)^r = \mu'_r = \int_0^\infty x^r \frac{\alpha\theta}{\beta} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta-1} \left(\alpha + \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}\right)^{-\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)} dx \qquad \dots (2.6)$$

Let $u = \frac{X}{\beta} \quad \Rightarrow X = u\beta \quad \Rightarrow dx = \beta\, du$

$$= \int_0^\infty (u\beta)^r \frac{\alpha\theta}{\beta} u^{\theta-1} \left(\alpha + u^{\alpha\theta}\right)^{-\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)} \beta\, du$$

$$= \beta^r \int_0^\infty u^{r+\theta-1} \alpha\theta \left(\alpha + u^{\alpha\theta}\right)^{-\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)} du$$

Let $Z = u^{\alpha\theta} \quad \Rightarrow u = Z^{\frac{1}{\alpha\theta}} \quad \Rightarrow du = \frac{1}{\alpha\theta} Z^{\frac{1}{\alpha\theta}-1} dz$

$$= \beta^r \int_0^\infty Z^{\frac{r+\theta}{\alpha\theta}-1} \alpha\theta \left(\alpha + Z\right)^{-\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)} \frac{1}{\alpha\theta} Z^{\frac{1}{\alpha\theta}-1} dz$$

$$= \beta^r \alpha^{-\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)} \int_0^\infty Z^{\frac{r}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha\theta}-2} \left(1 + \frac{Z}{\alpha}\right)^{-\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)} dz$$

Let $y = \frac{Z}{\alpha} \quad \Rightarrow Z = \alpha y \quad \Rightarrow dZ = \alpha\, dy$

$$= \beta^r \alpha^{-\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)} \int_0^\infty (\alpha y)^{\frac{r}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha\theta}-2} (1 + y)^{-\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)} \alpha\, dy$$

$$= \beta^r \alpha^{\frac{r}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha\theta}-3} \int_0^\infty \frac{(y)^{\frac{r}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha\theta}-2}}{(1+y)^{\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}} dy$$

وهذا يشابة الصيغة الثانية لتوزيع بيتا $\beta(\alpha, \beta) = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}} dx = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$

ويمكن كتابة β بالشكل التالي $\beta = (\alpha + \beta) - \alpha$

فتكون قيمة المعلمتين كما يأتي:

$$\alpha = \frac{r}{\alpha\theta} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha\theta} - 1$$

$$\beta = 2 - \frac{r}{\alpha\theta} - \frac{1}{\alpha\theta}$$

$\beta = 2 - (\frac{1+r}{\alpha\theta})$

العزم الرائي غير المركزي لتوزيع كابا عن نقطة الاصل بعد تعويض قيم (α β) نحصل على:

$$E(x)^r = \beta^r \ \alpha^{\frac{r-\alpha\theta}{\alpha\theta}} \ \frac{\Gamma(2-(\frac{1+r}{\alpha\theta}))\ \Gamma(\frac{r}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha\theta}-1)}{\Gamma(\frac{\alpha+1}{\alpha})} \qquad \ldots(2.7)$$

للحصول على المتوسط (Mean) نفرض (r =1) في المعادلة (2.7) يكون كما يأتي:

$$E(x) = \mu = \beta \ \alpha^{\frac{1-\alpha\theta}{\alpha\theta}} \ \frac{\Gamma(2-\frac{2}{\alpha\theta})\ \Gamma(\frac{2}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}-1)}{\Gamma(\frac{\alpha+1}{\alpha})} \qquad \ldots(2.8)$$

2.1.4.2 **وللحصول على التباين (Variance) كما يلي:**

اشتقاق صيغة العزم المركزي الرائي حول متوسط المجتمع

كما يأتي Derivative Central Moments :

$$E(x-\mu)^r = \int_0^\infty (x-\mu)^r f(x)dx \qquad \ldots(2.9)$$

$$E(x-\mu)^r = \int_0^\infty (x-\mu)^r \ \frac{\alpha\,\theta}{\beta}\ (\frac{x}{\beta})^{\theta-1}\ \left(\alpha + (\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}\right)^{-(\frac{\alpha+1}{\alpha})} dx$$

Let $u = \frac{x}{\beta} \ \Rightarrow x = u\,\beta \ \Rightarrow dx = \beta\, du$

$$= \int_0^\infty (u\beta-\mu)^r \ \frac{\alpha\theta}{\beta}\ u^{\theta-1}\ (\alpha + u^{\alpha\theta})^{-(\frac{\alpha+1}{\alpha})}\beta\, du$$

$$= \beta^r \int_0^\infty (u-\frac{\mu}{\beta})^r \ u^{\theta-1}\ \alpha\theta\ (\alpha + u^{\alpha\theta})^{-(\frac{\alpha+1}{\alpha})} du$$

Let $Z = u^{\alpha\theta} \ \Rightarrow u = Z^{\frac{1}{\alpha\theta}} \ \Rightarrow du = \frac{1}{\alpha\vartheta} Z^{\frac{1}{\alpha\theta}-1} dz$

$$= \beta^r \int_0^\infty (Z^{\frac{1}{\alpha\theta}} - \frac{\mu}{\beta})^r \ Z^{\frac{\theta-1}{\alpha\theta}} \ \alpha\theta\ (\alpha + Z)^{-(\frac{\alpha+1}{\alpha})} \frac{1}{\alpha\theta} Z^{\frac{1}{\alpha\theta}-1} dz$$

$$= \beta^r \alpha^{-(\frac{\alpha+1}{\alpha})} \int_0^\infty (Z^{\frac{1}{\alpha\theta}} - \frac{\mu}{\beta})^r \ Z^{\frac{1}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha\theta}-1} \left(1 + \frac{Z}{\alpha}\right)^{-(\frac{\alpha+1}{\alpha})} dz$$

Let $y = \frac{Z}{\alpha} \ \Rightarrow Z = \alpha y \ \Rightarrow dZ = \alpha\, dy$

$$= \beta^r \alpha^{-(\frac{\alpha+1}{\alpha})} \int_0^\infty ((\alpha y)^{\frac{1}{\alpha\theta}} - \frac{\mu}{\beta})^r \ (\alpha y)^{\frac{1}{\alpha}-1} \ (1 + y)^{-(\frac{\alpha+1}{\alpha})} \alpha\, dy$$

$$= \beta^{r}\ \alpha^{-1-\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha}-1+\frac{r}{\alpha\theta}+1}\int_0^{\infty}\left(y^{\frac{1}{\alpha\theta}}-\frac{\mu}{\beta\,\alpha^{\frac{1}{\alpha\theta}}}\right)^{r}(y)^{\frac{1}{\alpha}-1}(1+y)^{-(\frac{\alpha+1}{\alpha})}dy$$

$$= \beta^{r}\,\alpha^{\frac{r}{\alpha\theta}-1}\int_0^{\infty}\left(y^{\frac{1}{\alpha\theta}}-\frac{\mu}{\beta\,\alpha^{\frac{1}{\alpha\theta}}}\right)^{r}(y)^{\frac{1}{\alpha}-1}\ (1+\ y)^{-(\frac{\alpha+1}{\alpha})}\,dy..(2.10)$$

عن طريق القانون الذي يفرض ان :

$$(a+b)^n=\sum_{x=0}^{n} C_x^n\, a^{\,n}\ b^{\,n-x}$$

ان المعادلة (2.10) تتحول الى ما يأتي على وفق القانون المذكور انفاً:

$$= \ \beta^{r}\ \alpha^{\frac{r}{\alpha\theta}-1}\int_0^{\infty}\sum_{j=0}^{r} C_j^r\ y^{\frac{j}{\alpha\theta}}\left(-\frac{\mu}{\beta\,\alpha^{\frac{1}{\alpha\theta}}}\right)^{r-j}(y)^{\frac{1}{\alpha}-1}\ \ (1+\ y)^{-(\frac{\alpha+1}{\alpha})}\ dy$$

$$= \ \beta^{r}\ \alpha^{\frac{r}{\alpha\theta}-1}\sum_{j=0}^{r} C_j^r\left(-\frac{\mu}{\beta\,\alpha^{\frac{1}{\alpha\theta}}}\right)^{r-j}\int_0^{\infty}(y)^{\frac{j}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}-1}\ (1+\ y)^{-(\frac{\alpha+1}{\alpha})}\,dy$$

$$= \ \beta^{r}\ \alpha^{\frac{r}{\alpha\theta}-1}\sum_{j=0}^{r} C_j^r\ \left(-\frac{\mu}{\beta\,\alpha^{\frac{1}{\alpha\theta}}}\right)^{r-j}\int_0^{\infty}\frac{(y)^{\frac{j}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}-1}}{(1+\ y)^{(\frac{\alpha+1}{\alpha})}}\ \ dy$$

وهذا يشابة الصيغة الثانية لتوزيع بيتا $\beta(\alpha\ ,\ \beta\ )=\int_0^{\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}}dx\ = \frac{\Gamma(\alpha)\ \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$

ويمكن كتابة β بالشكل التالي $\beta=(\alpha+\beta)-\alpha$

فتكون قيمة المعلمتين كما يأتي:

$\alpha=\frac{j}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}$

$\beta=1+\frac{1}{\alpha}-\frac{j}{\alpha\theta}-\frac{1}{\alpha}$

$\beta=1-\frac{j}{\alpha\theta}$

$$= \ \beta^{r}\ \alpha^{\frac{r}{\alpha\theta}-1}\sum_{j=0}^{r} C_j^r\left(-\frac{\mu}{\beta\,\alpha^{\frac{1}{\alpha\theta}}}\right)^{r-j}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{j}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\ \ \Gamma\left(1-\frac{j}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right)$$

$$= \ \alpha^{\ -1}\sum_{j=0}^{r} C_j^r\ \beta^{\ j}\ \alpha^{\frac{j}{\alpha\theta}}\,(-\mu)^{r-j}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{j}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{j}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right)$$

$$E(x-\mu)^r = \sum_{j=0}^{r} C_j^r\ \beta^{\,j}\ \alpha^{\frac{j}{\alpha\theta}-1}\ (-\mu)^{r-j}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{j}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{j}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right) \quad \dots (2.11)$$

$$E(x-\mu)^2 = \sigma^2 = \sum_{j=0}^{2} C_j^2\ \beta^{\,j}\ \alpha^{\frac{j}{\alpha\vartheta}-1}\ (-\mu)^{2-j}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{j}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{j}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right)$$

$$\sigma^2 = \left\{\begin{array}{l} C_0^2\beta^{0}\ \alpha^{\left(\frac{0}{\alpha\theta}\right)-1}\ (-\mu)^{2-0}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{0}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{0}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right) \\ +\ C_1^2\beta^{1}\ \alpha^{\left(\frac{1}{\alpha\theta}\right)-1}\ (-\mu)^{2-1}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right) \\ +\ C_2^2\beta^{2}\ \alpha^{\left(\frac{2}{\alpha\theta}\right)-1}\ (-\mu)^{2-2}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right) \end{array}\right\}$$

$$\sigma^2 = \left\{\begin{array}{c} \alpha^{-1}\ (\mu)^2\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma(1)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right) \\ -\,2\beta\ \ \alpha^{\left(\frac{1}{\alpha\theta}\right)-1}\ (\mu)\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right) \\ +\ \beta^{2}\ \alpha^{\left(\frac{2}{\alpha\theta}\right)-1}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right) \end{array}\right\}$$

$$\sigma^2 = \left\{ \begin{array}{c} \alpha^{-1} \left(\beta \quad \alpha^{\frac{1-\alpha\theta}{\alpha\theta}} \frac{\Gamma(\frac{1+\theta}{\theta\alpha})\Gamma(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha})}{\Gamma(\frac{\alpha+1}{\alpha})} \right)^2 \left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)} \right) \\ -2\beta\,\alpha^{\left(\frac{1}{\alpha\theta}\right)-1} \left(\beta\,\alpha^{\frac{1-\alpha\theta}{\alpha\theta}} \frac{\Gamma(\frac{1+\theta}{\theta\alpha})\Gamma(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha})}{\Gamma(\frac{\alpha+1}{\alpha})} \right) \left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)} \right) \\ +\ \beta^2\,\alpha^{\left(\frac{2}{\alpha\theta}\right)-1} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)} \right) \end{array} \right\}$$

$$\sigma^2 = \left\{ \begin{array}{c} \beta^2\,\alpha^{-3+\left(\frac{2}{\alpha\theta}\right)} \left(\frac{\Gamma(\frac{1+\theta}{\theta\alpha})\Gamma(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha})}{\Gamma(\frac{\alpha+1}{\alpha})} \right)^2 \left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)} \right) \\ -\ 2\beta^2\ \ \alpha^{\left(\frac{2}{\alpha\theta}\right)-2} \left(\frac{\Gamma^2(\frac{1+\theta}{\theta\alpha})\Gamma^2(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha})}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)} \right) \\ +\ \beta^2\,\alpha^{\left(\frac{2}{\alpha\theta}\right)-1} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)} \right) \end{array} \right\} \quad \ldots(2.12)$$

3.1.4.2 معامل الالتواء (C.S) Coefficient of Skeuedness [5]

تنقسم التوزيعات الاحتمالية بشكل عام الى قسمين رئيسين هما التوزيعات المتماثلة والتوزيعات الملتوية.والالتواء بدوره ينقسم الى قسمين التواء موجب والاتواء سالب وسنقوم بتطبيق قانون الالتواء على توزيع كابا لمعرفة نوع الالتواء له وكما يلي:

$$C.S=\frac{E(x-\mu)^3}{\sigma^3} \quad \ldots(2.13)$$

(r=3) نعوض في المعادلة (11. 2) ونبسط المعادلة يكون الناتج كما يأتي:

$$E(x-\mu)^3 = \beta^{\,j}\ \alpha^{\frac{j}{\alpha\theta}-1} \sum_{j=0}^{3} C_j^3\ \ (-M)^{3-j} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{j}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{j}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)} \right)$$

$$E(x-\mu)^3 = \left\{ \begin{array}{l} C_0^3 \beta^{\,0} \ \alpha^{\left(\frac{0}{\alpha\theta}\right)-1} \ (-\mu)^{3-0} \left(\dfrac{\Gamma\left(\frac{0}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{0}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)} \right) \\ + C_1^3 \beta^{\,1} \ \alpha^{\left(\frac{1}{\alpha\theta}\right)-1} \ (-\mu)^{3-1} \left(\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)} \right) \\ + C_2^3 \beta^{\,2} \ \alpha^{\left(\frac{2}{\alpha\theta}\right)-1} \ (-\mu)^{3-2} \left(\dfrac{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)} \right) \\ + C_3^3 \beta^{\,3} \ \alpha^{\left(\frac{3}{\alpha\theta}\right)-1} \ (-\mu)^{3-3} \left(\dfrac{\Gamma\left(\frac{3}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{3}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)} \right) \end{array} \right\}$$

$$E(x-\mu)^3$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \beta^{\,3} \ \alpha^{\left(\frac{3}{\alpha\theta}\right)-1} \left(\dfrac{\Gamma\left(\frac{3}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{3}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)} \right) \\ -3 \ \beta^{\,2} \ \alpha^{\left(\frac{2}{\alpha\theta}\right)-1} \ (\mu) \left(\dfrac{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)} \right) \\ +3 \ \beta \ \ \alpha^{\left(\frac{1}{\alpha\theta}\right)-1} \ (\mu)^2 \left(\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)} \right) \\ -\alpha^{\ -1} \ (\mu)^3 \left(\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma(1)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)} \right) \end{array} \right\}$$

$$= E(x-\mu)^3 =$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} \beta^{3}\ \alpha^{\left(\frac{3}{\alpha\theta}\right)-1} \left(\dfrac{\Gamma\left(\frac{3}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{3}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)} \right) \\ -3\ \beta^{2}\ \alpha^{\left(\frac{2}{\alpha\theta}\right)-1} \left(\beta\, \alpha^{\frac{1-\alpha\theta}{\alpha\theta}} \dfrac{\Gamma\left(\frac{1+\theta}{\theta\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)} \right) \left(\dfrac{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)} \right) \\ +3\ \beta\ \ \alpha^{\left(\frac{1}{\alpha\theta}\right)-1} \left(\beta\, \alpha^{\frac{1-\alpha\theta}{\alpha\theta}} \dfrac{\Gamma\left(\frac{1+\theta}{\theta\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)} \right)^{2} \left(\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)} \right) \\ -\alpha^{-1} \left(\beta\, \alpha^{\frac{1-\alpha\theta}{\alpha\theta}} \dfrac{\Gamma\left(\frac{1+\theta}{\theta\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)} \right)^{3} \left(\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)} \right) \end{array} \right\}$$

$$E(x-\mu)^3 =$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \beta^{3}\ \alpha^{\left(\frac{3}{\alpha\theta}\right)-1} \left(\dfrac{\Gamma\left(\frac{3}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{3}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)} \right) \\ -3\ \beta^{3}\ \alpha^{\left(\frac{3}{\alpha\theta}\right)-2} \left(\dfrac{\Gamma\left(\frac{1+\theta}{\theta\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)} \right) \left(\dfrac{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)} \right) \\ +3\ \beta^{3}\ \alpha^{\left(\frac{3}{\alpha\theta}\right)-3} \left(\dfrac{\Gamma^{3}\left(\frac{1}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma^{3}\left(1-\frac{1}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma^{3}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)} \right) \\ -\ \beta^{3}\ \alpha^{\left(\frac{3}{\alpha\theta}\right)-4} \left(\dfrac{\Gamma\left(\frac{1+\theta}{\theta\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)} \right)^{3} \left(\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)} \right) \end{array} \right\} \quad \ldots (2.14)$$

$$\sigma^3 = \sigma \,.\, \sigma^2$$

$$= \left\{ \left\{ \begin{array}{l} \beta^2 \alpha^{\left(\frac{2}{\alpha\theta}\right)-3} \left(\dfrac{\Gamma(\frac{1+\theta}{\theta\alpha})\Gamma(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha})}{\Gamma(\frac{\alpha+1}{\alpha})} \right)^2 \left(\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)} \right) \\ -2\beta^2 \alpha^{\left(\frac{2}{\alpha\theta}\right)-2} \left(\dfrac{\Gamma^2(\frac{1+\theta}{\theta\alpha})\Gamma^2(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha})}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)} \right) \\ + \beta^2 \alpha^{\left(\frac{2}{\alpha\theta}\right)-1} \left(\dfrac{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)} \right) \end{array} \right\} . \left\{ \begin{array}{l} \beta^2 \alpha^{\left(\frac{2}{\alpha\theta}\right)-3} \left(\dfrac{\Gamma(\frac{1+\theta}{\theta\alpha})\Gamma(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha})}{\Gamma(\frac{\alpha+1}{\alpha})} \right)^2 \left(\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)} \right) \\ -2\beta^2 \alpha^{\left(\frac{2}{\alpha\theta}\right)-2} \left(\dfrac{\Gamma^2(\frac{1+\theta}{\theta\alpha})\Gamma^2(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha})}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)} \right) \\ + \beta^2 \alpha^{\left(\frac{2}{\alpha\theta}\right)-1} \left(\dfrac{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)} \right) \end{array} \right\}^2 \right\}$$

$$\sigma^3 = \left\{ \begin{array}{l} \beta^2 \alpha^{\left(\frac{2}{\alpha\theta}\right)-3} \left(\dfrac{\Gamma\left(\frac{1+\theta}{\theta\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)} \right)^2 \left(\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)} \right) \\ -2\beta^2 \alpha^{\left(\frac{2}{\alpha\theta}\right)-2} \left(\dfrac{\Gamma^2(\frac{1+\theta}{\theta\alpha})\Gamma^2(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha})}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)} \right) \\ + \beta^2 \alpha^{\left(\frac{2}{\alpha\theta}\right)-1} \left(\dfrac{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)} \right) \end{array} \right\}^3 \quad \dots (2.15)$$

$$C.S=\frac{E(x-\mu)^3}{\sigma^3}$$

$$C.S=\frac{\left\{\begin{array}{c} \beta^{3}\,\alpha^{\left(\frac{3}{\alpha\theta}\right)-1}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{3}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{3}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right) \\ -3\,\beta^{3}\,\alpha^{\left(\frac{3}{\alpha\theta}\right)-2}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1+\theta}{\theta\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}\right)\left(\frac{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right) \\ +3\,\beta^{3}\,\alpha^{\left(\frac{3}{\alpha\theta}\right)-3}\left(\frac{\Gamma^{3}\left(\frac{1}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma^{3}\left(1-\frac{1}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma^{3}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right) \\ -\,\beta^{3}\,\alpha^{\left(\frac{3}{\alpha\theta}\right)-4}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1+\theta}{\theta\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}\right)^{3}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right) \end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{c} \beta^{2}\,\alpha^{\left(\frac{2}{\alpha\theta}\right)-3}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1+\theta}{\theta\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}\right)^{2}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right) \\ -2\beta^{2}\,\alpha^{\left(\frac{2}{\alpha\theta}\right)-2}\left(\frac{\Gamma^{2}\left(\frac{1+\theta}{\theta\alpha}\right)\Gamma^{2}\left(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}\right) \\ +\,\beta^{2}\,\alpha^{\left(\frac{2}{\alpha\theta}\right)-1}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right) \end{array}\right\}^{3}} \quad \ldots(2.16)$$

4.1.4.2 معامل التفلطح (C.K) Coefficient of kurtosis [5]

يعرف التفلطح بانه مقدار تسطح او تدبب منحنى التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي .ويرتبط مفهوم التفلطح ارتباط وثيق مع مفهوم التشتت.فكلما كان تشتت القيم المتغير عاليا فذلك مؤشر لتسطح منحنى التوزيع الاحتمالي ويمكن ان نقيس مقدار التفلطح حسب الصيغة التالية:

$$C.K=\frac{E(x-\mu)^4}{\sigma^4} \quad \ldots(2.17)$$

عندما نفرض (r=4) في العادلة (2.11) يكون لدينا ما يأتي:

$$E(x-\mu)^4=\sum_{j=0}^{4}C_j^4\,\beta^{\,j}\,\alpha^{\frac{j}{\alpha\vartheta}-1}\,(-\mu)^{4-j}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{j}{\alpha\vartheta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{j}{\alpha\vartheta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right) \quad ..(2.18)$$

$$E(x-\mu)^4=\begin{Bmatrix} C_0^4\beta^{0}\ \alpha^{\left(\frac{0}{\alpha\theta}\right)-1}\ (-\mu)^{4-0}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{0}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{0}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right)\\ +C_1^4\beta^{1}\ \alpha^{\left(\frac{1}{\alpha\theta}\right)-1}\ (-\mu)^{4-1}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right)\\ +C_2^4\beta^{2}\ \alpha^{\left(\frac{2}{\alpha\theta}\right)-1}\ (-\mu)^{4-2}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right)\\ +C_3^4\beta^{3}\ \alpha^{\left(\frac{3}{\alpha\theta}\right)-1}\ (-\mu)^{4-3}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{3}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{3}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right)\\ +C_4^4\beta^{4}\ \alpha^{\left(\frac{4}{\alpha\theta}\right)-1}\ (-\mu)^{4-4}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{4}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{4}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right) \end{Bmatrix}$$

$$E(x-\mu)^4=\begin{Bmatrix} \beta^{4}\ \alpha^{\left(\frac{4}{\alpha\theta}\right)-1}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{4}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{4}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right)\\ -4\ \beta^{3}\ \alpha^{\left(\frac{3}{\alpha\theta}\right)-1}\ \mu\left(\frac{\Gamma\left(\frac{3}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{3}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right)\\ +6\ \beta^{2}\ \alpha^{\left(\frac{2}{\alpha\theta}\right)-1}\ (\mu)^2\left(\frac{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right)\\ -4\ \beta\ \alpha^{\left(\frac{1}{\alpha\theta}\right)-1}\ (\mu)^3\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right)\\ +\ \alpha^{-1}\ (\mu)^4\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma(1)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right) \end{Bmatrix}$$

$$E(x-\mu)^4 =$$

$$= \left\{ \begin{array}{c}
\beta^{4}\,\alpha^{\left(\frac{4}{\alpha\theta}\right)-1}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{4}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{4}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right) \\
-4\,\beta^{3}\,\alpha^{\left(\frac{3}{\alpha\theta}\right)-1}\left(\beta\quad\alpha^{\frac{1-\alpha\vartheta}{\alpha\vartheta}}\quad\frac{\Gamma\left(\frac{1+\theta}{\theta\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}\right)\left(\frac{\Gamma\left(\frac{3}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{3}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right) \\
+6\,\beta^{2}\,\alpha^{\left(\frac{2}{\alpha\theta}\right)-1}\left(\beta\quad\alpha^{\frac{1-\alpha\theta}{\alpha\theta}}\quad\frac{\Gamma\left(\frac{1+\theta}{\theta\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}\right)^{2}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right) \\
-4\,\beta\,\alpha^{\left(\frac{1}{\alpha\theta}\right)-1}\left(\beta\quad\alpha^{\frac{1-\alpha\theta}{\alpha\theta}}\quad\frac{\Gamma\left(\frac{1+\theta}{\theta\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}\right)^{3}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right) \\
+\quad\alpha^{-1}\left(\beta\quad\alpha^{\frac{1-\alpha\theta}{\alpha\theta}}\quad\frac{\Gamma\left(\frac{1+\theta}{\theta\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}\right)^{4}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right)
\end{array} \right\}$$

$$E(x-\mu)^4 =$$

$$\left\{ \begin{array}{c}
\beta^{4}\,\alpha^{\left(\frac{4}{\alpha\theta}\right)-1}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{4}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{4}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right) \\
-4\,\beta^{4}\,\alpha^{\left(\frac{4}{\alpha\theta}\right)-2}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1+\theta}{\theta\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}\right)\left(\frac{\Gamma\left(\frac{3}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{3}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right) \\
+6\,\beta^{4}\,\alpha^{\left(\frac{4}{\alpha\theta}\right)-3}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1+\theta}{\theta\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}\right)\left(\frac{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right) \\
-4\quad\beta^{4}\quad\alpha^{\left(\frac{4}{\alpha\theta}\right)-4}\left(\frac{\Gamma^{4}\left(\frac{1}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma^{4}\left(1-\frac{1}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma^{4}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right) \\
+\beta^{4}\quad\alpha^{\left(\frac{4}{\alpha\theta}\right)-5}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1+\theta}{\theta\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}\right)^{4}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right)
\end{array} \right\}$$

...(2.19)

$$\sigma^4 = \sigma^2 . \sigma^2 = (\sigma^2)^2$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \beta^2 \alpha^{\left(\frac{2}{\alpha\theta}\right)-3} \left(\dfrac{\Gamma(\frac{1+\theta}{\theta\alpha})\Gamma(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha})}{\Gamma(\frac{\alpha+1}{\alpha})} \right)^2 \left(\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)} \right) \\ -2\beta^2 \alpha^{\left(\frac{2}{\alpha\theta}\right)-2} \left(\dfrac{\Gamma^2(\frac{1+\theta}{\theta\alpha})\Gamma^2(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha})}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)} \right) \\ +\beta^2 \alpha^{\left(\frac{2}{\alpha\theta}\right)-1} \left(\dfrac{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)} \right) \end{array} \right\} . \\ \left\{ \begin{array}{l} \beta^2 \alpha^{\left(\frac{2}{\alpha\theta}\right)-3} \left(\dfrac{\Gamma(\frac{1+\theta}{\theta\alpha})\Gamma(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha})}{\Gamma(\frac{\alpha+1}{\alpha})} \right)^2 \left(\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)} \right) \\ -2\beta^2 \alpha^{\left(\frac{2}{\alpha\theta}\right)-2} \left(\dfrac{\Gamma^2(\frac{1+\theta}{\theta\alpha})\Gamma^2(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha})}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)} \right) \\ +\beta^2 \alpha^{\left(\frac{2}{\alpha\theta}\right)-1} \left(\dfrac{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)} \right) \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

$$\sigma^4 = \left\{ \begin{array}{l} \beta^2 \alpha^{\left(\frac{2}{\alpha\theta}\right)-3} \left(\dfrac{\Gamma(\frac{1+\theta}{\theta\alpha})\Gamma(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha})}{\Gamma(\frac{\alpha+1}{\alpha})} \right)^2 \left(\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)} \right) \\ -2\beta^2 \alpha^{\left(\frac{2}{\alpha\theta}\right)-2} \left(\dfrac{\Gamma^2(\frac{1+\theta}{\theta\alpha})\Gamma^2(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha})}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)} \right) \\ +\beta^2 \alpha^{\left(\frac{2}{\alpha\theta}\right)-1} \left(\dfrac{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)} \right) \end{array} \right\}^2 \quad \ldots (2.20)$$

$$C.K=\frac{\left\{\begin{array}{l} \beta^{4}\,\alpha^{\left(\frac{4}{\alpha\theta}\right)-1}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{4}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{4}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right) \\ -4\,\beta^{4}\,\alpha^{\left(\frac{4}{\alpha\theta}\right)-2}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1+\theta}{\theta\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}\right)\left(\frac{\Gamma\left(\frac{3}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{3}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right) \\ +6\,\beta^{4}\,\alpha^{\left(\frac{4}{\alpha\theta}\right)-3}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1+\theta}{\theta\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}\right)\left(\frac{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right) \\ -4\,\beta^{4}\,\alpha^{\left(\frac{4}{\alpha\theta}\right)-4}\left(\frac{\Gamma^{4}\left(\frac{1}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma^{4}\left(1-\frac{1}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma^{4}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right) \\ +\beta^{4}\,\alpha^{\left(\frac{4}{\alpha\theta}\right)-5}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1+\theta}{\theta\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}\right)^{4}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right) \end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{l} \beta^{2}\,\alpha^{\left(\frac{2}{\alpha\theta}\right)-3}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1+\theta}{\theta\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}\right)^{2}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right) \\ -2\beta^{2}\,\alpha^{\left(\frac{2}{\alpha\theta}\right)-2}\left(\frac{\Gamma^{2}\left(\frac{1+\theta}{\theta\alpha}\right)\Gamma^{2}\left(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}\right) \\ +\beta^{2}\,\alpha^{\left(\frac{2}{\alpha\theta}\right)-1}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right) \end{array}\right\}^{2}} \quad \ldots(2.21)$$

5.1.4.2 معامل الاختلاف (C.V) (Coefficients of Variation) [4]

يعتبر معامل الاختلاف احد مقاييس التشتت النسبية .ويعرف على انه النسبة بين الانحراف المعياري في توزيع معين الى وسط ذلك التوزيع ويمكن حسابة حسب الصيغة التالية:

$$C.V=\frac{\sqrt{\sigma^{2}}}{E(X)}*100 \quad \ldots(2.22)$$

ان قيمة معامل الاختلاف هي حاصل قسمة التباين المستخرج في المعادلة (2.12) على التوقع المستخرج في المعادلة (2.8) وكما يأتي :

$$C.V = \frac{\left\{ \begin{array}{c} \alpha^{-3+\left(\frac{2}{\alpha\theta}\right)} \left(\frac{\Gamma(\frac{1+\theta}{\theta\alpha})\Gamma(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha})}{\Gamma(\frac{\alpha+1}{\alpha})} \right)^2 \left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)} \right) \\ -2\alpha^{\frac{2}{\alpha\theta}-2} \frac{\Gamma^2(\frac{1+\theta}{\theta\alpha})\Gamma^2(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha})}{\Gamma(\frac{\alpha+1}{\alpha})} \\ +\alpha^{\frac{2}{\alpha\theta}-1} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)} \end{array} \right\}^{\frac{1}{2}}}{\alpha^{\frac{1-\alpha\theta}{\alpha\theta}} \frac{\Gamma(\frac{1+\theta}{\theta\alpha})\Gamma(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha})}{\Gamma(\frac{\alpha+1}{\alpha})}} * 100 \quad \ldots (2.23)$$

5.2 طرائق التقدير: Estimation Methods

1.5.2 طريقة الامكان الاعظم

Maximum likelihood estimation method (35)(37)(28)(23)

أن اول من صاغ طريقة دالة الامكان الاعظم هو (C.F.Gauss) , وقد قام الباحث (R.A.Fisher)عند تطبيقهما لاول مرة في ابحاث متعددة , و ان مقدر الامكان الاعظم هو الذي يجعل لوغارتم دالة الامكان الاعظم في نهايتها العظمى .

