



جمهورية العراق

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة كربلاء / كلية الإدارة والاقتصاد

قسم الإحصاء

تقدير المعلمات للمعادلات التفاضلية الجزئية مع تطبيق عملي

رسالة مقدمة الى مجلس كلية الادارة والاقتصاد في جامعة كربلاء
وهي جزء من متطلبات نيل درجة الماجستير في علوم الاحصاء

تقدّمت بها

زهراء محسن نعمة الأعرجي

بإشراف

أ.م. د مشتاق كريم عبدالرحيم

2022 م

1444 هـ

كربلاء المقدسة

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

﴿ وَآتَاكُمْ مِنْ كُلِّ مَا سَأَلْتُمُوهُ وَإِنْ تَعُدُّوا
نِعْمَتَ اللَّهِ لَا تَحْصُوهَا إِنَّ الْإِنْسَانَ لَظَلُومٌ

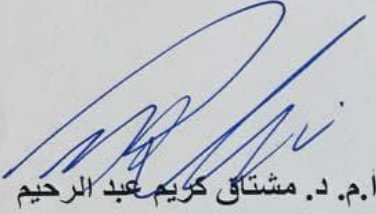
كَفَّارٌ ﴿

صدق الله العلي العظيم

(سورة ابراهيم: الآية 34)

إقرار المشرف

أشهد أن إعداد هذه الرسالة الموسومة (تقدير المعلمات للمعادلات التفاضلية الجزئية مع تطبيق عملي) والتي تقدمت بها الطالبة " زهراء محسن نعمة " قد جرى بإشرافي في قسم الاحصاء - كلية الادارة والاقتصاد - جامعة كربلاء، وهي جزء من متطلبات نيل درجة ماجستير علوم في الاحصاء.




ا.م. د. مشتاق كريم عبد الرحيم

التاريخ: / / ٢٠٢١

توصية رئيس قسم الاحصاء

بناءً على توصية الاستاذ المشرف، أرشح الرسالة للمناقشة.



أ.د. شروق عبد الرضا السباح
رئيس قسم الاحصاء

التاريخ: / / ٢٠٢١

إقرار الخبير اللغوي

أشهد أن الرسالة الموسومة (تقدير المعلمات للمعادلات التفاضلية الجزئية مع تطبيق عملي) قد جرى مراجعتها من الناحية اللغوية تحت اشرافي اذ أصبحت خالية من الاخطاء اللغوية ولأجله وقعت.

الخبير اللغوي

م. صلاح مهدي جابر

إقرار رئيس لجنة الدراسات العليا

بناءً على إقرار المشرف العلمي والخبير اللغوي على رسالة الماجستير للطالبة
"زهراء محسن نعمة" الموسومة بـ (تقدير معلمات المعادلات التفاضلية
الجزئية مع تطبيق عملي) ارشح هذه الرسالة للمناقشة.

أ.د. محمد حسين كاظم الجبوري

رئيس لجنة الدراسات العليا

معاون العميد للشؤون العلمية و الدراسات العليا

مصادقة مجلس الكلية

صادق مجلس كلية الإدارة والاقتصاد/ جامعة كربلاء على قرار لجنة المناقشة.

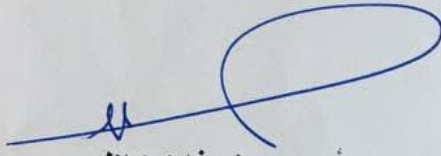
أ.د. علاء فرحان طالب

عميد كلية الإدارة والاقتصاد- جامعة كربلاء

٢٠٢١ / ٤ / ١٧

إقرار لجنة المناقشة

نشهد نحن أعضاء لجنة المناقشة بأننا قد اطلعنا على الرسالة الموسومة
(تقدير معلمات المعادلات التفاضلية الجزئية مع تطبيق عملي) والمقدمة من
قبل الطالبة "زهراء محسن نعمة" وناقشنا الطالبة في محتوياتها وفيما له علاقة
بها، ووجدنا بأنها جديرة بنيل درجة ماجستير علوم في الإحصاء بتقدير ().



أ.م.د. مهدي فائز كاظم

عضواً

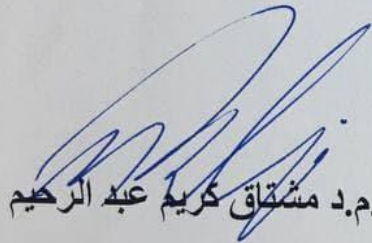
٢٠٢١ / /



أ.د. لقاء علي محمد

رئيساً

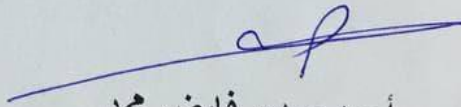
٢٠٢١ / /



أ.م.د. مشتاق كريم عبد الرحيم

عضواً ومشرفاً

٢٠٢١ / /



أ.م.د. صدي فايز محمد

عضواً

٢٠٢١ / /

الإهداء

الى السند العتيق والأمان الحقيقي الذي رغم مضي السنوات الطويلة مازال لدلالة تلك
النكحة الأولى النكحة التي لا يصنعها الا الالباء الى النعمة التي لا احتاج شيئاً بعدها (قدوتي
أبي الغالي)

الى التي مازالت تعطي دون توقف ودون نقصان و أنتظار .للحنان اللامشروط وللصبر
المتشعب انتِ معنى النعمة الالهية الحقيقية (ملهمتي أُمي العزيزة).

دمتم لي حباً وعوناً ودعاء.....

الى وطني الصغير الذي أوي اليه كلما ضاقت بي الدنيا والوجه الآخر للحب الذي لا يموت
(أختي . أخي . عمتي)

الى رفاق الخطوة الأولى والخطوة ما قبل الأخيرة ، من كانوا في السنين العجاف سحاباً
ممطراً "أنا ممتنة" (صديقاتي)

الى الذين سطروا بدمائهم أروع وأنصع صفحات المجد والتضحية والعطاء (شهداء
العراق جميعاً).

اهدي لهم هذا الجهد المتواضع

الباحثه

شكر وتقدير

الحمد لله الذي علم بالقلم . علم الأنسان مالم يعلم . الحمد لله على ما أنعم به علي من فضله الخير الكثير والعلم الوفير وأعانني على أنجاز هذا العمل الذي أحتسبه عبادة من العبادات جعلها الله خالصه لوجهه الكريم والصلاة والسلام على أشرف الأنبياء والمرسلين نبينا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين .

أما بعد .

أتقدم بخالص الشكر ووافر الامتنان الى الاستاذ المساعد الدكتور (مشتاق كريم عبد الرحيم) لمنحه لي شرف الإشراف على رسالتي ولما قدمه لي من علم نافع وعطاء مميز وإرشاد مستمر . وعلى ما بذله من جهد متواصل ونصح وتوجيه من بداية مرحلة البحث حتى إتمام هذه الرسالة . فجزاة الله عني خير الجزاء وجعل ذلك في ميزان حسناته .

كما اتقدم بأسمى عبارات الشكر والتقدير الى الأساتيد الفضلاء رئيس لجنة المناقشة وأعضائها المحترمين لتفضلهم بقبول مناقشة الرسالة .

كما يدعوني واجب الوفاء والعرفان بالجميل ان أتقدم بجزيل الشكر لجميع أساتذتي الفضلاء في قسم الأحصاء (جامعة كربلاء) الذين وهبوني علمهم في مدة دراستي في الجامعة والذين عملوا جاهدين على تحقيق الرقي العلمي لجميع الطلبة .

كما أتقدم بالشكر والتقدير الى الأستاذ (بشار خالد علي) لما قدمه لي من مساعدة كبيرة ودعم في مدة أنجاز الرسالة متمنية له دوام الصحة والموفقية .

وأتوجه بوافر الشكر الى جميع زملاء مرحلة دراسة الماجستير على مساعدتهم لي فجزاهم الله خير الجزاء واتمنى لهم الموفقية .

ولكل من مد لي يد العون او أسدى لي معروفاً . او قدم لي نصيحة . او كانت له أسهامة صغيرة او كبيرة في أنجاز هذا العمل فله مني خالص الشكر والتقدير .

الباحثه

قائمة المحتويات

الصفحة	الموضوع
أ	• الاية
ب	• الاهداء
ج	• شكر وتقدير
د	• قائمة المحتويات
و	• قائمة الجداول
ز	• قائمة الأشكال
ح	• قائمة الرموز
ط	• المستخلص
10-1	الفصل الاول : منهجية الدراسة
1	المقدمة 1-1
2	مشكلة الدراسة 2-1
2	هدف الدراسة 3-1
2	الاستعراض المرجعي 4-1
40-11	الفصل الثاني : الجانب النظري
11	المقدمة 1-2
11	بعض المفاهيم الاساسية 2-2
11	المعادلة التفاضلية 1-2-2
12	انواع المعادلات التفاضلية 2-2-2
12	المعادلات التفاضلية العادية 1-2-2-2
12	المعادلات التفاضلية الجزئية 2-2-2-2
13	تصنيف المعادلة التفاضلية الجزئية 1-2-2-2-2
14	انواع المعادلة التفاضلية الجزئية 2-2-2-2-2
15	طرائق حل المعادلات التفاضلية الجزئية 3-2-2-2-2
16	طرائق التقدير 4-2
16	طريقة الامكان الاعظم 1-4-2
23	طريقة العملية الكاوسية 2-4-2
30	طريقة بيز القياسية 3-4-2
35	خطوات وخوارزمية معاينة جيس لتقدير معاملات بيز 3-4-3
95-41	الفصل الثالث: الجانب التجريبي والتطبيقي

41	المقدمة	1-3
41	القسم الاول – الجانب التجريبي	2-3
41	مفهوم المحاكاة	1-2-3
42	مراحل تجارب المحاكاة	2-2-3
47	مناقشة نتائج المحاكاة	3-2-3
85	القسم الثاني – الجانب التطبيقي	3-3
85	تمهيد	1-3-3
85	نمذجة ديناميكية الفايروس لـ (Covid -19)	2-3-3
92	وصف البيانات الحقيقية	1-2-3-3
93	تقدير معلمات انموذج (Covid-19) في البيانات الحقيقية	2-2-3-3
97-96	الفصل الرابع : الاستنتاجات والتوصيات	
96	الاستنتاجات	1-4
97	التوصيات	2-4
107-98	المصادر	
98	المصادر العربية	اولاً
98	المصادر الاجنبية	ثانياً
A	Abstract	

قائمة الجداول

رقم الصفحة	عنوان الجدول	رقم الجدول
45	القيم الاولية الافتراضية لمعاملات المعادلة التفاضلية الجزئية	1-3
48	المعاملات المقدرة عند المعلمات الافتراضية $\Theta_1=1, \Theta_2=0.1, \Theta_3=0.1$ عند مستوى تشويش (0.01)	2-3
51	المعاملات المقدرة عند المعلمات الافتراضية $\Theta_1=2, \Theta_2=1, \Theta_3=1$	3-3
54	المعاملات المقدرة عند المعلمات الافتراضية $\Theta_1=1, \Theta_2=1, \Theta_3=2$	4-3
57	المعاملات المقدرة عند المعلمات الافتراضية $\Theta_1=6, \Theta_2=4, \Theta_3=3$	5-3
60	المعاملات المقدرة عند المعلمات الافتراضية $\Theta_1=1, \Theta_2=0.1, \Theta_3=0.1$ عند مستوى تشويش (0.05)	6-3
63	المعاملات المقدرة عند المعلمات الافتراضية $\Theta_1=2, \Theta_2=1, \Theta_3=1$	7-3
66	المعاملات المقدرة عند المعلمات الافتراضية $\Theta_1=1, \Theta_2=1, \Theta_3=2$	8-3
69	المعاملات المقدرة عند المعلمات الافتراضية $\Theta_1=6, \Theta_2=4, \Theta_3=3$	9-3
72	المعاملات المقدرة عند المعلمات الافتراضية $\Theta_1=1, \Theta_2=0.1, \Theta_3=0.1$ عند مستوى تشويش (0.09)	10-3
75	المعاملات المقدرة عند المعلمات الافتراضية $\Theta_1=2, \Theta_2=1, \Theta_3=1$	11-3
78	المعاملات المقدرة عند المعلمات الافتراضية $\Theta_1=1, \Theta_2=1, \Theta_3=2$	12-3
81	المعاملات المقدرة عند المعلمات الافتراضية $\Theta_1=6, \Theta_2=4, \Theta_3=3$	13-3
83	قيم افضلية طرائق التقدير عند مستويات التشويش المختلفة	14-3
89	يتضمن ملاتمة الانموذج (3-91) لبيانات الجهاز التنفسي لـ (15) مصاب بفايروس (Covid-19)	15-3
92	قياسات خلايا (T) وقياسات الحمل الفايروسي (βVT) للمرضى المصابين بـ (Covid -19)	16-3
93	معدل القيم التقديرية لمعاملات الانموذج التفاضلي الجزئي وفق طريقة بيز	17-3

قائمة الاشكال

رقم الصفحة	عنوان الشكل	رقم الشكل
91	الديناميكيات الفيروسيّة المتوقعة بقيم مختلفة لـ σ	1-3
92	اعادة انتعاش الفيروس واستمرارية بافتراض تنشيط الاستجابة المناعية التكيفية في اليوم (9،15،20،25) على التوالي	2-3

قائمة المختصرات

Mean	المعنى	الرمز
Partial differential equation	المعادلة التفاضلية الجزئية	PDE
Maximum likelihood	الامكان الاعظم	ML
Gaussian process	العملية الكاوسية	GP
Standard Bayes	بيز القياسي	SB
Monte-carlo	مونت - كارلو	MC
Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno	خوارزمية برويدن - فليشر	BFGS
Cumulative density function	دالة الكثافة التجميعية	C.D.F
Bias	التحيز	Bias
Square roots of average squared errors	الجذر التربيعي لمعدل مجموع الأخطاء التربيعية	Rase
Standard deviations	الانحراف المعياري	SD
Confidence intervals	فترة الثقة	CP
Upper limit	الحد الاعلى	UL
Lower limit	الحد الادنى	LL
Viral load	الحمل الفيروسي	β VT

المستخلص

تسعى الدراسة الى تقدير معلمات المعادلة التفاضلية الجزئية اذ تمت دراسة بعض انواعها وتصنيفاتها وتقدير معلماتها بثلاث طرائق للتقدير (طريقة الامكان الاعظم ، العملية الكاوسية ، طريقة بيز القياسية)، ولغرض المقارنة بين طرائق التقدير لمعلمات المعادلة التفاضلية الجزئية فقد تم توظيف اسلوب محاكاة مونت كارلو (Monte Carlo) لإجراء عدة تجارب بتسعة أحجام مختلفة (صغيرة، متوسطة، وكبيرة) وعند مستويات (White Noise) (0.01، 0.05، 0.09) وعن طريق المعايير الاحصائية الاربعية (التحيز، الجذر التربيعي، الانحراف المعياري، وفترة الثقة) واطهرت النتائج افضلية طريقة بيز القياسية في حساب مقدرات المعادلة التفاضلية الجزئية عند احجام العينات الصغيرة باختلاف مستوى التشويش وتفق طريقة الامكان الاعظم تليها العملية الكاوسية عند العينات المتوسطة والكبيرة عند مستوى التشويش (0.01) اما عند مستوى التشويش (0.05 و 0.09) فقد تفوقت طريقة العملية الكاوسية عند احجام العينات المتوسطة والكبيرة .

وطبقت الطريقة الفضلى في نتائج المحاكاة وهي طريقة بيز القياسية على بيانات حقيقية بواقع (30) مشاهدة تمثل كمية الخلايا اللمفاوية وعلاقتها بفايروس كورونا وقد تم اثبات افضلية طريقة بيز القياسية إذ تطابقت طريقة بيز القياسية في تمثيل البيانات بشكل دقيق وصحيح وقد وجدنا ان معدل تجنيد الخلايا اللمفاوية الى موقع الاصابة بسبب الاستجابة الالتهابية في الرئة يومياً يبلغ (11.86712) خلية ولجميع المرضى المصابين بـ(Covid -19) وان معدل عدد الخلايا اللمفاوية والخلايا الرئوية المصابة بالفايروس بلغ (3556) خليةً ولجميع المرضى .

الفصل الأول

مقدمة المؤلف

الفصل الاول

منهجية الدراسة

1-1 المقدمة Introduction

يعتبر الذكاء الاصطناعي اسلوباً رياضياً لفهم عالمنا ونظراً لما لعلم الإحصاء من دور مهم وبني تطبيقات واسعة في شتى العلوم، وبما أن علم الاحصاء هو فرع من فروع الرياضيات هذا يمكننا من العمل على الدمج بين موضوعات الاحصاء والرياضيات معاً وتم العمل في هذه الدراسة على تقدير المعلمات للمعادلات التفاضلية الجزئية إذ ظهر مفهوم المعادلات التفاضلية (**Differential Equations**) بصورة عامة في بداية القرن السادس عشر وتطورت موضوعات المعادلات التفاضلية بسرعة فائقة لكثرة تطبيقاتها وارتباطها المباشر بعدد من فروع الرياضيات مثل (**Differential Calculation**) وغيره وتكون بنوعها المعادلة التفاضلية العادية والمعادلة التفاضلية الجزئية إذا ان محور الدراسة في هذه الرسالة هو النوع الثاني وهي المعادلات التفاضلية الجزئية (**Partial Differential Equations**) (PDF) فقد تم استعمال المعادلات التفاضلية الجزئية في مجالات علم الاحياء والكيمياء وتعد جيدة حقاً في وصف التغير عبر المكان والزمان ووصف الظواهر الفيزيائية وتستعمل لنمذجة كل من مدارات الكواكب الى الصفائح الارضية الى اضطراب الهواء وتكون معقدة الحل وقد عمل الباحثون بشكل واسع وكبير على تطوير هذه المعادلات إذا عملت الدراسة على استعمال المعادلات التفاضلية الجزئية بصورة عامة بغض النظر عن انواعها وكذلك دراسة بعض طرائق حلها وتصنيفاتها وتقدير معلماتها وأختيار افضل طريقة تقدير ولتحقيق اهداف هذه الدراسة فقد قسمت الى اربعة فصول يتخصص الأول منها لمنهجية الرسالة ويتضمن المقدمة والمشكلة والهدف والاستعراض المرجعي لبعض البحوث و الدراسات ذات العلاقة بالدراسة. في حين تضمن الثاني الجانب النظري الذي تم التطرق فيه لبعض المفاهيم الاساسية المتعلقة بالدراسة (المعادلات التفاضلية الجزئية) وطرائق حلها وعرض طرائق التقدير المستعملة لتقدير معلمات المعادلات التفاضلية الجزئية والمتمثلة بطريقة الأماكن الاكظم (**Maximum Likelihood Method**) (MLE) وطريقة العملية الكاوسية (**Gaussian Process Method**) (GPM) وطريقة بيز القياسية (**Standard Bayes Method**) (SBM). ثم جاء الفصل الثالث الذي خصص للجانب التجريبي والتطبيقي اذ تناول الجانب التجريبي مفهوم المحاكاة وتطبيق أسلوب محاكاة مونت كارلو (**Monte Carlo**) للمقارنة بين طرائق التقدير التي تم التطرق اليها في الفصل الثاني

بأستعمال المعايير الاحصائية الاربعة (التحيز *Bias*،والجذر التربيعي لمجموع مربعات الفرق *Rase*، والانحراف المعياري *SD*، ومدة الثقة *CP*) ولتسعة احجام مختلفة (10،25،50،75،100،150،200،500،1000) واما الجانب التطبيقي فقد تناول اجراء محاكاة لسلوك فايروس (*Covid-19*) وذلك بأعتماد بيانات حقيقية خاصة بمرضى فايروس (*Covid-19*) بأستعمال الطريقة الفضلى بالجانب التجريبي وكذلك تضمن الفصل الرابع والاخير الاستنتاجات والتوصيات التي خرجت بها الدراسة .

2-1 مشكلة الدراسة The Study Problem

في اغلب الاحيان لاتتملك نماذج المعادلات التفاضلية الجزئية صيغ حلول تحليلية وكذلك لصعوبة ايجاد المعلمات بالطرائق الرياضية يتم اللجوء الى تقدير معلمات المعادلات التفاضلية الجزئية بأستخدام الطرائق الاحصائية للتقدير .ومن اهم المشاكل وحدثها والتي اثارت اهتمامنا هي مشكلة السلوك المعقد للبيانات المتعلقة بالخلايا للمفاوية للمرضى المصابين بفايروس (*Covid-19*) ولانها تمثل مشكلة اقتصادية واجتماعية وصحية لذا اخذنا على عاتقنا ايجاد السلوك الحقيقي للفايروس ونمذجته والتعمق به ..

3-1 هدف الدراسة The Study Aim

ترمي الدراسة الى :

- 1- تقدير معلمات المعادلات التفاضلية الجزئية التي يصعب ايجادها بالطرائق الرياضية .بأستعمال طرائق التقدير الاتية (الامكان الاعظم *(ML)*، العملية الكاوسية *(G P)*، بيز القياسية *(S B)*) والمقارنة بينها بأستعمال المحاكاة بطريقة مونت كارلو وباعتماد المقاييس الاحصائية التي تم ذكرها بالمقدمة.
- 2- توضيح السلوك المعقد للبيانات المتعلقة بكمية الخلايا للمفاوية لمرضى فايروس (*Covid -19*) عن طريق اجراء نمذجة لسلوك الفايروس بالجانب التطبيقي ومن ثم تطبيق الطرائق التي تم استعمالها بالجانب التجريبي .

4-1 الاستعراض المرجعي : Literature Review

نشأت المعادلة التفاضلية في سبعينيات القرن السادس عشر عندما طرحها نيوتن في ملاحظات تقريبية غير منشورة وبدأ العمل بها في تسعينيات القرن السادس عشر اما المعادلة التفاضلية الجزئية بدأ العمل بها في القرن الثامن عشر اما كتقدير لمعلمات المعادلة التفاضلية الجزئية كان في سبعينيات القرن التاسع عشر إذ تؤدي الدراسات السابقة دوراً مهماً في البحث العلمي ونظراً لأهميتها وبسبب كثرة

الدراسات السابقة عن المعادلات التفاضلية الجزئية بشكل عام وتقدير معالمها بشكل خاص لذا سنقوم بالتركيز على بعض الدراسات المهمة وضمن مدد زمنية متباعدة بالنسبة للأعمال والدراسات القديمة تسهياً على القارئ ولزيادة التركيز على الدراسات والابحاث الحديثة التي لها علاقة بمنهج دراستنا لغرض اىصال فكرة متكاملة بين الماضي والحاضر من جهة وبين دراستنا الحالية من جهة أخرى .

[22]

ففي عام (1973) قدم الباحث (Chen)⁽¹⁷⁾ أكثر من طريقة للتقدير إذ تكون المعالم المراد تقديرها ثوابت. وقام بتطوير تقنيات تعتمد على تحسين التدرج شبه الخطي وطريقة لتحديد الثقة، وتم توضيح فعالية هذه الطرائق لتقدير المعالم عن طريق التقدير للانتشار في معادلة الحرارة وغيرها وتظهر النتائج العددية ميزة استعمال البيانات وكذلك استعمال الباحث نهجين اثنين لتقدير المتغيرات المكانية وهما طريقة النسب وطريقة تعتمد على معاملة المعلمة متجه اضافي للحالة واستعمال اقل مستوى من المربعات.

وفي عام (1986) قدم الباحث (Lo Andrew)⁽³⁵⁾ طريقة الامكان الاعظم لتقدير المعالم للعمليات العشوائية المستمرة الموصوفة بواسطة المعادلات التفاضلية العشوائية غير الخطية من الدرجة الاولى لنوع (Ito^{\wedge}) المعمم إذ قام باشتقاق المعادلة التفاضلية الجزئية والتي تميز وظيفة الاحتمالية الدقيقة لعملية (Ito^{\wedge}) التي تم اخذ عينات منها بشكل منفصل ووضح عن طريق مثال بسيط ان النهج المشترك لتقدير معالم (Ito^{\wedge}) عن طريق تطبيق أنموذج اقصى احتمال لتقدير المعادلة التفاضلية العشوائية لا ينتج عنه تقديرات متسقة.

اما في عام (2000) قدم كل من (Young, and others)⁽⁶²⁾ بحثاً تضمن المعادلات التفاضلية العشوائية بشكل منفصل في إنموذج فضاء الحالة الزمنية المنفصلة المستمرة فقد توصل الباحثون الى أن تقدير الامكان الاعظم للمعلمات في المعادلات التفاضلية العشوائية غير الخطية غير ممكن بشكل عام بسبب عدم توفر التعبيرات ذات الشكل المغلق للانتقال ولدوال الكثافة الاحتمالية الثابتة ومع ذلك تم تصنيف التطورات الرئيسية وفقاً لتقريبها لحل الاحتمالية القسوى .

في عام (2007) قدم كل من (Taylor, and others)⁽⁵⁶⁾ بحثاً عن تقريب عملية (Gaussian) للمقياس الخلفي على المسارات لفئة عامة من المعادلات التفاضلية العشوائية في وجود الملاحظات وقاموا بتطبيق هذه الطريقة على مشكلتين بسيطتين هما عملية (Ornstein- Uhlenbeck) والتي

يعرف الحل الدقيق لها ويمكن مقارنتها . ونظام البئر المزدوج الذي تفشل فيه الاساليب القياسية مثل مجموعة **Kalman** الاكثر سلاسة في توفير نتائج جيدة. فقد توصل الباحثون الى ان التجارب تظهر ان تقريب المتغير قابل للتطبيق وان النتائج واعدة للغاية .

وفي عام (2008) استعمل الباحث (Girolami)⁽²⁷⁾ الاستدلال البيزي للمعادلات التفاضلية فقد بين امكانية تمثيل الانظمة الديناميكية غير الخطية مثل المسارات البيوكيميائية في شكل مجرد باستعمال عدد من اشكال النمذجة ووضح ان إنموذج النظام في كثير من الحالات لا يتميز بشكل كامل سواء من حيث الهيكل أو القيم التي تأخذها المعلمات ووضح ايضاً بأن منهجية (Bayesian) الاستنتاجية توفر اطاراً متماسكاً يمكن عن طريق توصيف ونشر عدم اليقين في مثل هذه النماذج الميكانيكية.

أما (Samson, and others)⁽⁴⁹⁾ فقد قدموا في عام (2011) بحثاً عن تقدير الاحتمالية القصوى او تقدير الامكان الاعظم للمعادلات التفاضلية العشوائية ذات التأثيرات العشوائية فقد اوضح الباحثون ان العمليات العشوائية المستقلة تكون محددة بمعادلة تفاضلية عشوائية مع مصطلح (drift term) اعتماداً على متغير عشوائي وان توزيع التأثير العشوائي θ_i يعتمد على معلمات غير معروفة يتم تقديرها من الملاحظة المستمرة x_i إذ ان مصطلح الانجراف خطياً يعتمد على التأثير العشوائي له توزيع كاوسي وان الصيغة الصريحة للاحتمالية تم الحصول عليها وثبت بأن الحد الاقصى لمقدار الاحتمالية متنسق ومتقارب بشكل كاوسي و عن طريق حساب التقديرات على بيانات المحاكاة لعدة نماذج توصل الباحثون الى انها ظهرت جيدة لكل الاشكال حتى عندما لا يكون الفاصل الزمني الطويل للملاحظات كبيراً جداً.

وفي عام (2013) قدم كل من (Carroll, and others)⁽⁶¹⁾ بحثاً عن تقدير المعلمات في المعادلات التفاضلية الجزئية اوضح الباحثون بأن اغلب المعلمات في نماذج (PDE) تحتوي على تفسيرات علمية مثيرة للاهتمام ولكن قيمتها غالباً ما تكون غير معروفة وتحتاج الى تقدير من قياسات النظام الديناميكي في تقديم أخطاء القياس وان معظم اجهزة ال(PDE) المستعملة في الممارسة العملية لا تحتوي على حلول تحليلية ولاي مكن حلها الا بالطرائق العددية بشكل متكرر تحت الالاف من قيم المعلمات المرشحة ومن ثم فإن التكلفة الحسابية تكون مرتفعة ولذلك اقترح الباحثون طريقتين للتقدير وهما طريقة متتالية المعلمة وطريقة النهج البايزي وفي كلتا الطريقتين تم تمثيل العملية الديناميكية الاساسية التي تم نمذجتها باستعمال إنموذج (PDE) بتوسيع وظيفة الاساس بالنسبة لطريقة تتابع

المعلومات إذ قام الباحثون بتطوير مستويين متداخلين من التحسين لتقدير معلمات (PDE). اما بالنسبة لطريقه النهج البايزي فقد قام الباحثون بتطوير نموذج مشترك للبيانات ول (PDE) وتطوير نموذج هرمي جديد يسمح بتوظيف سلسلة ماركوف مونت كارلو (MCMC) لعمل الاستدلال اللاحق وتوصل الباحثون عن طريق المحاكاة الى ان طريقة بايز وطريقة تعاقب المعلمات قابلة للمقارنة وكلاهما يتفوق على الطرائق الاخرى المتاحة من حيث دقة التقدير والاداء بالاعتماد على تقدير معلمات المعادلات التفاضلية الجزئية في إنموذج (Lidar).

وفي عام (2014) قدم كل من (Herbei, and Others)⁽²⁵⁾ بحثاً عن تقدير الامكان الاعظم للمعادلات التفاضلية العشوائية باستعمال التخمين المتسلسل القائم على (Kriging) التي تعد كنماذج احصائية في العديد من التخصصات وبسبب صعوبة التقدير لذا لجأ الباحثون الى التقنيات القائمة على المحاكاة لتقدير الاحتمالية المحتملة وتعظيمها. في هذا البحث اقترح الباحثون طريقة فعالة قائمة على عملية (Gaussian) للاستكشاف مساحة المعلمة باستعمال تقديرات الاحتمالية من عينة متسلسلة (Monte Carlo) تمثل الطريقة تباين مونت كارلو إذ يضيف الاجراء قيم المعلمات المحتملة عن طريق تعظيم ما يسمى (expected improvement). وتوصل الباحثون عن طريق اجراء المحاكاة ان الطريقة تتمتع بمكاسب حسابية وكفاية كبيرة على التقنيات القائمة على الشبكة والتدرج .

وفي عام (2015) قام الباحثان (Piterbarg and Rozovskii)⁽⁴³⁾ بدراسة النماذج البارامترية للتغيرات في اعالي المحيطات التي تمت كتابتها بواسطة فئة معينة من المعادلات التفاضلية الجزئية العشوائية فقد استعملوا طريقة الامكان الاعظم لتقدير معلمات الانموذج غير المعروفة المستمرة او المنفصلة في الوقت المناسب ووضحوا ان تقدير الانتشار في معادلة انتشار التدفق يكون دائماً متنسقاً إذ يكون الامكان الاعظم للسرعة ثابتاً ، فقط إذا كان الانتشار صفراً وناقش الباحثان تقدير الانتشار الافقي ومعامل الاحتكاك السفلي (بوت توم) في معادلة الدوامة الهوائية الخطية.

وفي عام (2016) قدم الباحث (Abu AL-Rob)⁽⁷⁾ بحثاً عن طرائق حل المعادلات التفاضلية الاهليجية فقد اوضح أن هذه المعادلات تصنف على انها معادلات تفاضلية جزئية خطية من الدرجة الثانية يمكن حلها عددياً باستعمال الطرائق الحسابية ووضح طرائق حل مشاكل القيمة الحدية التي تتضمن معادلات بواسون ولاپلاس مع انواع مختلفة من الشروط الحدية فقد اقترح طريقتان هما طريقة الفروق المحدودة (FDM) وطريقة العناصر المحدودة (FEM) إذ يحول الاجراء التقديري

القيمة الحدية الى نظام خطي من المعادلات الجبرية وتم استعمال بعض التقنيات التكرارية كطريقة (SOR) (Successive Over) Relaxation و (Gauss-Seidel) و (Jacobi) و (Conjugate Gradient) لحل مثل هذا النظام الخطي وتوصل الباحث عن طرائق النتائج العددية ان طريقة الفروق المحددة هي اكثر كفاية من طريقة العناصر المحدودة في المجالات العددية. في حين ان طريقة العناصر المحدودة تعد اكثر دقة للمجالات المعقدة وغير المنتظمة وكذلك لاحظ الباحث ان تقنية (SOR) التكرارية تعطي نتائج اكثر كفاية بين المخططات التكرارية الاخرى .

وفي عام (2017) قدم كل من (Asirvadam, and Others)⁽¹²⁾ بحثاً وضحووا فيه الاستدلال الاحصائي استناداً الى الحد الاقصى من احتمال التأخير لنماذج المعادلة التفاضلية المختلفة في اعداد احادي التغيير. حيث تم الحصول على الحد الاقصى من استدلال الاحتمالية لمعاملات التأخير غير المعروفة الفردية او المتعددة فضلاً عن المعلمات الاخرى ذات الاهمية التي تحكم مسارات نماذج المعادلة التفاضلية للتأخير المختلفة. يتم الحصول عليها بناء على خوارزميات الشبكة التكيفية وخوارزميات نيوتن رافسون (Newton Raphson). فقد قام الباحثون بتقدير معاملات التأخير بشكل صحيح فضلاً عن المعلمات الاخرى غير المعروفة (مثل تطوير منهجية لحساب مصفوفة المعلومات وفترات الثقة لجميع المعلمات غير المعروفة بناءً على احتمال عمل المحاكاة. وقاموا بتقديم ثلاثة امثلة توضيحية تتعلق بالأنظمة البيولوجية .

وفي العام نفسه قدم كل من (Girolami, and Others)⁽²⁸⁾ بحثاً طوروا فيه طرائق عددية احتمالية لحل المعادلات التفاضلية الجزئية (PDES) ويدرس تطبيق هذه الطريقة على المشاكل العكسية المقيدة ب(PDE) إذ يمنح هذا النهج المتانة لفشل الحل العددي مع الاستدلالات الاحصائية المدفوعة لتكون اكثر تحفظاً في وجود خطأ تقديري كبير فقد طرح الباحثون مشكلة اختيار أداة حل (PDE) كمسكلة في تصميم (Bayesian) للتجارب والهدف من هذا هو تقليل تأثير خطأ الحل على الاستدلالات الاحصائية وتم تطبيق هذه الطريقة في مشكلات استدلال المعلمات التي يكون الخطأ التقديري لها غير مهمل ويجب حسابة للحصول على استنتاجات صحيحة احصائياً.

وفي عام (2018) قدمت الباحثة (الوندي)⁽⁶⁾ بحثاً عن تقدير المعالم الثابتة والمتغيرة زمنياً في نماذج المعادلات التفاضلية العادية اللاخطية والتي لا تمتلك صيغ حلول تحليلية فقد اقترحت ثلاث طرائق للتقدير تتمثل الطريقة الاولى بعدة مراحل إذ يتم في هذه المرحلة تقدير متغير الحالة ومشتقاته

بالطرائق الممهدة اللامعلمية ومن ثم تقدير معلمات الانموذج بمراحل متعددة اما الفئة الثانية من طرائق التقدير هي الطريقة التي تستند إلى خوارزميات التفريق العددي وايضاً تتكون من مرحلتين الاولى يتم فيها تقدير متغيرات الحالة بطريقة الشرائح الجزئية والاخرى استعمال طريقة التفريق العددي وتم استعمال طريقتين للتفريق العددي هما طريقة اويلر وطريقة شبة المنحرف للتفريق العددي اما الفئة الثالثة من الطرائق تم استعمال طريقة المربعات الصغرى اللاخطية المعاملة بالشرائح وتم استعمال خوارزمية التطور التفاضلي وتوظيف الخوارزمية الجينية والمقارنة بين الطريقتين باستعمال اسلوب المحاكاة باستعمال المعيار الاحصائي معدل الخطأ النسبي للتقدير (ARE) للمعالم المقدرة إذ توصلت (الوندي) عن طريق المحاكاة الى أن أفضل طريقة لتقدير المعلمات في نماذج المعادلات التفاضلية العادية اللاخطية هي طريقة المربعات الصغرى اللاخطية المعززة بالشريحة باستعمال خوارزمية التطور التفاضلي .

وفي عام (2019) قدم الباحث (Mohsin)⁽³⁸⁾ بحثاً عن الطرائق التقريبية لحل المعادلات التفاضلية الجزئية إذ كان الهدف من هذا البحث هو دراسة وجود وتفرد بعض فئات المعادلات التكاملية التفاضلية الجزئية احادية البعد وثنائية الابعاد للرتبة الكسرية وبعد ذلك ايجاد الحلول التقريبية فقد استعمل الباحث طريقتين شبة تحليليتين تسمى طريقة التحليل التماثلية وطريقة (Adomian) للتحلل اما الهدف الثاني ايجاد الحلول التقريبية للمعادلات التفاضلية التكاملية الجزئية احادية وثنائية الابعاد ذات الترتيب الكسري باستعمال نهج معدل او نهج هجين يسمى طريقة تحلل (Legend-Adomian) (homotopy) المتحولة والهدف الثالث هو دراسة وجود وتفرد بعض فئات المعادلات التفاضلية التكاملية الجزئية ذات البعد الواحد مع مشتقات الترتيب الكسري المطابقة باستعمال طريقة تحليل (Homotopy).

وفي العام نفسه قدم كل من (Kumar Rai, and Tripathi)⁽⁴⁶⁾ بحثاً اقترحا فيه طريقة التجميع الجديدة لتقدير معلمات المعادلات التفاضلية الجزئية (PDE) والتي تستعمل عملية (Gaussian) كدالة اساسية. إذ تنطبق الطريقة المقترحة من قبل الباحثين ملائمة إنموذج الانحدار لملاحظات متغير الحالة. ثم الحصول على مشتقات متغير الحالة وتوصل الباحثان عن طرائق نتائج تطبيق طريقة غاوسن للمعادلات التفاضلية الجزئية على معادلات الانتشار او (Richards) ان طريقة (GPPDE) يمكنه تقدير المعلمات للمعادلتين بشكل صحيح . وان ال (GPPDE) بالنسبة لمعادلة

(Richards) تعمل جيداً في حال وجود ضوضاء ويمكن ان يكون (GPPDE) بديلاً فعالاً للنهج التقليدي لإيجاد معلمات المعادلات التفاضلية الجزئية عالية الابعاد عندما تكون كبيرة .

اما في عام (2020) قدم كل من (Song ,and Others)⁽⁵²⁾ بحثاً لتطوير النهج البايزي لتقدير معلمات المعادلات التفاضلية العادية (ODE) من البيانات الصاخبة المرصودة فقد اوضح الباحثون ان الطريقة لا تحتاج الى حل مباشر وانما باستبدال قيد (ODE) بتعبير احتمالي ويتم دمجها مع اجراء ملائمة البيانات اللامعلمية في إطار احتمالي مشترك وتتميز الطريقة المقترحة بالنسبة لبعض أنظمة (ODE) يمكن الحصول على توزيعات خلفيه مشروطة مغلقة الشكل لجميع المتغيرات التي تقل بشكل كبير من التكلفة الحسابية وتسهل عملية التقارب . إذ نفذ الباحثون مخطط مونت كارلو الهجين القائم على متشعب (Riemann) لتوليد عينات للمتغيرات التي لا يمكن كتابة توزيعها الخلفي المشروط من حيث (Torm) الاغلاق. ووضح الباحثون انه يمكن تطبيق النهج البايزي على الحالات التي يتم فيها ملاحظة متغير الحالة جزئياً فقط وتم توضيح ذلك عن طرائق بيانات المحاكاة والبيانات الحقيقية .

وفي العام نفسه قدم الباحث (Jasim)⁽³¹⁾ بحثاً استعمل فيه طريقة (Galerkin) مبرهنة وجود وحدانية الحل لمتجه الحالة (Sate Vector) للمعادلات التفاضلية الجزئية الخطية الاهليجية عندما يكون متجه السيطرة التقليدية مستمر وثابت وكذلك استعمل مبرهنة (Minty-Browder) لبرهان مبرهنة وجود وحدانية حل مسألة المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية الثلاثية عندما يكون متجه السيطرة التقليدية مستمراً وثابتاً (CCOCV) كما قام الباحث بعرض مبرهنة وجود لمتجه سيطرة تقليدية مستمرة وثابت بالنسبة للمعادلات التفاضلية الجزئية الخطية وغير الخطية الاهليجية وقام الباحث بدراسة مبرهنة وجود وحدانية الحل للمعادلات المرافقة للمعادلات الجزئية الخطية الثلاثية مرة ومرة اخرى للمعادلات التفاضلية غير الخطية الثلاثية بوجود قيدي التساوي والتباين وكان الهدف من هذا البحث هو دراسة مسألة السيطرة الامثلية التقليدية المستمرة للمعادلات التفاضلية الجزئية الخطية وغير الخطية (الاهليجية البيضاوية) (Tlepdeqs)(Tnlepdeqs) فقد اثبت الباحث الشروط الضرورية المثالية لمتجه السيطرة التقليدية المستمر والثابت للمعادلات التفاضلية الجزئية الخطية الاهليجية الثلاثية ومن ناحية اخرى طورت مبرهنة (The Kuhn- Tucker –Lagrange) (multipliers theorems) و اشار الباحث الى استعمالها لبرهان مبرهنتي الشروط الضرورية

والشروط الكافية لوجود سيطرة أمثلية تقليدية مستمر لثلاثي المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية من النوع الاهليجي لوجود قيدي التساوي والتباين .