فاذا كنا نمتلك عينة عشوائية($x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$) من توزيع كابا المعرف في ادناه فان دالة الامكان الاعظم تكون كما يأتي:

$$L f(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n, \alpha, \beta, \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \alpha, \beta, \theta) \qquad \ldots (2.24)$$

وكانت دالة الثافة الاحتمالية لتوزيع كابا كما يأتي:

$$f(x_i, \alpha, \beta, \theta) = \frac{\alpha\theta}{\beta}\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta-1}\left(\alpha+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}\right)^{-\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}$$

والصيغة المذكور انفاً يمكن كتابتها على النحو الاتي:

$$L f(x_i, \alpha, \beta, \theta) = \frac{\alpha^n\theta^n}{\beta^n} \Pi_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\theta-1}\left(\alpha+\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha\theta}\right)^{-\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}\right) \quad \ldots (2.25)$$

وباخذ ln للمعادله (2.25)

$$\ln L\, f(x_i,\alpha,\beta,\theta) = \begin{cases} n\ln\alpha + n\ln\theta - n\ln\beta + (\theta-1)\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{x_i}{\beta}\right) \\ -\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\alpha+\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha\theta}\right) \end{cases} \quad \ldots (2.26)$$

وباخذ المشتقة للمعادلة (2.26) بالنسبة ل (β, θ,α) ومساواتها للصفر ثم نستخرج المقدر للمعالم الثلاث($\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\theta}$) كما يأتي:

$$\frac{\partial \ln L\;\; f(x_i,\alpha,\beta,\theta)}{\partial\alpha} = \begin{cases} \frac{n}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}\sum_{i=1}^{n}\ln\;\left(\alpha+\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha\theta}\right) \\ -\frac{\alpha+1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n}\frac{1+\theta\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha\theta}\ln\left(\frac{x_i}{\beta}\right)}{\alpha+\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha\theta}} \end{cases} \ldots (2.27)$$

$$Let\;\; \frac{\partial \ln L\;\; f(x_i,\alpha,\beta,\theta)}{\partial\alpha} = 0$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{n}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}\sum_{i=1}^{n}\ln\;\left(\alpha+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}\right) \\ -\frac{\alpha+1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n}\frac{1+\theta\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}\ln\left(\frac{x}{\beta}\right)}{\alpha+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}} \end{Bmatrix} = 0$$

$$\hat{\alpha}_{MLE} = \frac{n}{\begin{Bmatrix} -\frac{1}{\alpha^2}\sum_{i=1}^{n}\ln\;\left(\alpha+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}\right) \\ +\frac{\alpha+1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n}\frac{1+\theta\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}\ln\left(\frac{x}{\beta}\right)}{\alpha+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}} \end{Bmatrix}} \quad \ldots (2.28)$$

$$\frac{\partial \ln L\;\; f(x_i,\alpha,\beta,\theta)}{\partial\beta} = -\frac{n\theta}{\beta} + \frac{(\alpha+1)\theta}{\beta}\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}}{\alpha+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}}$$

$$Let\;\; \frac{\partial \ln L\;\; f(x_i,\alpha,\beta,\theta)}{\partial\beta} = 0$$

$$-\frac{n\theta}{\beta}+\frac{(\alpha+1)\theta}{\beta}\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}}{\alpha+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}}=0$$

$$\hat{\beta}_{MLE}=\frac{n\theta}{\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}}{\alpha+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}}} \qquad \dots(2.29)$$

$$\frac{\partial\, lnL\ \ f(x_i,\alpha,\beta,\theta)}{\partial\theta}$$

$$=\frac{n}{\theta}-n\ln\beta+\sum_{i=1}^{n}ln(x)-(\alpha+1)\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}ln\left(\frac{x}{\beta}\right)}{\alpha+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}}$$

$$Let\ \frac{\partial\, lnL\ \ f(x_i,\alpha,\beta,\theta)}{\partial\theta}=0$$

$$\frac{n}{\theta}-n\ln\beta+\sum_{i=1}^{n}ln(x)-(\alpha+1)\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}ln\left(\frac{x}{\beta}\right)}{\alpha+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}}=0$$

$$\hat{\theta}_{MLE}=\frac{n}{\left\{\begin{array}{l}\frac{n}{\theta}-n\ln\beta+\sum_{i=1}^{n}ln(x)\\-(\alpha+1)\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}\ln\left(\frac{x}{\beta}\right)}{\alpha+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}}\end{array}\right\}} \qquad \dots(2.30)$$

2.5.2 - طريقة تقدير العزوم الخطية (Linear Moments Estimation Method) (13) (15)

نقدر في هذه الطريقة معالم توزيع كابا, وتم اقتراح هذة الطريقة من لدن كل من (Hosting 1990) و(David and Nagaraj 2003) وان هذه الطريقة تعتمد الحصول على معادلات ناتجة عن تساوي B_r مع b_r. علما ان B_r هو التوقع لحاصل تكامل لدالة C.D.F مرفوعة للاس (r) مضوباً بدالة pdf . وان b_r هومقدار مقترح من لدن (Hosting 1990) ومعرف كما ياتي وبعد الحصول على صيغة B_r تساوي صيغة العزوم الخطية b_r لغرض الحصول على مقدرات المعالم التي تكون نظام المعادلات مرتبة ومساوية لعدد معادلات المعالم في تقدير(β, θ,α) ويمكن الحصول على ذلك كما ياتي:

$$B_r=\int_0^{\infty}x\quad F^r(x)\,f(x)dx \qquad \dots(2.31)$$

(31) $$b_r = \frac{1}{nC_r^{n-1}} \sum_{i=1}^{n} C_r^{n-1} x(i) \qquad \text{... (2.32)}$$

إذ أنها معرفة بالعينة المرتبة لقيم المشاهدات

$$x_1 \le x_2 \le x_3 \le \dots\dots\dots \le x_n$$

$$F^r(x) = \left[\left(\frac{(\frac{x}{\beta})^{\alpha\,\theta}}{\alpha + \frac{x^{\alpha\theta}}{\beta}} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right]^r$$

$$f(x) = \frac{\alpha\theta}{\beta} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta-1} \left(\alpha + \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}\right)^{-(\frac{\alpha+1}{\alpha})}$$

$$B_r = \int_0^\infty x \quad F^r(x)\, f(x)\, dx$$

$$B_r = \int_0^\infty x \left(\frac{(\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}}{\alpha + \frac{x^{\alpha\theta}}{\beta}} \right)^{\frac{r}{\alpha}} \frac{\alpha\theta}{\beta} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta-1} \left(\alpha + \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}\right)^{-(\frac{\alpha+1}{\alpha})} dx$$

Let u=$\frac{x}{\beta}$ $\Rightarrow x = u\beta \quad \Rightarrow dx = \beta du$

$$= \int_0^\infty u\beta \left(\frac{u^{\alpha\theta}}{\alpha + u^{\alpha\theta}} \right)^{\frac{r}{\alpha}} \frac{\alpha\theta}{\beta} (u)^{\theta-1} \left(\alpha + u^{\alpha\theta}\right)^{-(\frac{\alpha+1}{\alpha})} \beta\, du$$

$$= \beta\alpha\theta \int_0^\infty (u)^{\theta} \left(\frac{u^{\alpha\theta}}{\alpha+u^{\alpha\theta}} \right)^{\frac{r}{\alpha}} \left(\alpha + (u)^{\alpha\theta}\right)^{-(\frac{\alpha+1}{\alpha})} du$$

Let Z=$u^{\alpha\theta}$ $\Rightarrow u = Z^{\frac{1}{\alpha\theta}} \quad \Rightarrow du = \frac{1}{\alpha\theta} Z^{\frac{1}{\alpha\theta}-1} dz$

$$= \beta \int_0^\infty (Z)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{Z}{\alpha + Z} \right)^{\frac{r}{\alpha}} (\alpha + Z)^{-(\frac{\alpha+1}{\alpha})} Z^{\frac{1}{\alpha\theta}-1} dz$$

$$= \beta\ \alpha^{-\frac{1}{\alpha}-\frac{r}{\alpha}-1} \int_0^\infty (Z)^{\frac{1}{\alpha}+\frac{r}{\alpha}+\frac{1}{\theta\alpha}-1} . \left(1 + \frac{Z}{\alpha}\right)^{-\frac{1}{\alpha}-\frac{r}{\alpha}-1} dz$$

Let y=$\frac{Z}{\alpha}$ $\Rightarrow Z = \alpha y \quad \Rightarrow dZ = \alpha\, dy$

$$= \beta\ \alpha^{\frac{1}{\alpha}+\frac{r}{\alpha}+\frac{1}{\alpha\theta}} \int_0^\infty (\alpha y)^{\frac{1}{\alpha}+\frac{r}{\alpha}+\frac{1}{\theta\alpha}-1} (1 + y)^{-\frac{1}{\alpha}-\frac{r}{\alpha}-1} \alpha\, dy$$

$$= \beta\alpha^{\frac{1}{\alpha}+\frac{r}{\alpha}+\frac{1}{\alpha\theta}} \int_0^\infty (y)^{\frac{1}{\alpha}+\frac{r}{\alpha}+\frac{1}{\theta\alpha}-1} \; (1+ \; y)^{-\frac{1}{\alpha}-\frac{r}{\alpha}-1} \quad dy$$

$$= \beta \; \alpha^{\frac{1}{\alpha}+\frac{r}{\alpha}+\frac{1}{\alpha\theta}} \int_0^\infty \frac{(y)^{\frac{1}{\alpha}+\frac{r}{\alpha}+\frac{1}{\theta\alpha}-1}}{(1+ \; y)^{\frac{1}{\alpha}+\frac{r}{\alpha}+1}} \qquad dy$$

وهذا يشابه الصيغة الثانية لتوزيع بيتا: $B(\alpha \; \beta)=\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}}dx = \frac{\Gamma(\alpha)\;\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$

ويمكن كتابة β بالشكل التالي $\beta = (\alpha+\beta) - \alpha$

فتتولد لدينا قيم(α , β) كما يأتي :

$$\alpha = \frac{1}{\alpha\theta} + \frac{1}{\alpha} + \frac{r}{\alpha}$$

$$\beta = \frac{1}{\alpha} + \frac{r}{\alpha} + 1 - \frac{1}{\alpha\theta} - \frac{1}{\alpha} - \frac{r}{\alpha}$$

$$\beta = 1 - \frac{1}{\alpha\theta}$$

وان الناتج النهائي لقيمة B_r كما يأتي :

$$B_r = \beta \quad \alpha^{\frac{1}{\alpha}+\frac{r}{\alpha}+\frac{1}{\alpha\theta}} \quad \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\theta\alpha}+\frac{1}{\alpha}+\frac{r}{\alpha}\right) \quad \Gamma(1 - \frac{1}{\alpha\theta})}{\Gamma(\frac{1}{\alpha}+\frac{r}{\alpha}+1)} \qquad \dots (2.33)$$

عندما r=1:

$$B1 = \beta \quad \alpha^{\frac{2}{\alpha}+\frac{1}{\alpha\theta}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\theta\alpha}+\frac{2}{\alpha}\right) \quad \Gamma\left(1 - \frac{1}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}+1\right)} \qquad \dots (2.34)$$

عندما r=2:

$$B2 = \beta \quad \alpha^{\frac{3}{\alpha}+\frac{1}{\alpha\theta}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\theta\alpha}+\frac{3}{\alpha}\right) \quad \Gamma(1 - \frac{1}{\alpha\theta})}{\Gamma(\frac{3}{\alpha}+1)} \qquad \dots (2.35)$$

عندما r=3:

$$B3 = \beta \quad \alpha^{\frac{4}{\alpha}+\frac{1}{\alpha\theta}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\theta\alpha}+\frac{4}{\alpha}\right) \quad \Gamma(1 - \frac{1}{\alpha\theta})}{\Gamma(\frac{4}{\alpha}+1)} \qquad \dots (2.36)$$

وبعد التعويض بقيمة (r) للمقدر (br)

بما يساويها من قيم حقيقية تم تعويضها للتقدير في المجتمع كما يلي:

عندما:r=1

$$b_1 = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(i-1)x(i) \qquad \dots(2.37)$$

عندما r=2 :

$$b_2 = \frac{1}{n(n-1)(n-2)}\sum_{i=1}^{n}(i-1)(i-2)x(i) \qquad \dots(2.38)$$

عندما r=3 :

$$b_3 = \frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)}\sum_{i=1}^{n}(i-1)(i-2)(i-3)x(i) \qquad \dots(2.39)$$

ولغرض الحصول على المقدرات ($\hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\theta}$) وبعد تساوي المعادلات(2.37,2.34)و (2.38,2.35)و (2.39,2.36) هي معادلات ضمنية تحل في برنامج matlab لاستخراج قيم المقدرات للمعلمات الثلاث (θ,β,α) و كما يأتي:

B1=b1 ...(2.40)

B2=b2 *...(2.41)*

B3=b3 *...(2.42)*

3.5.2 طريقة العزوم في حالة التحيز(Method of Length biased moments) [26]

سنحصل على نتائج لتوزيع كابا التي بعضها اكثر اهمية من الخصائص الرياضية للتوزيع والتي يمكن دراستها عن طريق العزم من الدرجة r .اقترحة هذه الطريقة من لدن (Nareerat and Uinai 2014) حيث ان عزم المتغير العشوائي (x) غير سالب من الدرجة r .وان$E(x^r) < \infty$ إذ أن ان $E(x^r)$ يمثل توقع التحيز ويمكن الحصول عليه عن طريق الصيغة الاتية :

$$E_L(x^r) = \frac{E(x^{r+1})}{E(x)} \qquad r = 1,2,3,\dots \qquad \dots(2.43)$$

$$E(x^{r+1}) = \int_0^\infty x^{r+1}f(x)dx \qquad \dots(2.44)$$

$$E(x^{r+1})=\int_0^\infty x^{r+1}\,\frac{\alpha\,\theta}{\beta}\,\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta-1}\left(\alpha+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}\right)^{-\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}dx$$

Let $u = \frac{x}{\beta} \quad \Rightarrow x = u\beta \quad \Rightarrow dx = \beta\, du$

$$= \int_0^\infty (u\beta)^{r+1} \frac{\alpha\theta}{\beta} u^{\theta-1} \left(\alpha + u^{\alpha\theta}\right)^{-(\frac{\alpha+1}{\alpha})} \beta\, du$$

$$= \beta^{\,r+1} \int_0^\infty u^{\,r+\theta} \quad \alpha\theta \quad \left(\alpha + u^{\alpha\theta}\right)^{-(\frac{\alpha+1}{\alpha})} du$$

$Let\ Z = u^{\alpha\theta} \quad \Rightarrow u = Z^{\frac{1}{\alpha\theta}} \quad \Rightarrow du = \frac{1}{\alpha\theta} Z^{\frac{1}{\alpha\theta}-1} dz$

$$= \beta^{\,r+1} \int_0^\infty Z^{\frac{r+\theta}{\alpha\theta}} \quad \alpha\theta \quad (\alpha + Z)^{-(\frac{\alpha+1}{\alpha})} \frac{1}{\alpha\theta} Z^{\frac{1}{\alpha\theta}-1} dz$$

$$= \beta^{\,r+1} \alpha^{-(\frac{\alpha+1}{\alpha})} \int_0^\infty Z^{\frac{r}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha\theta}-1} \quad \left(1 + \frac{Z}{\alpha}\right)^{-(\frac{\alpha+1}{\alpha})} \quad dz$$

$Let\ y = \frac{Z}{\alpha} \quad \Rightarrow Z = \alpha y \quad \Rightarrow dZ = \alpha\, dy$

$$= \beta^{\,r+1} \alpha^{-(\frac{\alpha+1}{\alpha})} \int_0^\infty (\alpha y)^{\frac{r}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}-1} \quad (1 + y)^{-(\frac{\alpha+1}{\alpha})} \quad \alpha\, dy$$

$$= \beta^{\,r+1} \alpha^{-1-\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha\theta}+\frac{r}{\alpha\theta}} \int_0^\infty \frac{(y)^{\frac{r}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}-1}}{(1+y)^{(\frac{\alpha+1}{\alpha})}} \quad dy$$

$$= \beta^{r+1} \alpha^{\frac{1}{\alpha\theta}+\frac{r}{\alpha\theta}-1} \int_0^\infty \frac{(y)^{\frac{r}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}-1}}{(1+y)^{(\frac{\alpha+1}{\alpha})}} \quad dy$$

وهذا يشابة الصيغة الثانية لتوزيع بيتا: $B(\alpha \quad \beta) = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}} dx = \frac{\Gamma(\alpha)\ \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$

إذ ان $\beta = (\alpha + \beta) - \alpha$

فيكون لدينا قيم $(\alpha\ ,\ \beta)$

$\alpha = \frac{1}{\alpha\theta} + \frac{1}{\alpha} + \frac{r}{\alpha\theta}$

$\beta = 1 - \frac{r}{\alpha\theta} - \frac{1}{\alpha\theta}$

$$E(x^{\,r+1}) = \left[\beta^{\,r+1} \quad \alpha^{\frac{r}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha\theta}-1} \quad \frac{\Gamma\left(\frac{r}{\theta\alpha}+\frac{1}{\alpha}+\frac{r}{\alpha\theta}\right) \quad \Gamma\left(1 - \frac{r}{\alpha\theta} - \frac{1}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)} \right] \ldots (2.45)$$

وان قيمة التوقع المستخرج آنفا هي:

$$E(x)=\left[\beta \quad \alpha^{\frac{1-\alpha\theta}{\alpha\theta}} \quad \frac{\Gamma(\frac{1+\theta}{\theta\alpha}) \quad \Gamma(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha})}{\Gamma(\frac{\alpha+1}{\alpha})}\right]$$

فيكون لدينا حاصل توظيف الصيغتين كلاتي:

$$E_L(x^r)=\frac{E(x^{r+1})}{E(x\,)}$$

$$E_L(x^r)=\left[\frac{\beta^{(r+1)} \quad \alpha^{\frac{r}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha\theta}-1} \quad \frac{\Gamma\left(\frac{r}{\theta\alpha}+\frac{1}{\alpha}+\frac{r}{\alpha\theta}\right) \quad \Gamma(1-\frac{r}{\alpha\theta}-\frac{1}{\alpha\theta})}{\Gamma(\frac{\alpha+1}{\alpha})}}{\beta \quad \alpha^{(\frac{1-\alpha\theta}{\alpha\theta})} \quad \frac{\Gamma(\frac{1+\theta}{\theta\alpha}) \quad \Gamma(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha})}{\Gamma(\frac{\alpha+1}{\alpha})}}\right]$$

$$E_L(x^r)=\left[\frac{\beta^{\,r} \;\alpha^{(\frac{r}{\alpha\theta})} \;\Gamma\left(\frac{r}{\theta\alpha}+\frac{1}{\alpha}+\frac{r}{\alpha\theta}\right) \;\Gamma(1-\frac{r}{\alpha\theta}-\frac{1}{\alpha\theta})}{\Gamma(\frac{1+\theta}{\theta\alpha}) \quad \Gamma(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha})}\right] \quad (2.46)$$

وان المعادلة السابقة تعتمد على افضل ما يناسب (fitting) عن طريق المقارنة بين عدد من المقاييس الاحصائية مثل الوسط الحسابي, والتباين, ومعامل الالتواء ,ومعامل التفلطح, عند مجموعات مختلفة لقيم المعالم الثلاثة واختيار مجموعة المقدرات التي تحقق اصغر قيمة لمعامل الاتواء والتفلطح وكما يأتي:

لغرض الحصول على المتوسط ($Mean$) نفرض(r=1)في المعادلة (2.46) يكون الناتج كما يأتي:

$$E_{L(mean)}\,(\mathrm{x})=\left[\frac{\beta \quad \alpha^{(\frac{1}{\alpha\theta})} \quad \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{2}{\alpha\theta}\right) \quad \Gamma(1-\frac{2}{\alpha\theta})}{\Gamma(\frac{1+\theta}{\theta\alpha}) \quad \Gamma(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha})}\right] \ldots (2.47)$$

التباين ***(Variance)***

$$\sigma^2{}_L = E_L\ (x^2)-(E_L\,(x))^2 \qquad \ldots (2.48)$$

عندما نعوض (r=2) في المعادلة (46. 2) يكو الناتج كما يأتي:

$$E_L\ \ (x^2)=\left[\frac{\beta^{\,2} \quad \alpha^{(\frac{2}{\alpha\theta})} \quad \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{3}{\alpha\theta}\right) \quad \Gamma(1-\frac{3}{\alpha\theta})}{\Gamma(\frac{1+\theta}{\theta\alpha}) \quad \Gamma(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha})}\right].\,(2.49)$$

ولستخراج التباين نقوم بتعويض المعادلتين(47. 2)و(49. 2) في المعادلة(48. 2) فيكون الناتج كما يأتي:

$$\sigma^2{}_L=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\beta^2\ \ \alpha^{\left(\frac{2}{\alpha\theta}\right)}\ \ \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{3}{\alpha\theta}\right)\ \ \ \Gamma\left(1-\frac{3}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\theta}{\theta\alpha}\right)\ \ \Gamma\left(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha}\right)}\\ -\left(\dfrac{\beta\ \ \alpha^{\left(\frac{1}{\alpha\theta}\right)}\ \ \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{2}{\alpha\theta}\right)\ \ \ \Gamma\left(1-\frac{2}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\theta}{\theta\alpha}\right)\ \ \Gamma\left(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha}\right)}\right)^2\end{array}\right\}$$

$$\sigma^2{}_L=$$

$$\left\{\begin{array}{c}\dfrac{\beta^2\,\alpha^{\left(\frac{2}{\alpha\theta}\right)}}{\Gamma\left(\frac{1+\theta}{\theta\alpha}\right)\,\Gamma\left(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha}\right)}\quad\left[\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{3}{\alpha\theta}\right)\ \Gamma\left(1-\frac{3}{\alpha\theta}\right)\right.\\ \left.-\dfrac{\Gamma^2\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{2}{\alpha\theta}\right)\ \ \Gamma^2\left(1-\frac{2}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\theta}{\theta\alpha}\right)\ \Gamma\left(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha}\right)}\right]\end{array}\right\}\ \ldots(2.50)$$

معامل الاختلاف **(*Coefficients of Variation*)**[4]

$$C.V=\frac{\sqrt{\sigma_L{}^2}}{E(X)}*100 \qquad ...(2.51)$$

عند تعويض المعادلتان (*50* . 2)و(47. 2)في المعادلة (*51* .2)ينتج معامل الاختلاف كما يأتي:

$$C.V=\frac{\left\{\begin{array}{c}\beta^2\ \alpha^{\left(\frac{2}{\alpha\theta}\right)}\left(\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{3}{\alpha\theta}\right)\ \ \Gamma\left(1-\frac{3}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\theta}{\theta\alpha}\right)\qquad\Gamma\left(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha}\right)}\right.\\ -\dfrac{\Gamma^2\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{2}{\alpha\theta}\right)\ \ \Gamma^2\left(1-\frac{2}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1+\theta}{\theta\alpha}\right)\ \Gamma^2\left(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha}\right)}\end{array}\right\}^{\frac{1}{2}}}{\dfrac{\beta\quad\alpha^{\left(\frac{1}{\alpha\theta}\right)}\ \ \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{2}{\alpha\theta}\right)\ \ \Gamma\left(1-\frac{2}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\theta}{\theta\alpha}\right)\ \ \Gamma\left(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha}\right)}}*100$$

$$C.V=\frac{\left\{\begin{array}{c}\alpha^{\left(\frac{2}{\alpha\theta}\right)}\left(\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{3}{\alpha\theta}\right)\ \ \ \Gamma\left(1-\frac{3}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\theta}{\theta\alpha}\right)\qquad\Gamma\left(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha}\right)}\right.\\ -\dfrac{\Gamma^2\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{2}{\alpha\theta}\right)\ \ \ \Gamma^2\left(1-\frac{2}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1+\theta}{\theta\alpha}\right)\ \ \Gamma^2\left(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha}\right)}\end{array}\right\}^{\frac{1}{2}}}{\dfrac{\alpha^{\left(\frac{1}{\alpha\theta}\right)}\ \ \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{2}{\alpha\theta}\right)\ \ \ \Gamma\left(1-\frac{2}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\theta}{\theta\alpha}\right)\ \ \Gamma\left(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha}\right)}}*100\ \ldots(2.52)$$

معامل الالتواء (5) ***Coefficient* of skeuedness**

$$C.S=\frac{E(x-\mu)^3}{\sigma^3{}_L} \quad \dots (2.53)$$

$$\sigma_L{}^3 = \sigma_L . \sigma_L{}^2$$

$$= \left\{ \left\{ \beta^2 \alpha^{\left(\frac{2}{\alpha\theta}\right)} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{3}{\alpha\theta}\right) \quad \Gamma\left(1-\frac{3}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\theta}{\theta\alpha}\right) \quad \Gamma\left(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha}\right)} - \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{2}{\alpha\theta}\right) \quad \Gamma^2\left(1-\frac{2}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1+\theta}{\theta\alpha}\right) \quad \Gamma^2\left(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha}\right)} \right) \right\} \left\{ \beta^2 \alpha^{\left(\frac{2}{\alpha\theta}\right)} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{3}{\alpha\theta}\right) \quad \Gamma\left(1-\frac{3}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\theta}{\theta\alpha}\right) \quad \Gamma\left(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha}\right)} - \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{2}{\alpha\theta}\right) \quad \Gamma^2\left(1-\frac{2}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1+\theta}{\theta\alpha}\right) \quad \Gamma^2\left(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha}\right)} \right) \right\}^2 \right\}$$

$$\sigma_L{}^3 = \left\{ \beta^2 \alpha^{\left(\frac{2}{\alpha\theta}\right)} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{3}{\alpha\theta}\right) \quad \Gamma\left(1-\frac{3}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\theta}{\theta\alpha}\right) \quad \Gamma\left(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha}\right)} - \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{2}{\alpha\theta}\right) \quad \Gamma^2\left(1-\frac{2}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1+\theta}{\theta\alpha}\right) \quad \Gamma^2\left(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha}\right)} \right) \right\}^3 \quad \dots (2.54)$$