اما في عام (2021) قدمت (AL-Rawdane) ⁽¹⁰⁾ بحثاً الهدف الاول منه هو حل مسألة السيطرة الامثلية التقليدية للمعادلات التفاضلية الجزئية وايجاد الحل العددي لهذه المشكلة ومن ثم اثبات النظريات الخاصة بالتحكم الامثل الكلاسيكي المنفصل وتقارب مشكلة التحكم الامثل الكلاسيكي المنفصل الى الامثل الكلاسيكي المستمر وقامت باستعمال نظرية (Kuhu-Tucker Lagrange) للأثبات النظريات الضرورية والكافية للشروط المثلى التي تحكمها مشكلة القيمة الحدية الزائدية غير الخطية مع قيود المساواة وعدم المساواة وكان الهدف الثاني من هذا البحث هو الجزء التكميلي للهدف الاول مخصص للأجياذ الحلول العددية لمشكلة التحكم الامثل الكلاسيكي المنفصل التي تحكمها مشاكل القيمة الحدية الخطية وغير الخطية ذات المعاملات الثابتة والمتغيرة . إذ وضحت كيفية حل مشكلة التحكم الامثل الكلاسيكي المنفصل لمشكلات القيمة الحدية غير الخطية الزائدية اعتماداً على خطوتين اساسيتين فقد كانت الخطوة الاولى طريقة العناصر المحدودة المختلطة من (Galerkin) للمساحة المتغيرة مع نظام الفروق المحددة الضمنية إذ تم استعمال متغير الوقت لايجاد الحدود العددية للشكل الضعيف المنفصل اما في الخطوة الثانية تم استعمال كل من طرق التدرجات الثلاثة وتم استعمال طرائق التدرج وطريقة الاسقاط المتدرج وطريقة فرانك وولف باستعمال خيار خطوة (Armijo) او خيار الخطوة المثلى للعثور على الحد الادنى من التكلفة الوظيفية المنفصلة ومن ثم العثور على التحكم الامثل الكلاسيكي المنفصل لمشاكل التحكم المثلى ومن ناحية اخرى قامت باستعمال طريقة التدرج العقابي او طريقة اسقاط التدرج العقابي او طريقة فرانك وولف المعاقبة للحصول على الحد الادنى من التكلفة المنفصلة وتوصلت عن طريق النتائج التي وضحتها فقد اثبتت دقة وكفاية الطرائق المدروسة .

وفي العام نفسه قدم الباحث (Salim) ⁽⁴⁸⁾ بحثاً عن حل المعادلات التفاضلية الجزئية للرتب الكسرية المتغيرة التي تحتوي شروط اولية وحدودية فقد تواجه هذه المعادلات الكثير من الصعوبات في الحل التحليلي إذ اوضح الباحث أن الهدف الرئيس من هذا البحث هو دراسة المعادلات الجزئية الكسرية وايجاد الحل التقريبي لها باستعمال دوال الثلثة اللاخطية ومبرهنة التقارب باستعمال (Tensorproduct) التي برهنت تقارب الطريقة للحل المضبوط وقام الباحث بتطوير النتائج باستعمال الرتبة الكسرية ثنائية المتغيرات بالنسبة للرتبة المتغيرة وتم استعمال مشتقة (كاباتو) للتوصل للنتائج .

نلاحظ من الدراسات السابقة وعلى حد علم الباحث ندرة الدراسات العربية التي تناولت موضوع تقدير معاملات المعادلات التفاضلية الجزئية وبذلك تكون الدراسة استكمالاً وازضافة للجهود العلمية التي بذلها الباحثون. وكذلك نلاحظ من الدراسات السابقة بأنها لم تستعمل المعادلات التفاضلية الجزئية بشكل عام وانما كان التطرق لنوع محدد منها او لطريقة محدده لحلها وعدم التطرق لعدة طرائق لتقدير معالماتها وانما طريقه واحده غالباً إذ ان ما يميز هذه الدراسة بان لها ميزيتين مهمتين في مجال البحث العلمي والعملية فقد كانت الميزة الاولى هي استعمال نموذج المعادلات التفاضلية الجزئية بصوره عامة وليس نوع محدد فيها وكذلك عدم الاكتفاء بطريقة تقدير واحده وانما ثلاث طرائق لتقدير معالماتها عن طريق اجراء المحاكاة والميزة الثانية التي تميزت بها هذه الدراسة هي عدم الاكتفاء بدراسة فتره البقاء لمرضى (Covid -19) انما لفهم السلوك المعقد للبيانات المتعلقة بالخلايا اللمفاوية لمرضى فايروس كورونا عن طريق اجراء نمذجة لسلوك الفايروس ومن ثم تطبيق الطرائق التي تم استعمالها بالجانب التجريبي .

الفصل العاشر

الخاتمة والظرف

الفصل الثاني

الجانب النظري

1-2 المقدمة

نستعرض في هذا الفصل توضيح المعادلات التفاضلية ونماذجها بصورة عامة واستعراض نبذة عن المعادلات التفاضلية الجزئية (Partial Differential Equation) بصورة خاصة وبيان انواعها وبعض طرائق حلها وطرائق التقدير التي تم استعمالها لدى الباحث والتي شملت (طريقة الامكان الاعظم (MLE)، وطريقة العملية الكاوسيه (GP)، وطريقة بيز (Bayes) لتقدير معلماتها.

2-2 بعض المفاهيم الاساسية Basic Concepts

1-2-2 المعادلة التفاضلية (Differential Equation) (9)،(13)،(20)

هي معادلة رياضية لوظيفة غير معروفة يكون فيها المتغير دالة إذ تُظهر هذه المعادلة العلاقة بين الدالة ومشتقاتها مع قيود لمتغير واحد واكثر من المتغيرات المستقلة.

وبشكل عام يمكن كتابة المعادلة التفاضلية بالشكل الآتي:

$$F(t, y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0, t \in I \quad (1-2)$$

وتصنف المعادلة التفاضلية حسب رتبته ودرجتها (3)،(42)

Order Equation : ونقصد برتبة المعادلة

هي اكبر او (اعلى) مشتق موجود في المعادلة التفاضلية .

Degree Equation : اما درجة المعادلة

هي درجة او (قوة) اعلى معامل تفاضلي في المعادلة بشرط ان تكون جميع المعاملات التفاضلية خالية من القوى الكسرية.

مثال:

$$\dot{E} + xz = x^2 \quad (2-2)$$

المعادلة المذكورة آنفاً من الرتبة الاولى ومن الدرجة الاولى.

اذ ان :

\dot{E} : المشتقة الاولى

X: متغير مستقل

2-2-2 انواع المعادلات التفاضلية

1-2-2-2 : المعادلات التفاضلية العادية (Ordinary Differential Equation) (3) (5):

وهي علاقة تربط بين المتغير المستقل وليكن (Z) والمتغير التابع وليكن (y) (Z) وتدخل فيها واحد او اكثر من المشتقات التفاضلية فاذا كان المتغير التابع دالة في متغير مستقل واحد فالمعادلة لا تحتوي الا على مشتقات عادية وتكون الصورة العامة للمعادلة التفاضلية العادية كما يأتي.

$$F(z,y,\dot{y},\ddot{y},\dots)=0 \quad (2-3)$$

مثال:

$$\frac{dz}{dx} + z = 4x^2 \quad (2-4)$$

اذ ان

x: المتغير المستقل

Z: المتغير التابع

2-2-2-2: المعادلات التفاضلية الجزئية (Partial Differential Equation) (3) (53) (60):

المعادلة التفاضلية الجزئية هي (المعادلة التي تحتوي على المتغير التابع غير المعروف ومشتقاته الجزئية إذ تعتمد على اكثر من متغير مستقل على عكس المعادلة التفاضلية العادية). وهذا النوع من المعادلات التفاضلية هو المحور الاساس للرسالة إذ تُعد المعادلات التفاضلية الجزئية معقدة واكثر

صعوبة من النوع الاول وذات أهمية بالغة إذ بواسطتها يمكن وصف اغلب الظواهر المادية في مجالات متعددة من ضمنها مجال ديناميكا السوائل. الكهرباء او التدفق الحراري ويمكن القول أن أغلب الفيزياء الرياضية هي معادلات تفاضلية جزئية كما أن هناك انواعاً كثيرة من المعادلات التي تندرج ضمن المعادلات التفاضلية الجزئية مثل معادلة ماكسويل ومعادلات نيوتن الخاصة بالحركة وغيرها من المعادلات الأخرى وبسبب الاستعمال الواسع للمعادلات التفاضلية الجزئية في مجالات متعددة ومختلفة فقد أصبحت اداة مفيدة لوصف ما ذكر سابقاً من ظواهر العلوم والنماذج الهندسية لذا يجب ان نكون على دراية كاملة بكل ما يخص المعادلات وانواعها وطرائق حلها .

ويمكن كتابة الانموذج العام للمعادلة الجزئية بالشكل الآتي :

$$G\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dots\right) = 0 \quad (2 - 5)$$

اذان:

G: رمز للمعادلة التفاضلية

Z: متغير تابع

X, y: متغيرين مستقلين

$\frac{\partial z}{\partial y}$: المشتقة الجزئية للمتغير التابع (z) بدلالة (y)

2-2-2-2-1 تصنيف المعادلة التفاضلية الجزئية :

تصنف المعادلة التفاضلية الجزئية حسب :

1. الرتبة (Order Of PDE)⁽⁵⁴⁾: هي ترتيب اعلى مشتق جزئي يظهر في المعادلة التفاضلية الجزئية

وقد تكون المعادلة الجزئية ذات رتبة اولى، ثانية والثالثة.

مثال :

$$u_t + cuu_y + u_{yyy} = 0 \text{ (korteweg -de vries equation)} \quad (2-6)$$

معادلة تفاضلية جزئية من الرتبة الثانية.

وتُعرف معادلة (korteweg-de vries equation)⁽⁵⁴⁾ على انها معادلة تفاضلية جزئية غير خطية لدالة ما (Ø) لمتغيرين حقيقيين بمسافه (X) ووقت (t).

2. **الدرجة (Degree Of PDE)⁽²⁾ :** وهي أس اعلى مشتق جزئي يظهر في المعادلة التفاضلية الجزئية بشرط ان يكون الاس عدداً صحيحاً غير سالب.

2-2-2-2-2 انواع المعادلة التفاضلية الجزئية :

اولاً: **المعادلة الجزئية الخطية (Linear Partial Differential Equation)⁽³²⁾(8)**

يقال ان المعادلة التفاضلية الجزئية تكون خطية اذا كان المتغير التابع وجميع مشتقاته الجزئية تحدث فقط خطياً اي تكون غير مضروبة في بعضها وتكون من الدرجة الاولى فقط وقد تكون من الرتبة الاولى او الرتبة الثانية.

الانموذج الآتي يوضح المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية من الرتبة الاولى.

$$a(z, v)u_x(z, v) + b(z, v)u_y(z, v) = c(z, v)u(z, v) \quad (2 - 7)$$

والمعادلة الآتية تمثل المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية من الرتبة الثانية.

$$u_{tt} = c^2 u_{yy} \quad \text{(the wave equation)} \quad (2-8)$$

ثانياً: **المعادلة الجزئية اللاخطية (Non Linear Partial Differential Equation)⁽⁶⁰⁾(22)**

المعادلة التفاضلية الجزئية غير الخطية تعتمد بشكل غير خطي على المشتقات الجزئية ذات الترتيب الاعلى اي ان قوة المتغير التابع وجميع مشتقاته الجزئية غير الواحد وتكون معاملات المتغير التابع ومشتقاته ليست ثوابت او متغيرات مستقلة.

مثال:

$$-\Delta u = f(u) \quad (\text{Non- linear Poisson equation}) \quad (2-9)$$

اذ ان :

$-\Delta u$: فرق التغير السلي لـ (u)

$F(u)$: الدالة بالنسبة لـ (u)

ثالثاً: المعادلة الجزئية المتجانسة وغير المتجانسة (Homogeneous and Non-

(Homogeneous Partial Differential Equation) : (4)·(34)·(32)·(60)

يقال للمعادلة الجزئية انها متجانسة اذا كانت الدالة متجانسة ومن الدرجة نفسها واذا كان الجانب الايمن للدالة يساوي صفراً اما اذا كان لا يساوي صفراً والدالة ليست من الدرجة نفسها فتكون غير متجانسة وقد تكون متجانسة او غير متجانسة خطية.

مثال:

$$u_{zz} + 4u_{vv} = 0 \quad (2 - 10)$$

معادلة تفاضلية جزئية متجانسة

$$e^2 \frac{\partial u}{\partial x} + 4 \frac{\partial u}{\partial t} = t \quad (2 - 11)$$

معادلة تفاضلية جزئية غير متجانسة

3-2-2-2-2 طرائق حل المعادلات التفاضلية الجزئية (1)

نظراً لما للمعادلة التفاضلية الجزئية من اهمية بالغة كما ذكرنا سابقاً ولمعرفة كيفية حلها بحيث تتحقق بعض الشروط الابتدائية وبعض الشروط الحدودية هناك طرائق كثيرة جداً مطبقة عملياً واكثرها اهمية تلك الطرائق التي باتباعها تتحول المعادلة الجزئية الى عادية وسنكتفي بذكر بعضها.

1-فصل المتغيرات : وهي الطريقة التي فيها يتم تحويل المعادلة التفاضلية الجزئية ذات (n) من

المتغيرات المستقلة الى (n) من المعادلات الاعتيادية .

- 2-التحويلات التكاملية : يتم في هذه الطريقة تحويل المعادلة التفاضلية الجزئية ذات (n) من المتغيرات المستقلة الى معادلة جزئية ذات (n-1) من المتغيرات المستقلة ومن ثم يمكن تحويل المعادلة التفاضلية الجزئية ذات المتغيرين الى معادلة تفاضلية اعتيادية.
- 3-تبديل المتغيرات :بهذه الطريقة يتم تحويل المعادلة التفاضلية الجزئية الى جزئية بصيغة اسهل وذلك بتبديل متغيرات المسألة (كالتدوير او ما شابة ذلك) اوالى معادلة تفاضلية عادية .
- 4- تحويل المتغير التابع : وفي هذه الطريقة يتم تحويل المجهول الى مجهول اخر يمكن حسابة بطريقة أسهل .

2-4 طرائق التقدير (Methods of Estimation)

نستعرض بعض طرائق التقدير التي تستعمل في عملية تقدير المعلمات المجهولة للمعادلات التفاضلية الجزئية ومنها طريقة الامكان الاعظم .طريقة العملية الكاوسيه . وطريقة بيز وخصوصية العمل مع المعادلات التفاضلية الجزئية .

2-4-1 طريقة الامكان الاعظم لتقدير معلمات المعادلات التفاضلية الجزئية (18),(21),(29),(25),(43)

Maximum Likelihood Method for estimate parameters of PDE

يتم نمذجه العديد من الظواهر التي تنشأ في مجالات مختلفة مثل الموارد المالية ، وعلم الأحياء ، والبيئة ، ومجالات أخرى في وقت مستمر باستعمال عملية انتشار ذات قيمة حقيقية $\{X_t\}$ والتي تتمذج كمعادلة تفاضلية جزئية تتضمن عوامل خطية تعتمد على معلمات مجهولة يتم تقديرها بموجب طريقة الامكان الاعظم بالاعتماد على مبدأ توسعة نطاق الكميات المشاهدة في ظل اساس متعامد Orthogonal Bases يستند إلى اول M من الكميات المشاهدة بتحويلها الى سلسلة باستعمال تحويل فورير .

فلنفرض انه لدينا العملية $\{X_t\}$ التي تمثل نقاط البيانات عند الزمن t_i ، إذ أن $(i=1,2,\dots,N)$ وان

$$0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_N$$

التي تستند إلى نقاط البيانات $X=(X_{t_1}, \dots, X_{t_N})^T$

فاذا كانت لدينا الدالة $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ فان المعادلة التفاضلية الجزئية التي تستعمل لنمذجة هذه الدالة كالآتي:

$$f \left(x_1, x_2, \dots, x_m, y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial y}{\partial x_m}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_1}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^2 y}{\partial x_k \partial x_k}, \dots, \theta \right) \dots$$

(2 - 12)

$$= \frac{\partial u}{\partial t} + (A_0 + \theta_1 A_1 + \dots + \theta_k A_k) u(t, x) = s(t, x) \quad \dots (2-13)$$

$$k=0, 1, 2, \dots, K$$

والتي يمكن ان تكتب بالشكل الآتي:

$$f \left(x_1, x_2, \dots, x_m, y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial y}{\partial x_m}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_1}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^2 y}{\partial x_k \partial x_k}, \dots, \theta \right) = \frac{\partial u}{\partial t} + A_{\underline{\theta}} U(t, x) = S(t, x) \quad \dots \dots (2 - 14)$$

إذ أن:

$U(t, x)$ قيمة المشاهدة (Observed Value) عند نقطة معينة x وعند الزمن t (كأن تكون درجة حرارة ، ارتفاع مستوى سطح البحر)

$A_{\underline{\theta}}$ عامل خطي (Linear Operator) وهو العامل الذي يتحكم بالكمية المقاسة او ما يدعى بعامل الانتشار او التبديد (يمكن ان يمثل سرعة انتقال، عملية انتشار، معاملات احتكاك) ويعتمد على متجه المعلمات $\underline{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ ، $k=0,1,2,\dots,K$

وان المعلمات $\underline{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ كميات تدعى معاملات الانتشار الخاصة بالعامل الخطي) سرعة انتشار او معامل احتكاك)

$S(t, x)$ (white noise) للأنموذج وهي المجال العشوائي ويمثل المصادر الموزعة عند النقطة $x \in G$ وان G هو المجال المحدد في الفضاء الاقليدي R^d . وهي عملية كاوسية Gaussian distribution في الزمن t بمتوسط صفر ولا تحتوي اي معلمات مجهولة.

ولإيجاد مقدر الامكان الاعظم لمتجه المعلمات $\underline{\theta}$ باستعمال مبدأ توسعة نطاق المشاهدة $u(t, x)$ في ظل مقدر يستند إلى اول m كميات $u(t, x)$ تم قياسها (مشاهدتها) :

$$u_1(t), \dots, u_m(t), t \in [0, T]$$

وباستعمال تحويل فوريير (Fourier transformation) لحساب مجموع الكميات المقاسة وكالاتي:

$$u(t, x) = \sum_m u_m(t) \varphi_m(x) \quad \dots (2-14)$$

اذ أن $\varphi_m(x)$ نظام قياس متعامد (Orthogonal) من الدوال المميزة (Eigen Functions) $m=1,2,\dots$ وهو نظام وحدة قياسي Orthonormal system للعوامل A_θ بحيث أن :

$$A_k \varphi_m(x) = \lambda_{km} \varphi_m(x), k = 0,1,2, \dots, K \quad (2 - 15)$$

والذي يطابق :

$$(A_k - \lambda_{km}) \varphi_m(x) = 0 \quad (2 - 16)$$

$$A_\theta = A_0 + \theta_1 A_1 + \theta_2 A_2 + \dots + \theta_k A_k \quad (2 - 17)$$

وأن:

$$\int_G \varphi_m(x) \varphi_n(x) dx = \delta_{mn} \quad (2 - 18)$$

إذ:

λ_{km} القيم المميزة (Eigen Values) الحقيقية المقابلة

δ_{mn} دالة ذات متغيرين اثنين عادة ما يكونان عددين صحيحين طبيعيين.

بالقيم المميزة :

$$A_m(\theta) = \lambda_{0m} + \theta_1 \lambda_{1m} + \dots + \theta_k \lambda_{km} \quad (2 - 19)$$

λ_{km} القيم المميزة المقابلة للدوال المميزة

وان قيم متجه المعلمات المجهولة $\underline{\theta}$ ضمن فضاء المعلمة المحدد θ في الفضاء الاقليدي R^k ويرمز له :

$$\bar{\lambda}_m = \sup_{\theta} A_m(\theta) \quad (2-20)$$

ولنفرض بانه لدينا عدد من الدوال المميزة φ_m ، $m=1,2,\dots$ ، في هذه الحالة فان سلسلة $\bar{\lambda}_m$ تكون غير متناقصة

$$\bar{\lambda}_1 \leq \bar{\lambda}_2 \leq \dots \leq \bar{\lambda}_m \leq \dots$$

لذلك سيتم الاشارة الى اول الدوال المميزة $\varphi_1(x), \dots, \varphi_M(x)$ كمقياس للأنموذج ، ومادام ان النظام $\{\varphi_m(x)\}$ يفترض ان يكون نظام وحدة قياسية كاملاً لذلك سنتم توسعة الحل كالآتي:

$$u(t, x) = \int_G u(t, x) \varphi_m(x) \quad \dots(2-21)$$

وان سعة كل مقياس تحدد كما يأتي:

$$u_m(t) = \int_G u(t, x) \varphi_m(x) \quad \dots(2-22)$$

ولتقدير قيمة متجه المعلمات المجهولة $\underline{\theta}$ من القياسات المشاهدة

$$u_1(t), \dots, u_m(t)$$

نفترض ان $\underline{\theta}$ معرفة (ثابتة) على منطقة محددة من فضاء المعلمة θ عند المدة الزمنية $t \in (0, T)$ وهو عدد محدد من الاوقات الزمنية u_1, \dots, u_N .

وليكن لدينا متجه المشاهدات $u_m(t_n)$ ، $m=1,2,\dots,M$ و $n=1,2,\dots,N$ الذي يمثل متجه كأوسي (Gaussian Vector) يرمز له $u^{\theta,m}$ فستكون العينة التي سيتم اختيارها من الانموذج المتضمن المعلمات المجهولة $\underline{\theta}$ لها توزيع احتمالي $P^{\theta,m}(u)$ لل $u_m(t_n)$ ، فان دالة الكثافة الاحتمالية ستكون كالآتي:

$$P^{\theta,m}(u) = \frac{dP^{\theta,M}(u)}{du} \dots \quad \dots (2-23)$$

لذلك سوف نعرف دالة الامكان التابعة لهذا التوزيع الاحتمالي كالآتي:

$$L_M(\underline{\theta}) = L_m(\underline{\theta}, \underline{\theta}_0) = \log \left(P^{\theta, M}(u^{\theta_0, M}) \right) \quad \dots(2-24)$$

اذ أن $\underline{\theta}_0 = (\underline{\theta}_{01}, \underline{\theta}_{01}, \dots, \underline{\theta}_{01})$ هو القيم الحقيقية لمتجه المعلمات المجهولة . ونلاحظ ان دالة الامكان تعتمد على $\underline{\theta}_0$ فقط بصورة غير مباشرة بواسطة بيانات العينة لذلك فان متجه المعلمات المجهولة المقدرة $\hat{\theta}_M$ الذي يعظم دالة الامكان $L_M(\underline{\theta})$ سوف يكون مقدر الامكان الاعظم (MLE) لمتجه معلمات المعادلة التفاضلية الجزئية .

ولكن في حالة المشاهدات المستمرة تكون العينة دالة مستمرة في الفضاء الاقليدي R^M بدلاً من فضاء اقليدي محدد نهائي كما في حالة البيانات المتقطعة لذلك فان دالة الكثافة الاحتمالية لاممكن ان تحدد كما في اسلوب البيانات المتقطعة سابقاً لذلك سيتم استبدال $P^{\theta, m}$ في معادلة (2-24) بدالة كثافة (Radon-Nikodym) كالآتي:

$$P^{\theta, m}(u) = \log \left(\frac{dP^{\theta, M}(u)}{dP^{\theta_0, M}(u)} (u^{\theta_0, M}) \right) \quad \dots (2-25)$$

وسوف نفرض بان الدوال المميزة $\varphi_m(x)$ لعامل التباين المشترك المكاني $R \perp s(t, x)$ ومن ذلك ينتج :

$$s(t, x) = \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_m s_m(t) \varphi_m(x) \quad \dots(2-26)$$

اذ أن:

$$\sigma_m^2 \text{ هو القيمة المميزة للـ } R \text{ المقابل للنظام } \varphi_m(x)$$

$$s_m(t) \text{ هو التويش الابيض الذي له توزيع كاوسي بمتوسط صفر}$$

وللتأكد من محدودية تباين التشويش الابيض وتباين $u(t, x)$ سوف نفرض بان

$$\sum_1^{\infty} \sigma_m^2 < \infty, \sum_1^{\infty} \sigma_m^2 / 2 \lambda_m(\theta) < \infty \quad \dots(2-27)$$

فاذا تحقق الشرط في المعادلة (2-26) فان سعة $u_m(t)$ في المعادلة (2-22) ستكون مستقلة وتحقق المعادلات التفاضلية الجزئية التصادفية الاعتيادية :

$$u_m(t) = \lambda_m(\theta)u_m + \sigma_m s_m(t), \quad m = 1, 2, \dots \quad \dots(2-28)$$

ومن ذلك يمكن اشتقاق دالة الامكان لأول M من المركبات في حالة معلمة مجهولة واحدة لتكن $\theta = \theta_1$ وعامل مشترك ذاتي واحد فستكون المعادلة التفاضلية الجزئية الآتية :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (A_0 + \theta A_1)u(t, x) = s(t, x) \quad \dots (2-29)$$

ففي حالة البيانات المتقطعة فان دالة الامكان لأول M من المركبات في المعادلة (2-28) تكون بالشكل الآتي:

$$L_M(\theta, \theta_0) = \sum_{m=1}^M \left\{ N \ln \frac{\lambda_m(\theta)}{\lambda_m(\theta_0)} - \sum_{n=1}^{N-1} \ln \frac{1 - e^{-2\lambda_m(\theta)\Delta t_n}}{1 - e^{-2\lambda_m(\theta_0)\Delta t_n}} \right. \\ \left. - (\theta - \theta_0) \frac{\lambda_{1m}}{\sigma_m^2} u_m(t_1) - \frac{1}{\sigma_m^2} \sum_{n=1}^{N-1} \left[\frac{1}{1 - e^{-2\lambda_m(\theta_0)\Delta t_n}} \right] \right\} \quad \dots (2-30)$$

اذا ان $t_1 = 0$ ، $n = 1, 2, \dots, N - 1$ ، $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$

وفي حالة المشاهدات المستمرة ، فان دالة الامكان لأول M من المركبات في المعادلة (2-28) تكون بالشكل الآتي:

$$L_M(\theta, \theta_0) = (\theta - \theta_0) \sum_{m=1}^M \int_0^T \left(\frac{\lambda_{1m}}{\sigma_m^2} u_m(t) du_m(t) - \frac{\lambda_{1m}\lambda_{0m}}{\sigma_m^2} u_m^2(t) du_m^2(t) \right) dt - \\ - \frac{(\theta^2 - \theta_0^2)}{2} \sum_{m=1}^M \int_0^T \left(\frac{\lambda_{1m}^2}{\sigma_m^2} u_m^2(t) du_m^2(t) - \frac{\lambda_{1m}^2\lambda_{0m}^2}{\sigma_m^2} u_m^4(t) du_m^4(t) \right) dt \\ \dots(2-31)$$

فان مقدر الامكان الاعظم للمعلمة θ بعد اشتقاق الصيغة (2-31) ومساواتها بالصفر سنحصل على الآتي:

$$\hat{\theta}_m = \sum_{m=1}^M \int_0^T \left(\frac{\lambda_{1m}}{\sigma_m^2} u_m(t) du_m(t) - \frac{\lambda_{1m}\lambda_{0m}}{\sigma_m^2} u_m^2(t) du_m^2(t) dt \right) dt - \sum_{m=1}^M \int_0^T \left(\frac{\lambda_{1m}^2}{\sigma_m^2} u_m^2(t) du_m^2(t) - \frac{\lambda_{1m}^2\lambda_{0m}^2}{\sigma_m^2} u_m^4(t) du_m^4(t) dt \right) \dots(2-32)$$

وفي حالة تقدير $k > 1$ من المعلمات المجهولة $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ سنفرض متجه من العوامل الذاتية المشتركة A_0, A_1, \dots, A_k التي تكون لها القيم المميزة الحقيقية $\lambda_{0m}, \lambda_{1m}, \dots, \lambda_{km}$ ، $m=1, 2, \dots$ ، فان المعادلة العامة لتقديرات الامكان الاعظم للمعلمات المجهولة في المعادلة التفاضلية الجزئية كالآتي:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \inf \det \left(\frac{\sum_{m=1}^M \lambda_{im} \lambda_{jm} \lambda_m^{-1}}{\sqrt{\sum_{i=1}^M \lambda_{im}^2} \sqrt{\sum_{j=1}^M \lambda_{jm}^2}} \right) \geq \delta \dots(2-33)$$

اذ أن:

$$\lambda_m = \lambda_m(\theta) := \lambda_{0m} + \lambda_{1m}\theta_1 + \dots + \lambda_{km}\theta_k$$

δ عدد موجب

في حالة المشاهدات المتقطعة فان خاصية التقارب من التوزيع الطبيعي تأخذ بنظر الاعتبار بالافتراض الآتي:

$$\left(\sum_{m=1}^M \frac{\lambda_{im} \lambda_{jm}}{\lambda_m^2} \right) \sim \gamma(\theta) B_M \dots(2-34)$$

اذ ان :

B_M هو مصفوفة $k \times k$ غير منحلة وكفؤة عند الكميات M الكبيرة

$\gamma(\theta)$ دالة تحقق الشرط $0 < c_0 \leq |\gamma(\theta)| \leq c_1 < \infty$ لكل $\theta \in \Theta$

c_1 و c_0 ثوابت

والمعادلتين (2-34) و (2-33) لا يمكن ان تحل بالطرائق التحليلية الاعتيادية عن طريق استعمال خوارزمية Lindsay , & Martin , 2003

2-4-2 العملية الكاوسية لتقدير معلمات المعادلات التفاضلية الجزئية

(61)•(46)•(16)•(51)•(13)•(47)•(24)•(55)•(37)

Gaussian Process for estimate parameters of PDE

اشتقت العملية الكاوسية (GP) لأول مرة من لدن كريجينك وماثيرون (Kriging,1951) (Matheron,1963) في نمذجة مصادر المياه باستعمالها كأنموذج انحدار.

تفترض العملية الكاوسية أن المشاهدة (Observe) تتبع التوزيع الكاوسي متعدد المتغيرات (Multivariate Gaussian distribution) الذي يكون دالة التغير (Covariance Function) له متجانسة ومستقرة وتعتمد فقط على المسافة بين نقطتين، وان دالة التغير تعد مثل دالة لبية (Kernel) وهي كقياس للتقارب بين نقطتي مشاهدات وصيغتها الرياضية هي:

$$k(x, x') = \sigma_s^2 \left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \frac{(x_j - x'_j)^2}{l_j^2} \right) \dots (2-35)$$

اذ أن:

m عدد المتغيرات المستقلة (بُعد مجال الادخال) في x بحيث أن $x_j \in x$

l_j مقياس طول للمتغير المستقل x_j^{th}

σ_s معملة القياس لدالة التغير

وستتم الاشارة الى المتجه $\Phi = [l_1, l_2, \dots, l_m, \sigma_s]$ الى المعلمات الفوقية (Hyper parameters) لدالة التغير

ان دالة التغير والتي تدعى ايضاً بدالة التغير الأسّي المربعة (squared exponential covariance function) تكون دالة قابلة للتفاضل اللانهائي لذلك تكون دالة مهيبة جداً .

ولصياغة العملية الكاوسية ، يتم استعمال الخاصية الشرطية للتوزيع الكاوسي الشرطي ، اي اذا كانت هنالك مجموعتان من المتغيرات العشوائية لها توزيع كأوسي مشترك فان توزيع مجموعة واحدة مشروط بالأخرى هو ايضاً توزيع كأوسي.

فلتقدير معلمات العملية التفاضلية الجزئية الآتية:

$$f \left(x_1, x_2, \dots, x_m, y^{GP}, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial y}{\partial x_m}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_1}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^2 y}{\partial x_m \partial x_m}, \dots, \theta \right) = 0 \quad (2 - 36)$$

اذ أن:

y هو المتغير المعتمد (متغير الحالة)

هي المتغيرات المستقلة $x_j = (x_1, x_2, \dots, x_m)$

θ متجه معلمات المعادلة التفاضلية الجزئية

فان طريقة العملية الكاوسية لتقدير معلمات المعادلة التفاضلية الجزئية (GPPDE) تستعمل العملية الكاوسية لنمذجه مشاهدات المتغير المعتمد (متغير الحالة) وتقدير مشتقته المضمنة في المعادلة التفاضلية الجزئية وان متجه البواقي في المعادلة التفاضلية الجزئية عند اي نقطة مشاهدة يعطى بالشكل الآتي:

ε

$$= f \left(x_1, x_2, \dots, x_m, y^{GP}, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial y}{\partial x_m}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_1}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^2 y}{\partial x_m \partial x_m}, \dots \Big|_{GP}, \theta \right) \dots \quad (2 - 37)$$

اذ ان الرمز $\Big|_{GP}$ (.) هو حاصل دمج كل المشتقات الجزئية لمتغير الحالة.

فان تقدير المعلمات θ يمكن الحصول عليها من بافتراض توزيع للبواقي (الخطاء) ومن ثم تطبيق طريقة الامكان الأعظم و طريقة التقدير البيزي باستعمال محاكاة مونت- كارلو للعملية التصادفية)

(MCMC) كالاتي:

SSRE

$$= \varepsilon^T \varepsilon \sum_{\text{all observation}} f \left(x_1, x_2, \dots, x_m, y^{GP}, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial y}{\partial x_m}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_1}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^2 y}{\partial x_m \partial x_m}, \dots \Big|_{GP, \theta} \right)^2$$

(2-38)

فلايجاد الاخطاء البواقي لابد من تقدير نموذج انحدار العملية الكاوسية وكالاتي:

اذا كانت لدينا المجموعة

$$D = \{(x_i, \tilde{y}_i) \mid i = 1, 2, \dots, N; x_i \in R^m; \tilde{y}_i \in R\}$$

اذ ان :

x_i متجه المتغيرات المستقلة (متجه الادخال) في الفضاء الاقليدي ذو البعد m (R^m)

\tilde{y}_i القيمة المشاهدة المقابلة للمتغير المعتمد في الفضاء الأقليدي احادي البعد (R)

N عدد المشاهدات

ويمكن تمثيل المجموعة D بالمصفوفة $X_{N \times m}$ ومجموعة المشاهدات المجمع للمتغيرات المستقلة x_i

ومتجه المشاهدات المجمع للمتغير المتعمد \tilde{y}_i بالمتجه $N \times 1$

وان المشاهدات سيكون لها اخطأ عشوائية (تشويش) مستقلة ومتماثلة التوزيع ويفترض ان يكون لها

توزيع طبيعي بمتوسط صفر وانحراف معياري σ_y أي أن :

$$\tilde{y}_i = y_i + \mathcal{N}(0, \sigma_y^2) \quad \dots (2-39)$$

اذ ان y_i القيمة الحقيقية للمتغير المعتمد عند الموقع x_i وجميعها يعبر عنها بالمتجه y ويسمى متجه

المتغير المعتمد (متغير الحالة) الذي يتبع التوزيع الكاوسي بمتوسط $m_y(X)$ ومصفوفة تغاير k

$$y \sim \mathcal{N}(m_y(X), k) \quad \dots (2-40)$$

اذا أن :

y متجه ذو بعد $N \times 1$

\mathbf{K} مصفوفة تغاير وتكون محددة موجبة Positive Definite ذات بعد $N \times N$ إذ ان $\mathbf{k} = k(\mathbf{X}, \mathbf{X})$ متجه المتوسطات للعملية الكاوسية GP عند نقاط البيانات المشاهدة \mathbf{X} ويشار لها بدالة المتوسط الأولية Prior mean function والذي في معظم الحالات قد لا يكون المتوسط المسبق معلوماً او متاحاً ، ولكن إنموذج GP له حصانة كافية لالتقاط الاتجاهات في البيانات حتى إذا تم أخذ متوسط GP على أنه صفر أو قيمة ان الانموذج التنبؤي للعملية الكاوسية (y_*) عند نقطة بيانات جديدة (X_*) يعطى كالاتي:

$$y_* \sim \mathcal{N}(m_y(X_*), \mathbf{K}_{**}) \quad \dots(2-41)$$

إذا أن:

y_* متجه ذو بعد $N \times 1$ لنقاط البيانات الجديدة

\mathbf{K}_{**} مصفوفة تغاير وتكون محددة موجبة Positive Definite ذات بعد $N \times N$ إذ ان

$$\mathbf{K}_{**} = k(X_*, X_*)$$

وان التوزيع المشترك لـ \tilde{y} و y_* هو :

$$\begin{bmatrix} \tilde{y} \\ y_* \end{bmatrix} = \mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} m_y(X) \\ m_y(X_*) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} K + \sigma_y^2 I & \mathbf{K}_* \\ \mathbf{K}_*^T & \mathbf{K}_{**} \end{bmatrix} \right). \quad \dots (2-42)$$

فان التوزيع التنبؤي بالاستناد الى الخاصية الشرطية للتوزيع الكاوسي كالاتي:

$$p(y_* | X_*, \Phi, \sigma_y, X, \tilde{y}) = \mathcal{N}(y_* | \mu, \Sigma) \quad \dots (2 - 43)$$

إذا أن:

$$\begin{aligned} \mu &= E[y_* | X_*, \Phi, \sigma_y, X, \tilde{y}] \\ &= m_y(X_*) + \mathbf{K}_*^T (K + \sigma_y^2 I)^{-1} (\tilde{y} - m_y(X)) \end{aligned} \quad \dots(2-44a)$$

$$\begin{aligned} \Sigma &= cov[y_* | X_*, \Phi, \sigma_y, X, \tilde{y}] \\ &= \mathbf{K}_{**} + \mathbf{K}_*^T (K + \sigma_y^2 I)^{-1} \mathbf{K}_* + \sigma_y^2 I \end{aligned} \quad \dots(2-45b)$$

المشكلة الآن هي تقدير المعلمات الفوقية في دالة التغير للعملية الكاوسية والذي يعد من المشاكل التي تواجه الباحثين والتي هنالك عدة طرائق لتقديرها اذ تشير المعلمات الفوقية الى المعلمات في دالة التغير للعملية الكاوسية الذي تم الاشارة لها بالمتجه $\Phi = [l_1, l_2, \dots, l_m, \sigma_s]$ الذي سيتم استعمال طريقة الامكان الاعظم الحدية (Maximum Marginal Likelihood) لتقديرها والتي يمكن الحصول عليها بأخذ الدالة الحدية لـ (y) بمعلومية المعلمة الفوقية وكالاتي :

$$\begin{aligned} p(\tilde{y} | X, \Phi, \sigma_y) &= \int p(\tilde{y}, y | X, \Phi, \sigma_y) dy \\ &= \int p(\tilde{y} | y, X, \Phi, \sigma_y) p(y | X, \Phi) dy \end{aligned} \quad \dots (2-46)$$

وبما ان $\tilde{y} = y + \mathcal{N}(0, \sigma_y^2)$ فان:

$$p(\tilde{y} | y, X, \Phi, \sigma_y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} \sigma_y^N} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_y^2} (\tilde{y} - y)^T (\tilde{y} - y)\right) \quad \dots (2-47)$$

وان $p(y | X, \Phi) = \mathcal{N}(m_y(X), \mathbf{k})$ هو عملية كاوسية فان:

$$p(y | X, \Phi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} |\mathbf{K}|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2} (y - m_y(X))^T \mathbf{K}_y^{-1} (y - m_y(X))\right) \quad \dots (2-48)$$

وبجمع المعادلتين (2-47) و (2-48) واخذ اللوغاريتم الطبيعي لـ $p(\tilde{y} | X, \Phi, \sigma_y)$ نحصل على :

$$\begin{aligned} \text{Log}(p(\tilde{y} | X)) &= -\frac{1}{2} (\tilde{y} - m_y(X))^T \mathbf{K}_y^{-1} (\tilde{y} - m_y(X)) - \frac{1}{2} |\mathbf{K}_y^{-1}| \text{Log}(2\pi) \\ &\dots (2-49) \end{aligned}$$

اذ ان $\mathbf{K}_y = \mathbf{K} + \sigma_y^2 \mathbf{I}$

وان تقديرات الامكان الاعظم للمعلمات الفوقية Φ للعملية الكاوسية يتم الحصول عليها بتعظيم لوغاريتم الارحجية الحدية في المعادلة (2-49) والاشتقاق الجزئي بالنسبة للمعلمة Φ نحصل على الآتي:

$$\frac{\partial \text{Log}(p(\tilde{y} | X, \Phi))}{\partial \phi_i} = \frac{1}{2} (\tilde{y} - m_y(\mathbf{X}))^T \mathbf{K}_y^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}_y^{-1}}{\partial \phi_i} \mathbf{K}_y^{-1} (\tilde{y} - m_y(\mathbf{X})) - \frac{1}{2} \text{tr} \left(\frac{\partial \mathbf{K}_y^{-1}}{\partial \phi_i} \mathbf{K}_y^{-1} \right) ; i = 1, 2, \dots, m + 2 \quad \dots (2-50)$$

وان المشتقات الجزئية لـ K_y بالنسبة للمعلمات الفوقية l_i و σ_s و σ_y كالآتي:

بما أن:

$$k(x, x') = \sigma_s^2 \left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \frac{(x_j - x'_j)^2}{l_j^2} \right) \quad \dots (2-51)$$

فإن:

$$\begin{aligned} K_y(x, x') &= k(x, x') + \sigma_y^2 \\ &= \sigma_s^2 \left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \frac{(x_j - x'_j)^2}{l_j^2} \right) + \sigma_y^2 \quad \dots (2-52) \end{aligned}$$

فإن:

$$\frac{\partial K_y(x, x')}{\partial l_i} = \sigma_s^2 \left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \frac{(x_j - x'_j)^2}{l_j^2} \right) \frac{(x_j - x'_j)^2}{l_j^3} ; 1 \leq j \leq m \quad \dots (2-53)$$

$$\frac{\partial K_y(x, x')}{\partial \sigma_s} = 2\sigma_s \left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \frac{(x_j - x'_j)^2}{l_j^2} \right) \quad \dots (2-54)$$

$$\frac{\partial K_y(x, x')}{\partial \sigma_y} = 2\sigma_y \quad \dots (2-55)$$

وباستعمال خوارزمية (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS)

والتقديرات الأولية لمقاييس الطول (l_1, l_2, \dots, l_m) تعد كانحراف معياري للمتغيرات المستقلة

(X) والقيم الأولية لمعلمة القياس الفوقية σ_s و σ_y تعد كانحراف معياري للمتغير المعتمد y مقسوماً

على $\sqrt{2}$.