عند تعويض المعادلة (54. 2)و(14 . 2) وفي المعادلة (2.53) ينتج لنا معامل الالتواء وكما يأتي:

$$C.S=\frac{\left\{\begin{array}{c}\beta^{3}\,\alpha^{\left(\frac{3}{\alpha\theta}\right)-1}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{3}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{3}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right)\\ -3\,\beta^{3}\,\alpha^{\left(\frac{3}{\alpha\theta}\right)-2}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1+\theta}{\theta\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}\right)\left(\frac{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right)\\ +3\,\beta^{3}\,\alpha^{\left(\frac{3}{\alpha\theta}\right)-3}\left(\frac{\Gamma^{3}\left(\frac{1}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma^{3}\left(1-\frac{1}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma^{3}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right)\\ -\,\beta^{3}\,\alpha^{\left(\frac{3}{\alpha\theta}\right)-4}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1+\theta}{\theta\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}\right)^{3}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right)\end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{c}\beta^{2}\,\alpha^{\left(\frac{2}{\alpha\theta}\right)}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{3}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\theta}{\theta\alpha}\right)}\frac{\Gamma\left(1-\frac{3}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha}\right)}-\right.\\ \left.\frac{\Gamma^{2}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{2}{\alpha\theta}\right)\ \Gamma^{2}\left(1-\frac{2}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma^{2}\left(\frac{1+\theta}{\theta\alpha}\right)\ \Gamma^{2}\left(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha}\right)}\right)\end{array}\right\}^{3}} \quad \ldots(2.55)$$

(5) *Coefficie*nt of kurtosis معامل التفلطح

$$C.K=\frac{E(x-\mu)^{4}}{\sigma^{4}{}_{L}} \quad \ldots(2.56)$$

$$E(x-\mu)^{4}=$$

$$\left\{\begin{array}{c}\beta^{4}\,\alpha^{\left(\frac{4}{\alpha\theta}\right)-1}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{4}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{4}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right)\\ -4\,\beta^{4}\,\alpha^{\left(\frac{4}{\alpha\theta}\right)-2}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1+\theta}{\theta\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}\right)\left(\frac{\Gamma\left(\frac{3}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{3}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right)\\ +6\,\beta^{4}\,\alpha^{\left(\frac{4}{\alpha\theta}\right)-3}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1+\theta}{\theta\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}\right)\left(\frac{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right)\\ -4\quad\beta^{4}\quad\alpha^{\left(\frac{4}{\alpha\theta}\right)-4}\left(\frac{\Gamma^{4}\left(\frac{1}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma^{4}\left(1-\frac{1}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma^{4}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right)\\ +\beta^{4}\quad\alpha^{\left(\frac{4}{\alpha\theta}\right)-5}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1+\theta}{\theta\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}\right)^{4}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right)\end{array}\right\}$$

$$\sigma^4{}_L = \sigma^2{}_L . \sigma^2{}_L = (\sigma^2{}_L)^2$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \beta^2 \alpha^{\left(\frac{2}{\alpha\theta}\right)} \left(\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{3}{\alpha\theta}\right) \quad \Gamma\left(1-\frac{3}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\theta}{\theta\alpha}\right) \quad \Gamma\left(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha}\right)} - \right. \\ \left. \dfrac{\Gamma^2\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{2}{\alpha\theta}\right) \quad \Gamma^2\left(1-\frac{2}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1+\theta}{\theta\alpha}\right) \quad \Gamma^2\left(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha}\right)} \right) \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} \beta^2 \alpha^{\left(\frac{2}{\alpha\theta}\right)} \left(\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{3}{\alpha\theta}\right) \quad \Gamma\left(1-\frac{3}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\theta}{\theta\alpha}\right) \quad \Gamma\left(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha}\right)} - \right. \\ \left. \dfrac{\Gamma^2\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{2}{\alpha\theta}\right) \quad \Gamma^2\left(1-\frac{2}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1+\theta}{\theta\alpha}\right) \quad \Gamma^2\left(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha}\right)} \right) \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

$$\sigma^4{}_L = \left\{ \begin{array}{l} \beta^2 \alpha^{\left(\frac{2}{\alpha\theta}\right)} \left(\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{3}{\alpha\theta}\right) \quad \Gamma\left(1-\frac{3}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\theta}{\theta\alpha}\right) \quad \Gamma\left(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha}\right)} - \right. \\ \left. \dfrac{\Gamma^2\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{2}{\alpha\theta}\right) \quad \Gamma^2\left(1-\frac{2}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1+\theta}{\theta\alpha}\right) \quad \Gamma^2\left(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha}\right)} \right) \end{array} \right\}^2 \qquad (2.57)$$

$$C.S=\frac{\left\{\begin{array}{c} \beta^{4}\,\alpha^{\left(\frac{4}{\alpha\theta}\right)-1}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{4}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{4}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right) \\ -4\,\beta^{4}\,\alpha^{\left(\frac{4}{\alpha\theta}\right)-2}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1+\theta}{\theta\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}\right)\left(\frac{\Gamma\left(\frac{3}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{3}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right) \\ +6\,\beta^{4}\,\alpha^{\left(\frac{4}{\alpha\theta}\right)-3}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1+\theta}{\theta\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}\right)\left(\frac{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right) \\ -4\,\beta^{4}\,\alpha^{\left(\frac{4}{\alpha\theta}\right)-4}\left(\frac{\Gamma^{4}\left(\frac{1}{\alpha\theta}+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma^{4}\left(1-\frac{1}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma^{4}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right) \\ +\beta^{4}\,\alpha^{\left(\frac{4}{\alpha\theta}\right)-5}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1+\theta}{\theta\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}\right)^{4}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right) \end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{c} \beta^{2}\,\alpha^{\left(\frac{2}{\alpha\theta}\right)}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{3}{\alpha\theta}\right)\quad\Gamma\left(1-\frac{3}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\theta}{\theta\alpha}\right)\quad\Gamma\left(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha}\right)}-\right. \\ \left.\frac{\Gamma^{2}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{2}{\alpha\theta}\right)\quad\Gamma^{2}\left(1-\frac{2}{\alpha\theta}\right)}{\Gamma^{2}\left(\frac{1+\theta}{\theta\alpha}\right)\;\Gamma^{2}\left(\frac{\alpha\theta-1}{\theta\alpha}\right)}\right) \end{array}\right\}^{2}} \quad \dots \quad (2.58)$$

4.5.2 طريقة العزوم الكمية الخطية

(36)(35)(34)(20)Linear Quantile Moment method

وتتلخص هذه الطريقة بالخطوات الاتية:-

الدالة التجميعية لتوزيع كابا :

Cumulativ function for Kappa Distribution

اشتقاق الدالة الكمية (Quantile function)
ويكون من الدالة التجميعية (Cumulative function) كما يأتي:

$$F(x) = \left[\frac{(\frac{x}{\beta})^{\alpha\,\theta}}{\alpha + (\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}}\right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\frac{(\frac{x}{\beta})^{\alpha\,\theta}}{\alpha+(\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}}=(F(x))^{\alpha}$$

$$(\frac{x}{\beta})^{\alpha\,\theta} = (\alpha + (\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta})(F(x))^{\alpha}$$

$$(\frac{x}{\beta})^{\alpha\,\theta} = \left(F(x)\right)^{\alpha}\ \alpha + \left(F(x)\right)^{\alpha}\ (\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}$$

$$(\frac{x}{\beta})^{\alpha\,\theta} - \left(F(x)\right)^{\alpha}\ (\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta} = \left(F(x)\right)^{\alpha}\ \alpha$$

$$(\frac{x}{\beta})^{\alpha\,\theta}(1 - \left(F(x)\right)^{\alpha}) = \left(F(x)\right)^{\alpha}\ \alpha$$

$$(\frac{x}{\beta})^{\alpha\,\theta} = \frac{\alpha\ \left(F(x)\right)^{\alpha}}{1- \left(F(x)\right)^{\alpha}}$$

$$(\frac{x}{\beta}) = (\frac{\alpha\ \left(F(x)\right)^{\alpha}}{1- \left(F(x)\right)^{\alpha}})^{\frac{1}{\alpha\,\theta}}$$

$$x = \beta(\frac{\alpha\ \left(F(x)\right)^{\alpha}}{1- \left(F(x)\right)^{\alpha}})^{\frac{1}{\alpha\,\theta}}$$

وهذه المعادلة المذكورة آنفاً هي الدالة الكمية (Quantile function) والتي بالامكان ان نشير لها كما يأتي:

$$Q(F) = \beta(\frac{\alpha\ \left(F(x)\right)^{\alpha}}{1- \left(F(x)\right)^{\alpha}})^{\frac{1}{\alpha\,\theta}} \qquad \ldots(2.59)$$

وان (ε_r) هو العزم الكمي الرائي للمتغير $(\boldsymbol{\tau})$ العشوائي بالمعلمتين $(p,\ m)$ الذي عرفه (Hutson and Mudolkar عام 1998)كما يأتي:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{r}\sum_{k=0}^{r-1}(-1)^k \binom{r-1}{k} \tau_{p,m}(X_{r-k:r}),\ \ r = 1,2,\ldots; \qquad \ldots(2.60)$$

عندما ε_r يشير الى العزم الكمي الرائي للمجتمع. وان τ هو متغير عشوائ بالمعلمتين $p,\ m$. و k هو العداد الذي ياخذه العزم الى r.

$$(0 \le m \le \tfrac{1}{2} \quad , \quad 0 \le p \le \tfrac{1}{2})$$

إذ

$$\tau_{p,m}(X_{r-k:r}) = pQ_{X_{r-k:r}}(m) + (1-2p)Q_{X_{r-k:r}}\left(\frac{1}{2}\right) + pQ_{X_{r-k:r}}(1-m) \qquad \ldots(2.61)$$

$$= pQ\ [B^{-1}_{r-k:r}(m)] + (1-2p)Q\left[B^{-1}_{r-k:r}(\frac{1}{2})\right] + pQ\ [B^{-1}_{r-k:r}(1-m)] \qquad \ldots(2.62)$$

وان المقدر $[B^{-1}_{r-k:r}(m)]$ هو المتغير الكمي العشوائي لبيتا بالمعلمتين (r-k) و (k-1) وان $Q(.)$ يشير الى الدالة الكمية المقدرة للمجتمع.وان اول اربع عزوم كمية لطريقة LQ- Moment للمجتمع تكون كما يأتي:

$$\varepsilon_{1}= \tau_{p,m}(X) \quad \ldots(2.63)$$

$$\varepsilon_2 =\frac{1}{2}\left[\tau_{p,m}(X_{2:2})- \tau_{p,m}(X_{1:2})\right] \quad \ldots(2.64)$$

$$\varepsilon_3 =\frac{1}{3}\left[\tau_{p,m}(X_{3:3})-2\,\tau_{p,m}(X_{2:3})+\tau_{p,m}(X_{1:3})\right] \quad \ldots(2.65)$$

$$\varepsilon_4 =\frac{1}{4}\left[\tau_{p,m}(X_{4:4})-3\,\tau_{p,m}(X_{3:4})+3\tau_{p,m}(X_{2:4})+\tau_{p,m}(X_{1:4})\right](2.66)$$

LQ-Skeunes و LQ-Kurtosis للمجتمع يعرف كما يأتي :-

$$LQ-Skewnes = \eta_3=\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2}$$

LQ-Kurtosis = $\eta_4 =\frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_2}$

وان العزوم الكمية لعينة عشوائية حجمها n بحيث

فهي كما يأتي : $X_{1:n} \le X_{1:n} \le \cdots \le X_{n:n}$

$$\hat{\varepsilon}_r =\frac{1}{r}\sum_{k=0}^{r-1}(-1)^k \binom{r-1}{k} \hat{\tau}_{p,m}(X_{r-k:r}), \quad r=1,2,\ldots \quad \ldots(2.67)$$

إذ

$$\hat{\tau}_{p,m}(X_{r-k:r}) = p\widehat{Q}_{X_{r-k:r}}(m)+(1-2p)\widehat{Q}_{X_{r-k:r}}\left(\frac{1}{2}\right)+p\widehat{Q}_{X_{r-k:r}}(1-m)\,.(2.68)$$

$$= p\widehat{Q}\,[B^{-1}_{r-k:r}(m)]+(1-2p)\widehat{Q}\left[B^{-1}_{r-k:r}(\frac{1}{2})\right]+p\widehat{Q}[B^{-1}_{r-k:r}(1-m)]\ldots(2.69)$$

وان المقدر $[B^{-1}_{r-k:r}(m)]$ هو المتغير الكمي العشوائي لبيتا بالمعلمتين (r-k) و (k-1) وان $\widehat{Q}(u)$ يعرف للعينة بالشكل الاتي:

$$\widehat{Q}(u)=\sum_{i=1}^{n}\left[\int_{(i-1)/n}^{i/n} k_h[\quad t-u]\right](X_{i:n})$$

$$\widehat{Q}(u)=\sum_{i=1}^{n}\left[(n)^{-1}k_h\left[\sum_{j=1}^{i} w_{j,n}-u\right]\right](X_{i:n}),0<u<\infty \quad \ldots(2.70)$$

$k_h(.)=(\frac{1}{h}).(\frac{.}{h})$

عندما k متغيرعشوائي للمعلمة h عند المقدر (.)

$$w_{i,n}=\begin{cases}\frac{1}{2}\langle 1-\left[\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}\right]\rangle, & i=1,n\\ \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}, & i=2,3,\ldots n-1\end{cases} \qquad \ldots(2.71)$$

$K(t)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\exp(-\frac{t^2}{2})$

$h=(\frac{uv}{n})^{\frac{1}{2}}$

$v=1-u$

وان اول اربع عزوم كمية لطريقة LQ- Moment للعينة تعرف كما يأتي:

$$\hat{\varepsilon}_{1}=\hat{\tau}_{p,m}(X) \qquad \ldots(2.72)$$

$$\hat{\varepsilon}_2=\frac{1}{2}\left[\hat{\tau}_{p,m}(X_{2:2})-\hat{\tau}_{p,m}(X_{1:2})\right] \qquad \ldots(2.73)$$

$$\hat{\varepsilon}_3=\frac{1}{3}\left[\hat{\tau}_{p,m}(X_{3:3})-2\,\hat{\tau}_{p,m}(X_{2:3})+\hat{\tau}_{p,m}(X_{1:3})\right] \qquad \ldots(2.74)$$

$$\hat{\varepsilon}_4=\frac{1}{4}\left[\hat{\tau}_{p,m}(X_{4:4})-3\,\hat{\tau}_{p,m}(X_{3:4})+3\hat{\tau}_{p,m}(X_{2:4})+\hat{\tau}_{p,m}(X_{1:4})\right] \qquad \ldots(2.75)$$

LQ- Skeunes و LQ-Kurtosis للعينة يعرف كما يأتي :

$$LQ-Skewnes=\hat{\eta}_3=\frac{\hat{\varepsilon}_3}{\hat{\varepsilon}_2}$$

$$\text{LQ-Kurtosis}=\hat{\eta}_4=\frac{\hat{\varepsilon}_4}{\hat{\varepsilon}_2}$$

لغرض الحصول على المقدرات بطريقة LQ- Moment وبعد تساوي المعادلات (2.63- 2.72), (2.73-2.64), (2.75 -2.65), (2.76 -2.66), هي معادلات ضمنية تحل بطريقة Simple –lteration في برنامج matlap بمقدار خطا ($10^{-0.7}$) لاستخراج قيم المعلمات الثلاث نحصل على ما يأتي:

$$\varepsilon_1=\hat{\varepsilon}_1 \qquad \ldots(2.76)$$

$$\varepsilon_2=\hat{\varepsilon}_2 \qquad \ldots(2.77)$$

$$\varepsilon_3=\hat{\varepsilon}_3 \qquad \ldots(2.78)$$

5.5.2 طريقة المقدرات التجزيئية

Method of Percentiles Estimators (14)(3)

ان توزيع كابا يتميز بدالة تراكمية ذات ثلاث معالم (β, θ, α) ولغرض الحصول على مقدرات التجزئة لمعالم التوزيع يكون ذلك كما يأتي :

تقدير المعلمة (α)

نفترض ان q_i تمثل تقدير للدالة التراكمية $F(t,\beta, \theta, \alpha)$ نظرا لان المعادلات الناتجة عن التقديرات معقدة وصعبة لذلك سنعتمد المعلمتين (β, θ) , على انهما معلومتان للدالة التراكمية لغرض الحصول على تقدير للمعلمة α وكما يأتي:

$$F(t ,\beta, \theta, \alpha)=\left[\frac{(\frac{x}{\beta})^{\alpha\,\theta}}{\alpha+(\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}}\right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

باخذ (ln) للطرفين

$$\text{Let } \ln\ (q_i)=\frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{(\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}}{\alpha+(\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}}\right) \qquad \ldots(2.79)$$

$$\text{Let } \ln\ (q_i) -\frac{1}{\alpha}\ln(\frac{(\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}}{\alpha+(\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}}) = 0 \qquad \ldots(2.80)$$

وبتربيع المعادلة واخذ المجموع للطرفين نحصل على ما يلي:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\ln(qi)-\frac{1}{\alpha}\,ln(\frac{(\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}}{\alpha+(\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}})\right)^2 = 0 \qquad \ldots(2.81)$$

$$\sum_{i=1}^{n} (\ \ln\ (\text{qi}) - \frac{1}{\alpha}\ \ln(\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta} + \frac{1}{\alpha}ln(\ \alpha + \ ((\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}\ )))^{\ 2} \qquad \ldots(2.82)$$

لغرض الحصول على مقدر المعلمة $\hat{\alpha}$ وذلك بالاشتقاق بالنسبة ل α :-

$$\frac{\partial\ln(qi)}{\partial\alpha} = 2\sum_{i=1}^{n} (\ \ln\ (\text{qi}) - \frac{1}{\alpha}\ \ln(\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta} + \frac{1}{\alpha}ln(\ \alpha + \ ((\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}\ ))\ )\ .$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left(-\frac{1}{\alpha}.\frac{1}{\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}}.\theta\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}.ln\left(\frac{x}{\beta}\right)+ln\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}.\frac{1}{\alpha^{2}}\right) \\ +\left(\frac{1}{\alpha}.\frac{1}{\alpha+(\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}}\left[1+\theta(\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}.ln\frac{x}{\beta}\right]+\frac{1}{\alpha^2}ln\left(\alpha+(\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}\right)\right)\end{array}\right\}$$

Let $\frac{\partial \ln(qi)}{\partial \alpha} = 0$

$$\frac{1}{\alpha} 2\sum_{i=1}^{n} (\alpha\, ln\ (qi) - \ ln(\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta} \ + \ \ln(\ \alpha + \ ((\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}\ ))) \ .$$

$$\left\{ \begin{matrix} \left(-\frac{\theta}{\alpha}.\, ln\left(\frac{x}{\beta}\right) + ln\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}.\frac{1}{\alpha^{\,2}}\right) \\ + \left(\frac{1}{\alpha}.\frac{1}{\alpha+(\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}}\left[1+\theta(\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}.\, ln\frac{x}{\beta}\right] + \frac{1}{\alpha^2}\, ln\left(\alpha + (\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}\right)\right) \end{matrix} \right\} = 0$$

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{\left\{ \begin{matrix} 2\sum_{i=1}^{n} - (\alpha\ ln\ \ (qi) - \ ln(\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta} \ + \ ln(\ \alpha + \ ((\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}\ ))) \ . \\ \left(-\frac{1}{\alpha}.\frac{1}{\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}}.\theta\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}.\, ln\left(\frac{x}{\beta}\right) + ln\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha\theta}.\frac{1}{\alpha^{\,2}}\right) \\ + \left(\frac{1}{\alpha}.\frac{1}{\alpha+(\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}}\left[1+\theta(\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}.\, ln\frac{x}{\beta}\right] - \frac{1}{\alpha^2}\, ln\left(\alpha + (\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}\right)\right) \end{matrix} \right\}} \quad \ldots (2.83)$$

تقدير المعلمة θ:-

نفترض ان q_i تمثل تقدير للدالة التراكمية $F(t\,,\alpha\,,\theta\,,\ \beta)$ نظرا لان المعادلات الناتجة عن التقديرات معقدة وصعبة لذلك سنعتمد معلمتي القياس $(\beta\ ,\ \alpha)$,معلومتان للدالة التراكمية وكما يأتي:

$$F(t\,,\beta,\ \theta\ \,,\alpha) = \left(\frac{(\frac{x}{\beta})^{\alpha\,\theta}}{\alpha+(\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$(\,F(t\,,\alpha\,,\theta\,,\ \beta))^{\alpha} = \left(\frac{(\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}}{\alpha+(\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}}\right) \quad \ldots (2.84)$$

$$(q_i)^{\alpha} \ = \ (\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta} \ + \ (\ \alpha + \ (\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}\ )^{\ -1}$$

و لغرض الحصول على مقدر المعلمة $\hat{\theta}$ وذلك بالاشتقاق بالنسبة ل θ للمعادلة (2.82):-

$$\frac{\partial \ln(qi)}{\partial \theta} = 2\sum_{i=1}^{n} (\ln\ (q_i)^{\alpha} \ - \ \alpha\theta\ \ \ln(\frac{x}{\beta}) \ + \ ln(\ \alpha + \ ((\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}\ ))) \ .$$

$$\left[\left(-\alpha\ \ ln(\frac{x}{\beta})\ \right) + \left(\frac{1}{\alpha}.\frac{1}{\alpha+(\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}}\left[1+\alpha(\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}.\ln\frac{x}{\beta}\right] + \frac{1}{\alpha^2}\ln\left(\alpha+(\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}\right)\right)\right]$$

Let

$$\frac{\partial \ln(qi)}{\partial\theta} = 0$$

$$\frac{1}{\theta}\ 2\sum_{i=1}^{n} ((q_i)^{\alpha}\theta \ - \ \alpha\theta^{\,2}\ ln(\frac{x}{\beta}) \ + \theta\ \ln(\ \alpha + \ ((\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}\ )))\ .$$

$$\left[\left(-\alpha\ \ ln(\frac{x}{\beta})\right) + \left(\frac{1}{\alpha}.\frac{1}{\alpha+(\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}}\left[1+\alpha(\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}.ln\frac{x}{\beta}\right] + \frac{1}{\alpha^2} ln\left(\alpha+(\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}\right)\right)\right] = 0$$

$\widehat{\theta}$ =

$$\frac{1}{\left\{\begin{array}{c} 2\sum_{i=1}^{n} -(\theta\ \ ln\ \ (qi) - \alpha\theta^{\,2}\ ln(\frac{x}{\beta}) \ + \theta\ \ ln(\ \alpha + \ ((\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}\ )))\ . \\ \left[\left(-\alpha\ \ ln(\frac{x}{\beta})\right) + \left(\frac{1}{\alpha}.\frac{1}{\alpha+(\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}}\left[1+\theta(\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}.ln\frac{x}{\beta}\right] - \frac{1}{\alpha^2} ln\left(\alpha+(\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}\right)\right)\right]\end{array}\right\}} \quad ...(2.85)$$

تقدير المعلمة β:-

نفترض ان q_i تمثل تقدير للدالة التراكمية F(t , β, θ ,α) نظرا لان المعادلات الناتجة عن التقديرات معقدة وصعبة لذلك سنعتمد معلمتي القياس (α, θ) ,معلومتان للدالة التراكمية وكما يأتي:

$$F\ (t\ ,\alpha\ ,\theta\ \ ,\beta) = \left(\frac{(\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}}{\alpha+(\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

وبتربيع المعادلة واخذ المجموع للطرفين نحصل على ما يأتي:

$$\sum_{i=1}^{n} (\ \ ln\ \ (qi) - \ \ ln(\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta} + \ \ln(\ \alpha + \ \ (\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}\ )\ \ )^{\ 2}$$

ولغرض الحصول على مقدر المعلمة $\widehat{\beta}$ وذلك بالاشتقاق بالنسبة ل β :

$$\frac{\partial \ln(qi)}{\partial\beta} = \left\{\begin{array}{c}(2\sum_{i=1}^{n}(\ ln(qi) - \ \ ln(\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta} + \ ln(\ \alpha + \ (\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}\ )\ ). \\ (-\frac{1}{\alpha}\ \frac{1}{(\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}}.-\frac{\alpha\theta}{\beta}\ \ (\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}\ ) + (\frac{1}{\alpha}\ \frac{1}{\alpha+(\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}}.-\frac{\alpha\theta}{\beta}\ \ (\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}\ \ )\end{array}\right\}$$

$$Let\ \ \frac{\partial \ln(qi)}{\partial\beta} = 0$$

$$\frac{1}{\beta}\left\{\begin{matrix}\beta\,(2\sum_{i=1}^{n}(\,ln(qi)-\ \ ln(\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}+\ \ ln(\ \alpha+\ \ (\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}\ )\ ).\\ \left(\frac{\theta}{\beta}\right)-\left(\frac{(\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}}{\alpha+(\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}}\frac{\theta}{\beta}\right)\end{matrix}\right\}=0$$

$$\widehat{\beta}\ =\frac{\mathbf{1}}{\left\{\begin{matrix}\boldsymbol{\beta}(\mathbf{2}\sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}}(\,\boldsymbol{ln}(\boldsymbol{qi})-\ \ \boldsymbol{ln}(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{\beta}})^{\boldsymbol{\alpha\theta}}+\ \boldsymbol{ln}(\ \boldsymbol{\alpha}+\ (\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{\beta}})^{\boldsymbol{\alpha\theta}}\ )\ ).\\ \left(\frac{\boldsymbol{\theta}}{\boldsymbol{\beta}}\right)-\left(\frac{(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{\beta}})^{\boldsymbol{\alpha\theta}}}{\boldsymbol{\alpha}+(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{\beta}})^{\boldsymbol{\alpha\theta}}}\frac{\boldsymbol{\theta}}{\boldsymbol{\beta}}\right)\end{matrix}\right\}} \qquad \dots(2.86)$$

الفصل الثالث

الجانب التجريبي والتطبيقي

الفصل الثالث

الجانب التجريبي والتطبيقي

1.3 الجانب التجريبي

1.1.3 التمهيد Preface

سنفرض في هذا الفصل المنهج التجريبي (Empirical Approach). ان التقدم العلمي الحاصل الان يعتمد في الغالب على اجراء التجارب , ولابد من أن تنفذ التجارب وفق طرائق عملية ومنطقية لنحصل منها على نتائج دقيقة ومضبوطة , وواحدة من تلك الطرائق المستعملة في التجريب هي المحاكاة (Simulation). التي سيتم استعمالها في معرفة مدى دقة ومصداقية نموذج توزيع كابا في تمثيله للظاهرة التي تم دراستها.

2.1.3 المحاكاة: Simulation

تعرف المحاكاة بأنها طريقة تحليلية عددية علمية . تستعمل فيها مناهج وأساليب رياضية منهجية.لان بعض الدراسات تكلف مالاً ووقتاً وجهداً والبعض من هذه الدراسات لايمكن اجرائها اصلا لاستحالة تحمل التكاليف المادية والجهد والوقت . نحن بغنى عن كل ذلك لان اسلوب المحاكاة طور ليصل الى معرفة ودراسة حالات مهمة ومعقدة والتوصل الى نتائج دقيقة لها . من هذه الظواهر حالة الطقس إذ بالامكان استعمالة في دراسة هذه الحالة لقرون متعددة في عدد قليل من الساعات لأزمنة قديمة غابرة وايضا التنبؤ بما تكون عليه في المستقبل باستعمال حواسيب فائقة وبرامج محاكاة متطورة. وبالامكان دراسة مختلف الظواهر التي يمكن ان نعرف خصائصها وسلوكياتها. ان من اهم مميزات طريقة المحاكاة هو توليد بيانات للظاهرة المدروسة بحيث تكون قريبة من الحقيقة , وهي تكون الاداة الافضل للخروج من المشاكل التي لا يمكن حلها رياضيا.إذ يستعمل في عمل المحاكاة حواسيب متطورة ويكتب فيها برامج تتضمن عبارات منطقية ورياضية للحالة المدروسة , لكِ تجرى تكرارات لتجربة الحالة المدروسة لمئات المرات وحسب الحاجة .تكون النتائج قريبة من الواقع بشكل كبير. ويمكن ان نعرف المحاكاة ايضا بشكل متخصص على انها نموذج لتجربة احصاءية (Statistical for experiment) فهي تختلف عن النماذج الرياضية,لان مخرجاتها في الغالب تكون على شكل مقاييس مختارة تعكس اداء النظام وتبين ان سلوك الحالة المستقرة لامد طويل . واما مخرجات نموذج المحاكاة فتمثل بمشاهدات (Observations) . تكون عرضة لخطا التجربة الاحصاءية لذلك لابد من جعل اي استدلال يخص اداء النظام الذي تم محاكاته الى الاختبارات التحليل الاحصاءية الملائمة . بذلك يكون الهدف من المحاكاة عمل نسخة (Duplicate) لسلوك النظام تحت الفحص عن طريق هذه الدراسة للتفاعلات بين مكونات النظام المدروس. وفي الدراسة هذه استعمال البرنامج الاحصائي (MATLAB R2012a) لتوليد البيانات العشوائية. كما استعماله طريقة نيوتن رافسن لتوليد البيانات .