ان استعمال العملية الكاوسية لتقدير المعادلة التفاضلية الجزئية يتطلب اشتقاقا للمتغير المعتمد نسبة للمتغيرات المستقلة، وان هذه المشتقات تعد عامل خطي ، وان مشتقة العملية التفاضلية هي عملية تفاضلية فان المشتقة الاولى لمتوسط وتباين العملية الكاوسية (μ^*) و (Σ^{*GP}) :

$$\begin{aligned} \mu &= E[y_* | X_*, \Phi, \sigma_y, X, \tilde{y}] \\ &= m_y(X_*) + \mathbf{K}_*^T (K + \sigma_y^2 I)^{-1} (\tilde{y} - m_y(X)) \end{aligned} \quad (2-56)$$

نسبة لمتغير الادخال يكون كالآتي:

$$p(y^{*GP} | y, \Phi) = p(y^{*GP} | m_y, \Phi) = \mathcal{N}(\mu^*, \Sigma^{*GP}) \quad (2 - 57)$$

$$\mu^* = \frac{\partial}{\partial x_i^*} E[y_* | X_*, \Phi, \sigma_y, X, \tilde{y}] \quad (2 - 58)$$

$$= \mathbf{K}_*^T (K + \sigma_y^2 I)^{-1} (\tilde{y} - m_y(X))$$

$$\Sigma^{*GP} = \mathbf{K}_{**}^{**} + \mathbf{K}_*^T (K + \sigma_y^2 I)^{-1} \mathbf{K}_*^* \quad (2 - 59)$$

اذ أن

Σ^{*GP} هو مصفوفة التباين للـ y^{*GP}

K_*^* تتضمن دالة التباين المختلط بين المتغير المعتمد ومشتقاته الجزئية من الدرجة الاولى

$$cov(y, \frac{\partial}{\partial x_i^*} y_*) = \frac{\partial}{\partial x_i^*} k(x, x') \quad (2-60)$$

والذي يسمى عبر التباين بين المتغير المعتمد ومشتقاته ، وان عناصر المصفوفة \mathbf{K}_{**}^{**} هي دالة

التباين المختلط بين المشتقات الجزئي

$$cov \left(y, \frac{\partial}{\partial x_i^*} y, \frac{\partial}{\partial x_{*j}} y_* \right) = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_{*j}} k(x, x') \quad (2 - 61)$$

والتي تسمى التباين التلقائي (Auto Covariance) لمشتقات المتغير المعتمد (متغير الحالة) .

والمشتقات الثانية للعملية الكاوسية كالآتي:

$$y^{**GP} = \frac{\partial^2}{\partial^2 x_i^*} E[y_* | X_*, \Phi, \sigma_y, X, \tilde{y}]$$

$$= K_*^{***T} (K + \sigma_y^2 I)^{-1} (\tilde{y} - m_y(X)) \quad (2 - 62)$$

إذا أن K_*^{***} يتضمن دالة التغير المختلط بين متغير الحالة ومشتقاته الجزئية من الدرجة الثانية

$$cov(y, \frac{\partial^2}{\partial^2 x_i^*} y_*) = \frac{\partial^2}{\partial^2 x_i^*} k(x, x^*) \quad (2- 63)$$

3-4-2 طريقة بيز لتقدير معلمات المعادلات التفاضلية الجزئية (61)،(15)،(39)،(40)،(44)،(19)،(14)

Bayesian Method for estimate parameters of PDE

تستعمل المعادلة التفاضلية الجزئية لنمذجة الانظمة المعقدة في العلوم التطبيقية مثل علم الاحياء والتمويل ... والخ ، وعادة ما يتم اقتراح اشكال لنماذج المعاملات التفاضلية الجزئية لدى الخبراء بناء على معرفتهم السابقة وفهمهم للنظام والذي غالباً ما تحوي المعادلة التفاضلية الجزئية معلمات ضمنها والتي تمثل تفسيرات علمية تكون محل اهتمام الخبراء والباحثين ولكن في الغالب تكون قيم تلك المعلمات مجهولة ونحتاج الى تقديرها عن طريق القياسات المشاهدة لذلك النظام وتقدير اخطاء القياس.

وان اغلب المعادلات التفاضلية الجزئية لا يمكن حلها بالطرائق التحليلية الاعتيادية ولكن يتطلب الامر حلها باستعمال طرائق التحليل العددي التي تطلب العديد من القيم الافتراضية والتي غالباً ما يكون العمل بها يتطلب عمل حسابي مرتفع ، في هذه الحالة يجب ايجاد طريقة لتقدير معلمات المعادلة التفاضلية الجزئية تتطلب عمل حسابي ووقت اقل ودقة اكبر.

وتُعد المنهج البيزي من الاساليب الكفوة والدقيقة في تقدير معلمات المعادلة التفاضلية الجزئية الذي يعتمد بشكل اساس على توسيع دالة الاساس (Basis function) في المعادلة التفاضلية الجزئية وايجاد أنموذج لاحق مشترك (Joint posterior model) باستعمال البيانات الخاصة بالنظام او الحالة المدروسة والمعادلة التفاضلية الجزئية وتطوير انموذج هرمي جديد باستعمال محاكاة سلسلة ماركوف مونت-كارلو (MCMC) اذ يتم تمثيل العملية التي تمثل المعادلة التفاضلية الجزئية عن

طريق التعبير عنها كدالة لامعلمية عن طريق توافق خطية (Linear combinations) من دول الاساس الشرائح من النوع B (B-Spline) والتي يتم تقديرها باستعمال الشرائح من نوع P بحيث تكون معاملات دول الاساس مميزة بتوزيع أولي الذي يحتوي معلومات انموذج المعادلة التفاضلية الجزئية ويتم دمج بيانات المعادلة التفاضلية لجزئية والتوزيع الاولي للحصول على توزيع لاحق مشترك (Joint posterior).

فلنفرض انه لدينا العملية $\{X_t\}$ عند نقاط البيانات t_i ($i=1,2,\dots,p$) حيث ان :

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p$$

التي تستند على نقاط البيانات $X = (X_{t_1}, \dots, X_{t_p})^T$

وان العملية $g(x_t)$ تتم نمذجتها باستعمال المعادلة التفاضلية الجزئية الآتية:

$$f \left(x_1, x_2, \dots, x_p, g(x_t), \frac{\partial g}{\partial x_1}, \frac{\partial g}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial g}{\partial x_p}, \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_1}, \frac{\partial^2 g}{\partial x_2 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^2 g}{\partial x_p \partial x_p}, \dots, \theta \right) = 0$$

...(2-64)

اذ أن:

g هو المتغير المعتمد (متغير الحالة)

$x_j = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ هي المتغيرات المستقلة

θ متجه معاملات المعادلة التفاضلية الجزئية

والحد الأيمن من العادلة (2-64) له صيغة معلميه في $g(x_t)$ ومشتقاتها الجزئية، ولكن في الحياة

العملية لا يمكن قياس (مشاهدة) $g(x_t)$ بصورة دقيقة بل سيكون هنالك خطأ عشوائي فيتم التعبير

عنها بالمشاهدة $Y(x_t)$ ليكون لدينا الانموذج الآتي:

$$Y(x_t) = g(x_t) + \varepsilon_i \quad (2-65)$$

إذ ان : $i=1,2,\dots,p$

ε_i اخطاء القياس والتي يفترض ان يكون لها توزيع طبيعي كأوسي بمتوسط صفر وتباين ثابت σ_i^2

وبذلك سيكون الهدف الرئيس هو تقدير المعلمة (المعلمات) المجهولة $\underline{\theta}$ التي تكون ضمن المعادلة (2-64) لها تشويش (Noise) فضلاً عن تحديد عدم الدقة في تلك التقديرات.

ان الخطوة الاولى في اسلوب بيز في التقدير هو التعبير عن المعادلة التفاضلية الجزئية في (2-64) بدالة لا معلمية يعبر عنها كتركيبية خطية من الدوال الاساسية وكالاتي:

$$g(x_t) = \sum_{k=1}^K b_k(x)\beta_k = b^T X \beta \quad \dots(2-66)$$

اذ أن:

$$b^T X = \{b_1(x), \dots, b_k(x)\}^T$$

$$\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k)^T$$

وباستعمال دوال أساس شرائح نوع B (B-Spline) وهي دوال غير صفيرية في فترات جزئية قصيرة تتمتع بخاصية الدعم المدمج وبسبب هذه الخاصية جعلت دوال أساس الشرائح B مفيدة للحساب الفعال والاستقرار العددي .

وبتعريف دوال الاساس بدرجتها (اي عدد مواقع العقد (Nodes)) وبتعويض (2-66) في (2-64) نحصل على:

$$f \left[x_1, x_2, \dots, x_p, b^T X \beta, \left\{ \frac{\partial b^T X}{\partial x_1}, \frac{\partial b^T X}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial b^T X}{\partial x_p}, \frac{\partial^2 b^T X}{\partial x_1 \partial x_1}, \frac{\partial^2 b^T X}{\partial x_2 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^2 b^T X}{\partial x_p \partial x_p} \right\} \beta, \dots, \underline{\theta} \right] = 0 \quad \dots(2-67)$$

وكحالة خاصة من المعادلة التفاضلية الجزئية اعلاه هي المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية الآتية:

$$f \left[x_1, x_2, \dots, x_p, b^T(x) \beta, \left\{ \frac{\partial b^T x}{\partial x_1} \right\} \beta, \dots, \underline{\theta} \right] = f^T \left\{ b(x), \frac{\partial b^T x}{\partial x_1}, \dots, \underline{\theta} \right\} \beta \quad \dots(2-68)$$

اذ أن:

$$f \left\{ b(x), \frac{\partial b^T x}{\partial x_1}, \dots, \underline{\theta} \right\}$$

وتُعد أسلوب الشرائح البيزية (Bayesian P-Spline) من الاساليب التي تعالج عدم الدقة (عدم اليقين) عن طريق التوزيع السابق لمعلمة التمهيد ففي هذا الاسلوب هنالك حد جزائي (حد عقوبة) (Penalized term) على الدالة المقدره الممهدة بدلا من استعمال معلمة تجانس مثالية كما هو الحال في الطرائق الاعتيادية و الانموذج البيزي يقوم بخلط الانموذج فيما يتعلق بتلك المعلمة (معلمة التمهيد) وبسبب عدم وجود دالة اساسية تمثل بالضبط المعادلة التفاضلية الجزئية ذلك سيكون هنالك خطأ في التقريب ويمكن عدة على انه خطأ عشوائي.

$$f^T \left\{ b^T(x_i) \beta; \underline{\theta} \right\} = \varepsilon_i(x_i) \quad (2-69)$$

اذ ان:

$\varepsilon_i(x_i)$ اخطاء الانموذج العشوائية

ويفترض ان تتوزع توزيع طبيعي كأوسي بمتوسط صفر وتباين ثابت $\varepsilon_i(x_i) \sim N(0, \gamma_0^{-1})$

γ_0 معلمة الدقة ويجب ان تكون كبيرة بما يكفي بحيث يكون خطأ التقريب في حل المعادلة (2-64) صغيراً.

وبدلا من استعمال قيمة مثلى مفردة لمعلمة الدقة γ_0 سيتم تعيين توزيع أولي وان افترض توزيع خطأ النمذجة في (2-69) وقيد الجزاء القوي سيؤديان الى توزيع سابق على معلمة الاساس β كالآتي:

$$[\beta | \theta, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2] \propto (\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2)^{\frac{K}{2}} e^{\left\{ \frac{-\gamma_0 \varepsilon^T(\beta, \theta) \varepsilon(\beta, \theta)}{2} - \frac{\beta^T (\gamma_1 H_1 + \gamma_2 H_2 + \gamma_1 \gamma_2 H_3) \beta}{2} \right\}} \quad \dots(2-70)$$

اذا أن:

K يمثل عدد دوال الاساس

γ_0 معلمة الدقة (الضبط)

$$\mathcal{E}(\beta, \theta) = f^T \{b^T(x_i)\beta; \theta\} \dots f^T \{b^T(x_n)\beta; \theta\} \quad (2 - 71)$$

γ_1, γ_2 معلمة التحكم في مقدر الجزاء على التمهيد

وان γ_1, γ_2 تمثلان المعلمات الفوقية للتوزيع الاولي

H1, H2, H3 مصفوفات الجزاء وصيغتها كالاتي:

$$H_1 = B_1^T B_1 \otimes D_2^T D_2$$

$$H_2 = D_1^T D_1$$

$$H_3 = D_1^T D_1 \otimes D_2^T D_2$$

اذ أن :

B_i مصفوفات دالة الاساس الاحادية البعد

D_i مصفوفة الفرق من الدرجة m_i^{th} ذات الحجم $(k_i - m_i)k_i$ ، $i=1,2$

k_i عدد دوال الاساس لكل بعد

وسنفرض بان التوزيع الاولي المرافق لـ σ_ε^2 و γ_i و PDE كالاتي:

$$\sigma_\varepsilon^2 \sim IG(a_\varepsilon, b_\varepsilon) \quad ; i=1,2,3$$

$$\gamma_i \sim Gamma(a_i, b_i)$$

$$\gamma_1 \sim Gamma(a_1, b_1)$$

$$\gamma_2 \sim Gamma(a_2, b_2)$$

$$PDE \sim N(0, \sigma_\theta^2 I)$$

بتباين كبير بحيث تبقى غير معلوماتية .

$$\Phi = (\gamma, \beta, \sigma_\varepsilon^2)^T \text{ و } \gamma = (\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2)^T$$

وبالاستناد الى الانموذج المذكور آنفاً والتوزيعات السابقة المحددة ، فان التوزيع اللاحق للمعلمات المجهولة هو :

$$h(\Phi/\gamma) =$$

$$\frac{\prod_{i=0}^2 \gamma_i^{a_i + \frac{K}{2} - 1} (\sigma_\varepsilon^2)^{-(a_\varepsilon + \frac{n}{2}) - 1} e^{-\left(\frac{b_\varepsilon \sum_{i=0}^2 b_i \gamma_i - \theta^T \theta}{\sigma_\varepsilon^2} \right) \frac{1}{2\sigma_\theta^2}}}{\int \prod_{i=0}^2 \gamma_i^{a_i + \frac{K}{2} - 1} (\sigma_\varepsilon^2)^{-(a_\varepsilon + \frac{n}{2}) - 1} e^{-\left(\frac{b_\varepsilon \sum_{i=0}^2 b_i \gamma_i - \theta^T \theta}{\sigma_\varepsilon^2} \right) \frac{1}{2\sigma_\theta^2}} e^{(-\gamma_0 \varepsilon^T (\beta, \theta) \varepsilon (\beta, \theta) / 2 -) \beta / 2} e^{\beta^T (\gamma_1 H_1 + \gamma_2 H_2 + \gamma_1 \gamma_2 H_3 (2\sigma_\varepsilon^2)^{-1} (Y - B\beta)^T (Y - B\beta))} d\beta d\theta} e^{\beta^T (\gamma_1 H_1 + \gamma_2 H_2 + \gamma_1 \gamma_2 H_3 (2\sigma_\varepsilon^2)^{-1} (Y - B\beta)^T (Y - B\beta))} d\beta d\theta$$

...(2-72)

وفي ظل دالة خسارة تربيعية فان مقدرات بيز للمعلمات المجهولة نحصل عليها كالآتي:

$$\hat{\beta}_{Bayes} = E(L(\hat{\theta} - \theta))$$

$$= \int_{\forall \theta} (\hat{\theta} - \theta)^2 h(\Phi/\gamma) d\hat{\theta}$$

$$= \int_{\forall \theta} (\hat{\theta} - \theta)^2 \frac{\prod_{i=0}^2 \gamma_i^{a_i + \frac{K}{2} - 1} (\sigma_\varepsilon^2)^{-(a_\varepsilon + \frac{n}{2}) - 1} e^{-\left(\frac{b_\varepsilon \sum_{i=0}^2 b_i \gamma_i - \theta^T \theta}{\sigma_\varepsilon^2} \right) \frac{1}{2\sigma_\theta^2}} e^{(-\gamma_0 \varepsilon^T (\beta, \theta) \varepsilon (\beta, \theta) / 2 -) \beta / 2} e^{\beta^T (\gamma_1 H_1 + \gamma_2 H_2 + \gamma_1 \gamma_2 H_3 (2\sigma_\varepsilon^2)^{-1} (Y - B\beta)^T (Y - B\beta))} d\hat{\theta}}{\int_{\forall \theta} \prod_{i=0}^2 \gamma_i^{a_i + \frac{K}{2} - 1} (\sigma_\varepsilon^2)^{-(a_\varepsilon + \frac{n}{2}) - 1} e^{-\left(\frac{b_\varepsilon \sum_{i=0}^2 b_i \gamma_i - \theta^T \theta}{\sigma_\varepsilon^2} \right) \frac{1}{2\sigma_\theta^2}} e^{(-\gamma_0 \varepsilon^T (\beta, \theta) \varepsilon (\beta, \theta) / 2 -) \beta / 2} e^{\beta^T (\gamma_1 H_1 + \gamma_2 H_2 + \gamma_1 \gamma_2 H_3 (2\sigma_\varepsilon^2)^{-1} (Y - B\beta)^T (Y - B\beta))} d\beta d\theta} d\hat{\theta}$$

$$..(2-73)$$

والمعادلة (2-73) لا يمكن ان تحل بالطرائق التحليلية الاعتيادية كونها معادلة غير خطية لذلك سيتم استعمال معاينة جيس (Gipps sampler) لغرض الحصول على تقديرات معلمات المعادلة التفاضلية الجزئية .

3-4-3 خطوات وخوارزمية معاينة جيس لتقدير معلمات بيز:

لنفرض اننا نريد تقدير المعلمات θ_1 و θ_2 من توزيع احتمالي مشترك $p(\theta_1, \theta_2)$ ولكننا لانستطيع استعمال المحاكاة بصورة مباشرة ولا نستطيع ان نستعمل طريقة الرفض والقبول

ولا نستطيع استعمال خوارزمية Metropolis-Hasting وذلك لصعوبة الدالة الاحتمالية المشتركة ولكننا نستطيع ان نجري المعاينة من خلال التوزيعات الشرطية الحدية لكل معلمة مشروطاً بالمعلمة الأخرى أي أن:

$$p(\theta_1 / \theta_2)$$

$$p(\theta_2 / \theta_1)$$

ففي هذه الحالة يمكن إستعمال معاينة جيس Gibbs sampler

يمكننا ان نبدأ بقيم أولية للمعلمات $(\theta_1^{(0)}, \theta_2^{(0)})$ ولتكن $(0, 0)$ فان خطوات معاينة جيس تكون كالآتي:

1- معاينة $\theta_1^{(j)}$ من التوزيع الاحتمالي للمعلمة مشروطة بثبات المعلمة الأخرى أي أن:

$$p(\theta_1 / \theta_2^{(j-1)})$$

2- معاينة $\theta_2^{(j)}$ من التوزيع الاحتمالي للمعلمة مشروطة بثبات المعلمة الأخرى التي تم معاينتها في الخطوة السابقة أي أن:

$$p(\theta_2 / \theta_1^{(j)})$$

وخلال d من الخطوات التكراري لنفس الحالة 1 و 2 نحصل على تقدير مستقر للمعلمات θ_1, θ_2 وفق التوزيع الاحتمالي المشترك $p(\theta_1, \theta_2)$ ونلاحظ ايضاً ان $\theta^{(j)}$ يكون معتمد على القيمة المقدرة في الخطوة السابقة . وان تقدير المعلمات الهدف يمثل توقع التقديرات التي تم الحصول عليها في الخطوات d أي أن:

$$\frac{1}{J} \sum_{j=1}^J h(\theta^{(j)}) \rightarrow E_P [h(\theta)] = \int_{\theta} h(\theta) f(\theta)$$

على سبيل المثال ليكن لدينا متجه معلمات مراد تقديرها وفق التوزيع الطبيعي الثنائي

$$\theta \sim N_2(0, \Sigma)$$

اذ أن:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$$

والتوزيعات الشرطية لكل معلمة كالآتي:

$$\theta_1/\theta_2 \sim N(\rho\theta_2, (1 - \rho^2))$$

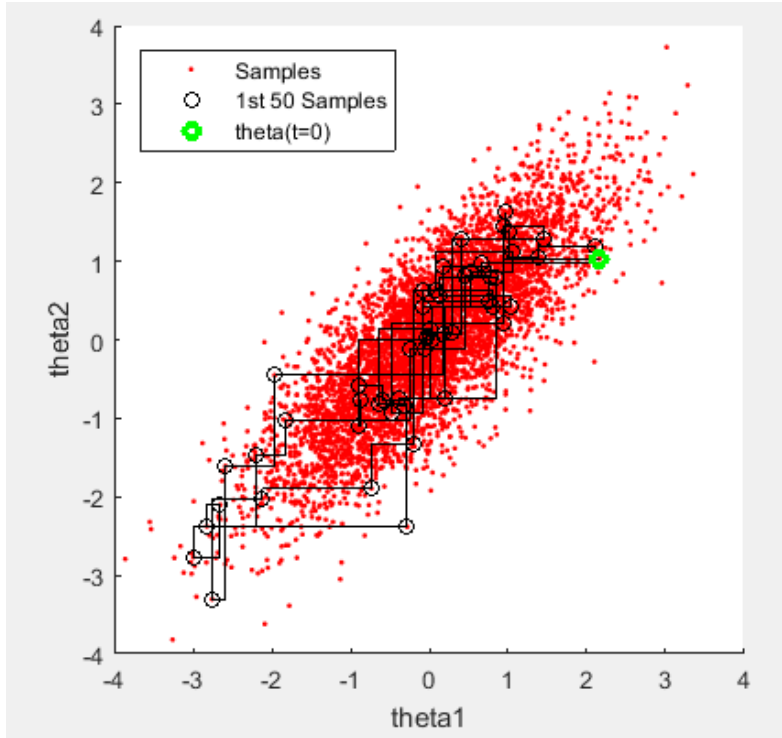
$$\theta_2/\theta_1 \sim N(\rho\theta_1, (1 - \rho^2))$$

بافتراض القيم الاولية للمعلمات $(\theta_1^{(0)}, \theta_2^{(0)})$ فان خطوات معاينة جيس كالآتي:

Iteration	Sample θ_1	Sample θ_2
1	$\theta_1 \sim N(\rho\theta_2^{(0)}, (1 - \rho^2))$	$\theta_2 \sim N(\rho\theta_1^{(1)}, (1 - \rho^2))$
⋮	⋮	⋮
k	$\theta_1 \sim N(\rho\theta_2^{(k-1)}, (1 - \rho^2))$	$\theta_2 \sim N(\rho\theta_1^{(k)}, (1 - \rho^2))$

يعني العملية انو افرض قيم اولية للمعلمات واطلع تقدير المعلمة الاولى بافتراض القيمة الاولى للمعلمة الثانية واحصل على قيمة مقدرة للمعلمة الاولى منها اعتبرها قيمة اولية في الخطوة الثانية اطلع منها القيمة الثانية للمعلمة الأولى والتي اعتبرها. قيمة اولية في الخطوة الثالثة اجد منها القيمة التقديرية للمعلمة الثانية وهكذا لحين استقرار التقديرات للمعلمات

حيث انه بهذه الحالة ولدت عينات كبيرة من المعلمات المراد تقديرها ومنها نجد تقدير المعلمات ذات الكثافة العالية . الشكل الآتي يوضح معاينة جيس والذي نلاحظ فيه النقاط الحمراء تمثل عينات جيس الكبيرة والنقاط السوداء المتسلسلة تمثل التعويضات المتسلسلة في كل خطوة من الخطوات التكرارية للمعلمات المستخرجة والنقطة الخضراء تمثل التقدير النهائي للمعلمة المراد تقديرها .



وإذا كان لدينا $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ من المعلمات المراد تقديرها فان معاينة جيس تكون بالخطوات الآتية:

$$\theta_1^{(j)} \sim p(\theta_1 / \theta_2^{(j-1)}, \dots, \theta_k^{(j-1)})$$

$$\theta_2^{(j)} \sim p(\theta_2 / \theta_1^{(j)}, \theta_3^{(j-1)}, \dots, \theta_k^{(j+1)})$$

$$\theta_k^{(j)} \sim p(\theta_k / \theta_1^{(j)}, \theta_{k-1}^{(j)}, \dots, \theta_{k+1}^{(j-1)}, \dots, \theta_k^{(j-1)})$$

:

$$\theta_k^{(j)} \sim p(\theta_k / \theta_1^{(j)}, \dots, \theta_{k-1}^{(j)})$$

والتوزيعات اعلاه تمثل التوزيعات الشرطية التامة التي تستعمل لمعانية $p(\theta)$

وعليه فان خوارزمية ايجاد تقديرات بيز للمعادلة التفاضلية الجزئية كالاتي:

ان التوزيع اللاحق المشترك للمعاملات المراد تقديرها هو :

$h(\Phi/\gamma)$

$$= \frac{\prod_{i=0}^2 \gamma_i^{a_i + \frac{K}{2} - 1} (\sigma_\varepsilon^2)^{-(a_\varepsilon + \frac{n}{2}) - 1} e^{\left(-\frac{b_\varepsilon \sum_{i=0}^2 b_i \gamma_i - \theta^T \theta}{2\sigma_\varepsilon^2}\right)} e^{(-\gamma_0 \varepsilon^T (\beta, \theta) \varepsilon (\beta, \theta) / 2 -) \beta / 2}}{e^{(\beta^T (\gamma_1 H_1 + \gamma_2 H_2 + \gamma_1 \gamma_2 H_3 (2\sigma_\varepsilon^2)^{-1} (Y - B\beta))^T (Y - B\beta))}} \int \prod_{i=0}^2 \gamma_i^{a_i + \frac{K}{2} - 1} (\sigma_\varepsilon^2)^{-(a_\varepsilon + \frac{n}{2}) - 1} e^{\left(-\frac{b_\varepsilon \sum_{i=0}^2 b_i \gamma_i - \theta^T \theta}{2\sigma_\varepsilon^2}\right)} e^{(-\gamma_0 \varepsilon^T (\beta, \theta) \varepsilon (\beta, \theta) / 2 -) \beta / 2}} e^{(\beta^T (\gamma_1 H_1 + \gamma_2 H_2 + \gamma_1 \gamma_2 H_3 (2\sigma_\varepsilon^2)^{-1} (Y - B\beta))^T (Y - B\beta))} d\beta d\theta \quad (1)$$

نلاحظ من معادلة (1) ان التوزيع المشترك اللاحق من الصعوبة لايمكن ايجاده بسهولة لذلك يتم ايجاده بسهولة لذلك يتم التوزيع الشرطي التام لكل معلمة وكالاتي:

$$\pi_1^*(\theta_1 / x) \propto \gamma_i^{a_i + \frac{K}{2} - 1} (\sigma_\varepsilon^2)^{-(a_\varepsilon + \frac{n}{2}) - 1} e^{\left(-\frac{b_\varepsilon \sum_{i=0}^2 b_i \gamma_i - \theta^T \theta}{2\sigma_\varepsilon^2}\right)} e^{(-\gamma_0 \varepsilon^T (\beta, \theta) \varepsilon (\beta, \theta) / 2 -) \beta / 2} \quad \dots (2)$$

$$\pi_2^*(\theta_2 / y) \propto \gamma_i^{a_i + \frac{K}{2} - 1} e^{(\beta^T (\gamma_1 H_1 + \gamma_2 H_2 + \gamma_1 \gamma_2 H_3 (2\sigma_\varepsilon^2)^{-1} (Y - B\beta))^T (Y - B\beta))} \quad \dots (3)$$

والمعادلتين (2) و (3) تمثل التوزيعات الشرطية التامة لكل من θ_1 و θ_2 على التوالي لاتمثل صيغة معروفة لتوزيع احتمالي لذلك لايمكن ايجاد مقدرات المعلمات بصورة مباشرة لذلك سيتم استعمال خوارزمية Gibbs sampler باقتراح للمعاملات θ_1, θ_2 مسحوبة من مجتمع له توزيع طبيعي بدلة الكثافة الاحتمالية اللاحقة الشرطية التامة (2) و (3) على التوالي وان خطوات خوارزمية

1. نبدأ بقيم اولية للمعاملات المراد تقديرها $\theta_1^{(0)}, \theta_2^{(0)}$ واللذان يعتبران قيم تقديرية اولية

للمعاملات المراد تقديرها $\hat{\theta}_1$ و $\hat{\theta}_2$

2. نكون حلقة تكرارية k=1:t ونضع في الخطوة الأولى t=1

3. نولد قيم المعلمات عند الخطوة التكرارية الأولى $\theta_1^{(t)}, \theta_2^{(t)}$ من التوزيع اللاحق الشرطي للمعلمة α_1 و α_1 بتعويض المعلمة المقدرة الاولية بافتراض بيانات عينة جيس توزيع طبيعي بمتوسط $\mu=[0, 0]$ وتباين مشترك يتراوح بين اقل قيمة 3- واكبر قيمة 3 نفرض قيمة معينة لمصفوفة الارتباط

4. توليد $\theta_1^{(t)}, \theta_2^{(t)}$ في الخطوة التالية من توزيع طبيعي معوض فيه $\theta_1^{(t-1)}, \theta_2^{(t-1)}$ في الخطوة السابقة.

5. ايجاد الاحتمالات النسبية التي تستعمل لاختبار القيمة المقدرة وهي :

$$\vartheta_1 = \min\left(1, \frac{\pi_1^*(\theta_1^{(t)}/x)}{\pi_1^*(\theta_1^{(t-1)}/x)}\right) \quad \vartheta_2 = \min\left(1, \frac{\pi_2^*(\theta_2^{(t)}/x)}{\pi_2^*(\theta_2^{(t-1)}/x)}\right)$$

6. توليد رقم عشوائي يتبع التوزيع المنتظم بالفترة (0 , 1) وليكن u_1 و u_2

7. اذا كان $u_1 < \vartheta_1$ نقبل القيمة المقدرة في الخطوة (4) واذا لا نضع $\theta_1^{(t)} = \theta_1^{(t-1)}$

8. اذا كان $u_2 < \vartheta_2$ نقبل القيمة المقدرة في الخطوة (4) واذا لا ، نضع $\theta_2^{(t)} = \theta_2^{(t-1)}$ وتكون القيم المقدرة $\theta_1^{(t)}, \theta_2^{(t)}$

9. نضع $t=t+1$

10. نكرر الخطوات 3-10 من المرات لحين الحصول على التوزيع اللاحق لعينة المعادلة التفاضلية الجزئية .

الفصل الثالث

المخالفات العشرية والتطبيقات

1-3 المقدمة:

لغرض تطبيق المفاهيم التي ذكرت في الجانب النظري فقد تضمن هذا الفصل قسمين أساسيين، الأول يمثل الجانب التجريبي ويتم فيه عرض لمراحل المحاكاة ومناقشة نتائج تجارب المحاكاة التي استعملت في مقارنة طرائق التقدير المستعملة في تقدير المعادلة التفاضلية الجزئية، وذلك عند كميات مشاهدة مختلفة باستعمال معايير المقارنة (SD-CP -RASE – Bias) للوصول الى أفضل طريقة في التقدير باعتماد مستويات مختلفة من التشويش، والقسم الآخر يمثل الجانب التطبيقي ويتضمن تطبيق عملي على بيانات حقيقية لاسيما بمرضى فايروس (Covid-19).

2-3 القسم الاول: الجانب التجريبي :

1-2-3 مفهوم المحاكاة Simulation:(50)

إن منهجية المحاكاة تعتمد كلياً على قابلية الحاسبات الالكترونية على توليد الاعداد العشوائية التي تحاكي العملية العشوائية لتوليد بيانات معينة، وتُعد طريقة (مونت كارلو) (Monte Carlo) من بين أهم طرائق المحاكاة وافضلها وأكثرها استعمالاً في تحليل المشكلات المعقدة، وحل التكاملات المعقدة والمتعددة الابعاد، وبعض المعادلات التفاضلية ذات الدرجات العليا التي يصعب حلها، وتستعمل كذلك في توليد المشاهدات المستقلة من معظم التوزيعات الاحتمالية المعروفة التي لها دالة كثافة تجميعية (Cumulative Density Function (C.D.F.))، وإن هذه المنهجية تستعمل على نطاق واسع ولاسيما عند استعمال تكرار المحاكاة للأنموذج العشوائي المدروس، وإن عدد المكررات تعتمد بالأساس على تقنية الحاسبة المستعملة، ومن ثم استعمال الاسلوب المناسب لأجل المقارنة بين الطرائق الرياضية والإحصائية المختلفة.

تعرف المحاكاة بأنها عملية تمثيل وتقليد للواقع الحقيقي أي لإيجاد صورة طبق الاصل من أي نظام أو أنموذج دون أخذ ذلك النظام أو الأنموذج ذاته، وكثيراً ما نجد في الواقع الحقيقي أن هناك عمليات تكون معقدة الفهم ولاسيما في بعض المشكلات أو النظريات الإحصائية والهندسية التي يكون تحليلها تحليلاً (منطقياً) باستعمال البراهين الرياضية أمراً في غاية الصعوبة ما يؤدي الى ترجمة هذه النظريات على مجتمعات حقيقية، ثم سحب عدد من العينات العشوائية منها للوصول الى الحلول المثلى لهذه المشكلات وتحليل ذلك فمن الأفضل أن توصف هذه العمليات بصورة مشابهة للصور الحقيقية

ب نماذج معينة ففهم الانموذج يحقق لنا قدراً من الإدراك للعملية الأصلية أو الواقع الحقيقي عن طريق محاكاة الانموذج.

ومن فوائد المحاكاة هي العشوائية إذ أن تتابع الأرقام العشوائية المستعملة للأنموذج الرياضي في التجربة الأولى يكون مستقلاً من تتابع الأرقام العشوائية في التجربة الثانية وهكذا، وكذلك لعملية المحاكاة مرونة في دراسة مسائل مختلفة فهي تعطي القدرة على الاختبار وإجراء التعديلات وذلك من أجل استثمار الوقت والجهود المبذولة والماديات.

وهناك عدة طرائق مختلفة للمحاكاة منها الطريقة التناظرية (Analog Procedure) والطريقة المختلطة (Mixed Procedure) وطريقة التحويل المعكوس (Inverse Transform) إذ إن طريقة التحويل المعكوس تستعمل لتوليد المشاهدات العشوائية (البيانات) من مجتمع واحد نظري تحاكي المجتمع الحقيقي.

2-2-3 مراحل تجارب المحاكاة: (61)،(58)،(57)،(60)

تمت كتابة برنامج المحاكاة باستعمال تطبيق (MatLab 2015a) ونفذ على الحاسبة الإلكترونية، وفيما يأتي مراحل خطوات برنامج المحاكاة:

المرحلة الأولى:

أولاً: استخدم انموذج الكشف عن ضوء الأشعة تحت الحمراء بعيدة المدى long range infrared (LIDAR) light detection and ranging لتوليد المتغيرات التي سيتم استخدامها في طرائق التقدير المبينة في الجانب النظري من هذه الرسالة وليس كأنموذج معتمد لتقدير معالم المعادلة التفاضلية الجزئية .

اذ تم توليد الدوال $g(t, x)$ (متغيرات الحالة) وذلك عن طريق الحل العددي (Numerical solution) لمعادلة الإشارة المستلمة (Received signal) خلال الزمن t والمدى x باستعمال المعادلة الآتية:

$$\frac{\partial g(t, x)}{\partial t} - \theta_D \frac{\partial^2 g(t, x)}{\partial x^2} - \theta_S \frac{\partial g(t, x)}{\partial x} - \theta_A g(t, x) = 0 \quad \dots (3-74)$$

إذ إن $g(t, x)$ تمثل شبكة بيانات مترابطة مع وجود أخطاء في القياس والتي منها سنشاهد البيانات (Y_i, X_i) التي تقابل:

$$Y_i = g(x_i) + \varepsilon_i \quad \dots (3-75)$$

إذ إن $\varepsilon_i \sim iidN(0, \sigma_\varepsilon^2)$

والمعادلة (3-74) تحل عددياً بافتراض قيم المعلمات الحقيقية

$$\theta_D = 1, \theta_S = 0.1, \theta_A = 0.1$$

ووضع شرط لحدود الدالة $g(t, 0) = 0$ والشرط الأولي $g(0, x) = \{1 + 0.1(20 - X)^2\}^{-1}$ عبر شبكة في مجال الزمن $t \in [1, 20]$ ومجال مقابل للمدى $x \in [1, 50]$ وللحصول على حل عددي دقيق نضع حجم للشبكة في مجال الزمن 0.0005 وفي المجال المقابل حجم 0.001 ويتم توليد خطأ القياس الذي يتوزع كاوسي بمتوسط صفر وانحراف معياري $\sigma = 0.02$ لكل وحدة من الزمن ووحدة من المدى LIDAR، وبذلك ستكون لدينا شبكة من البيانات المولدة مكونة من تجانب الزمن مع المدى اي أن 20×50 عن طريق الشبكة $[1, 20] \times [1, 50]$. وبذلك تم الحصول على المتغيرات الآتية:

$$X_1(t), X_2(t), X_3(t)$$

ثانياً: توليد الاخطاء العشوائية

لكل متغير من المتغيرات $X_1(t), X_2(t), X_3(t)$ تم توليد خطأ عشوائي ، لكون المتغيرات في المعادلة التفاضلية الجزئية متغيراتها مترابطة كل متغير يولد له خطأ قياس وليس خطأ تقدير لذلك تم توليد ثلاث أخطاء عشوائية بتوزيع كاوسي بتباينات مختلفة كما يأتي:

$$\varepsilon_{i1} \sim N(0, \sigma_1^2) \quad , \quad \varepsilon_{i3} \sim N(0, \sigma_2^2) \quad \varepsilon_{i3} \sim N(0, \sigma_2^2) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \dots (3-76)$$

ثالثاً: توليد المتغير المعتمد:

يتم توليد المتغير المعتمد $Y(t_i)$ عن طريق دمج كل متغير من المتغيرات التي حصلنا عليها في الفقرة أولاً مع الخطأ العشوائي المولد طبيعياً في الفقرة ثانياً لينتج لنا:

$$Y_1(t_i) = X_1(t) + \varepsilon_{i1} \quad , \quad Y_2(t_i) = X_2(t) + \varepsilon_{i2} \quad Y_2(t_i) = 3(t) + \varepsilon_{i3} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \dots \quad (3 - 77)$$

المرحلة الثانية:

تم اعتماد الإنموذج التجريبي الآتي:

$$(A_0 + \theta_1 A_1 + \theta_2 A_2 + \theta_3 A_3)u(t, x) = s(t, x) \quad \dots (3-78)$$

والذي من خلالها سيتم اعتماد منهجية كل طريقة من طرائق التقدير وهي طريقة الامكان الاعظم ، طريقة العملية الكاوسية ، طريقة بيز .

إذا أن:

$u(t, x)$ كمية مشاهدة (Observed Value) عند نقطة معينة x وعند الزمن t (تمثل المتغيرات المعتمدة الثلاثة التي تم توليدها في المرحلة الثانية من مراحل تجارب المحاكاة.

A_θ عامل خطي (Linear Operator) وهو العامل الذي يتحكم بالكمية المقاسة او ما يدعى بعامل الانتشار او التبديد

وان المعلمات $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ كميات تدعى معاملات الانتشار الخاصة بالعامل

$S(t, x)$ التشويش الابيض للأنموذج وهي المجال العشوائي ويمثل المصادر الموزعة عند النقطة $x \in G$ وان G هو المجال المحدد في الفضاء الإقليدي R^d . وهي عملية كاوسية Gaussian distribution في الزمن t بمتوسط صفر ولا تحتوي اي معلمات مجهولة.