3.1.3 وصف تجربة المحاكاة : Describe Simulation Experiment

تم تنفيذ تجربة المحاكاة باعتماد خمسة احجام للعينات (150,100,75,50,25) وتم تطبيق الصيغة رقم (2.3) في توليد البيانات الخاصة بالمتغيرات العشوائية التي تتبع نموذج كابا بثلاثة معالم , بتوليد قيم عشوائية يتبع التوزيع المنتظم المستمر (Uniform Distribution) والمعرف على المدة (0,1) عن طريقها يتم بتوليد قيم العشوائية الخاصة بتوزيع كابا عن طريق استعمال دالة التوزيع التراكمية (C.D.F) التي تصف نموذج ثم تحويل العدد العشوائي المنتظم للحصول على المتغير العشوائي الذي يصف نموذج بستعمال معكوس الدالة التجميعية فاذا كانت لدينا الدالة التجميعية يكون المعكوس ناتجا عنها كما يأتي :

$$R = F(x) = \left[\frac{(\frac{x}{\beta})^{\alpha\,\theta}}{\alpha + (\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}}\right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$(F(x))^{\alpha} = \frac{(\frac{x}{\beta})^{\alpha\,\theta}}{\alpha + (\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}}$$

$$(F(x))^{\alpha}\,(\alpha + (\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}) = (\frac{x}{\beta})^{\alpha\,\theta}$$

$$(F(x))^{\alpha}\,\alpha + (F(x))^{\alpha}\,(\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta} = (\frac{x}{\beta})^{\alpha\,\theta}$$

$$(F(x))^{\alpha}\,\alpha = (\frac{x}{\beta})^{\alpha\,\theta} - (F(x))^{\alpha}\,(\frac{x}{\beta})^{\alpha\theta}$$

$$(F(x))^{\alpha}\,\alpha = (\frac{x}{\beta})^{\alpha\,\theta}(1 - (F(x))^{\alpha})$$

$$\frac{\alpha\,(F(x))^{\alpha}}{1-(F(x))^{\alpha}} = (\frac{x}{\beta})^{\alpha\,\theta}$$

$$\left[\frac{\alpha\,(F(x))^{\alpha}}{1-(F(x))^{\alpha}}\right]^{\frac{1}{\alpha\,\theta}} = (\frac{x}{\beta})$$

$$x = \beta\left[\frac{\alpha\,(F(x))^{\alpha}}{1-(F(x))^{\alpha}}\right]^{\frac{1}{\alpha\,\theta}}$$

R تمثل عدد التكرارات (Replication) لكل تجربة.وهذه المعادلة المذكور انفاً هي المعكوس الذي تم من خلاله التوليد العشوائي والذي بالامكان ان نشير لهه كما يأتي:

$$R^{-1} = \mathrm{X(F)} = \beta\left[\frac{\alpha\ (F(x))^{\alpha}}{1-\ (F(x))^{\alpha}}\right]^{\frac{1}{\alpha\,\theta}} \qquad \ldots (3.87)$$

إذ افترضنا في برنامج ماتلاب (MATLAB R2012a) ان المعكوس يكون لمتغير عشوائي . لتجربة تم تكرارها (1000) وكانت الحالات **(Cases)** العشر التي اعتمدناها عشوائيا وتم استعمالها في التعويض النهائي في برنامج المحاكاة لكي تولد النتائج النهائية كجداول وان كل حالة **(Case)** واحدة يتم تعويضها في البرنامج في قيم المعلمات تُولد لنا جدولين , الجدول الاول يوضح نتائج تقدير معلمات التوزيع الثلاثة للطرائق الخمس مع (Mean Squared Error) (MSE) عند حجوم العينات (150,100,75,50,25) .و الجدول الثاني يبين نتائج المقارنة بين الطرق في تقدير نموذج التوزيع العام باستعمال معيار متوسط مربعات الخطا Mean Squared Error بافتراض قيم اولية لمعالم توزيع كابا لعشر حالات (Cases) الاتية:

جدول (3-1)

يبين القيم الافتراضية لمعلمات التوزيعات الموظفة في التقدير والتي تمثل عشرة مجموعات مختلفة وكما يأتي:

Cases	α	β	θ
1	2	2	3
2	2	1	2
3	3	2	4
4	2	3	1.5
5	1.5	3	1.5
6	2.5	3	1.5
7	3	4	2
8	4	4	2
9	2	3	2
10	3	4	3

تمت مقارنة النتائج بستعمال المقياسين الاتيين:

- **متوسط مربعات الخطاء (Mean Squared Error)** [6]

$$\mathrm{MSE}(\hat{\alpha}) = \frac{1}{R}\sum_{i=1}^{r} (\hat{\alpha}_i - \alpha)^2 \qquad \ldots (3.88)$$

R تمثل عدد التكرارات (Replication) لكل تجربة والتي تساوي 1000 مرة , وتم الحصول على نتائج المحاكاة بستعمال برنامج (MATLAB R2012a).

$\hat{\alpha}_i$ مقدر ل α حسب المعيار المستخدم في التقدير (MSE) والذي يحسب لكل (α) من زمن التوليد .

2.3 تحليل نتائج تجربة المحاكاة (Analysis of Simulation Result)

تمت مقارنة طرائق التقدير الخمس والخاصة بمعلمات النمذجه وكما يأتي:

1- طريقة الامكان الاعظم (MLE) Method of Maximum Likelihood

2- طريقة العزوم الخطية (LM) Method of Linear moments

3- طريقة العزوم في حالة التحيز (LBM) Method of Length biased moments

4- طريقة المقدرات التجزيئية (Per) Method of Percentiles Estimator

5- وطريقة العزوم الكمية الخطية (LQM) Method of Linear Quantile moments

تم عرض وتحليل نتائج تجربة المحاكاة وفق الجداول الاتية :

جدول (3-2)

يبين متوسط مربعات الخطا MSE لتقديرات المعالم للطرائق الخمس عند حجوم العينات (150,100,75,50,25) ولمجموعة القيم الاولية ($\alpha = 2, \ \beta = 2, \theta = 3$)

MSE							
sample size	parameters	Methods					Best
		MLE	LBM	L-moment	Percentile	LQ-moment	
25	α	131.1876	0.138667	0.096602	1.173586	0.003524	LQM
	β	0.629598	0.247489	0.002372	0.413437	0.00285	LM
	θ	0.604097	3.25E-01	0.020883	0.327088	0.002804	LQM
50	α	5.451068	0.134824	0.044021	1.094722	0.003219	LQM
	β	0.319183	0.221684	0.001841	0.201421	0.002174	LM
	θ	0.10718	3.20E-01	0.021384	0.168168	0.004028	LQM
75	α	1.869192	0.114908	0.08093	1.129093	0.003555	LQM
	β	0.175384	0.174704	0.014819	0.173311	0.003039	LQM
	θ	0.161599	2.77E-01	0.015347	0.240888	0.003784	LQM
100	α	0.611865	0.107336	0.009519	0.748674	0.002694	LQM
	β	0.105454	0.158839	0.002324	0.194504	0.003086	LM
	θ	0.088564	2.60E-01	0.020966	0.161649	0.003161	LQM

	α	0.343926	0.109498	0.280298	0.523135	0.002906	LQM
150	β	0.051347	0.157757	0.002351	0.113665	0.003207	LM
	θ	0.047399	2.66E-01	0.033255	0.125252	0.003255	LQM

جدول (3-3)

يبين نتائج المقارنة بين الطرائق في تقدير النموذج كاملا باستعمال معيار Mean Squared Error عند حجوم العينات (150,100,75,50,25) ولمجموعة القيم الاولية $(\alpha = 2,\ \beta = 2, \theta = 3)$

Performance							Best
sample size		methods					
		MLE	LBM	L-moment	percentile	LQ-moment	
25	MSE	0.002673	0.007302	0.000243	0.003985	4.76E-05	LQM
50	MSE	0.001219	0.007139	0.000229	0.001459	6.37E-05	LQM
75	MSE	0.000888	0.005698	0.000244	0.001143	6.38E-05	LQM
100	MSE	0.000635	0.005109	0.000205	0.000973	5.36E-05	LQM
150	MSE	0.000274	0.00517	0.000394	0.000544	5.45E-05	LQM

عند (Case) رقم (1)

تبين من الجدول(3-2) ان مجموعة القيم الأولية التي كانت $(\alpha = 2, \beta = 2, \theta = 3)$, وذلك لإيجاد افضل مقدرللمعالم الثلاث من خلال مقياس متوسط مربع الخطأ (MSE) لأحجام مختلفة من العينات وعند استخدام طرق مختلفة وكما يلي:

- عند حجم (n=25)

تبين ان طريقة (LQM) هي الافضل عند المعلمتين (α, θ) عند مقياس متوسط مربع الخطأ هي $MSE(\hat{\alpha}) = 0.003524$, $MSE(\hat{\theta}) = 0.002804$, في حين كانت طريقة (LM) افضل من بقية الطرائق عند المعلمة (β)عند مقياس متوسط مربع الخطأ $MSE(\hat{\beta})=0.002372$.

- عند حجم (n=50)

تبين ان طريقة (LQM) هي الافضل عند المعلمتين (α, θ) عند مقياس متوسط مربع الخطأ هي $MSE(\hat{\alpha}) = 0.003219$, $MSE(\hat{\theta}) = 0.004028$, في حين كانت طريقة (LM) افضل من بقية الطرائق عند المعلمة (β)عند مقياس متوسط مربع الخطأ $MSE(\hat{\beta})=0.001841$.

- عند حجم $(n=75)$

تبين ان طريقة (LQM) للمعالم الثلاثة كانت هي الافضل عند مقياس متوسط مربع الخطأ $MSE(\hat{\theta})=0.003784$,$MSE(\hat{\beta}) = 0.003039$, $MSE(\hat{\alpha}) =0.003555$.

- عند حجم $(n=100)$

تبين ان طريقة (LQM) هي الافضل عند المعلمتين (α,θ) عند مقياس متوسط مربع الخطأ هي $MSE(\hat{\theta}) = 0.003161$, $MSE(\hat{\alpha}) = 0.002694$, في حين كانت طريقة (LM) افضل من بقية الطرائق عند المعلمة (β)عند مقياس متوسط مربع الخطأ $MSE(\hat{\beta})=0.002324$.

- عند حجم $(n=150)$

تبين ان طريقة (LQM) هي الافضل عند المعلمتين (α,θ) عند مقياس متوسط مربع الخطأ هي $MSE(\hat{\theta}) = 0.003255$, $MSE(\hat{\alpha}) =0.002906$, في حين كانت طريقة (LM) افضل من بقية الطرائق عند المعلمة (β)عند مقياس متوسط مربع الخطأ $MSE(\hat{\beta})=0.002351$.

- تبين من الجدول (3-3) ان افضل طريقة لتقدير النموذج العام للتوزيع هي طريقة (LQM) عند معيار متوسط مربعات الخطا (MSE) والذي كانت قيمته (MSE=4.76E-05) إذ كانت قيم المعالم الثلاثة عند استعمال معيار (MSE) وطريقة (LQM) هي $(\hat{\alpha} = 2.552177)$, $(\hat{\beta} = 3.045866)$, $(\hat{\theta}=1.542476)$ عند حجم عينة 25.

جدول (4-3)

يبين متوسط مربعات الخطا MSE لتقديرات المعالم للطرائق الخمس عند حجوم العينات (150,100,75,50,25) ولمجموعة القيم الاولية $(\alpha = 2,\ \beta = 1, \theta = 2)$

MSE							
sample size	parameters	Methods					Best
		MLE	LBM	L-moment	Percentile	LQ-moment	
25	α	41.54011	0.07909	0.308255	1.883683	0.003394	LQM
	β	0.624748	0.342128	0.101124	0.565645	0.003483	LQM
	θ	5.402884	1.30E-01	1.44711	0.812248	0.003475	LQM
50	α	6.897503	0.076771	0.934693	1.722231	0.00259	LQM
	β	0.255177	0.31994	0.504599	0.313077	0.003741	LQM
	θ	0.169116	1.27E-01	3.960266	0.7334	0.003525	LQM

75	α	5.616376	0.062246	0.155954	0.920373	0.003115	LQM
	β	0.132283	0.254303	0.270012	0.139412	0.001938	LQM
	θ	0.147285	1.03E-01	0.694803	0.26318	0.0035	LQM
100	α	1.976521	0.073334	0.137965	0.865609	0.003933	LQM
	β	0.070025	0.301471	0.639397	0.127717	0.003279	LQM
	θ	0.067796	1.22E-01	2.637478	0.104283	0.003222	LQM
150	α	1.217153	0.06585	0.091944	0.737648	0.003659	LQM
	β	0.077855	0.26399	0.106432	0.144188	0.003927	LQM
	θ	0.056595	1.10E-01	0.763559	0.095544	0.00288	LQM

جدول (3-5)

يبين نتائج المقارنة بين الطرائق في تقدير النموذج كاملا باستعمال معيار Mean Squared Error عند حجوم العينات (150,100,75,50,25) ولمجموعة القيم الاولية $(\alpha = 2,\ \beta = 1, \theta = 2)$

Performance							Best
sample size		Methods					
		MLE	LBM	L-moment	percentile	LQ-moment	
25	MSE	0.003408	0.005195	0.004319	0.003731	3.65E-05	LQM
50	MSE	0.001211	0.004681	0.005205	0.001589	3.90E-05	LQM
75	MSE	0.000843	0.003608	0.001882	0.001005	3.15E-05	LQM
100	MSE	0.000423	0.00425	0.005254	0.000669	3.70E-05	LQM
150	MSE	0.000392	0.003645	0.001548	0.000527	3.70E-05	LQM

عند (Case) رقم (2)

تبين من الجدول (3-4) ان مجموعة القيم الأولية التي كانت$(\alpha = 2,\ \beta = 1, \theta = 2)$, وذلك لإيجاد افضل مقدرللمعالم الثلاثة عن طريق مقياس متوسط مربع الخطأ (MSE) لأحجام مختلفة من العينات وعند استعمال طرائق مختلفة وكما يأتي:

- عند حجم (n= 25)

تبين ان طريقة (LQM) للمعالم الثلاثة كانت هي الافضل عند مقياس متوسط مربع الخطأ MSE($\hat{\alpha}$) =0.003394 , MSE($\hat{\beta}$) =0.003483 ,MSE($\hat{\theta}$)=0.003475.

- عند حجم ($n= 50$)

تبين ان طريقة (LQM) للمعالم الثلاثة كانت هي الافضل عند مقياس متوسط مربع الخطأ $MSE(\hat{\theta})=0.003525$, $MSE(\hat{\beta}) = 0.003741$, $MSE(\hat{\alpha}) = 0.00259$.

- عند حجم ($n= 75$)

تبين ان طريقة (LQM) للمعالم الثلاثة كانت هي الافضل عند مقياس متوسط مربع الخطأ $MSE(\hat{\theta})=0.0035$, $MSE(\hat{\beta}) = 0.001938$, $MSE(\hat{\alpha}) = 0.003115$.

- عند حجم (n= 100)

تبين ان طريقة (LQM) للمعالم الثلاثة كانت هي الافضل عند مقياس متوسط مربع الخطأ $MSE(\hat{\theta})=0.003222$, $MSE(\hat{\beta}) = 0.003279$, $MSE(\hat{\alpha}) =0.003933$.

- عند حجم (n= 150)

تبين ان طريقة (LQM) للمعالم الثلاثة كانت هي الافضل عند مقياس متوسط مربع الخطأ $MSE(\hat{\theta})=0.00288$, $MSE(\hat{\beta}) = 0.003927$, $MSE(\hat{\alpha}) = 0.003659$.

- تبين من الجدول (3-5) ان افضل طريقة لتقدير النموذج العام للتوزيع هي طريقة (LQM) عند معيار متوسط مربعات الخطا (MSE) والذي كانت قيمته (MSE=3.15E-05) حيث كانت قيم المعالم الثلاثة عند استعمال معيار (MSE) وطريقة (LQM) هي ($\hat{\alpha}$=3.047708) , ($\hat{\beta}$= 4.036641) , ($\hat{\theta}$=2.05011) عند حجم عينة 75.

جدول (3-6)

يبين متوسط مربعات الخطا MSE لتقديرات المعالم للطرائق الخمس عند حجوم العينات (150,100,75,50,25) ولمجموعة القيم الاولية ($\alpha = 3,\ \beta = 2, \theta = 4$)

MSE							
sample size	parameters	Methods					Best
		MLE	LBM	L-moment	Percentile	LQ-moment	
25	α	139.9068	0.029354	0.680274	0.784861	0.003205	LQM
	β	0.285037	0.43152	0.186617	0.21144	0.002877	LQM
	θ	1.524421	6.12E-02	3.672054	0.473597	0.003553	LQM
50	α	29.50039	0.021517	0.31197	0.619317	0.004106	LQM
	β	0.185655	0.309893	0.102168	0.146515	0.002595	LQM
	θ	0.388713	4.51E-02	0.806143	0.176552	0.002814	LQM

	α	3.605325	0.021964	0.095273	1.379031	0.003141	LQM
75	β	0.094765	0.316457	0.307945	0.120609	0.003466	LQM
	θ	0.133679	4.60E-02	2.331764	0.185233	0.003598	LQM
	α	1.075069	0.020827	0.496341	0.500345	0.003037	LQM
100	β	0.065739	0.299115	0.501421	0.099865	0.003866	LQM
	θ	0.067161	4.37E-02	2.771658	0.089954	0.002672	LQM
	α	1.091186	0.019492	0.031207	0.259363	0.003476	LQM
150	β	0.042978	0.278681	0.659678	0.060413	0.003751	LQM
	θ	0.049644	4.10E-02	1.402527	0.058786	0.003019	LQM

جدول (3-7)

يبين نتائج المقارنة بين الطرائق في تقدير النموذج كاملا باستعمال معيار Mean Squared Error عند حجوم العينات (150,100,75,50,25) ولمجموعة القيم الاولية $(\alpha = 3,\ \beta = 2, \theta = 4)$

Performance							**Best**
sample size		**Methods**					
		MLE	**LBM**	**L-moment**	**percentile**	**LQ-moment**	
25	MSE	0.003074	0.007342	0.007417	0.003867	4.66E-05	LQM
50	MSE	0.00162	0.005096	0.003013	0.002078	3.68E-05	LQM
75	MSE	0.001035	0.005225	0.007696	0.001282	4.86E-05	LQM
100	MSE	0.000607	0.004714	0.007471	0.000966	4.43E-05	LQM
150	MSE	0.000405	0.004324	0.005602	0.000627	4.70E-05	LQM

عند (Case) رقم (3)

تبين من الجدول (3-6) ان مجموعة القيم الأولية التي كانت $(\alpha = 3,\ \beta = 2, \theta = 4)$, وذلك لإيجاد افضل مقدرللمعالم الثلاثة عن طريق مقياس متوسط مربع الخطأ (MSE) لأحجام مختلفة من العينات وعند استعمال طرائق مختلفة وكما يأتي:

- عند حجم (n= 25)

تبين ان طريقة (LQM) للمعالم الثلاث كانت هي الافضل عند مقياس متوسط مربع الخطأ MSE($\hat{\alpha}$) =0.003205 , MSE($\hat{\beta}$) =0.002877 ,MSE($\hat{\theta}$)=0.003553.

- عند حجم (n= 50)

تبين ان طريقة (LQM) للمعالم الثلاثة كانت هي الافضل عند مقياس متوسط مربع الخطأ $MSE(\hat{\theta})=0.002814$,$MSE(\hat{\beta}) = 0.002595$, $MSE(\hat{\alpha}) =0.004106$.

- عند حجم (n= 75)

تبين ان طريقة (LQM) للمعالم الثلاثة كانت هي الافضل عند مقياس متوسط مربع الخطأ $MSE(\hat{\theta})=0.003598$,$MSE(\hat{\beta}) = 0.003466$, $MSE(\hat{\alpha}) = 0.003141$.

- عند حجم (n= 100)

تبين ان طريقة (LQM) للمعالم الثلاثة كانت هي الافضل عند مقياس متوسط مربع الخطأ $MSE(\hat{\theta})=0.002672$,$MSE(\hat{\beta}) = 0.003866$, $MSE(\hat{\alpha}) =0.003037$.

- عند حجم (n= 150)

تبين ان طريقة (LQM) للمعالم الثلاثة كانت هي الافضل عند مقياس متوسط مربع الخطأ $MSE(\hat{\theta})=0.003019$,$MSE(\hat{\beta}) = 0.003751$, $MSE(\hat{\alpha}) = 0.003476$.

- تبين من الجدول (3-7) ان افضل طريقة لتقدير النموذج العام للتوزيع هي طريقة (LQM) عند معيار متوسط مربعات الخطا (MSE) والذي كانت قيمته (MSE=3.68E-05) إذ كانت قيم المعالم الثلاثة عند استعمال معيار (MSE) وطريقة (LQM) هي $(\hat{\alpha}=4.057929)$, $(\hat{\beta}= 4.043308)$, $(\hat{\theta}=2.045325)$ عند حجم عينة 50.

جدول (3-8)

يبين متوسط مربعات الخطا MSE لتقديرات المعالم للطرائق الخمس عند حجوم (150,100,75,50,25) ولمجموعة القيم الاولية $(\alpha = 2,\ \beta = 3, \theta = 1.5)$

MSE							
sample size	parameters	Methods					Best
		MLE	LBM	L-moment	percentile	LQ-moment	
25	α	45.60328	0.130065	0.347936	1.258167	0.002889	LQM
	β	0.529225	0.150905	0.002326	0.400792	0.002685	LM
	θ	22.55211	1.23E-01	0.048985	1.449989	0.003523	LQM
50	α	0.91942	0.142833	0.044093	0.739567	0.003027	LQM
	β	0.162607	0.160058	0.003353	0.23522	0.003694	LM

	θ	3.830858	1.35E-01	0.020998	0.461794	0.002566	LQM
	α	0.516529	0.134378	0.014477	1.1757	0.002775	LQM
75	β	0.097735	0.144692	0.103348	0.223807	0.003441	LQM
	θ	0.56267	1.28E-01	0.296368	0.488115	0.003318	LQM
	α	0.470407	0.147691	0.009018	1.07414	0.003024	LQM
100	β	0.044784	0.160341	0.040436	0.140272	0.00429	LQM
	θ	0.073974	1.40E-01	0.017599	0.169881	0.003562	LQM
	α	0.434064	0.145639	0.010343	0.837443	0.003942	LQM
150	β	0.035374	0.15569	0.006334	0.094022	0.002752	LQM
	θ	0.1131	1.38E-01	0.041077	0.212699	0.003329	LQM

جدول (3-9)

يبين نتائج المقارنة بين الطرائق في تقدير النموذج كاملا باستعمال معيار Mean Squared Error عند حجوم (150,100,75,50,25) ولمجموعة القيم الاولية $(\alpha = 2,\ \beta = 3, \theta = 1.5)$

Performance							
sample size		Methods					Best
		MLE	LBM	L-moment	percentile	LQ-moment	
25	MSE	0.004077	0.005393	0.000545	0.005612	5.44E-05	LQM
50	MSE	0.001817	0.005206	0.000228	0.002083	5.90E-05	LQM
75	MSE	0.001055	0.004916	0.001278	0.00176	5.82E-05	LQM
100	MSE	0.000507	0.005334	0.000339	0.000931	7.02E-05	LQM
150	MSE	0.000387	0.005023	0.000293	0.000791	6.20E-05	LQM

عند (Case) رقم (4)

تبين من الجدول (3-8) ان مجموعة القيم الأولية التي كانت$(\alpha = 2,\ \beta = 3, \theta = 1.5)$, وذلك لإيجاد افضل مقدرللمعالم الثلاث عن طريق مقياس متوسط مربع الخطأ (MSE) لأحجام مختلفة من العينات وعند استعمال طرائق مختلفة وكما يأتي:

- عند حجم (n=25)

تبين ان طريقة (LQM) هي الافضل عند المعلمتين (α, θ) عند مقياس متوسط مربع الخطأ هي $MSE(\hat{\alpha}) = 0.002889$, $MSE(\hat{\theta}) = 0.003523$, في حين كانت طريقة (LM) افضل من بقية الطرائق عند المعلمة (β)عند مقياس متوسط مربع الخطأ $MSE(\hat{\beta})=0.002326$.

- عند حجم (n=50)

تبين ان طريقة (LQM) هي الافضل عند المعلمتين (α,θ) عند مقياس متوسط مربع الخطأ هي $\mathrm{MSE}(\hat{\alpha}) = 0.003027$, $\mathrm{MSE}(\hat{\theta}) = 0.002566$, في حين كانت طريقة (LM) افضل من بقية الطرائق عند المعلمة (β)عند مقياس متوسط مربع الخطأ $\mathrm{MSE}(\hat{\beta})=0.003353$.

- عند حجم (n= 75)

تبين ان طريقة (LQM) للمعالم الثلاثة كانت هي الافضل عند مقياس متوسط مربع الخطأ $\mathrm{MSE}(\hat{\alpha}) = 0.002775$, $\mathrm{MSE}(\hat{\beta}) = 0.003441$, $\mathrm{MSE}(\hat{\theta})=0.003318$.

- عند حجم (n= 100)

تبين ان طريقة (LQM) للمعالم الثلاثة كانت هي الافضل عند مقياس متوسط مربع الخطأ $\mathrm{MSE}(\hat{\alpha}) =0.003024$, $\mathrm{MSE}(\hat{\beta}) = 0.00429$, $\mathrm{MSE}(\hat{\theta})=0.003562$.

- عند حجم (n= 150)

تبين ان طريقة (LQM) للمعالم الثلاثة كانت هي الافضل عند مقياس متوسط مربع الخطأ $\mathrm{MSE}(\hat{\alpha}) =0.003942$, $\mathrm{MSE}(\hat{\beta}) = 0.002752$, $\mathrm{MSE}(\hat{\theta})=0.003329$.

- تبين من الجدول (3-9) ان افضل طريقة لتقدير النموذج العام للتوزيع هي طريقة (LQM) عند معيار متوسط مربعات الخطا (MSE) والذي كانت قيمته (MSE=5.44E-05) إذ كانت قيم المعالم الثلاثة عند استعمال معيار (MSE) وطريقة (LQM) هي $(\hat{\alpha}= 2.045667)$, $(\hat{\beta}= 3.042582)$, $(\hat{\theta}=2.051323)$ عند حجم عينة 25.

جدول (3-10)

يبين متوسط مربعات الخطا MSE لتقديرات المعالم للطرائق الخمس عند حجوم (150,100,75,50,25) ولمجموعة القيم الاولية $(\alpha = 1.5,\ \beta = 3, \theta = 1.5)$

MSE							
sample size	parameters	Methods					Best
		MLE	LBM	L-moment	percentile	LQ-moment	
25	α	275.3046	0.0123	0.295793	1.54397	0.003308	LQM
	β	0.307922	0.164752	0.LBM85	0.15886	0.003395	LQM
	θ	15.3493	5.08E-03	1.150552	1.791158	0.003352	LQM
50	α	6.790028	0.011972	0.209725	1.057522	0.003715	LQM
	β	0.108463	0.159924	0.655589	0.117057	0.003938	LQM

	θ	3.565988	4.95E-03	6.124925	0.752153	0.003783	LQM
	α	3.704148	0.011971	0.045433	1.082606	0.002482	LQM
75	β	0.079662	0.159792	0.691974	0.096036	0.004031	LQM
	θ	0.267009	4.95E-03	2.062702	0.370878	0.004145	LQM
	α	1.189722	0.009695	0.102527	1.321711	0.003116	LQM
100	β	0.036909	0.129085	1.037627	0.087763	0.003608	LQM
	θ	0.330826	4.01E-03	9.647275	0.376895	0.004652	LBM
	α	0.885572	0.009623	0.082478	0.686245	0.003342	LQM
150	β	0.025826	0.127995	0.470289	0.047062	0.004528	LQM
	θ	0.227254	3.98E-03	9.28097	0.253808	0.00466	LBM

جدول (3-11)

يبين نتائج المقارنة بين الطرائق في تقدير النموذج كاملا باستعمال معيار Mean Squared Error عند حجوم (150,100,75,50,25) ولمجموعة القيم الاولية $(\alpha = 1.5,\ \beta = 3, \theta = 1.5)$

Performance							Best
sample size		Methods					
		MLE	LBM	L-moment	percentile	LQ-moment	
25	MSE	0.007512	0.005473	0.005645	0.00729	8.93E-05	LQM
50	MSE	0.002489	0.005177	0.019243	0.003052	1.06E-04	LQM
75	MSE	0.001782	0.005059	0.011932	0.002022	1.07E-04	LQM
100	MSE	0.000886	0.004045	0.024176	0.001866	9.99E-05	LQM
150	MSE	0.000809	0.003864	0.025501	0.001205	1.16E-04	LQM

عند (Case) رقم (5)

تبين من الجدول(3-10)ان مجموعة القيم الأولية التي كانت $(\alpha = 1.5, \beta = 3, \theta = 1.5)$ وذلك لإيجاد افضل مقدرللمعالم الثلاثة عن طريق مقياس متوسط مربع الخطأ (MSE) لأحجام مختلفة من العينات وعند استعمال طرق مختلفة وكما يأتي:

- عند حجم (n= 25)

تبين ان طريقة (LQM) للمعالم الثلاثة كانت هي الافضل عند مقياس متوسط مربع الخطأ $MSE(\hat{\alpha}) = 0.003308$, $MSE(\hat{\beta}) = 0.003395$, $MSE(\hat{\theta})=0.003352$.