في اجراء تجارب المحاكاة والذي يمثل انموذج معادلة تفاضلية جزئية مكونة من ثلاث معلمات تم اختياره لأجل توضيح قابلية طرائق التقدير المستعملة في الرسالة وفق الخطوات الآتية:

أولاً: اختيار قيم افتراضية أولية مختلفة للمعلمات $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ وجرى اختيار أربعة نماذج تم اختيارها تجريبياً بحيث اعطت أفضل النتائج لتقدير المعلمات وكما مبينة في الجدول (1-3)

جدول (1-3)

القيم الاولية الافتراضية لمعلمات المعادلة التفاضلية الجزئية

الانموذج	θ_1	θ_2	θ_3
1	1	0.1	0.1
2	2	1	1
3	1	1	2
4	6	4	3

ثانياً: اختيار تسعة حجوم للكميات المشاهدة $u(t, x)$ وهي العينات العشوائية التي تم سحبها من شبكة البيانات المولدة في المرحلة الثانية من خطوات تجارب المحاكاة لبيان سلوك طرائق التقدير وهي:

$$m = 10, 25, 50, 75, 100, 150, 200, 500, 1000$$

ثالثاً: استعمال ثلاثة مستويات من $S(t, x)$ الذي يمثل التشويش الابيض لأنموذج المحاكاة وهي المجال العشوائي ويمثل المصادر الموزعة عند نقط البيانات وهو المجال المحدد في الفضاء الإقليدي R^d . وهي عملية كاوسية Gaussian distribution في الزمن t بمتوسط صفر ولا تحتوي أي معلمات مجهولة وكما يأتي:

$$S(t, x) = \sigma = 0.01, 0.05, 0.09$$

وذلك لملائمة البيانات المولدة بما ينسجم مع بيئة الواقع والمشاهدات الحقيقية إذ إن كل مشاهدة تقاس ضمن وجود خطأ قياس لها وقيمة خطأ القياس الذي سيتم توليده بتوزيع طبيعي يجب ان يلائم قيمة المشاهدة وان هذه المشاهدات تبدأ بقياسات كبيرة ثم تأخذ بالتذبذب الى أن تستقر قراءتها في العينات الكبيرة سوف تأخذ المشاهدات قياسات متقاربة جداً أو تستقر على القياس نفسه فتنقص قيمة التباين بينها وبذلك يتناقص خطأ القياس المضاف للمشاهدة اذ يجب ان يتناسب خطأ القياس المولد مع قيمة المشاهدة. علماً انه تم اختيار عامل خطي $A_\theta = 0.01, 0.09, 2.88, 1.99$ في اجراء تجارب المحاكاة.

المرحلة الثالثة:

في هذه المرحلة يتم تقدير معاملات المعادلة التفاضلية الجزئية (3-78) بموجب طرائق التقدير

الآتية:

1- طريقة الامكان الأعظم (Maximum Likelihood Method):⁽³⁰⁾

تم الحصول على مقدرات معاملات المعادلة التفاضلية الجزئية بأحدى الطرائق العددية المستعملة لحل المعادلات الرياضية غير الخطية عن طريق استعمال خوارزمية Lindsay، Martin، & 2003، من خلال الحل العددي للمعادلة (2-32).

2- طريقة العملية الكاوسية (Gaussian Process Methods):⁽¹¹⁾

ان اشتقاقات المتغير المعتمد نسبة للمتغيرات المستقلة، اذ ان مشتقة العملية التفاضلية هي عملية تفاضلية فتم الحصول على مقدرات معاملات المعادلة التفاضلية الجزئية عن طريق استعمال خوارزمية (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS)) عن طريق المعادلات (2-52)، (2-53)، (2-54).

3- طريقة بيز القياسية (Standard Bayes Method): في هذه الطريقة تم الحصول على

مقدرات معاملات المعادلة التفاضلية الجزئية باستعمال معاينة جيس *Gibbs sampler* كما ورد في الفقرة (2-4-3)

المرحلة الرابعة:

لغرض الوصول للمقدر الافضل عن طريق المفاضلة بين طرائق التقدير المدروسة، فقد جرى الاعتماد بشكل عام على المعايير الآتية:

1- التحيز Bias: يمثل التحيز مطلق مجموع الفرق بين المقدرة والقيمة الحقيقية مقسوماً على عدد مرات تكرار التجربة وصيغته كالاتي:

$$\text{Bias} = \left| \frac{\sum_{i=1}^r (\hat{\theta} - \theta)}{r} \right| \quad \dots (3-79)$$

r عدد مرات تكرار تجارب المحاكاة

2- square roots of average squared errors (RASE) : هو الجذر التربيعي لمعدل مجموع مربعات الفرق بين المعلمة المقدرة والمعلمة الحقيقية، وصيغته كالاتي:

$$RASE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\hat{\theta} - \theta)^2}{n}} \quad \dots (3-80)$$

3- الانحراف المعياري للمقدر (SD) standard deviations : هو الجذر التربيعي لمجموع مربعات انحرافات المعلمة المقدرة عن وسطها الحسابي مقسوماً على عدد مرات تكرار التجربة وصيغته كالاتي:

$$SD = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^r (\hat{\theta} - \bar{\theta})^2}{r}} \quad \dots (3-81)$$

4- احتمالات التغطية الفعلية (فترة الثقة) للمعلمات المقدرة CP: (41)

The actual coverage probabilities (CP) of nominal 95% credible/confidence intervals

$$CP = \frac{USL - LSL}{6\sigma} \quad \dots (3-82)$$

إذ ان USL و LSL الحدود العليا والدنيا المخصصة لمدة الثقة، يعطي بسط CP مدى التغطية الذي يمكن أن تختلف فيه قياسات العملية. ويعطي المقام مدى التغطية الذي تختلف فيه العملية فعلياً. فكلما كان احتمال التغطية عالياً كانت المعلمات المقدرة أفضل.

3-2-3 مناقشة نتائج المحاكاة:

تم عرض نتائج تجارب المحاكاة وتحليلها لتقدير معلمات المعادلة التفاضلية الجزئية بحسب طرائق التقدير المبينة في الجانب النظري من هذه الرسالة وفيما يأتي النتائج الموضحة في الجداول التي سيتم تحليلها بحسب التسلسل، ولحجوم العينات المختلفة والحالات المختلفة للقيم الافتراضية الاولية كافة والموضحة في الجداول (2-3) الى (12-3) ولتجربة عدد مكرراتها (1000) مرة وتم عرض النتائج كالاتي:

ملاحظة: تم حذف بعض الكميات المشاهدة (25، 50، 75، 150، 500، 200) وذلك لتشابه نتائجها مع نتائج الكميات المشاهدة المذكورة في الجداول ادناه.

1) عند مستوى تشويش $\sigma=0.01$:

من جدول (2-3) يتضح ما يأتي:

1. عند الكمية المشاهدة $m=10$ تفوقت طريقة بيز في تقدير معاملات المعادلة التفاضلية الجزئية تليها طريقة العملية الكاوسية واخيراً طريقة الامكان الأعظم
2. عند الكمية المشاهدة $m=1000$ تفوقت طريقة الامكان الأعظم في تقدير معاملات المعادلة التفاضلية الجزئية. تليها طريقة العملية الكاوسية، واخيراً طريقة بيز في التقدير.
3. عند الكمية المشاهدة $m=100$ تفوقت طريقة العملية الكاوسية في تقدير معاملات المعادلة التفاضلية تليها طريقة الامكان الاعظم، واخيراً طريقة بيز في التقدير.

جدول (2-3)

معلمات المعادلة التفاضلية الجزئية الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير الثلاث ومقدار التحيز (Bias) والانحراف المعياري (SD) والجذر التربيعي لمعدل مجموع مربعات الخطأ (RASE) ومدة التغطية (CP) عند الكميات المشاهدة $m = 10, 100, 1000$ للمعلمات المقدرة عند المعلمات

$$\theta_1 = 1, \theta_2 = 0.1, \theta_3 = 0.1$$
 الافتراضية

m	Parameters	θ_1	θ_2	θ_3	Best
	True	1	0.1	0.1	
10	Estimated	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$	$\hat{\theta}_3$	
	ML	0.343	0.567	0.451	
	GP	0.556	0.168	0.291	

	Bayes	0.791		0.071	0.061		
	Bias	ML	18.5	13.7	29.9	Bayes	
		GP	12.5	11.5	16.5		
		Bayes	7.3	8.6	9.8		
	SD	ML	22.34	21.53	31.92	Bayes	
		GP	14.11	12.53	23.92		
		Bayes	11.19	10.54	16.91		
	RASE	ML	44.8	67.9	56.3	Bayes	
		GP	34.1	35.6	44.7		
		Bayes	18.8	17.5	16.1		
	CP %	ML	44.7	49.6	47.1	Bayes	
		GP	67.5	66.8	61.1		
		Bayes	81.9	87.8	88.9		
	100	ML	0.678		0.786	0.265	
		GP	0.791		0.082	0.129	
Bayes		0.322		0.453	0.675		
Bias		ML	12.7	12.8	26.7	GP	
		GP	10.2	8.8	15.8		
		Bayes	24.9	22.1	36.7		
SD		ML	24.56	22.13	30.45	GP	
		GP	11.22	13.01	18.31		
		Bayes	38.56	30.85	33.77		

	RASE	ML	31.33	54.55	43.7	GP
		GP	30.6	46.4	41.6	
		Bayes	56.88	75.67	89.89	
	CP	ML	85.0	87.6	81.4	GP
		GP	80.8	81.9	79.7	
		Bayes	77.78	67.8	77.9	
1000	ML	1.012		0.014	0.011	
	GP	0.998		0.123	0.122	
	Bayes	0.421		0.862	0.884	
	Bias	ML	2.72	2.41	6.1	ML
		GP	9.5	7.1	9.5	
		Bayes	45.5	55.1	67.6	
	SD	ML	3.34	5.43	6.12	ML
		GP	5.32	7.43	8.32	
		Bayes	88.65	67.54	78.65	
	RASE	ML	8.21	13.23	14.5	ML
		GP	16.5	15.5	15.4	
		Bayes	89.66	90.89	99.78	
	CP	ML	91.77	98.66	89.66	ML
		GP	87.88	87.9	88.3	
		Bayes	55.8	56.9	65.8	

من جدول (3-3) يتضح ما يأتي:

1. عند الكمية المشاهدة $m=10$ تفوقت طريقة بيز في تقدير معاملات المعادلة التفاضلية الجزئية تليها طريقة العملية الكاوسية واخيراً طريقة الامكان الأعظم.
2. عند الكمية المشاهدة $m=75$ تفوقت طريقة العملية الكاوسية في تقدير معاملات المعادلة التفاضلية الجزئية. تليها طريقة الامكان الاعظم، واخيراً طريقة بيز في التقدير.
3. عند الكمية المشاهدة $m=1000$ تفوقت طريقة الامكان الاعظم في تقدير معاملات المعادلة التفاضلية تليها طريقة العملية الكاوسية، واخيراً طريقة بيز في التقدير.

جدول (3-3)

معلمت المعادلة التفاضلية الجزئية الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير الثلاث ومقدار التحيز (Bias) والانحراف المعياري (SD) والجذر التربيعي لمعدل مجموع مربعات الخطأ (RASE) ومدة التغطية (CP) عند الكميات المشاهدة $m = 10, 75, 1000$ للمعلمت المقدرة عند المعلمت الافتراضية $\theta_1 = 2, \theta_2 = 1, \theta_3 = 1$

m	Parameters	θ_1	θ_2	θ_3	Best
	True	2	1	1	
10	Estimated	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$	$\hat{\theta}_3$	
	ML	1.452	0.274	0.652	
	GP	2.676	3.244	5.34	
	Bayes	2.422	0.342	0.555	

	Bias	ML	22.4	38.6	44.4	Bayes
		GP	18.3	18.3	22.6	
		Bayes	14.2	16.4	20.6	
	SD	ML	44.46	43.19	54.67	Bayes
		GP	28.12	34.34	45.66	
		Bayes	22.28	18.55	22.34	
	RASE	ML	60.78	66.8	67.9	Bayes
		GP	44.8	67.9	56.3	
		Bayes	34.1	45.7	53.2	
	CP %	ML	56.6	66.8	54.9	Bayes
		GP	76.8	76.6	89.1	
		Bayes	92.3	92.3	90.1	
75	ML	1.643		0.878	0.697	
	GP	2.155		1.178	1.188	
	Bayes	2.786		0.453	0.666	
	Bias	ML	19.2	20.4	21.4	GP
		GP	17.7	17.6	19.8	
		Bayes	21.6	33.2	40.4	
	SD	ML	30.23	23.34	25.21	GP
		GP	23.23	18.56	22.99	
		Bayes	41.44	40.21	40.21	
	RASE	ML	50.23	51.4	56.8	GP

		GP	43.3	45.5	46.8	
		Bayes	59.9	55.3	67.4	
	CP	ML	71.2	70.2	87.5	GP
		GP	94.8	96.9	93.7	
		Bayes	69.9	79.2	65.4	
1000	ML	2.101		0.911	0.959	
	GP	2.286		1.181	1.181	
	Bayes	2.989		0.355	0.358	
	Bias	ML	11.2	20.1	26.2	ML
		GP	18.1	22.8	25.1	
		Bayes	34.4	31.3	53.3	
	SD	ML	17.11	14.21	14.24	ML
		GP	18.23	19.33	18.23	
		Bayes	36.77	30.56	33.32	
	RASE	ML	28.32	30.1	30.2	ML
		GP	38.3	39.3	47.5	
		Bayes	67.1	65.7	66.7	
	CP	ML	98.3	98.4	97.3	ML
		GP	93.2	93.9	95.9	
		Bayes	60.7	62.1	71.3	

من جدول (4-3) يتضح ما يأتي:

1. عند الكمية المشاهدة $m=10$ تفوقت طريقة بيز في تقدير معاملات المعادلة التفاضلية الجزئية تليها طريقة العملية الكاوسية واخيراً طريقة الامكان الأعظم.
2. عند الكمية المشاهدة $m=75$ تفوقت طريقة العملية الكاوسية في تقدير معاملات المعادلة التفاضلية الجزئية. تليها طريقة الامكان الاعظم، واخيراً طريقة بيز في التقدير.
3. عند الكمية المشاهدة $m=1000$ تفوقت طريقة الامكان الاعظم في تقدير معاملات المعادلة التفاضلية تليها طريقة العملية الكاوسية، واخيراً طريقة بيز في التقدير.

جدول (3-4)

معلمات المعادلة التفاضلية الجزئية الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير الثلاث ومقدار التحيز (Bias) والانحراف المعياري (SD) والجذر التربيعي لمعدل مجموع مربعات الخطأ (RASE) ومدة التغطية (CP) عند الكميات المشاهدة $m = 10, 75, 1000$ للمعلمات المقدرة عند المعلمات

$$\theta_1 = 1, \theta_2 = 1, \theta_3 = 2$$

الافتراضية 2

m	Parameters	θ_1	θ_2	θ_3		
	True	1	1	2		
10	Estimated	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$	$\hat{\theta}_3$	Best	
	ML	0.198	0.187	0.432		
	GP	0.467	0.239	0.223		
	Bayes	0.671	0.749	2.421		
	Bias	ML	87.6	89.3	69.3	Bayes
		GP	83.5	87.2	88.8	
		Bayes	67.4	63.3	44.5	
	SD	ML	34.58	36.66	33.35	Bayes

		GP	23.24	20.38	31.45	
		Bayes	34.78	18.56	25.45	
	RASE	ML	81.4	84.3	79.5	Bayes
		GP	55.2	54.3	51.5	
		Bayes	31.4	36.4	44.4	
	CP %	ML	41.5	41.4	49.3	Bayes
		GP	77.4	71.2	66.4	
		Bayes	80.7	81.4	83.4	
	75	ML	1.292		1.477	2.293
GP		1.447		1.455	2.356	
Bayes		0.654		0.676	2.791	
Bias		ML	81.2	84.3	85.4	GP
		GP	80.6	81.4	82.7	
		Bayes	91.9	92.7	87.8	
SD		ML	30.55	31.56	29.45	GP
		GP	18.33	16.01	22.41	
		Bayes	56.55	45.34	56.34	
RASE		ML	79.3	81.3	67.8	GP
		GP	49.4	50.4	41.5	
		Bayes	56.3	66.6	46.5	
CP		ML	80.5	84.7	78.9	GP
		GP	84.4	87.8	88.4	

		Bayes	54.3	61.5	71.4	
1000	ML	1.0322		1.045	2.111	
		1.168		1.132	2.286	
		0.071		0.043	4.211	
	Bias	ML	55.5	65.4	68.5	ML
		GP	76.4	77.3	75.5	
		Bayes	100.4	100.4	134.5	
	SD	ML	22.21	20.32	18.21	ML
		GP	25.44	23.34	33.21	
		Bayes	78.88	90.75	118.31	
	RASE	ML	39.6	41.7	41.8	ML
		GP	48.3	43.42	45.3	
		Bayes	110.4	118.8	119.4	
	CP	ML	96.9	98.8	97.6	ML
		GP	89.6	87.8	89.7	
		Bayes	36.2	33.2	45.2	

من جدول (5-3) يتضح ما يأتي:

1. عند الكمية المشاهدة $m=10$ تفوقت طريقة بيز في تقدير معاملات المعادلة التفاضلية الجزئية تليها طريقة العملية الكاوسية واخيراً طريقة الامكان الأعظم.

2. عند الكمية المشاهدة $m=100$ تفوقت طريقة العملية الكاوسية في تقدير معاملات المعادلة التفاضلية الجزئية. تليها طريقة الامكان الاعظم، واخيراً طريقة بيز في التقدير.
3. عند الكمية المشاهدة $m=1000$ تفوقت طريقة الامكان الاعظم في تقدير معاملات المعادلة التفاضلية تليها طريقة العملية الكاوسية، واخيراً طريقة بيز في التقدير.

جدول (3-5)

معلمات المعادلة التفاضلية الجزئية الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير الثلاث ومقدار التحيز (Bias) والانحراف المعياري (SD) والجذر التربيعي لمعدل مجموع مربعات الخطأ (RASE) ومدة التغطية (CP) عند الكميات المشاهدة $m = 10, 100, 1000$ للمعلمات المقدرة عند المعلمات الافتراضية عند المعلمات الافتراضية $\theta_1 = 6, \theta_2 = 4, \theta_3 = 3$

m	Parameters	θ_1	θ_2	θ_3		
	True	6	4	3		
10	Estimated	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$	$\hat{\theta}_3$	Best	
	ML	8.986	5.875	5.565		
	GP	7.777	6.567	6.787		
	Bayes	6.652	4.538	4.665		
	Bias	ML	44.8	45.9	56.8	Bayes
		GP	39.2	41.1	50.6	
		Bayes	30.5	31.5	32.7	

	SD	ML	56.55	65.78	56.88	Bayes
		GP	54.12	58.77	54.54	
		Bayes	44.44	43.54	46.78	
	RASE	ML	88.9	89.6	88.5	Bayes
		GP	84.3	87.4	85.4	
		Bayes	65.4	65.7	65.4	
	CP %	ML	77.6	76.5	65.4	Bayes
		GP	80.5	78.8	67.8	
		Bayes	89.5	87.5	88.8	
100	ML	5.465		6.674	4.453	
	GP	5.435		4.324	4.333	
	Bayes	7.889		4.787	4.898	
	Bias	ML	39.3	40.1	48.5	GP
		GP	36.6	36.9	45.7	
		Bayes	43.3	43.5	49.6	
	SD	ML	46.68	55.66	45.67	GP
		GP	45.67	56.78	44.56	
		Bayes	51.22	61.31	50.32	
	RASE	ML	85.3	77.5	80.4	GP
		GP	58.4	60.1	55.6	
		Bayes	82.1	85.5	79.5	
	CP	ML	89.8	89.7	85.9	GP

		GP	94.4	94.4	87.5	
		Bayes	54.5	65.7	66.6	
1000	ML	6.121		4.145	3.178	
	GP	5.978		4.314	3.314	
	Bayes	9.639		5.787	6.888	
	Bias	ML	27.5	38.6	32.3	ML
		GP	30.3	31.5	33.7	
		Bayes	35.5	40.3	38.4	
	SD	ML	36.44	35.33	36.44	ML
		GP	39.35	39.32	37.56	
		Bayes	44.57	46.56	37.44	
	RASE	ML	44.4	52.4	45.5	ML
		GP	45.1	53.3	48.4	
		Bayes	55.45	45.6	61.6	
	CP	ML	98.6	98.5	97.7	ML
		GP	97.6	97.8	96.5	
		Bayes	50.4	58.4	59.7	

(2) عند مستوى تشويش $\sigma=0.05$:

من جدول (6-3) يتضح ما يأتي:

1. عند الكمية المشاهدة $m=10$ تفوقت طريقة بيز في تقدير معاملات المعادلة التفاضلية الجزئية تليها طريقة الامكان الأعظم واخيراً العملية الكاوسية.