- عند حجم $(n=50)$

تبين ان طريقة (LQM) للمعالم الثلاثة كانت هي الافضل عند مقياس متوسط مربع الخطأ $MSE(\hat{\alpha}) = 0.003715$, $MSE(\hat{\beta}) = 0.003938$, $MSE(\hat{\theta})=0.003783$.

- عند حجم (n= 75)

تبين ان طريقة (LQM) للمعالم الثلاثة كانت هي الافضل عند مقياس متوسط مربع الخطأ $MSE(\hat{\alpha}) =0.002482$, $MSE(\hat{\beta}) = 0.004031$, $MSE(\hat{\theta})=0.004145$.

- عند حجم $(n=100)$

تبين ان طريقة (LQM) هي الافضل عند المعلمتين (α,β) عند مقياس متوسط مربع الخطأ هي $MSE(\hat{\alpha}) = 0.003116$, $MSE(\hat{\beta}) = 0.003608$, في حين كانت طريقة (LBM) افضل من بقية الطرائق عند المعلمة (θ)عند مقياس متوسط مربع الخطأ $MSE(\hat{\theta})=4.01E\text{-}03$.

- عند حجم $(n=150)$

تبين ان طريقة (LQM) هي الافضل عند المعلمتين (α,β) عند مقياس متوسط مربع الخطأ هي $MSE(\hat{\alpha}) = 0.003342$, $MSE(\hat{\beta}) = 0.004528$, في حين كانت طريقة (LBM) افضل من بقية الطرائق عند المعلمة (θ)عند مقياس متوسط مربع الخطأ $MSE(\hat{\theta})=3.98E\text{-}03$.

- تبين من الجدول (3-11) ان افضل طريقة لتقدير النموذج العام للتوزيع هي طريقة (LQM) عند معيار متوسط مربعات الخطا (MSE) والذي كانت قيمته (MSE=1.06E-04) إذ كانت قيم المعالم الثلاثة عند استعمال معيار (MSE) وطريقة (LQM) هي ($\hat{\alpha}$ = 3.052448) , ($\hat{\beta}$ = 4.056935) , ($\hat{\theta}$=3.054721) عند حجم عينة 50.

جدول (3-12)

يبين متوسط مربعات الخطا MSE لتقديرات المعالم للطرائق الخمس عند حجوم العينات (150,100,75,50,25) ولمجموعة القيم الاولية $(\alpha = 2.5,\ \beta = 3, \theta = 1.5)$

MSE							
sample size	parameters	Methods					Best
		MLE	LBM	L-moment	percentile	LQ-moment	
25	α	16.07963	0.010489	0.529757	0.649579	0.003465	LQM
	β	0.067802	0.07661	0.041868	0.05227	0.003625	LQM
	θ	8.710984	0.003567	1.599895	0.97201	0.003428	LQM
50	α	1.174903	0.009088	0.106067	0.584964	0.003162	LQM

	β	0.030041	0.065962	0.056808	0.033382	0.003216	LQM
	θ	2.77095	0.003091	0.653423	0.586367	0.003362	LBM
	α	1.300522	0.008545	0.077365	0.550655	0.002995	LQM
75	β	0.0204	0.061735	0.170882	0.024701	0.003067	LQM
	θ	1.066103	0.002906	2.651926	0.47512	0.003036	LBM
	α	0.59765	0.008181	0.066155	0.425816	0.003422	LQM
100	β	0.013177	0.059005	0.148125	0.017727	0.003069	LQM
	θ	0.648082	0.002782	2.370312	0.277088	0.003487	LBM
	α	0.330844	0.008635	0.044288	0.288908	0.002995	LQM
150	β	0.008656	0.06228	0.231963	0.012021	0.003321	LQM
	θ	0.289323	0.002937	2.337619	0.277171	0.003186	LBM

جدول (3-13)

يبين نتائج المقارنة بين الطرائق في تقدير النموذج العام باستعمال معيار Mean Squared Error عند حجوم العينات (150,100,75,50,25) ولمجموعة القيم الاولية عند $(\alpha = 2.5,\ \beta = 3, \theta = 1.5)$

Performance							Best
		Methods					
sample size		MLE	LBM	L-moment	percentile	LQ-moment	
25	MSE	0.016648	0.019475	0.016266	0.013392	0.000607	LQM
50	MSE	0.008235	0.016043	0.010077	0.010012	0.000553	LQM
75	MSE	0.00376	0.014336	0.031101	0.005545	0.000533	LQM
100	MSE	0.002569	0.013724	0.02349	0.00353	0.000542	LQM
150	MSE	0.001748	0.014288	0.034126	0.002558	0.000574	LQM

عند (Case) رقم (6)

تبين من الجدول(3-12)ان مجموعة القيم الأولية التي كانت $\alpha = 2.5,\ \beta = 3, \theta = 1.5$ وذلك لإيجاد افضل مقدرللمعالم الثلاثة عن طريق مقياس متوسط مربع الخطأ (MSE) ولأحجام مختلفة من العينات وعند استعمال طرائق مختلفة وكما يأتي:

- عند حجم (n= 25)

تبين ان طريقة (LQM) للمعالم الثلاثة كانت هي الافضل عند مقياس متوسط مربع الخطأ $MSE(\hat{\alpha}) = 0.003465$, $MSE(\hat{\beta}) = 0.003625$,$MSE(\hat{\theta})$=.003428.

- عند حجم(n=50)

تبين ان طريقة (LQM) هي الافضل عند المعلمتين (α,β) عند مقياس متوسط مربع الخطأ $MSE(\hat{\alpha}) = 0.003162$, $MSE(\hat{\beta}) = 0.003216$,في حين كانت طريقة (LBM) افضل من بقية الطرائق عند المعلمة (θ)عند مقياس متوسط مربع الخطأ $MSE(\hat{\theta})=0.003091$.

- عند حجم(n=75)

تبين ان طريقة (LQM) هي الافضل عند المعلمتين (α,β) عند مقياس متوسط مربع الخطأ هي $MSE(\hat{\alpha}) = 0.002995$, $MSE(\hat{\beta}) = 0.003067$, في حين كانت طريقة (LBM) افضل من بقية الطرائق عند المعلمة (θ)عند مقياس متوسط مربع الخطأ $MSE(\hat{\theta})=0.002906$.

- عند حجم (n=100)

تبين ان طريقة (LQM) هي الافضل عند المعلمتين (α,β) عند مقياس متوسط مربع الخطأ هي $MSE(\hat{\alpha}) = 0.003422$, $MSE(\hat{\beta}) = 0.003069$, في حين كانت طريقة (LBM) افضل من بقية الطرائق عند المعلمة (θ)عند مقياس متوسط مربع الخطأ $MSE(\hat{\theta})=0.002782$.

- عند حجم (n=150)

تبين ان طريقة (LQM) هي الافضل عند المعلمتين (α,β) عند مقياس متوسط مربع الخطأ هي $MSE(\hat{\alpha}) = 0.002995$, $MSE(\hat{\beta}) = 0.003321$, في حين كانت طريقة (LBM) افضل من بقية الطرق عند المعلمة (θ)عند مقياس متوسط مربع الخطأ $MSE(\hat{\theta})=0.002937$.

- تبين من الجدول (13-3) ان افضل طريقة لتقدير النموذج العام للتوزيع هي طريقة (LQM) عند معيار متوسط مربعات الخطا (MSE) والذي كانت قيمته(MSE=0.000533) إذ كانت قيم المعالم الثلاثة عند استعمال معيار (MSE) وطريقة (LQM) هي $(\hat{\alpha}=2.047453)$, $(\hat{\beta}= 2.048636)$, $(\hat{\theta}=3.047795)$ عند حجم عينة 75.

جدول (3-14)

يبين متوسط مربعات الخطا MSE لتقديرات المعالم للطرائق الخمس عند حجوم العينات (n=25,50,75,100,150) ولمجموعة القيم الاولية $(\alpha = 3,\ \beta = 4, \theta = 2)$

MSE							
sample size	Parameters	Methods					Best
		MLE	LBM	L-moment	percentile	LQ-moment	
25	α	193.965	0.011226	0.093966	0.730156	0.002686	LQM
	β	666.9114	0.066585	0.006697	0.040541	0.00411	LQM
	θ	6.177006	0.011079	0.180331	0.373985	0.003366	LQM
50	α	1.091158	0.00914	0.045592	0.368121	0.003212	LQM
	β	0.009924	0.0528	0.025409	0.012316	0.002882	LQM
	θ	2.310687	0.009026	0.644582	0.351137	0.002868	LQM
75	α	1.017944	0.009681	0.07435	0.233283	0.002346	LQM
	β	0.010538	0.055873	0.002661	0.007211	0.003374	LM
	θ	0.23127	0.00956	0.270417	0.214721	0.002816	LQM
100	α	0.490826	0.008329	0.063479	0.45209	0.003371	LQM
	β	0.010052	0.047549	0.009078	0.016335	0.003093	LQM
	θ	0.281923	0.008228	1.102906	0.153216	0.003117	LQM
150	α	0.417924	0.009647	0.014272	0.180055	0.003078	LQM
	β	0.004589	0.0LQM4	0.001772	0.005856	0.003375	LM
	θ	0.088676	0.009527	0.110767	0.072974	0.003468	LQM

جدول (3-15)

يبين نتائج المقارنة بين الطرائق في تقدير النموذج العام باستعمال معيار Mean Squared Error عند حجوم العينات (150,100,75,50,25) ولمجموعة القيم الاولية عند $(\alpha = 3,\ \beta = 4, \theta = 2)$

Performance							
sample size		Methods					Best
		MLE	LBM	L-moment	percentile	LQ-moment	
25	MSE	0.053495	0.090891	0.0122	0.035589	0.002661	LQM

50	MSE	0.010439	0.060419	0.033572	0.015785	0.001878	LQM
75	MSE	0.00692	0.065143	0.013681	0.008315	0.002177	LQM
100	MSE	0.006483	0.051939	0.038558	0.009536	0.00204	LQM
150	MSE	0.003554	0.063901	0.006625	0.005324	0.002257	LQM

عند (Case) رقم (7)

يتبين من الجدول (3-14) ان مجموعة القيم الأولية التي كانت $(\alpha = 3,\ \beta = 4, \theta = 2)$, وذلك لإيجاد افضل مقدرللمعالم الثلاث عن طريق مقياس متوسط مربع الخطأ (MSE) لأحجام مختلفة من العينات وعند استعمال طرائق مختلفة وكما يأتي:

- عند حجم (n= 25)

تبين ان طريقة (LQM) للمعالم الثلاث كانت هي الافضل عند مقياس متوسط مربع الخطأ $MSE(\hat{\alpha}) = 0.002686$, $MSE(\hat{\beta}) = 0.00411$, $MSE(\hat{\theta})=0.003366$.

- عند حجم (n= 50)

تبين ان طريقة (LQM) للمعالم الثلاثة كانت هي الافضل عند مقياس متوسط مربع الخطأ $MSE(\hat{\alpha}) = 0.003212$, $MSE(\hat{\beta}) = 0.002882$, $MSE(\hat{\theta})=0.002868$.

- عند حجم (n=75)

تبين ان طريقة (LQM) هي الافضل عند المعلمتين (α,θ) عند مقياس متوسط مربع الخطأ هي $MSE(\hat{\alpha}) = 0.002346$, $MSE(\hat{\theta}) = 0.002816$, في حين كانت طريقة (LM) افضل من بقية الطرائق عند المعلمة (β)عند مقياس متوسط مربع الخطأ $MSE(\hat{\beta})= 0.002661$.

- عند حجم (n= 100)

تبين ان طريقة (LQM) للمعالم الثلاثة كانت هي الافضل عند مقياس متوسط مربع الخطأ $MSE(\hat{\alpha}) = 0.003371$, $MSE(\hat{\beta}) = 0.003093$, $MSE(\hat{\theta})=0.003117$.

- عند حجم (n=150)

تبين ان طريقة (LQM) هي الافضل عند المعلمتين (α,θ) عند مقياس متوسط مربع الخطأ هي $MSE(\hat{\alpha}) = 0.003078$, $MSE(\hat{\theta}) = 0.00346$, في حين كانت طريقة (LM) افضل من بقية الطرائق عند المعلمة (β)عند مقياس متوسط مربع الخطأ $MSE(\hat{\beta})=0.001772$.

- تبين من الجدول (3-15) ان افضل طريقة لتقدير النموذج العام للتوزيع هي طريقة (LQM) عند معيار متوسط مربعات الخطا(MSE) والذي كانت قيمتة(MSE=0.001878)

حيث كانت قيم المعالم الثلاثة عند استعمال معيار (MSE) وطريقة (LQM) هي $(\hat{\alpha}=2.051149)$, $(\hat{\beta}=1.047115)$, $(\hat{\theta}=2.045907)$ عند حجم عينة 50.

جدول (3-16)

يبين متوسط مربعات الخطا MSE لتقديرات المعالم للطرائق الخمس عند حجوم العينات (150,100,75,50,25) ولمجموعة القيم الاولية $(\alpha = 4,\ \beta = 4, \theta = 2)$

MSE							
sample size	parameters	Methods					Best
		MLE	LBM	L-moment	percentile	LQ-moment	
25	α	36.12201	0.000136	0.298365	0.386602	0.002705	LBM
	β	0.023556	0.01731	0.140574	0.021252	0.004256	LQM
	θ	6.035389	1.36E-05	9.858567	1.119788	0.003647	LBM
50	α	7.81774	0.000162	0.082978	0.225559	0.003629	LBM
	β	0.01338	0.020586	0.072994	0.012246	0.003503	LQM
	θ	0.723686	1.62E-05	3.374119	0.570556	0.00281	LBM
75	α	4.155936	0.000138	0.15299	0.075725	0.002551	LBM
	β	0.010216	0.017527	0.123351	0.004701	0.002612	LQM
	θ	0.570227	1.38E-05	5.287474	0.364523	0.002286	LBM
100	α	0.708077	0.000128	0.215702	0.327929	0.002745	LBM
	β	0.003751	0.016221	0.026427	0.009812	0.003827	MLE
	θ	0.387031	1.28E-05	3.507668	0.468131	0.003506	LBM
150	α	0.428962	0.000134	0.090344	0.077014	0.003508	LBM
	β	0.003511	0.017081	0.060948	0.003441	0.004728	Per
	θ	0.422262	1.34E-05	6.489753	0.242599	0.003392	LBM

جدول (3-17)

يبين نتائج المقارنة بين الطرائق في تقدير النموذج كاملا باستعمال معيار Mean Squared Error عند حجوم العينات (150,100,75,50,25) ولمجموعة القيم الاولية $(\alpha = 4,\ \beta = 4, \theta = 2)$

Performance							Best
sample size		Methods					
		MLE	LBM	L-moment	percentile	LQ-moment	
25	MSE	0.04294	0.021103	0.10894	0.035042	0.004194	LQM
50	MSE	0.019507	0.0266	0.046824	0.01981	0.003417	LQM
75	MSE	0.009527	0.021859	0.069951	0.010315	0.002523	LQM
100	MSE	0.004666	0.020476	0.053208	0.013369	0.003742	LQM
150	MSE	0.004555	0.021729	0.061745	0.007008	0.004645	MLE

عند (Case) رقم (8)

يتبين من الجدول (3-16) ان مجموعة القيم الأولية التي كانت $\alpha = 4,\ \beta = 4, \theta = 2$, وذلك لإيجاد افضل مقدرللمعالم الثلاثة عن طريق مقياس متوسط مربع الخطأ (MSE) لأحجام مختلفة من العينات وعند استخدام طرق مختلفة وكما يأتي:

- عند حجم (n=25)

تبين ان طريقة (LBM) هي الافضل عند المعلمتين (α, θ) عند مقياس متوسط مربع الخطأ هي $MSE(\hat{\alpha})$ =0.000136 , $MSE(\hat{\theta})$ = 1.36E-05, في حين كانت طريقة (LQM) افضل من بقية الطرائق عند المعلمة (β)عند مقياس متوسط مربع الخطأ $MSE(\hat{\beta})$= 0.004256.

- عند حجم (n=50)

تبين ان طريقة (LBM) هي الافضل عند المعلمتين (α, θ) عند مقياس متوسط مربع الخطأ هي $MSE(\hat{\alpha})$ = 0.000162 , $MSE(\hat{\theta})$ = 1.62E-05, في حين كانت طريقة (LQM) افضل من بقية الطرائق عند المعلمة (β)عند مقياس متوسط مربع الخطأ $MSE(\hat{\beta})$= 0.003503.

- عند حجم (n=75)

تبين ان طريقة (LBM) هي الافضل عند المعلمتين (α, θ) عند مقياس متوسط مربع الخطأ هي $MSE(\hat{\alpha})$ = 0.000138 , $MSE(\hat{\theta})$ = 1.38E-05, في حين كانت طريقة

(LQM) افضل من بقية الطرائق عند المعلمة (β)عند مقياس متوسط مربع الخطأ $MSE(\hat{\beta})= 0.002612$.

- عند حجم (n=100)

تبين ان طريقة (LBM) هي الافضل عند المعلمتين (α,θ) عند مقياس متوسط مربع الخطأ هي $MSE(\hat{\theta}) = 1.28E-05$, $MSE(\hat{\alpha}) = 0.000128$, في حين كانت طريقة (MLE) افضل من بقية الطرائق عند المعلمة (β)عند مقياس متوسط مربع الخطأ $MSE(\hat{\beta})= 0.003751$.

- عند حجم (n=150)

تبين ان طريقة (LBM) هي الافضل عند المعلمتين (α,θ) عند مقياس متوسط مربع الخطأ هي $MSE(\hat{\theta}) = 1.34E-05$, $MSE(\hat{\alpha}) = 0.000134$, في حين كانت طريقة (Per) افضل من بقية الطرائق عند المعلمة (β)عند مقياس متوسط مربع الخطأ $MSE(\hat{\beta})= 0.003441$.

- تبين من الجدول (3-17) ان افضل طريقة لتقدير النموذج العام للتوزيع هي طريقة (LQM) عند معيار متوسط مربعات الخطا (MSE) والذي كانت قيمتة (MSE=0.002523) إذ كانت قيم المعالم الثلاثة عند استعمال معيار (MSE) وطريقة (LQM) هي ($\hat{\alpha}$=3.044967) , ($\hat{\beta}$= 1.047115) , ($\hat{\theta}$=4.040383) عند حجم عينة 75.

جدول (3- 18)

يبين متوسط مربعات الخطا MSE لتقديرات المعالم للطرائق الخمس عند حجوم العينات (150,100,75,50,25) ولمجموعة القيم الاولية ($\alpha = 2,\ \beta = 3, \theta = 2$)

MSE							
sample size	parameters	Methods					Best
		MLE	LBM	L-moment	percentile	LQ-moment	
25	α	92.4744	0.284819	0.888408	1.10496	0.003579	LQM
	β	0.561477	0.227815	0.006483	0.435558	0.002748	LQM
	θ	7.234484	4.47E-01	0.015002	0.449209	0.003864	LQM
50	α	0.949282	0.22342	0.303961	1.166802	0.002766	LQM
	β	0.270265	0.147278	0.016116	0.544035	0.002933	LQM
	θ	0.223321	3.58E-01	0.032419	0.469992	0.004074	LQM
75	α	1.335137	0.227341	0.008842	1.109794	0.003347	LQM

	β	0.237595	0.140645	0.002164	0.286458	0.003201	LM
	θ	0.189715	3.66E-01	0.027066	0.347041	0.003217	LQM
	α	0.611206	0.1821	0.020902	0.67606	0.002834	LQM
100	β	0.104418	0.095187	0.023458	0.182669	0.00307	LQM
	θ	0.105525	2.99E-01	0.081861	0.234182	0.003208	LQM
	α	0.257962	0.184419	0.007862	0.404538	0.002648	LQM
150	β	0.051815	0.094703	0.003173	0.122939	0.002699	LQM
	θ	0.085374	3.03E-01	0.066402	0.165903	0.002948	LQM

جدول (3-19)

يبين نتائج المقارنة بين الطرائق في تقدير النموذج كاملا باستعمال معيار Mean Squared Error عند حجوم العينات (150,100,75,50,25) ولمجموعة القيم الاولية $(\alpha = 2,\ \beta = 3, \theta = 2)$

Performance							Best
sample size		Methods					
		MLE	LBM	L-moment	percentile	LQ-moment	
25	MSE	0.002767	0.008995	0.000458	0.003198	6.37E-05	LQM
50	MSE	0.001136	0.006208	0.000413	0.001508	4.55E-05	LQM
75	MSE	0.000905	0.006143	0.000232	0.001113	5.18E-05	LQM
100	MSE	0.000395	0.004511	0.000625	0.000499	4.94E-05	LQM
150	MSE	0.000273	0.004529	0.000401	0.000461	6.00E-05	LQM

عند (Case) رقم (9)

يتبين من الجدول(3-18)ان مجموعة القيم الأولية التي كانت$\alpha = 2,\ \beta = 3, \theta = 2$, وذلك لإيجاد افضل مقدرللمعالم الثلاثة عن طريق مقياس متوسط مربع الخطأ (MSE) لأحجام مختلفة من العينات وعند استتعمال طرائق مختلفة وكما يأتي:

- عند حجم (n= 25)

تبين ان طريقة (LQM) للمعالم الثلاثة كانت هي الافضل عند مقياس متوسط مربع الخطأ $MSE(\hat{\alpha}) = 0.003579$, $MSE(\hat{\beta}) = 0.002748$, $MSE(\hat{\theta})=0.003864$.

- عند حجم (n= 50)

تبين ان طريقة (LQM) للمعالم الثلاثة كانت هي الافضل عند مقياس متوسط مربع الخطأ $MSE(\hat{\alpha}) = 0.002766$, $MSE(\hat{\beta}) = 0.002933$, $MSE(\hat{\theta})=0.004074$.

- عند حجم (n=75)

تبين ان طريقة (LQM) هي الافضل عند المعلمتين (α,θ) عند مقياس متوسط مربع الخطأ هي MSE($\hat{\alpha}$) = 0.003347 , MSE($\hat{\theta}$) = 0.003217, في حين كانت طريقة (LM) افضل من بقية الطرق عند المعلمة (β)عند مقياس متوسط مربع الخطأ MSE($\hat{\beta}$)=0.002164.

- عند حجم (n= 100)

تبين ان طريقة (LQM) للمعالم الثلاثة كانت هي الافضل عند مقياس متوسط مربع الخطأ MSE($\hat{\alpha}$) = 0.002834 , MSE($\hat{\beta}$) = 0.00307, MSE($\hat{\theta}$)=0.003208.

- عند حجم (n= 150)

تبين ان طريقة (LQM) للمعالم الثلاثة كانت هي الافضل عند مقياس متوسط مربع الخطأ MSE($\hat{\alpha}$) = 0.002648 , MSE($\hat{\beta}$) = 0.002699, MSE($\hat{\theta}$)=0.002948.

- تبين من الجدول (3-19) ان افضل طريقة لتقدير النموذج العام للتوزيع هي طريقة (LQM) عند معيار متوسط مربعات الخطا (MSE) والذي كانت قيمته (MSE=4.55E-05) حيث كانت قيم المعالم الثلاثة عند استعمال معيار (MSE) وطريقة (LQM) هي ($\hat{\alpha}$=2.042558) , ($\hat{\beta}$= 3.045742) , ($\hat{\theta}$=1.545402) عند حجم عينة 50.

جدول (3-20)

يبين متوسط مربعات الخطا MSE لتقديرات المعالم للطرائق الخمس عند حجوم العينات (150,100,75,50,25) ولمجموعة القيم الاولية $(\alpha = 3,\ \beta = 4, \theta = 3)$

MSE							
sample size	parameters	Methods					Best
		MLE	LBM	L-moment	Percentile	LQ-moment	
25	α	14.99546	0.396426	0.582975	0.814298	0.003418	LQM
	β	0.840019	0.091656	0.002117	0.615159	0.003136	LM
	θ	12.00398	4.02E-01	0.017459	0.790009	0.003823	LQM
50	α	0.59151	0.375095	0.067406	0.728203	0.003664	LQM
	β	0.352872	0.063766	0.003886	0.441033	0.003818	LQM
	θ	0.932176	3.83E-01	0.020554	0.456678	0.00336	LQM
75	α	0.341702	0.270293	0.057474	0.633043	0.002704	LQM
	β	0.41646	0.033537	0.003973	0.390821	0.00337	LQM

	θ	0.454455	2.78E-01	0.013498	0.299935	0.004163	LQM
100	α	0.409462	0.276977	0.021632	0.473288	0.003517	LQM
	β	0.127757	0.035111	0.003456	0.198918	0.002683	LQM
	θ	0.317276	2.84E-01	0.011931	0.319242	0.00315	LQM
150	α	0.175275	0.262116	0.013083	0.439191	0.003298	LQM
	β	0.08867	0.029022	0.018939	0.26356	0.003538	LQM
	θ	0.078473	2.70E-01	0.052323	0.114594	0.004382	LQM

جدول (3-21)

يبين نتائج المقارنة بين الطرائق في تقدير النموذج كاملا باستعمال معيار Mean Squared Error عند حجوم العينات (150,100,75,50,25) ولمجموعة القيم الاولية $(\alpha = 3,\ \beta = 4, \theta = 3)$

Performance							Best
sample size		Methods					
		MLE	LBM	L-moment	percentile	LQ-moment	
25	MSE	0.002193	0.005955	0.000454	0.002849	5.41E-05	LQM
50	MSE	0.001123	0.005476	0.000242	0.001318	5.53E-05	LQM
75	MSE	0.000702	0.00384	0.000166	0.000908	5.70E-05	LQM
100	MSE	0.000344	0.003955	0.000116	0.000537	5.18E-05	LQM
150	MSE	0.000208	0.003671	0.00032	0.000385	6.32E-05	LQM

عند (Case) رقم (10)

يتضح من الجدول (3-20) ان مجموعة القيم الأولية التي كانت $(\alpha = 3,\ \beta = 4, \theta = 3)$, وذلك لإيجاد افضل مقدرللمعالم الثلاثة عن طريق مقياس متوسط مربع الخطأ (MSE) ولأحجام مختلفة من العينات وعند استعمال طرائق مختلفة وكما يأتي:

- عند حجم (n=25)

تبين ان طريقة (LQM) هي الافضل عند المعلمتين (α, θ) عند مقياس متوسط مربع الخطأ هي $\mathrm{MSE}(\hat{\alpha}) = 0.003418$, $\mathrm{MSE}(\hat{\theta}) = 0.003823$, في حين كانت طريقة (LM) افضل من بقية الطرائق عند المعلمة (β)عند مقياس متوسط مربع الخطأ $\mathrm{MSE}(\hat{\beta})=0.002117$.

- عند حجم($n=50$)

تبين ان طريقة (LQM) للمعالم الثلاثة كانت هي الافضل عند مقياس متوسط مربع الخطأ $MSE(\hat{\alpha}) = 0.003664$, $MSE(\hat{\beta}) = 0.003818$, $MSE(\hat{\theta}) = 0.00336$.

- عند حجم ($n=75$)

تبين ان طريقة (LQM) للمعالم الثلاثة كانت هي الافضل عند مقياس متوسط مربع الخطأ $MSE(\hat{\alpha}) = 0.002704$, $MSE(\hat{\beta}) = 0.00337$, $MSE(\hat{\theta}) = 0.004163$.

- عند حجم ($n=100$)

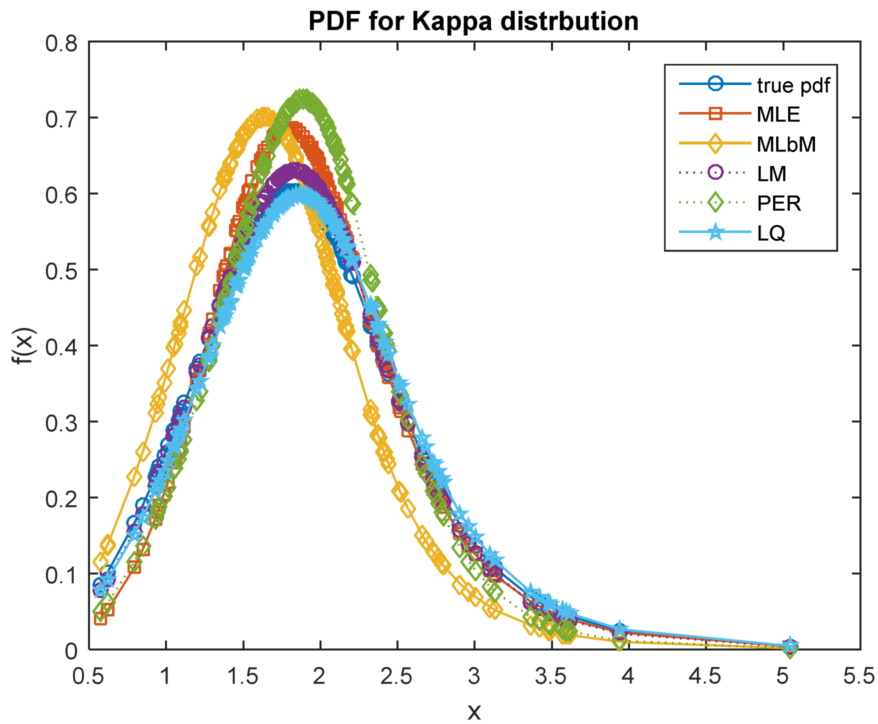
تبين ان طريقة (LQM) للمعالم الثلاثة كانت هي الافضل عند مقياس متوسط مربع الخطأ $MSE(\hat{\alpha}) = 0.003517$, $MSE(\hat{\beta}) = 0.002683$, $MSE(\hat{\theta}) = 0.00315$.

- عند حجم ($n=150$)

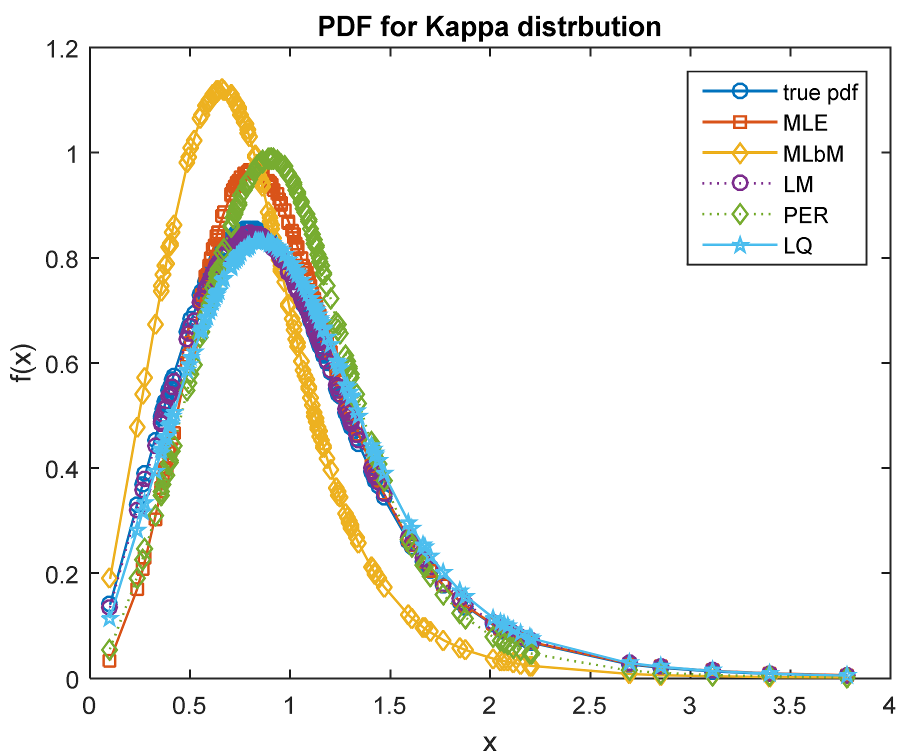
تبين ان طريقة (LQM) للمعالم الثلاثة كانت هي الافضل عند مقياس متوسط مربع الخطأ $MSE(\hat{\alpha}) = 0.003298$, $MSE(\hat{\beta}) = 0.003538$, $MSE(\hat{\theta}) = 0.004382$.

- تبين من الجدول (3-21) ان افضل طريقة لتقدير النموذج العام للتوزيع هي طريقة (LQM) عند معيار متوسط مربعات الخطا (MSE) والذي كانت قيمته (MSE=5.18E-05) إذ كانت قيم المعالم الثلاثة عند استعمال معيار (MSE) وطريقة (LQM) هي ($\hat{\alpha}=1.552044$) , ($\hat{\beta}= 3.042838$) , ($\hat{\theta}=1.546838$) عند حجم عينة 100.

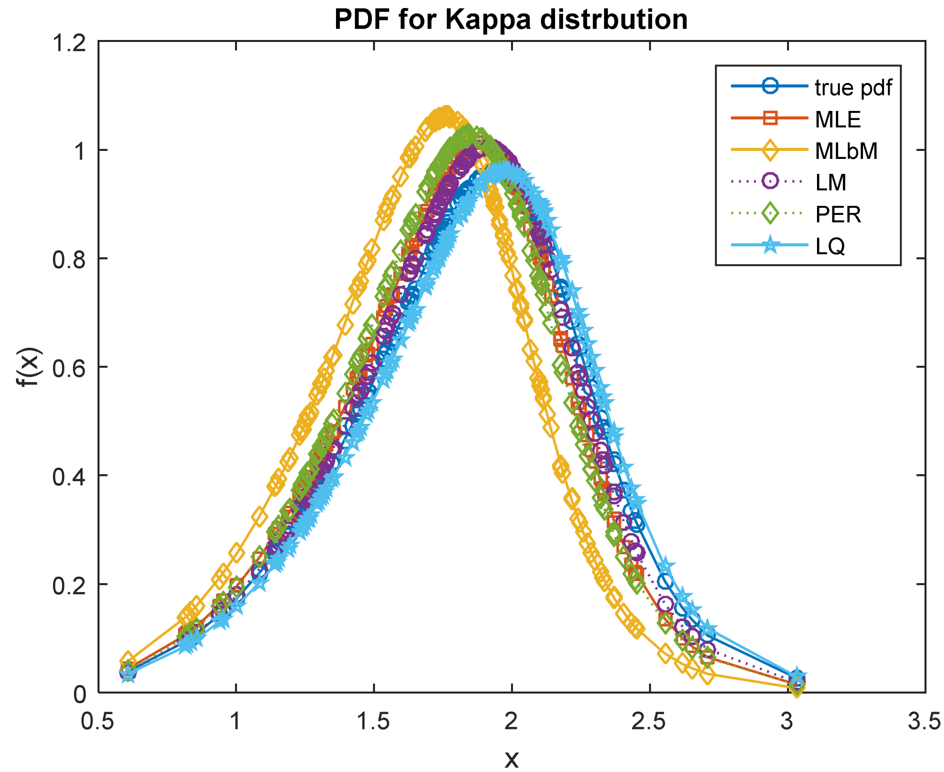
الاشكال العشرة الاتية توضح رسم دالة (pdf) . تم مقارنة (true pdf) التي تمثل الرسم لدالة (pdf) للتوزيع . تم مقارنة مع رسم دالة (pdf) للطرائق المختلفة عند حجم عينة (50) وللمجموعات العشر الماخوذة عشوائياً المختلفة من قيم المعلمات الثلاث وكما يأتي :



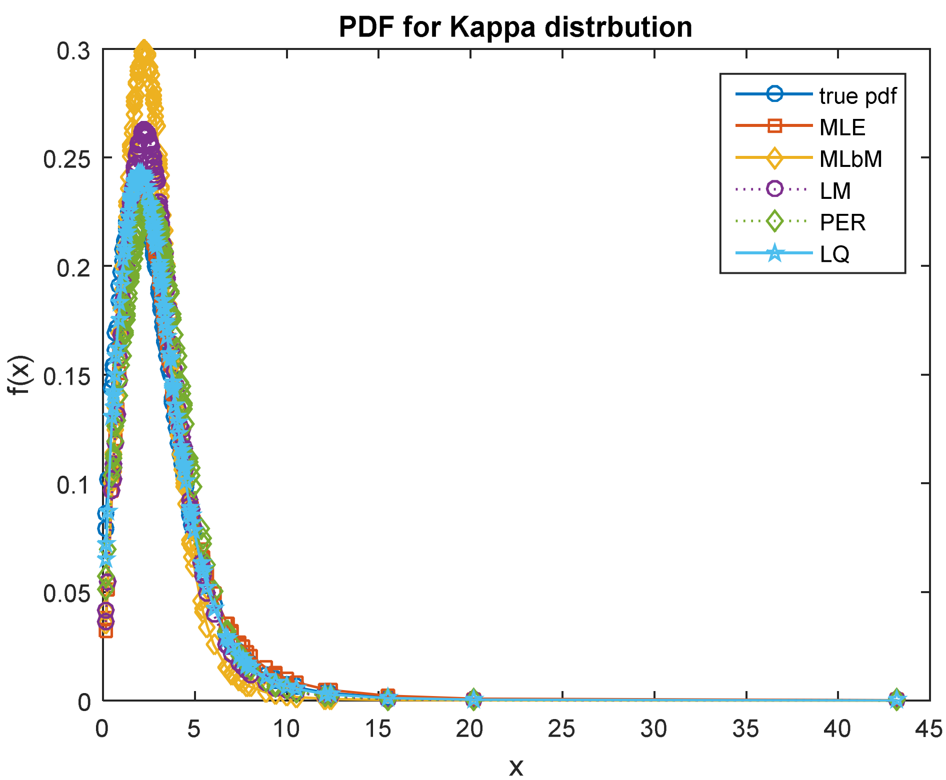
شكل (3-1 a) دالة الكثافة الاحتمالية للقيم الافتراضية(α=2 ,$\boldsymbol{\beta}$=2, $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{3}$)



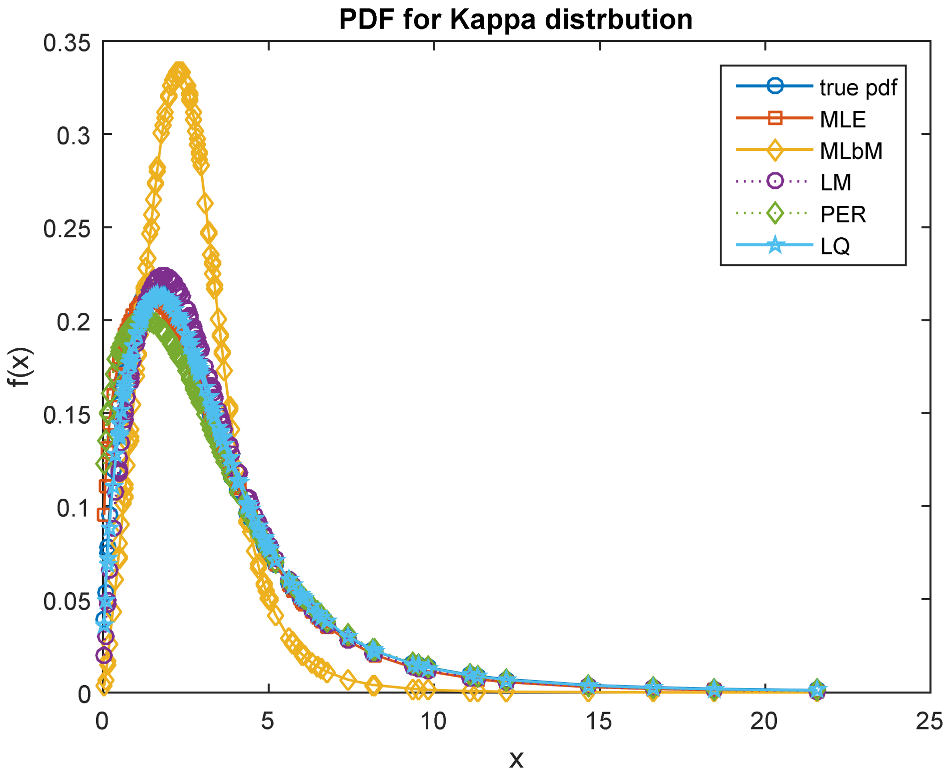
شكل (3-1b) دالة الكثافة الاحتمالية للقيم الافتراضية(α=2 ,β=1, $\theta = 2$)



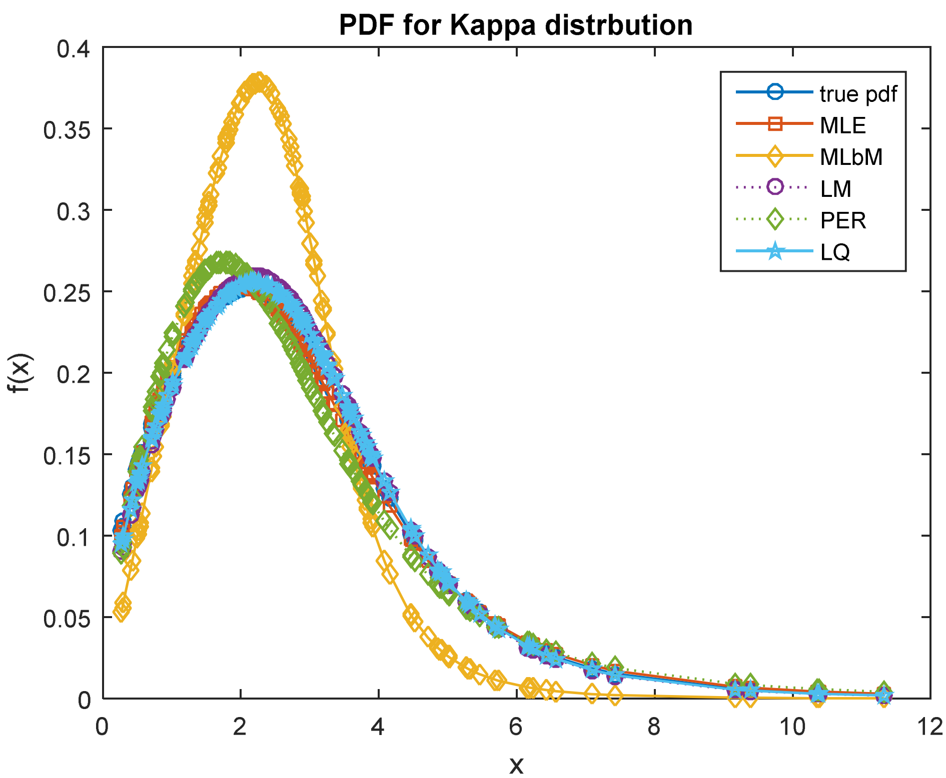
شكل (3-1c) دالة الكثافة الاحتمالية للقيم الافتراضية(α=3 ,β=2, $\theta = 4$)



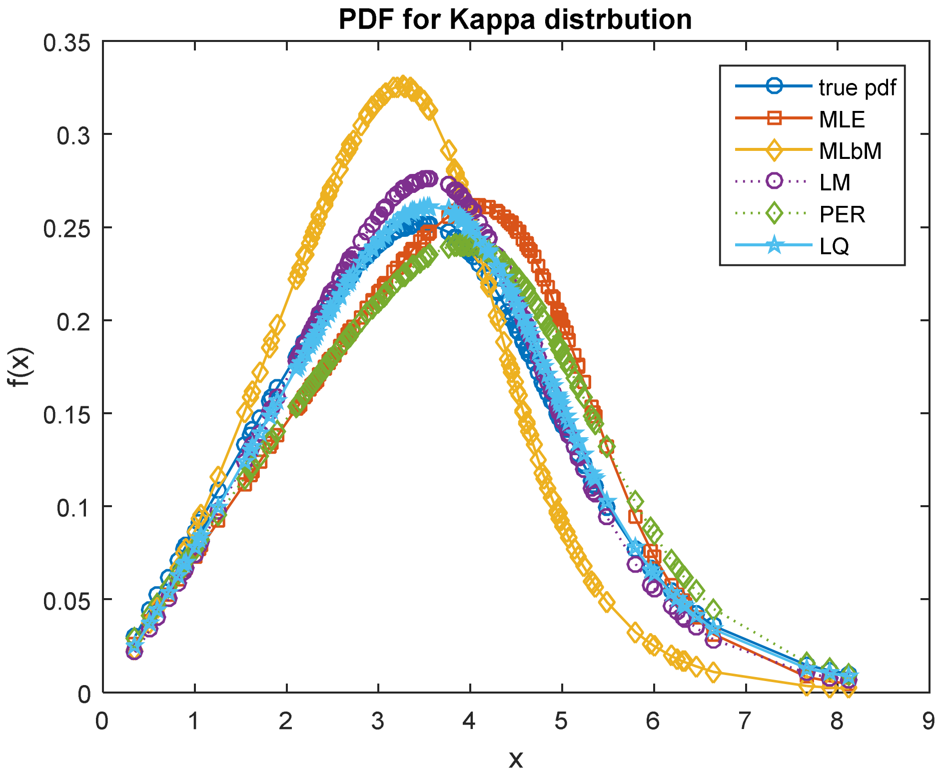
شكل (3-1d) دالة الكثافة الاحتمالية للقيم الافتراضية(α=2 ,β= 3 , $\theta = 1.5$)



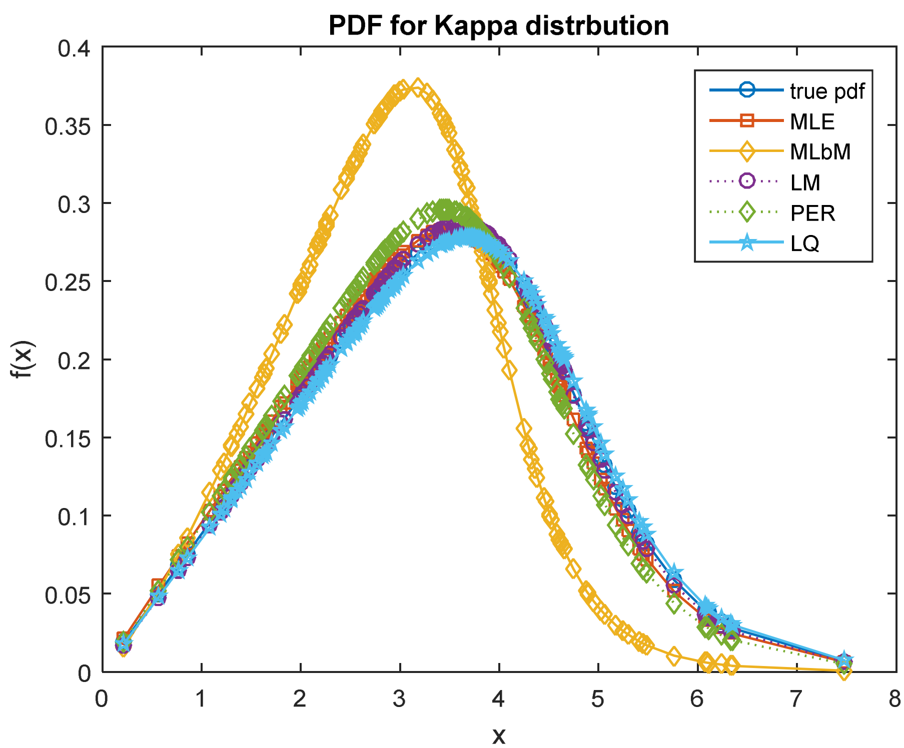
شكل (3-1e) دالة الكثافة الاحتمالية للقيم الافتراضية(α=1.5 ,β= 3 , $\theta = 1.5$)



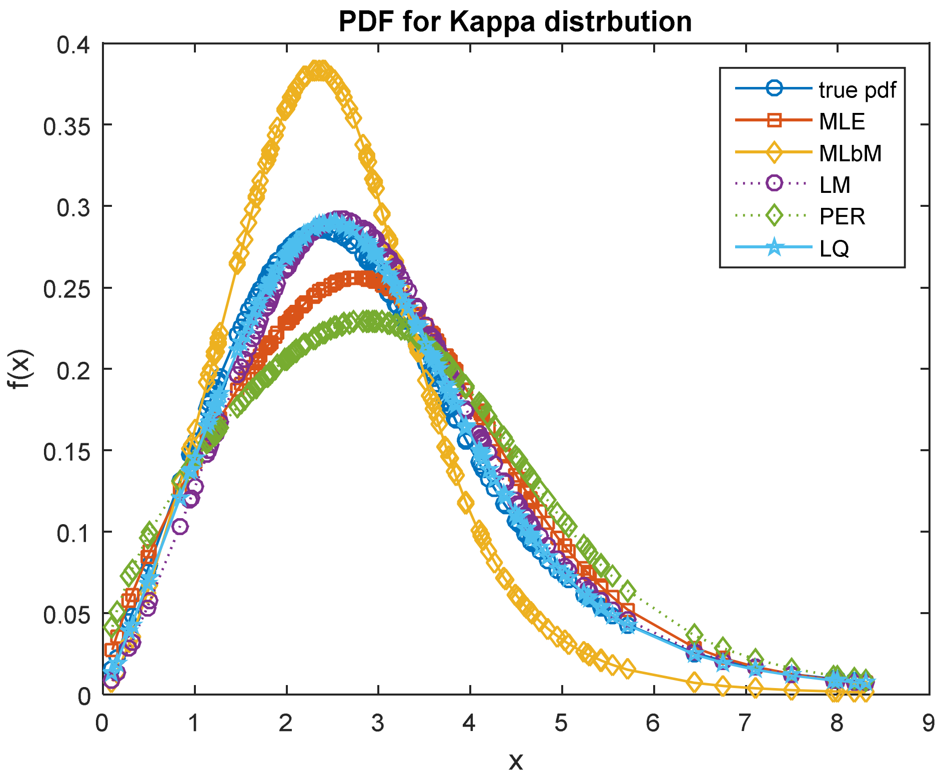
شكل (3-1f) دالة الكثافة الاحتمالية للقيم الافتراضية(α=2.5 ,β=,3 $\theta = 1.5$)



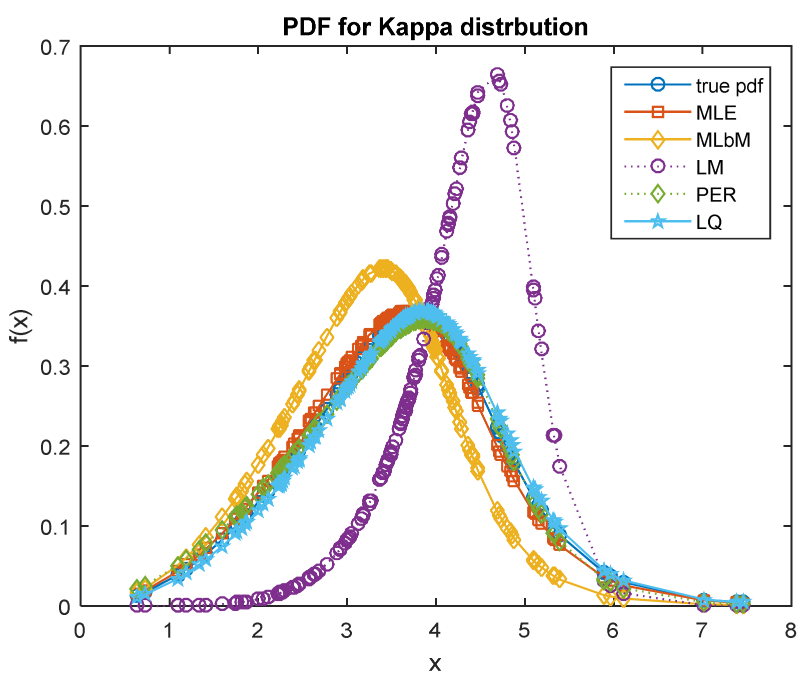
شكل (3-1g) دالة الكثافة الاحتمالية للقيم الافتراضية(α=3 ,β=4 , $\theta = 2$)



شكل (3-1h) دالة الكثافة الاحتمالية للقيم الافتراضية(α=4 ,β=4, $\theta = 2$)

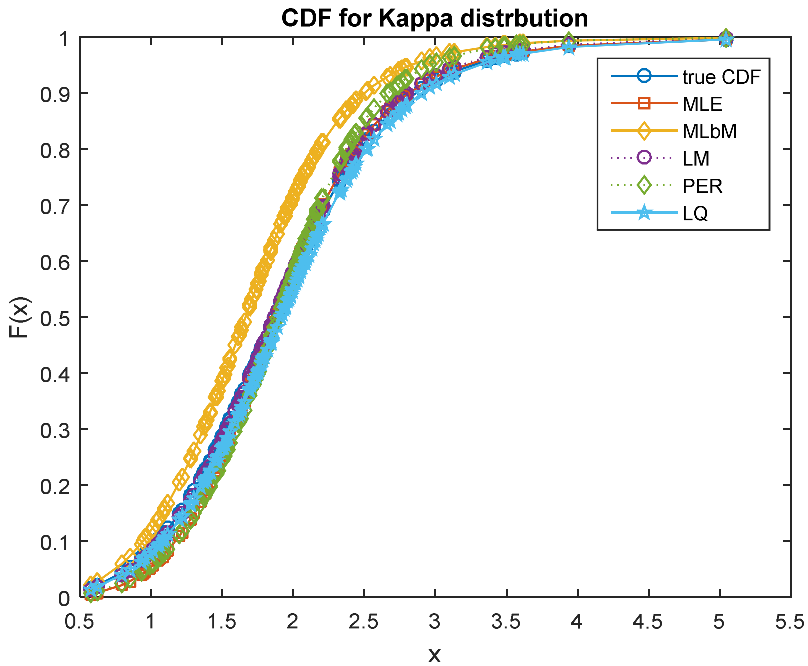


شكل (3-1i) دالة الكثافة الاحتمالية للقيم الافتراضية($\alpha=2$,$\beta=3$, $\theta = 2$)

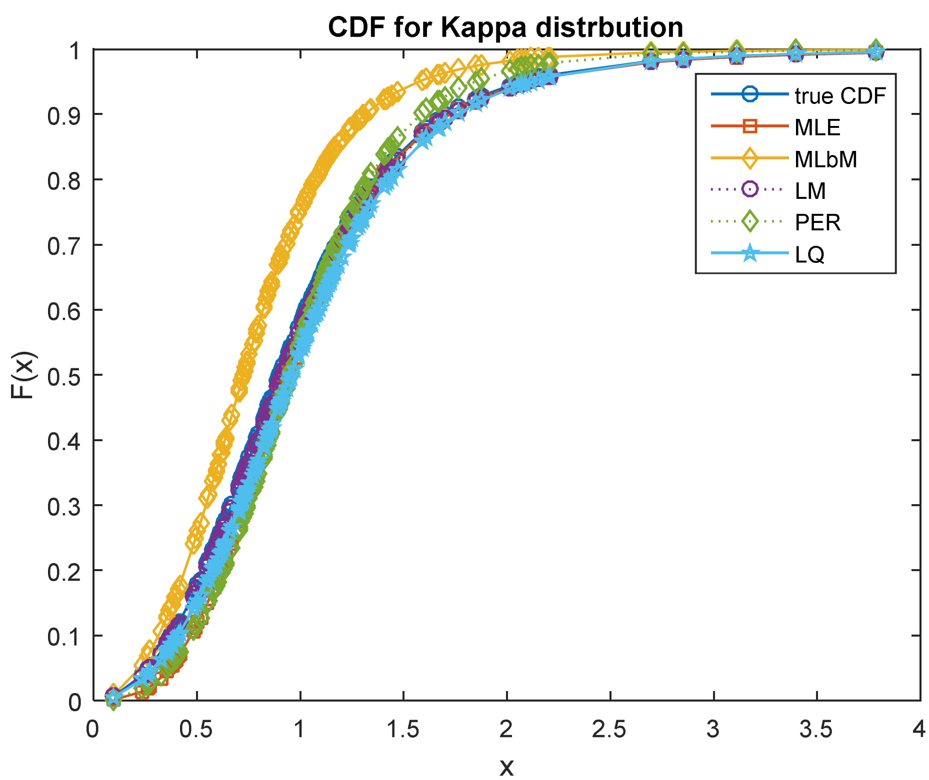


شكل (3-1j) دالة الكثافة الاحتمالية للقيم الافتراضية($\alpha=3$,$\beta=4$, $\theta = 3$)

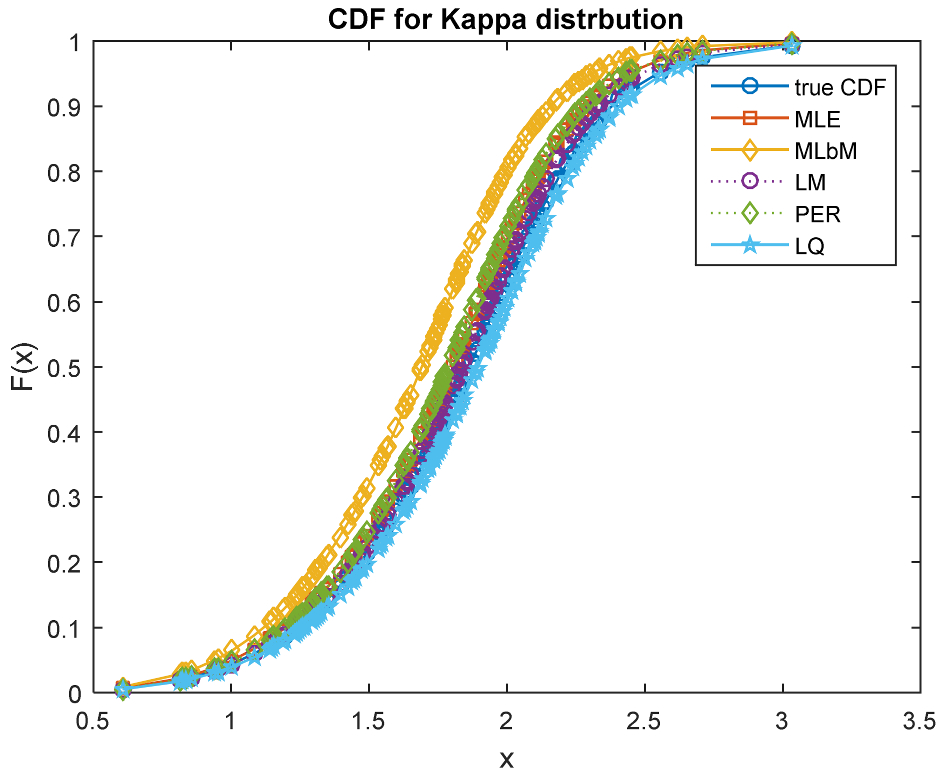
الاشكال العشرة الاتية توضح رسم دالة (cdf) . تم مقارنة (true cdf) التي تمثل الرسم لدالة (cdf) للتوزيع تم مقارنته مع رسم دالة (cdf) للطرائق المختلفة عند حجم عينة (50) وللمجموعات العشر الماخوذة عشوائياً المختلفة من قيم المعلمات الثلاث :



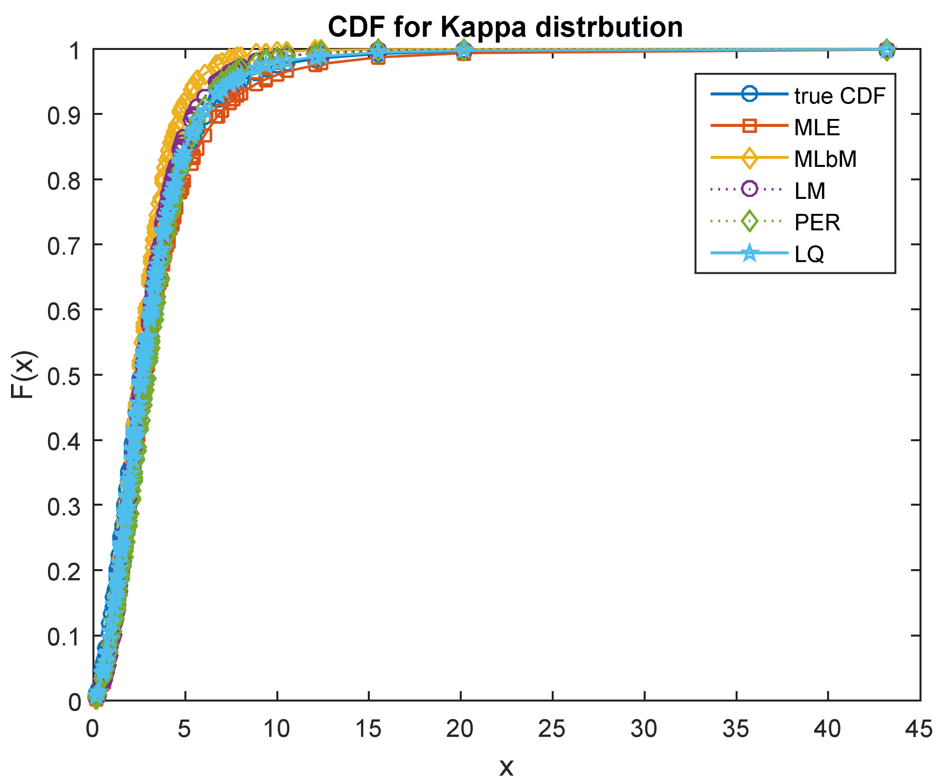
شكل (3-2 a) دالة التوزيع التراكمية للقيم الافتراضية(α=2 ,β=2, $\theta = 3$)



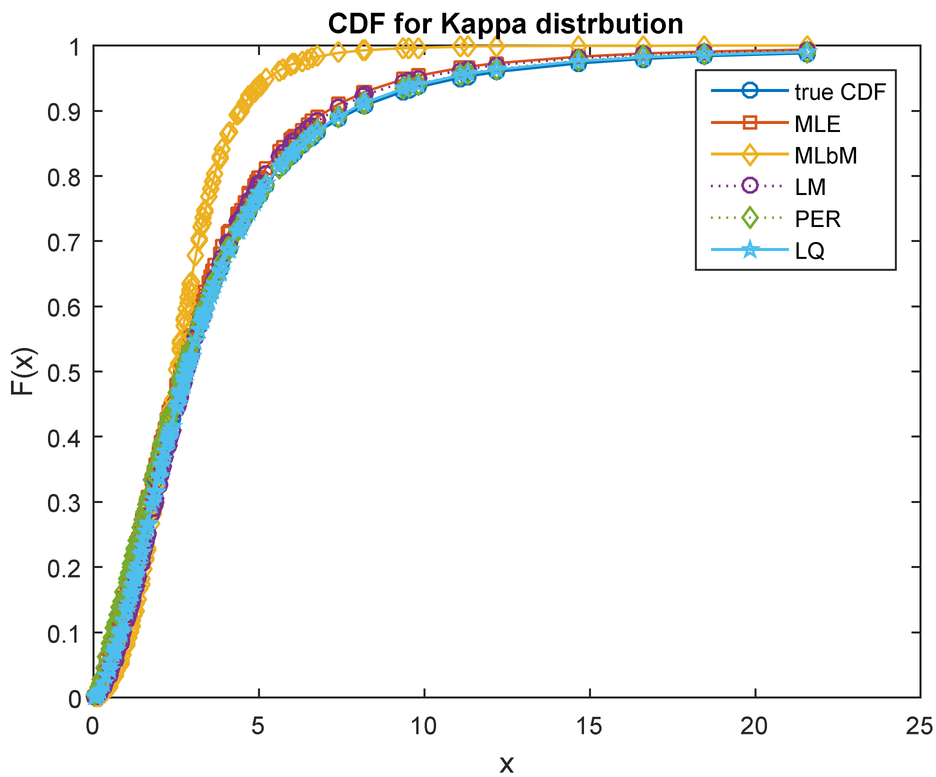
شكل (3-2b) دالة التوزيع التراكمية للقيم الافتراضية(α=2 ,$\boldsymbol{\beta}$=1, $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{2}$)



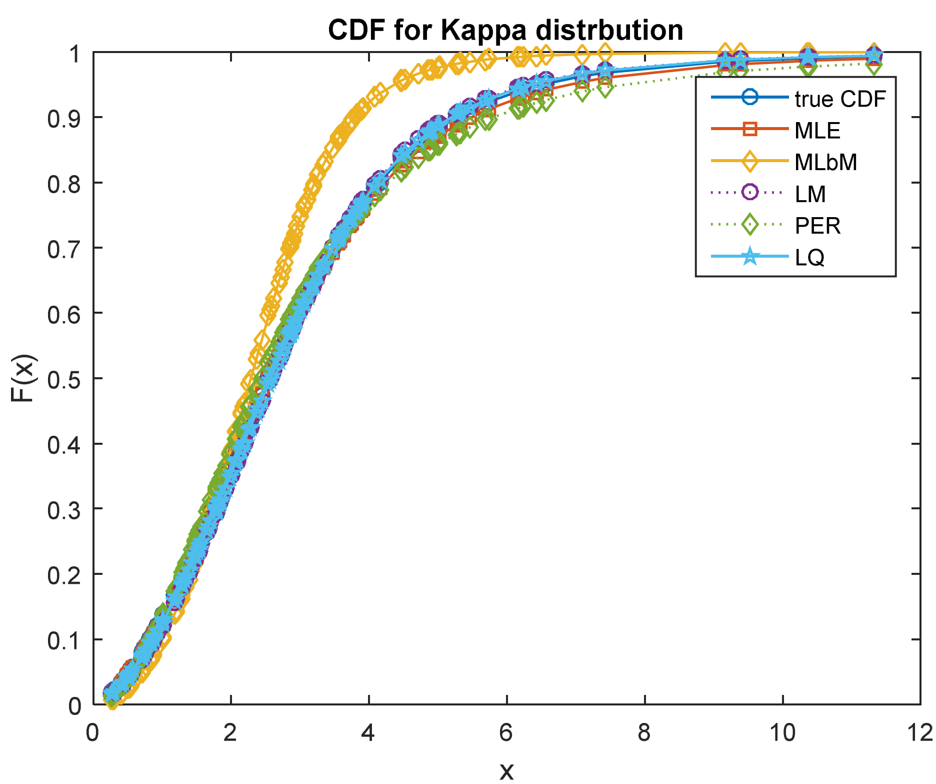
شكل (3-2c) دالة التوزيع التراكمية للقيم الافتراضية(α=3 ,$\boldsymbol{\beta}$=2, $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{4}$)



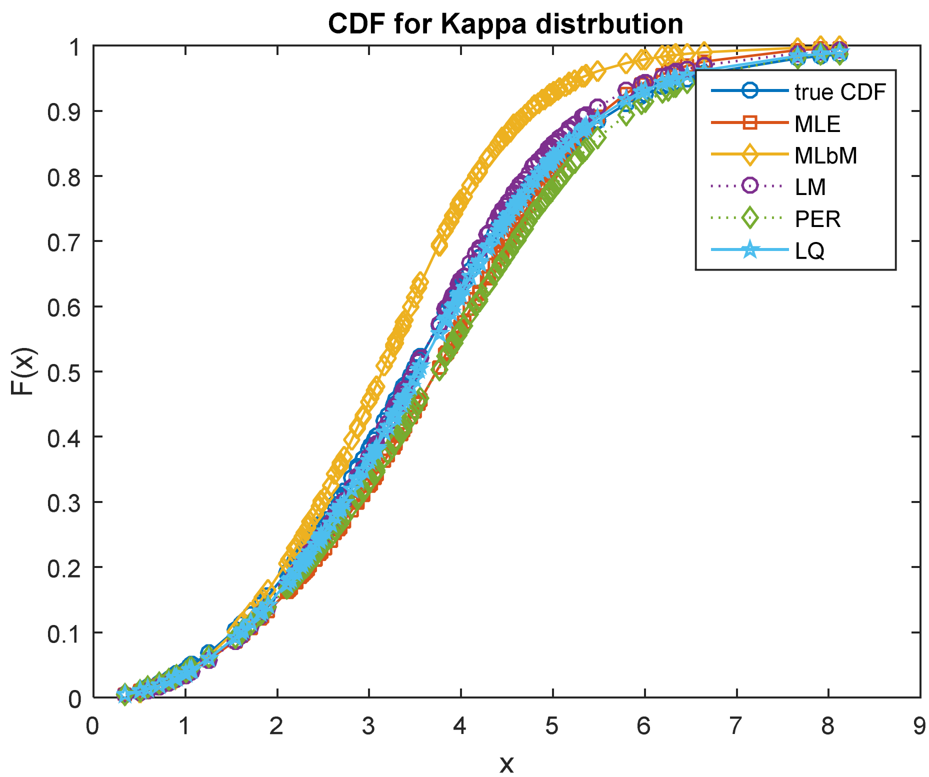
شكل (3-2d) دالة التوزيع التراكمية للقيم الافتراضية($\alpha=2$,$\beta=3$, $\theta = 1.5$)



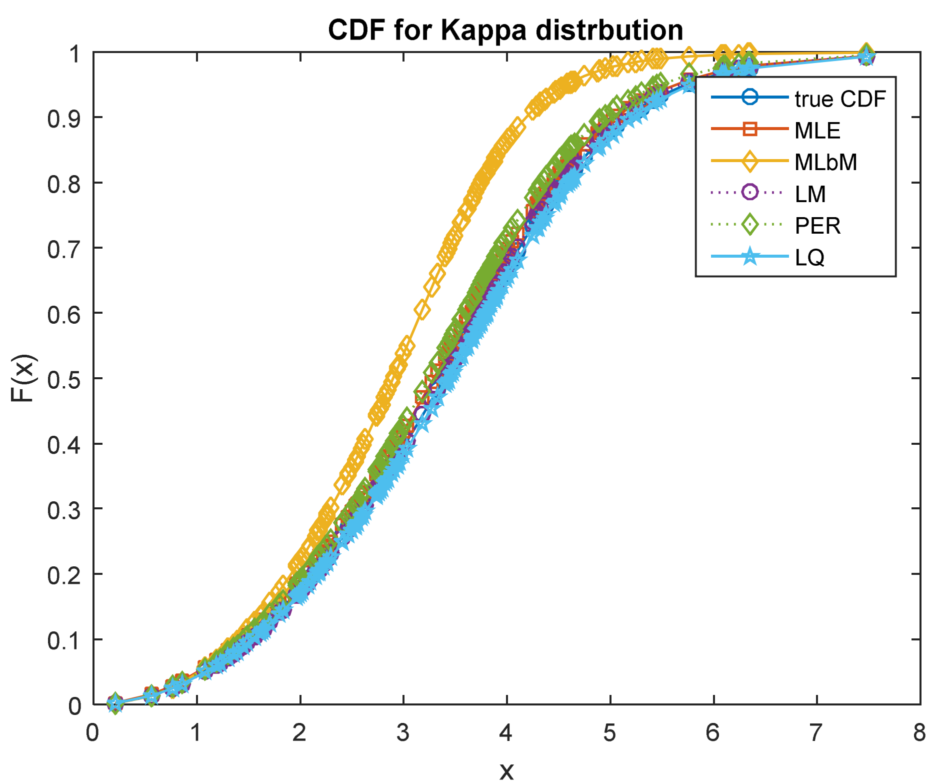
شكل (3-2e) دالة التوزيع التراكمية للقيم الافتراضية($\alpha=1.5$,$\beta=3$, $\theta = 1.5$)



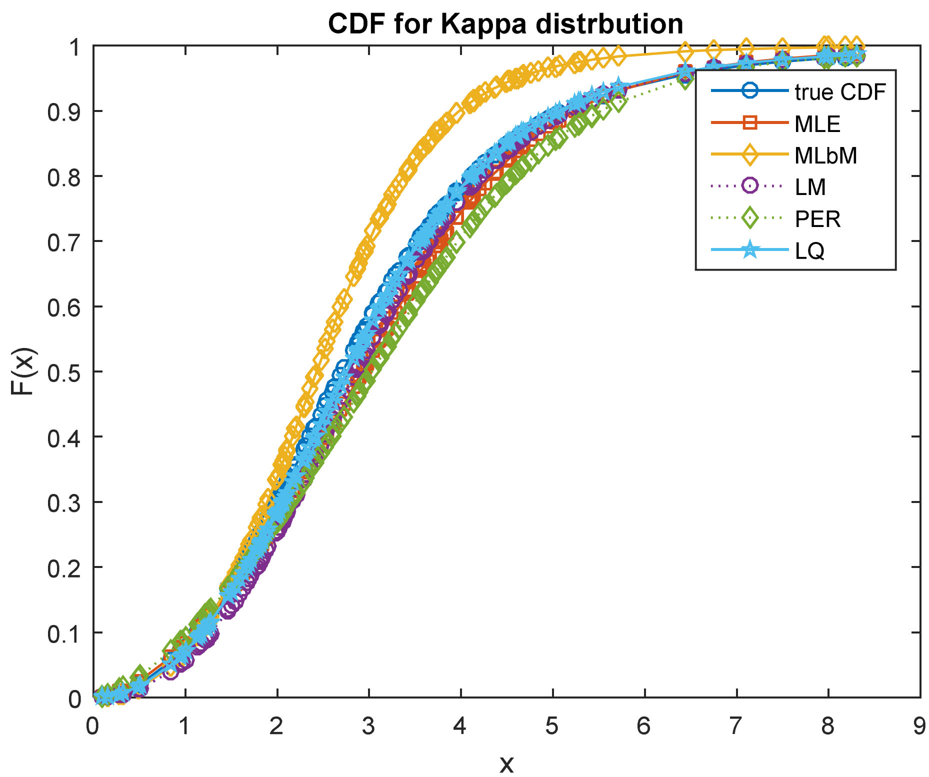
شكل (3-2f) دالة الكثافة التوزيع التراكمية الافتراضية($\theta = 1.5$,β=3 ,α=2.5)



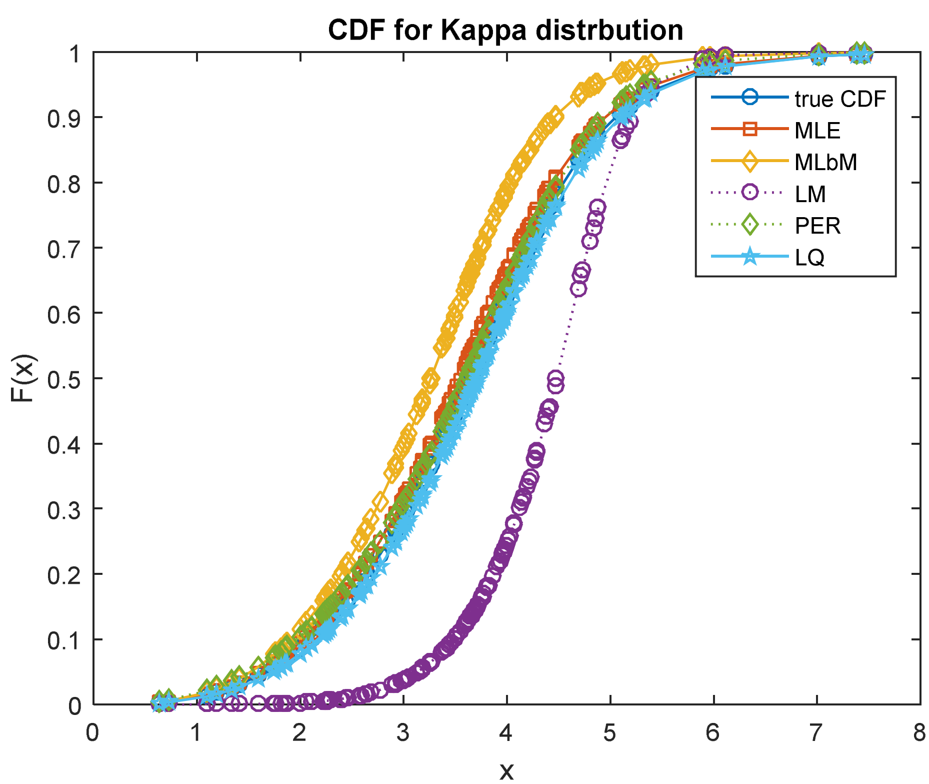
شكل (3-2g) دالة التوزيع التراكمية للقيم الافتراضية($\theta = 2$,β=4 ,α=3)



شكل (3-2h) دالة التوزيع التراكمية للقيم الافتراضية(α=4 ,β=4,   θ = 2)



شكل (3-2i) دالة التوزيع التراكمية للقيم الافتراضية(α=2 ,β=3, θ = 2)



شكل (3-2j) دالة التوزيع التراكمية للقيم الافتراضية($\alpha=3$,$\beta=4$, $\theta=3$)

2.3-الجانب التطبيقي

1.2.3 التمهيد Preface

نظرا لما تمثلة الامطار من اهمية في حياة الفرد والمجتمع وفي واقع الزراعة والغطاء النباتي وغيرها . لذا تم دراسة هذه الظاهرة دون غيرها من الظواهر الاخرى التي تدرسها صيغة التوزيع محل الدراسة,والتي تتلائم مع هكذا نوع من الدراسات لذا سوف نسلط الضوء على واقع كميات مياه الامطار الساقطة لمحطة ارصاد بغداد ولبيانات حقيقية لكي نقدر معالم دالة نموذج كابا ذي الثلاث معالم .

2.2.3 بيانات التجربة

تم اختيار بيانات تمثل كميات مياه الامطار لمحطة ارصاد محافظة بغداد وكانت البيانات لحجم عينة (50) مشاهدة للمدة من (1966- 2015) والتي تم الحصول عليها من الجهاز المركزي للاحصاء , وتم الاعتماد على برنامج (Matlab b2012a) في عمل الجانب التطبيقي والجدول آلاتي يوضح البيانات الحقيقية .

جدول (3-22)

الجدول آلاتي يمثل كميات الامطار للمحطة الارصادية لمحافظة بغداد وكما يأتي:

السنة	محطة محافظة بغداد	**السنة**	محطة محافظة بغداد	**السنة**	محطة محافظة بغداد	**السنة**	محطة محافظة بغداد	**السنة**	محطة محافظة بغداد
1966	129.6	1976	111.5	1986	158	1996	98	2006	162.3
1967	130.4	1977	139.7	1987	52.9	1997	113.8	2007	99.2
1968	255.9	1978	110.1	1988	182.9	1998	115.8	2008	59.1
1969	119.6	1979	78	1989	145.6	1999	126.2	2009	67.5
1970	126.9	1980	138.9	1990	123.8	2000	142.1	2010	92.5
1971	187	1981	109.9	1991	89.4	2001	82.1	2011	96
1972	191.2	1982	160.7	1992	88.1	2002	96.5	2012	184.4
1973	97.1	1983	57.8	1993	192.5	2003	176.8	2013	296.7
1974	284.1	1984	118.1	1994	152.9	2004	78.9	2014	107.5
1975	192.7	1985	90.8	1995	96.7	2005	108.2	2015	192

3.2.3-اختبار حسن المطابقة Goodness of fit [40]

لغرض معرفة ان البيانات المتعلقة بالمدة من (1966-2015) انها تتبع توزيع كابا ذي الثلاث معالم (α, β, θ) لذا تم اجراء اختبار حسن المطابقة (Goodness of fit)والذي تضمن اختبار وهو كما يأتي :

(Chi-Square)

$$x^2 = \sum \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \quad \dots (3.89)$$

O_i : مشاهدات التكرارات للبيانات .

E_i: التكرارات المتوقعة

وبحسب الفرضية الاتية :

H$_0$: $X \nsim Kappa$

H$_1$: $X \sim Kappa$

بعدما تبويب البيانات في جدول تكراري واجراء اختبار حسن المطابقة وعند استعمال الاختبارين المذكورين انفاً , والجدول الاتي يوضح قيم احصاءات العينة للقيم الحقيقية وكما يأتي:

جدول (3-23)

يبين احصائات العينة لمحافظة بغداد

Mean	132.168
Median	118.8500
Mode	52.90
Variance	2878.003
Skewness	1.160309
Kurtosis	4.38231
Range	243.80
Minimum	52.90
Maximum	296.70

جدول (3-24)

يبين نتائج تقدير المعالم الثلاثة للبيانات الحقيقية عند افضل طريقة باستعمال معيار (Chi-Square) لمحافظة بغداد

Methods	Parameters	Chi2

				static	P-value
	α	β	θ		
LQM	2.724799	2.851117	3.477186	1.17607	0.00515

يظهر الجدول **(3-24)** النتائج التي تم الحصول عليها للبيانات الحقيقية

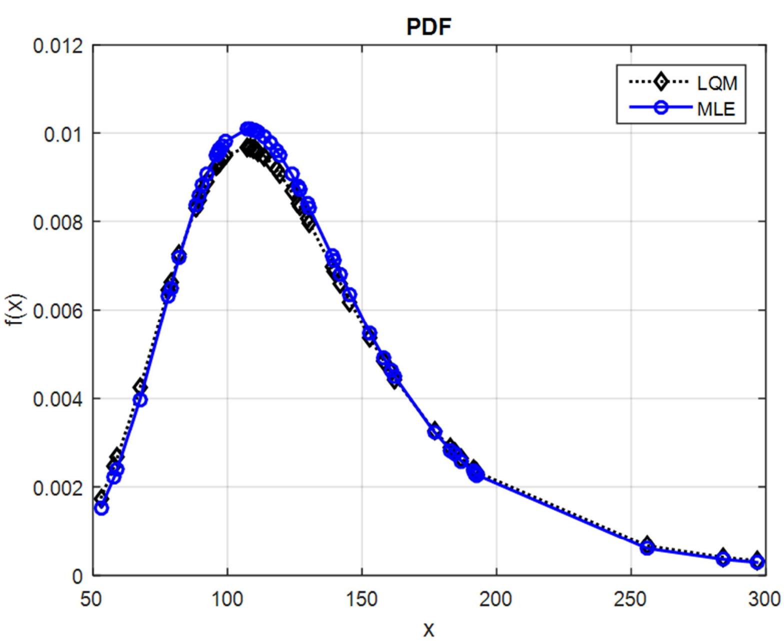
1- عن طريق الجدول المذكور وجد ان قيم المعلمات المحسوبة بطريقة (LQM) هي $\hat{\alpha} =$ 2.724799, $\hat{\theta} = 3.477186$, $\hat{\beta} = 2.851117$.

2- تظهر نتائج اختبار فرضية العدم H_0, بحسب ما تم التوصل اليه رفض هذه الفرضية, اي ان البيانات الحقيقية تتبع توزيع كابا .

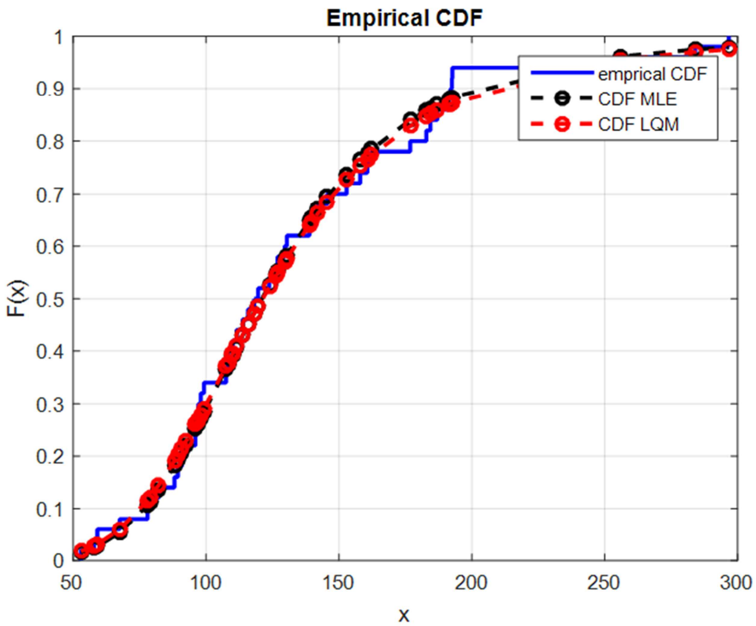
إذ كانت قيمة (مربع كأي x^2) عندما كان مستوى المعنوية (0.01) اكبر من القيمة الاحتمالية $(\mathrm{P-value}) = 0.00532$ عند طريقة MLE لذا نرفض H_0.

وكانت قيمة (مربع كأي x^2) عندما كان مستوى المعنوية (0.01) اكبر من القيمة الاحتمالية $(\mathrm{P-value}) = 0.00515$ عند طريقة LQM لذا نرفض H_0.

نضع الرسم البياني الذي يوضح دالة التوزيع الاحتمالي للبيانات الحقيقية وكذلك الرسم البياني الذي يوضح دالة الوزيع التراكمي لمحافظة بغداد على الترتيب وكما يأتي:



شكل (3-3) دالة التوزيع الاحتمالي للبيانات الحقيقية لمحافظة بغداد



شكل(3-3) دالة التوزيع التراكمي للبيانات الحقيقية لمحافظة بغداد .

الفصل الرابع

الاستنتاجات والتوصيات

الفصل الرابع

الاستنتاجات والتوصيات

1.4 الاستنتاجات: (Conclusions)

عن طريق النتائج التي تم التوصل اليها في الجانبين التجريبي والتطبيقي توصل الباحث الى الاستنتاجات الاتية:

1- وجد أن أفضل التقديرات لمعالم توزيع كابا كانت عند طريقة العزوم الكمية الخطية Method of LQ-Moments عند حجم عينة (50)عند (Case) رقم (2) وان افضل قيمة تقديرية لمعلمة القياس ($\widehat{\beta} = 1.047115$) وكانت القيمة التقديرية قريبة مع القيمة الافتراضية ($\beta = 1$) .

2- كانت طريقة العزوم الكمية الخطية LQ-Moment تتفوق على جميع الطرائق الاخرى في جانب المحاكاة (Simulation) لذا استعملهما الباحث في التقدير في الجانب التطبيقي ومن نتائج الجانب التطبيقي, تبين بان تقديرات معلمتي الشكل (θ, α) ومعلمة القياس (β) كانت قريبة من القيمة الافتراضية في الجانب التجريبي مع فارق بسيط كان بسبب اختلاف طبيعة البيانات المختارة .

3- حسب ما جاء في الجانب التجريبي للنموذج تبين بان القيم التقديرية للمعالم (α, β, θ) متقاربة جدا مع القيم الافتراضية .

4- ان طريقتا العزوم الكمية الخطية LQ-Moment تتفوق على الطرائق الاخرى جميعها في تقدير معالم النموذج العام حسب معيار MSE ولاحجام العينات المختارة عند كل القيم الافتراضية للمعالم لكل العشرة حالات (Cases) عند الطرائق الخمس .

5- عند اجراء اختبار حسن المطابقة (Goodness of fit) و عند مقارنة قيمة (P-value) لمعيار (Chi2) مع (0.01) في الجانب التطبيقي تبين للباحث ان البيانات في محطة ارصاد محافظة بغداد تسلك وفق الفرضية البديلة (H_1: $X \sim Kappa$) اي تتوزع توزيع كابا .

2-4 التوصيات (Recommendations)

في ضوء ما توصل اليه الباحث في هذه الرسالة من استنتاجات نوصي بالاتي :

1- توسيع نطاق البحث لكي يتضمن الصيغ الست الاخرى لتوزيع كابا , لان ذلك له اهمية في دراسة الظواهر والتي تكون من الاهمية بمكان دراستها, لما لذلك من دور في التقدم العلمي في مجال الفضاء وفي الجانب الحياتي على حد سواء.

2- استعمال طرائق اخرى للتقدير, غير التي اعتمدها الباحث مثل LH- Moment وطريقة TL- Moment والطرائق البيزية وغيرها لمعرفة مدى الدقة لتلك الطرائق.

3- بالامكان تلافي مشكلة عدم توفر البيانات للظواهر او في حال قطع السلسل البيانية ذات الاهمية والتي يدرسها التوزيع عن طريق اجراء تنبؤ للسلسلة المطلوبة من كمية البيانات لتلافي الاختلاف الحاصل في نتائج الجانب التجريبي والجانب التطبيقي.

4- يوصي الباحث بتطوير نموذج توزيع كابا ذي الثلاثة معالم (محل الدراسة) لكي يصبح بالامكان ان يستخدم في دراسة ظاهرة (تساقط الامطار الغزيرة) .

المصادر

المصادر العربية

القرآن الكريم .

1- حنا ، امير , (1990) , الاحصاء الرياضي , مديرية دار الكتب للطباعة والنشر , شارع ابن الاثير , الموصل , الصفحة 132- 136.

2- ذنون,باسل,(1991), الاحتمالات والمتغيرات العشوائية , مطبعة جامعة الموصل ,كلية العلوم ,رقم الايداع في المكتبة الوطنية 102 لسنة 1991, جامعة الموصل ,الصفحة 481-487.

3- عبد الرحمن , انعام , (2012) , تصميم خطط عينات القبول للشركة العامة للصناعات الالكترونية باستخدام التوزيع الاسي العام , اطروحة دكتوراه , كلية الادارة والاقتصاد - جامعة بغداد.

4- المشهداني,محمود حسن , حنا,امير,(1989), الاحصاء , مديرية دار الكتب للطباعة والنشر جامعة بغداد, الصفحة 254.

5- نعمة , مهدي وهاب. (2015) , بناء نموذج احتمالي موزون مع تطبيق عملي , اطروحة دكتوراه , كلية الادارة والاقتصاد - جامعة بغداد.

6- الياسري, تهاني مهدي عباس (2007) , مقارنة مقدرات بيز الحصين مع مقدرات اخرى لتقدير دالة المعولية التقريبية لتوزيع ويبل , اطروحة دكتوراه، كلية الادارة والاقتصاد - جامعة بغداد.

المصادر الاجنبية

7. A.Monserud ,Robert ; Rik, Leemans, (1992) , Comparing global vegetation maps with the Kappa statistic, Ecological Modelling, Volume 62, Issue 4, August 1992, Pages 275-293.

8. Abramowitz, Milton; A.Stegun, Irene(1972) , Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables ,Library of Congress Catalog Card Number:64-60036,pp253.

9. Ahmad , Ishfaq ; Farooq , Said ; Mahmood ,Iram ; Ahmad ,Zahoor,(2013), Modeling of Monsoon Rainfall in Pakistan Based on Kappa Distribution ,Sci.Int.(Lahore),25(2),333-336,2013 Issn 1013-5316.

10. B.P.PARIDA, (1999), Modelling of Indian Summer Monsoon Rainfall Using A Four-Parameter Kappa Distribution ,Indian Institute of Technology .New Delhi 110 016,Indin.

11. Connie Winchester, (2000**),** ON Estimation of The Four-Parameter Kappa Distribution , 3 , DALHOUSIE UNVIERSITY HALFIFAX, NOVA SCOTIA, MARCH, 2000.

12. D.J. Dupuis a & C. Winchester,(2007). More on the four-parameter kappa distribution , Pages 99-113 | Received 20 Jun 2000, Published online: 20 Mar 2007 **.**

13. Decurn inge, Alexis, (2013), Estimation and Tests Under L-Moment Condition Models , F. Nielsen and F. Barbaresco(Eds.): GSI, LNCS 8085, PP459-466.

14. Gupta, R.D.,Kundu, D., (2000), Generalized Exponantial Distribution:different method of estimation, jaurnal of statistical computation and simulation, vol.30,no.4,pp 315-338.

15. Hosting, J.R.M, (1996), Some theoritical results concerning L-moments , RC 14492 (64907) 3/22/89.

16. J.R.M Hosking , (1994), The four parameter kappa distribution , IBM J.RES. DEVELP. VOL 38, NO3 MAY 1994.

17. J.S. Park; H.S. Jung, (2002), Modeling Korean extreme rainfall using a kappa distribuion and maximum liklihood estimate , Springer-Verlag , theor Appl Climatol 72.55-64(2002).

18. Jeong, Bo-Yoon; Park, Jeong-Soo, (2006), Comparison of Parameter Estimation Methods in A Kappa Distribution Proceedings of Joint Conference of Korean Data and Information Science Society and The Korean Data Analysis Society ,April 28-29,2006,pp.163-169 .

19. John.J.Podesta, (2004), Plasma Dispersion Function for the Kappa Distribution , NASA/CR-2004-212770.

20. K. Ashour, Samir ; A. El-sheik , Ahmed ; A.T. Noura , (2015) , TL-Moments and LQ-Moments of the exponentiated Pareto Distrnution , Journal of scientific Research & Reports 4(4) : 328-347, artical no.JSRR 036 .

21. K.Ashour, Samir; A.Elsherpieny ,Dr.El- Sayed;Y.Abdelall,Yassmen, (2011), Parameter Estimation for Kappa Distribution With Four-Parameter Under II Censored Samples ,Australian Journal of Basic and Applied Sciences,5(7): 174-180, 2011.

22. Kumphon, Bungon , (2012), Maximum Entrope and Maximum Likelihood Estimation for the Three-Parameter Kappa Distribution ,open Journal of statistics, 2012,2,415-419.

23. Kumphon, D.and Gupta, R.d., (2011), An Extennsion of the Generalized Exponential Distribution, statistical methodology, vol.8, no.4,pp 485-496.

24. Livadiotis, G; Mccomas, D.J,(2013), Understanding Kappa Distribution :A Toolbox for Space Science and Astrophysics ,Space Sci Rev (2013) 175:183-214 Doi10.1007/s11214-013-9982-9.

25. Meanin , Seung-Jin; Lee,Soon-Hyuk; Song Gi-Heon, (2006), Flood Frequancy Analysis by Wakeby and Kappa Distrbutions using L-Moments , DOI: 10.5389/KSAE.2006.48.5.017.

26. Mir, K.A., Rechi, J.A.(2013), Structural Propes of Lengh Biased Beta Distrnution of First Kind, American Journal of Engineering Research , vol.02,lssue-02, pp1-6.

27. Murshed , Md. Sharwar ; Seo ,Yun Am ; Park ,Jeong-Soo , (2014), LH-moment estimation of a four parameter kappa distribution with hydrologic applications , Stochastic Environmental Research and Risk ssessment February 2014, Volume 28, Issue 2, pp 253–262.

28. Nassar, M., Mada, N.(2013), A new Generaliza on of the Pareto-Geometric Distribution, Journal of the Egyption Mathematical Society,Vol .21,pp. 148-155.

29. Park ,Jeong-Soo; Yoon ,Tae , (2007), Fisher information matrix for a four-parameter kappa distribution , Statistics & Probability Letters 77 (2007) 1459–1466.

30. Park,Jeon-Soo; Young-A, Hwang, (2005**)**, Comparison of Parameter Estimation Methods in A Kappa Distribution ,The Korean Communications in Statistics Vol.12 No.2,2005.

31.Rodding ,Thomas; Hyunjun Ahn & Ilaria Prosdocimi ,(2017), On the use of a four-parameter kappa distribution in regional frequency analysis , ISSN: 0262-6667 (Print) 2150-3435 .

32. S.Hassan, Dhwyia; M.Nassir, Layla; Inam Abdulrahman Noaman,(2014), Introducing Different Estimators of Tow Parameter Kappa Distribution, Volume 5,Issue12,December(2014),pp.107-115

33. Shabri Ani ; Abdul Aziz Jemain, (2010), LQ-moments: Parameter Estimation for Kappa Distribution, Sains Malaysiana 39(5)(2010):P845-850.

34. SHABRI, ANI , (2011) , Fitting the generlized Logistics Distrbution , Applied Mathematical Sciences , vol.: 5. No.: 54, pp: 2663-2676.

35. SHABRI, ANI, (2007), LQ-Moments for statistical analysis of Extreme Events , Journal of Modren Applied statistical Methods , Volume 6 , Issue 1 , artical 21, pp. 228-238.

36. SHABRI, ANI; JEMAIN , ABDUL AZIZ, (2006), LQ-Moments: Application to the Log-Normal distrubtion , Journal of Mathematics and statistics 2(3): 414-421.

37. Teimouri, Mahdi and Gupta, Arjun k.(2013), On The *Three-parameter Weibull Distribution Shape parameter Estimation ,Journal of Data Scienece, Vol .11,pp. 403-414.*

38. V.P Signgh; F.ASCE; Z. Q. Deng, (2003), Entropy-Based parameter Estimation for kappa distrbution , journal of HYDROLOGING ASCE/MARCH/APRIL 2003/81 J HYDROL Eng. 2003.92.

39. W.MIELKE, PAUL; S.JOHNSON, EARL, (1973), Three-Parameter Kappa Distribution Maximum Likelihood Estimates and Likelihood Ratio Tests, UDC 551.501.45:551.509.617.

40. https://www.researchgate.net/publication/282703782 Aziz Mahdi Abd on 10 October 2015.

الملاحق

البرامج المستخدمة

الملحق A

برنامج الحاكاة

```
clc;
clear;
alpha=2;
Beta=2;
theta=3;
T=1;
ni=[25 50 75 100 150];
A1=[];
A2=[];
A3=[];
A4=[];
for i=1:length(ni)
  n=ni(i);
for t=1:T
x=generate_sample(n,alpha,Beta,theta);
f1=pdf_kappa(sort(x),alpha,Beta,theta);
F=cdf_kappa(sort(x),alpha,Beta,theta);
R=1-F;
%%          1-MLE
[par f]=fsolve(@(S) MLE(x,S),[1 1 1]);
alpha_mle(t)=par(1);      Beta_mle(t)=par(2);      theta_mle(t)=par(3);
f_mle=pdf_kappa(sort(x),alpha_mle(t),Beta_mle(t),theta_mle(t));
F_mle=cdf_kappa(sort(x),alpha_mle(t),Beta_mle(t),theta_mle(t));
R_mle=1-F_mle;
ks_mle(t)=max(abs(((1:n)/n)-F_mle));
mse_mle(t)=immse(f1,f_mle);
%%          2- LSM
[par1 f]=fsolve(@(S) MOM_length(x,S),[alpha Beta theta]);
```

```
alpha_moml(t)=par1(1);       Beta_moml(t)=par1(2);      theta_moml(t)=par1(3);

f_moml=pdf_kappa(sort(x),alpha_moml(t),Beta_moml(t),theta_moml(t));

F_moml=cdf_kappa(sort(x),alpha_moml(t),Beta_moml(t),theta_moml(t));

ks_moml(t)=max(abs(((1:n)/n)-F_moml));

R_moml=1-F_moml;

mse_moml(t)=immse(f1,f_moml);

%%        3-LM

[par2 f]=fsolve(@(S) LM_Method(x,S),[alpha Beta theta]);

alpha_lm(t)=par2(1);      Beta_lm(t)=par2(2);      theta_lm(t)=par2(3);

f_lm=pdf_kappa(sort(x),alpha_lm(t),Beta_lm(t),theta_lm(t));

F_lm=cdf_kappa(sort(x),alpha_lm(t),Beta_lm(t),theta_lm(t));

ks_lm(t)=max(abs(((1:n)/n)-F_lm));

R_lm=1-F_lm;

mse_lm(t)=immse(f1,f_lm);

%%         4- Percentile

[par3 f]=fsolve(@(S) Percentile(x,S),[alpha Beta theta]);

alpha_per(t)=par3(1);      Beta_per(t)=par3(2);      theta_per(t)=par3(3);

f_per=pdf_kappa(sort(x),alpha_per(t),Beta_per(t),theta_per(t));

F_per=cdf_kappa(sort(x),alpha_per(t),Beta_per(t),theta_per(t));

ks_per(t)=max(abs(((1:n)/n)-F_per));

R_per=1-F_per;

mse_per(t)=immse(f1,f_per);

%%         5-LQ-moment

[par4 f]=fsolve(@(S) LQ_method(x,S,0.5,0.05),[alpha,Beta,theta]);

alpha_lq(t)=par4(1);      Beta_lq(t)=par4(2);      theta_lq(t)=par4(3);

f_lq=pdf_kappa(sort(x),alpha_lq(t),Beta_lq(t),theta_lq(t));

F_lq=cdf_kappa(sort(x),alpha_lq(t),Beta_lq(t),theta_lq(t));

ks_lq(t)=max(abs(((1:n)/n)-F_lq));

R_lq=1-F_lq;

mse_lq(t)=immse(f1,f_lq);
```

```
end

%%%%%%%%%%%%%%    Result

%%        1-MLE

para(:,1)=[mean(alpha_mle)  mean(Beta_mle) mean(theta_mle)]';

MSE(:,1)=[immse(alpha_mle,repmat(alpha,1,T)) immse(Beta_mle,repmat(Beta,1,T))
immse(theta_mle,repmat(theta,1,T))]';

MSP(:,1)=[sum(abs((alpha-alpha_mle)*(1/alpha))) sum(abs((Beta-Beta_mle)*(1/Beta))) sum(abs((theta-
theta_mle)*(1/theta)))]'*(1/T);

MOD(:,1)=[mean(mse_mle)  mean(ks_mle)]';

%%         2- MLBM

para(:,2)=[mean(alpha_moml)  mean(Beta_moml) mean(theta_moml)]';

MSE(:,2)=[immse(alpha_moml,repmat(alpha,1,T)) immse(Beta_moml,repmat(Beta,1,T))
immse(theta_moml,repmat(theta,1,T))]';

MSP(:,2)=[sum(abs((alpha-alpha_moml)*(1/alpha))) sum(abs((Beta-Beta_moml)*(1/Beta)))
sum(abs((theta-theta_moml)*(1/theta)))]'*(1/T);

MOD(:,2)=[mean(mse_moml)  mean(ks_moml)]';

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%         3-LM

%%        3-LM

para(:,3)=[mean(alpha_lm)  mean(Beta_lm) mean(theta_lm)]';

MSE(:,3)=[immse(alpha_lm,repmat(alpha,1,T)) immse(Beta_lm,repmat(Beta,1,T))
immse(theta_lm,repmat(theta,1,T))]';

MSP(:,3)=[sum(abs((alpha-alpha_lm)*(1/alpha))) sum(abs((Beta-Beta_lm)*(1/Beta))) sum(abs((theta-
theta_lm)*(1/theta)))]*(1/T);

MOD(:,3)=[mean(mse_lm)  mean(ks_lm)]';


%%         4-Per

para(:,4)=[mean(alpha_per)  mean(Beta_per) mean(theta_per)]';

MSE(:,4)=[immse(alpha_per,repmat(alpha,1,T)) immse(Beta_per,repmat(Beta,1,T))
immse(theta_per,repmat(theta,1,T))]';

MSP(:,4)=[sum(abs((alpha-alpha_per)*(1/alpha))) sum(abs((Beta-Beta_per)*(1/Beta))) sum(abs((theta-
theta_per)*(1/theta)))]'*(1/T);

MOD(:,4)=[mean(mse_per)  mean(ks_per)]';


%%         5-Lq
```

```
para(:,5)=[mean(alpha_lq)  mean(Beta_lq) mean(theta_lq)]';

MSE(:,5)=[immse(alpha_lq,repmat(alpha,1,T)) immse(Beta_lq,repmat(Beta,1,T))
immse(theta_lq,repmat(theta,1,T))]';

MSP(:,5)=[sum(abs((alpha-alpha_lq)*(1/alpha))) sum(abs((Beta-Beta_lq)*(1/Beta))) sum(abs((theta-
theta_lq)*(1/theta)))]'*(1/T);

MOD(:,5)=[mean(mse_lq)  mean(ks_lq)]';

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

A1=[A1;MSE];

A2=[A2;MSP];

A3=[A3;para];

A4=[A4;MOD];

end

[a1 b1]=min(A1');

[a2 b2]=min(A2');

[a3 b3]=min(A4');

for i=1:length(b1)

   if b1(i)==1

      b1(i)=1111;

   end

      if b1(i)==2

      b1(i)=2222;

      end

      if b1(i)==3

      b1(i)=3333;

      end

      if b1(i)==4

      b1(i)=4444;

      end

       if b1(i)==5

      b1(i)=5555;

      end
```

```
end
for i=1:length(b2)
   if b2(i)==1
      b2(i)=1111;
   end
      if b2(i)==2
      b2(i)=2222;
      end
      if b2(i)==3
      b2(i)=3333;
      end
      if b2(i)==4
      b2(i)=4444;
      end
        if b2(i)==5
      b2(i)=5555;
      end
end
for i=1:length(b3)
   if b3(i)==1
      b3(i)=1111;
   end
      if b3(i)==2
      b3(i)=2222;
      end
      if b3(i)==3
      b3(i)=3333;
      end
      if b3(i)==4
      b3(i)=4444;
```

```
    end
     if b3(i)==5
    b3(i)=5555;
    end
end
A1=[A1 b1'];
A2=[A2 b2'];
A4=[A4 b3'];
%%              Plot   PDF
figure(1)
plot(sort(x),f1,'linewidth',2)
hold on
plot(sort(x),f_mle,'linewidth',2)
plot(sort(x),f_moml,'linewidth',2)
plot(sort(x),f_lm,'linewidth',2)
plot(sort(x),f_per,'linewidth',2)
plot(sort(x),f_lq,'linewidth',2)
legend('true pdf','MLE','MLbM','LM','PER','LQ')
xlabel('x')
ylabel('f (x)')
title('PDF for Kappa distrbution')
%%              Plot    CDF
figure(2)
plot(sort(x),F,'linewidth',2)
hold on
plot(sort(x),F_mle,'linewidth',2)
plot(sort(x),F_moml,'linewidth',2)
plot(sort(x),F_lm,'linewidth',2)
plot(sort(x),F_per,'linewidth',2)
plot(sort(x),F_lq,'linewidth',2)
```

```
legend('true CDF','MLE','MLbM','LM','PER','LQ')

xlabel('x')

ylabel('F (x)')

title('CDF for Kappa distrbution')

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%              Plot  R


%%             Plot  R

figure(3)

plot(sort(x),R,'linewidth',2)

hold on

plot(sort(x),R_mle,'linewidth',2)

plot(sort(x),R_moml,'linewidth',2)

plot(sort(x),R_lm,'linewidth',2)

plot(sort(x),R_per,'linewidth',2)

plot(sort(x),R_lq,'linewidth',2)

legend('true R','MLE','MLbM','LM','PER','LQ')

xlabel('t')

ylabel('R (t)')

title('Reliability for Kappa distrbution')

open('A1')

open('A2')

open('A3')

open('A4')
```

الملحق B

الدوال المرتبطة

```
function [F]=cdf_kappa(x,alpha,Beta,theta)

n=length(x);

for i=1:n

   a=(x (i)/Beta)^(theta*alpha);

F(i)=(a/(alpha+a))^inv(alpha);

End

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function [Kh]=D_ker(x,h)

Kh=inv(h)*G_ker(x/h);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function [K]=G_ker(t)

 K=((2*pi)^(-0.5))*exp(-(t^2)/2);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function [x]=generate_sample(n,alpha,Beta,theta)

for i=1:n

   u=rand;

   a1=(-alpha*(u^alpha));

   a2=(u^alpha)-1;

   x(i)=Beta*((a1/a2)^inv(alpha*theta));

end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function [Br]=Linear_mom(r,S)

alpha=S(1);

Beta=S(2);

theta=S(3);

a1=gamma(inv(theta*alpha)+((1+r)/alpha))*gamma(1-inv(theta*alpha));

Br=Beta*(alpha^(inv(theta*alpha)))*(a1/gamma(1+((1+r)/alpha)));


function [F]=LM_Method(x,S)

alpha=S(1);
```

```
Beta=S(2);

theta=S(3);

n=length(x);

s1=0; s2=0; s3=0;

n=length(x);

for i=1:n

   s1=s1+(i-1)*x(i);

   s2=s2+(i-1)*(i-2)*x(i);

   s3=s3+(i-1)*(i-2)*(i-3)*x(i);

end

b1=(1/(n*(n-1)))*s1;

b2=(1/(n*(n-1)*(n-2)))*s2;

b3=(1/(n*(n-1)*(n-2)*(n-3)))*s3;

B1=Linear_mom(1,S);

B2=Linear_mom(2,S);

B3=Linear_mom(3,S);

F=[B1-b1

        B2-b2

        B3-b3].^2;

%%%%%%%%%%%%%%%

function [L]=lq(r,p,alpha,S)

s=0;

for k=0:r-1

   s=s+((-1)^k)*(factorial (r-1)/(factorial(k)*factorial(r-1-k)))*Tau(p,alpha,r,k,S);

end

L=s/r;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function [L]=lq_hat(r,X,p,alpha)

s=0;

for k=0:r-1

   s=s+((-1)^k)*(factorial (r-1)/(factorial(k)*factorial(r-1-k)))*T_hat(p,alpha,r,k,X);

end

L=s/r;
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%
function [F]=LQ_method(x,S,p,alpha)
X=sort(x);
F=[lq(1,p,alpha,S)-lq_hat(1,X,p,alpha)
      lq(2,p,alpha,S)-lq_hat(2,X,p,alpha)
      lq(2,p,alpha,S)-lq_hat(2,X,p,alpha)];
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function [E]=M_length(r,S)
alpha=S(1);
Beta=S(2);
theta=S(3);
a1=(Beta^r)*(alpha^(r/(alpha*theta)))*gamma(2*(r/(alpha*theta))+inv(alpha))*gamma(1-
(r/(alpha*theta))-inv(alpha*theta));
a2=gamma((1+theta)/(theta*alpha))*gamma((alpha*theta-1)/(theta*alpha));
E=a1/a2;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function [F]=MOM_length(x,S)
alpha=S(1);
Beta=S(2);
theta=S(3);
Mean_s=mean(x);
Var_s=std (x)^2;
CV_s=std (x)/mean(x);
%%  distrbution
Mean_dis=M_length(1,[alpha Beta theta]);
Var_dis=M_length (1,[alpha Beta theta])^2-M_length(2,[alpha Beta theta]);
CV_dis=sqrt (Var_dis)/M_length(1,[alpha Beta theta]);
F=[Mean_s-Mean_dis];
%    Var_s-Var_dis
%     CV_s-CV_dis


function [f]=pdf_kappa(x,alpha,Beta,theta)
n=length(x);
```

```
a1=((alpha*theta)/Beta);
aa=(-(alpha+1))/alpha;
for i=1:n
   a2=(x (i)/Beta)^(theta-1);
   a3=(x (i)/Beta)^(theta*alpha);
f(i)=a1*a2*((alpha+a3)^aa);
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function [F]=Percentile(x,S)
n=length(x);
alpha=S(1);
Beta=S(2);
theta=S(3);
Q=((1:n)-(3/8))./(n+1/4);
Fc=cdf_kappa(sort(x),alpha,Beta,theta);
F=sum((log(Fc)-log(Q)).^2);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function [Q]=Quan(u,alpha,Beta,theta)
   a1=(-alpha*(u^alpha));
   a2=(u^alpha)-1;
   Q=Beta*((a1/a2)^inv(alpha*theta));
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function [Qh]=Quan_est(u,X)
n=length(X);
v=1-u;
h=((u*v)/n)^0.5;
s=0;
for i=1:n
   s1=0;
   for j=1:i
      s1=s1+weight_ker(j,n);
   end
  s=s+inv(n)*D_ker(s1-u,h)*X(i);
```

```
end

Qh=s;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function [tou_h]=T_hat(p,alpha,r,k,X)

tou_h=p*Quan_est(betainv(alpha,r-k,k+1),X)+(1-2*p)*Quan_est(0.5,X)+p*Quan_est(betainv(1-alpha,r-k,k+1),X);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function [tou]=Tau(p,alpha1,r,k,S)

tou=p*Quan(betainv(alpha1,r-k,k+1),S(1),S(2),S(3))+(1-2*p)*Quan(0.5,S(1),S(2),S(3))+p*Quan(betainv(1-alpha1,r-k,k+1),S(1),S(2),S(3));

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function [w]=weight_ker(i,n)

if i==1 || i==n

   w=0.5*(1-((n-2)/sqrt(n*(n-1))));

else

   w=inv(n*(n-1));

end
```

Abstract

Kappa distribution is considered one of the continouse distribution , whch is stuided the random behaivor for the important phenomenies for life and sciences . This distribution has developed by Hosking and other sientists . This distribution studies some natural phenomenonies such as falling rain and changing of the wether . This distribution is used for studying the discver of modren phenomenonies such as salor winds and plasma properties and other phenomenones from these points come the important of this distribution . There are more than one way and we will study in this thises search his furmela that cesuult from mix the distribution of Gamma and distribution of normal log ,by which we study the natural phenomenones . The searcher drived properties of distribution and use five mwthods for estimate the three parameters () of kappa disteribution after completed the math formela to get the final formula of these methods . These method are maximum liktihood ,L- moment . and for choosing the best one amony these method to estimate the three parameter of distribution . We use simulation to choose which method is bestof the paramters of distribution . We use test for ten groups of assuming data and five volums of samples (150 , 100 , 75 , 50 , 25) . The results were good to showed the best method which was LQ-moment sample , sizes . There for we use this method in oral side , which study phenomenon of rain fall on Baghdad city and we use oral data by main obsevation station of Baghdad city . We get these data from the central statistics .

Concluded in this thiese important Conclusions these are :

1 –Found that the best estimates to distribution of kappa was at the method of torque quantity linear .

2 –As stated in the experimental model turned out that the values of the estimated (θ,β,α) very close with default values .

3 – When make a test of good matching (Goodness of fit), and when compared to the value (P-value) to appose (Chi2) with (0.01) in side Applied The researcher Shows that The data in the station observations province of Baghdad behave a accordance with the hypothesis of alternative ($H_1: X \sim Kappa$) any spread the distribution of kappa .

In addition to the recommendations that were the most important :

1 – Expand the search to include the other six formulas other distribution Kappa as a result of importance in the study of phenomenon life and the phenomenon of climate change and the phenomena other space which studied distribution .

2 – Use anther modalisties change from thats use by researcher (LH – Moment) , (TL – Moment) and other Base methods to knon the rang of and accuracy of those methods .

Republic of Iraq
Ministry of Higher Education and Scientific Research
University of Karbala
Faculty of Management and Economics
Department of Statistics

Choose the Best Method for Estimation the Parameters of Probability Kappa Distribution With practical application

A thesis

Submitted to College of Administration and Economic-Karbala University in partial fulfillment of the Requirements for the Degree of master of Science in statistics

By

Baqer Kareem Fahad

Under supervision

Asis. Prof. Dr. A Mahdi Wahhab Neamah

1439 Ah Karbala 2018 Ad