2. عند الكمية المشاهدة $m=50$ تفوقت العملية الكاوسية في تقدير معاملات المعادلة التفاضلية الجزئية. تليها طريقة الامكان الاعظم، واخيراً طريقة بيز في التقدير.
3. عند الكمية المشاهدة $m=1000$ تفوقت طريقة الامكان الاعظم في تقدير معاملات المعادلة التفاضلية تليها طريقة العملية الكاوسية، واخيراً طريقة بيز في التقدير.

جدول (3-6)

معلمات المعادلة التفاضلية الجزئية الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير الثلاث ومقدار التحيز (Bias) والانحراف المعياري (SD) والجذر التربيعي لمعدل مجموع مربعات الخطأ (RASE) ومدة التغطية (CP) عند الكميات المشاهدة $m = 10, 50, 1000$ للمعلمات المقدرة عند المعلمات الافتراضية $\theta_1 = 1, \theta_2 = 0.1, \theta_3 = 0.1$

m	Parameters	θ_1	θ_2	θ_3	Best	
	True	1	0.1	0.1		
10	Estimated	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$	$\hat{\theta}_3$	Best	
	ML	4.89	2.89	2.98		
	GP	1.85	1.79	1.65		
	Bayes	1.54	1.39	1.53		
	Bias	ML	89.27	89.89	89.52	Bayes
		GP	88.8	87.9	87.88	

		Bayes	55.7	54.5	54.8		
	SD	ML	47.58	45.66	45.66	Bayes	
		GP	44.23	46.56	47.34		
		Bayes	34.16	35.45	35.56		
	RASE	ML	88.7	98.8	99.6	Bayes	
		GP	87.5	78.8	78.5		
		Bayes	55.4	56.3	53.18		
	CP %	ML	45.5	44.8	45.8	Bayes	
		GP	56.5	57.8	54.9		
		Bayes	78.8	79.7	78.9		
	50	ML	2.20		1.21	1.77	
		GP	1.44		0.98	0.56	
Bayes		1.77		1.78	1.65		
Bias		ML	83.33	87.43	85.21	GP	
		GP	78.2	81.2	81.5		
		Bayes	87.6	89.9	89.6		
SD		ML	44.56	41.32	38.32	GP	
		GP	38.31	38.65	35.49		
		Bayes	77.32	65.67	66.22		
RASE		ML	78.8	77.2	78.5	GP	
		GP	74.3	70.5	69.8		
		Bayes	88.9	89.6	89.8		

	CP	ML	62.5	65.8	71.2	GP
		GP	87.1	76.9	77.4	
		Bayes	44.1	60.1	62.6	
1000	ML		1.15	0.18	0.13	
			0.96	1.26	1.12	
			1.99	1.89	1.92	
	Bias	ML	11.12	9.22	8.21	ML
		GP	12.2	10.2	9.1	
		Bayes	23.1	22.1	21.9	
	SD	ML	6.18	14.11	11.41	ML
		GP	9.26	17.22	15.12	
		Bayes	57.33	54.32	42.21	
	RASE	ML	16.3	20.1	12.8	ML
		GP	18.8	21.6	18.3	
		Bayes	55.7	50.3	57.4	
	CP	ML	99.1	99.2	98.8	ML
		GP	98.9	98.8	96.8	
		Bayes	43.4	46.6	59.8	

من جدول (7-3) يتضح ما يأتي:

4. عند الكمية المشاهدة $m=10$ تفوقت طريقة العملية الكاوسية في تقدير معاملات المعادلة التفاضلية الجزئية تليها طريقة بيز واخيراً طريقة الامكان الأعظم.

5. عند الكميات المشاهدة $m=25$ تفوقت طريقة بيز في تقدير معاملات المعادلة التفاضلية الجزئية. تليها طريقة العملية الكاوسية، واخيراً طريقة بيز في التقدير.
6. عند الكميات المشاهدة $m=1000$ تفوقت طريق العملية الكاوسية في تقدير معاملات المعادلة التفاضلية تليها طريقة الامكان الاعظم، واخيراً طريقة بيز في التقدير. ونلاحظ انه كلما زادت الكمية المشاهدة اقتربت طريقة الامكان الاعظم من طريقة العملية الكاوسية في تقدير معاملات المعادلة التفاضلية الجزئية.

جدول (7-3)

معلمات المعادلة التفاضلية الجزئية الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير الثلاث ومقدار التحيز (Bias) والانحراف المعياري (SD) والجذر التربيعي لمعدل مجموع مربعات الخطأ (RASE) ومدة التغطية (CP) عند الكميات المشاهدة $m = 10, 25, 1000$ للمعلمات المقدرة عند المعلمات الافتراضية $\theta_1 = 2, \theta_2 = 1, \theta_3 = 1$

m	Parameters	θ_1	θ_2	θ_3		
	True	2	1	1		
10	Estimated	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$	$\hat{\theta}_3$	Best	
	ML	2.99	1.89	1.86		
	GP	2.19	1.91	2.91		
	Bayes	2.51	1.34	1.53		
	Bias	ML	89.7	88.5	90.8	GP
		GP	78.7	70.8	66.8	

		Bayes	81.2	76.4	69.5		
	SD	ML	82.78	88.61	81.91	GP	
		GP	71.12	68.88	70.81		
		Bayes	77.66	71.89	73.77		
	RASE	ML	101.1	108.7	111.9	GP	
		GP	90.9	89.9	88.6		
		Bayes	99.7	98.3	97.6		
	CP %	ML	56.6	51.9	56.9	GP	
		GP	82.9	88.5	87.9		
		Bayes	71.5	76.1	81.1		
	25	ML	2.12		1.77	1.65	
		GP	1.34		1.60	1.66	
Bayes		1.98		1.21	1.29		
Bias		ML	88.4	86.7	87.4	Bayes	
		GP	77.3	65.6	66.7		
		Bayes	67.4	62.1	65.4		
SD		ML	67.78	68.77	71.34	Bayes	
		GP	68.22	66.45	68.46		
		Bayes	56.67	61.43	60.44		
RASE		ML	98.3	96.5	100.2	Bayes	
		GP	88.5	86.5	83.4		
		Bayes	76.4	80.2	89.7		

	CP	ML	57.7	53.2	57.5	Bayes
		GP	84.2	89.6	88.7	
		Bayes	89.7	91.6	90.1	
1000	ML	2.22		1.22	1.21	
		2.29		1.11	1.16	
		2.66		2.45	1.89	
	Bias	ML	61.1	61.9	60.2	GP
		GP	46.7	48.7	49.2	
		Bayes	83.6	85.6	87.6	
	SD	ML	51.41	52.78	45.22	GP
		GP	38.43	36.76	38.51	
		Bayes	84.5	86.3	85.9	
	RASE	ML	55.1	57.4	60.4	GP
		GP	42.3	46.4	42.4	
		Bayes	92.3	93.7	96.5	
CP	ML	95.9	96.8	97.5	GP	
	GP	99.7	98.9	99.6		
	Bayes	56.6	66.5	67.6		

من جدول (8-3) يتضح ما يأتي:

1. عند الكمية المشاهدة $m=10$ تفوقت طريقة العملية الكاوسية في تقدير معاملات المعادلة التفاضلية الجزئية تليها طريقة بيز واخيراً طريقة الامكان الأعظم.

2. عند الكمية المشاهدة $m=25$ تفوقت طريقة بيز في تقدير معلمات المعادلة التفاضلية الجزئية تليها طريقة العملية الكاوسية واخيراً طريقة الامكان الأعظم.

3. عند الكمية المشاهدة $m=1000$ تفوقت طريقة العملية الكاوسية في تقدير معلمات المعادلة التفاضلية تليها طريقة الامكان الاعظم، واخيراً طريقة بيز في التقدير.

جدول (8-3)

معلمات المعادلة التفاضلية الجزئية الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير الثلاث ومقدار التحيز (Bias) والانحراف المعياري (SD) والجذر التربيعي لمعدل مجموع مربعات الخطأ (RASE) ومدة التغطية (CP) عند الكميات المشاهدة $m = 10, 25, 1000$ للمعلمات المقدرة عند المعلمات

$$\theta_1 = 1, \theta_2 = 1, \theta_3 = 2$$

m	Parameters	θ_1	θ_2	θ_3		
	True	1	1	2		
10	Estimated	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$	$\hat{\theta}_3$	Best	
	ML	2.67	2.87	5.87		
	GP	2.29	1.11	1.14		
	Bayes	2.66	2.45	1.89		
	Bias	ML	144.4	134.4	145.7	Bayes
		GP	90.3	89.4	78.8	

		Bayes	88.9	87.3	77.1		
	SD	ML	127.34	128.67	126.56	Bayes	
		GP	110.45	118.55	128.43		
		Bayes	90.9	93.6	92.6		
	RASE	ML	189.3	176.3	157.9	Bayes	
		GP	109.5	130.3	129.5		
		Bayes	90.7	98.8	98.3		
	CP %	ML	67.3	67.4	62.2	Bayes	
		GP	87.8	85.4	82.6		
		Bayes	88.9	89.9	89.88		
	25		ML	2.31	2.56	3.31	
			GP	2.29	1.11	1.16	
		Bayes	1.87	1.15	2.39		
Bias		ML	127.2	114.7	125.4	Bayes	
		GP	89.2	87.5	77.3		
		Bayes	78.6	79.9	67.4		
SD		ML	127.32	111.32	117.34	Bayes	
		GP	109.66	108.65	120.32		
		Bayes	89.3	91.1	90.3		
RASE		ML	160.4	156.7	147.5	Bayes	
		GP	101.2	128.7	118.3		
		Bayes	97.3	82.3	90.6		

	CP	ML	65.2	64.4	60.6	Bayes
		GP	60.1	61.2	59.3	
		Bayes	87.4	83.6	81.56	
1000	ML	1.18		1.12	2.19	
		1.10		1.22	2.24	
		3.68		1.76	3.31	
	Bias	ML	45.1	49.6	47.4	GP
		GP	44.3	47.6	46.1	
		Bayes	77.2	76.4	71.3	
	SD	ML	45.47	51.56	55.44	GP
		GP	47.2	50.5	54.4	
		Bayes	66.41	70.54	65.55	
	RASE	ML	57.6	65.3	68.8	GP
		GP	55.3	63.3	62.4	
		Bayes	77.1	65.4	78.8	
	CP	ML	98.2	97.5	96.7	GP
		GP	98.5	98.5	97.7	
		Bayes	60.2	61.2	60.9	

من جدول (9-3) يتضح ما يأتي:

1. عند الكمية المشاهدة $m=10$ تفوقت طريقة بيز في تقدير معاملات المعادلة التفاضلية الجزئية تليها طريقة العملية الكاوسية واخيراً طريقة الامكان الأعظم.

2. عند الكمية المشاهدة $m=100$ تفوقت طريقة العملية الكاوسية في تقدير معلمات المعادلة التفاضلية الجزئية. تليها طريقة الامكان الاعظم، واخيراً طريقة بيز في التقدير.

3. عند الكمية المشاهدة $m=1000$ تفوقت طريقة الامكان الاعظم في تقدير معلمات المعادلة التفاضلية تليها طريقة العملية الكاوسية، واخيراً طريقة بيز في التقدير.

جدول (9-3)

معلمات المعادلة التفاضلية الجزئية الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير الثلاث ومقدار التحيز (Bias) والانحراف المعياري (SD) والجذر التربيعي لمعدل مجموع مربعات الخطأ (RASE) ومدة التغطية (CP) عند الكميات المشاهدة $m = 10, 100, 1000$ للمعلمات المقدرة عند المعلمات الافتراضية عند المعلمات الافتراضية $\theta_1 = 6, \theta_2 = 4, \theta_3 = 3$

m	Parameters	θ_1	θ_2	θ_3		
	True	6	4	3		
10	Estimated	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$	$\hat{\theta}_3$	Best	
	ML	9.45	6.66	5.54		
	GP	7.55	6.67	5.34		
	Bayes	6.32	4.56	3.52		
	Bias	ML	77.4	76.4	69.9	Bayes
		GP	72.7	75.5	70.3	

		Bayes	66.4	61.8	63.9		
	SD	ML	35.33	35.78	40.41	Bayes	
		GP	33.8	31.9	37.8		
		Bayes	25.33	30.31	32.23		
	RASE	ML	44.8	45.8	46.9	Bayes	
		GP	43.4	43.8	45.5		
		Bayes	39.8	40.2	40.3		
	CP %	ML	67.9	66.8	65.3	Bayes	
		GP	66.7	67.9	64.0		
		Bayes	78.8	79.9	78.4		
	100	ML	6.36		4.49	3.21	
		GP	6.45		4.56	3.43	
Bayes		8.87		5.55	6.98		
Bias		ML	56.1	56.1	55.8	GP	
		GP	54.2	52.4	50.4		
		Bayes	58.7	54.5	60.9		
SD		ML	19.44	21.39	20.39	GP	
		GP	18.2	19.7	19.2		
		Bayes	23.22	21.22	22.21		
RASE		ML	30.2	33.6	32.6	GP	
		GP	29.3	31.4	31.3		
		Bayes	33.1	34.4	33.5		

	CP	ML	85.3	86.8	86.01	GP
		GP	87.8	89.9	90.4	
		Bayes	71.3	67.4	61.4	
1000	ML	6.24		4.44	3.32	
		6.49		4.19	3.76	
		8.54		5.56	6.78	
	Bias	ML	20.1	17.2	20.6	ML
		GP	25.6	23.6	24.7	
		Bayes	30.2	30.5	32.3	
	SD	ML	10.22	11.21	11.39	ML
		GP	12.6	13.8	12.2	
		Bayes	15.47	15.67	15.33	
	RASE	ML	15.1	18.8	19.9	ML
		GP	18.4	18.9	20.4	
		Bayes	23.4	21.3	23.3	
	CP	ML	98.8	98.8	99.2	ML
		GP	96.5	96.7	97.5	
		Bayes	58.8	56.9	66.8	

(3) عند مستوى تشويش $\sigma=0.09$:

من جدول (3-10) يتضح ما يأتي:

1. عند الكمية المشاهدة $m=10$ تفوقت طريقة بيز في تقدير معلمات المعادلة التفاضلية الجزئية تليها طريقة العملية الكاوسية واخيراً طريقة الامكان الأعظم.
2. عند الكمية المشاهدة $m= 100,1000$ تفوقت طريقة العملية الكاوسية في تقدير معلمات المعادلة التفاضلية تليها طريقة الامكان الاعظم، واخيراً طريقة بيز في التقدير.
3. نلاحظ تقارب طريقة الامكان الاعظم من طريقة العملية الكاوسية عند زيادة الكمية المشاهدة.

جدول (10-3)

معلمات المعادلة التفاضلية الجزئية الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير الثلاث ومقدار التحيز (Bias) والانحراف المعياري (SD) والجذر التربيعي لمعدل مجموع مربعات الخطأ (RASE) ومدة التغطية (CP) عند الكميات المشاهدة $m = 10, 100, 1000$ للمعلمات المقدرة عند المعلمات الافتراضية $\theta_1 = 1, \theta_2 = 0.1, \theta_3 = 0.1$

m	Parameters	θ_1	θ_2	θ_3	Best	
	True	1	0.1	0.1		
10	Estimated	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$	$\hat{\theta}_3$	Best	
	ML	3.75	1.96	1.88		
	GP	1.33	1.42	1.43		
	Bayes	1.37	0.89	0.78		
	Bias	ML	25.23	25.77	24.67	Bayes
		GP	24.2	24.6	23.3	
		Bayes	22.1	21.8	20.1	
	SD	ML	30.23	31.23	30.44	Bayes

		GP	28.81	29.22	28.11	
		Bayes	26.23	27.56	26.33	
	RASE	ML	34.4	35.6	37.7	Bayes
		GP	32.2	31.3	33.3	
		Bayes	29.9	28.6	30.2	
	CP %	ML	34.2	39.6	40.3	Bayes
		GP	56.7	59.9	60.4	
		Bayes	90.9	91.5	92.2	
	100	ML	1.49		0.57	0.43
GP		1.30		0.33	0.71	
Bayes		2.09		1.19	1.77	
Bias		ML	13.87	15.12	15.33	GP
		GP	11.3	10.7	11.8	
		Bayes	14.7	14.3	17.2	
SD		ML	21.29	22.23	21.45	GP
		GP	20.71	18.77	18.47	
		Bayes	22.78	24.59	23.34	
RASE		ML	19.9	20.5	19.3	GP
		GP	15.5	15.6	14.2	
		Bayes	21.5	21.3	20.7	
CP		ML	67.8	70.9	71.5	GP
		GP	89.9	86.8	87.5	

		Bayes	65.4	68.4	66.9	
1000	ML		1.10	0.19	0.11	
		GP	1.11	0.21	0.18	
		Bayes	3.88	2.99	1.98	
	Bias	ML	3.22	4.56	3.32	GP
		GP	2.2	3.5	2.4	
		Bayes	5.7	6.8	8.6	
	SD	ML	5.22	7.56	9.45	GP
		GP	3.34	6.67	5.45	
		Bayes	9.67	8.78	9.76	
	RASE	ML	6.3	4.7	5.5	GP
		GP	4.5	4.1	4.8	
		Bayes	7.6	8.8	9.9	
	CP	ML	95.7	95.7	93.4	GP
		GP	98.8	96.5	95.7	
		Bayes	38.6	40.3	42.3	

من جدول (11-3) يتضح ما يأتي:

1. عند الكمية المشاهدة $m=10$ تفوقت طريقة بيز في تقدير معاملات المعادلة التفاضلية الجزئية تليها طريقة العملية الكاوسية واخيراً طريقة الامكان الأعظم.

2. عند الكمية المشاهدة $m=100$ تفوقت طريقة العملية الكاوسية في تقدير معاملات المعادلة التفاضلية الجزئية. تليها طريقة الامكان الاعظم، واخيراً طريقة بيز في التقدير.

3. عند الكميات المشاهدة $m=1000$ تفوقت طريق الامكان الاعظم في تقدير معلمات المعادلة التفاضلية تليها طريقة العملية الكاوسية، واخيراً طريقة بيز في التقدير.

جدول (11-3)

معلمات المعادلة التفاضلية الجزئية الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير الثلاث ومقدار التحيز (Bias) والانحراف المعياري (SD) والجذر التربيعي لمعدل مجموع مربعات الخطأ (RASE) ومدة التغطية (CP) عند الكميات المشاهدة $m = 10, 100, 1000$ للمعلمات المقدرة عند المعلمات

$$\theta_1 = 2, \theta_2 = 1, \theta_3 = 1$$

m	Parameters	θ_1	θ_2	θ_3		
	True	2	1	1		
10	Estimated	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$	$\hat{\theta}_3$	Best	
	ML	3.92	2.34	2.56		
	GP	2.56	1.78	1.38		
	Bayes	2.31	1.47	1.38		
	Bias	ML	77.44	67.78	79.69	Bayes
		GP	56.8	61.9	74.4	
		Bayes	51.2	57.6	71.5	
	SD	ML	79.79	89.77	80.78	Bayes
		GP	77.39	87.77	78.55	
		Bayes	73.45	71.67	73.5	
	RASE	ML	100.5	99.8	108.6	Bayes

		GP	98.6	88.9	99.6	
		Bayes	94.4	79.7	85.3	
	CP %	ML	56.6	66.4	64.7	Bayes
		GP	81.5	84.3	81.2	
		Bayes	89.9	88.7	84.7	
100	ML	2.23		1.44	1.38	
	GP	2.25		1.26	1.15	
	Bayes	2.87		1.88	1.73	
	Bias	ML	43.56	49.66	51.39	GP
		GP	42.5	44.3	43.3	
		Bayes	52.4	52.5	60.8	
	SD	ML	53.41	59.45	57.33	GP
		GP	47.58	50.22	53.45	
		Bayes	61.44	66.33	59.68	
	RASE	ML	53.1	59.3	58.3	GP
		GP	48.4	51.2	56.6	
		Bayes	62.4	65.8	65.6	
	CP	ML	89.8	88.9	90.1	GP
		GP	97.7	97.8	96.7	
		Bayes	55.4	58.9	72.5	
1000	ML	2.21		1.22	1.34	
	GP	2.35		1.33	1.31	

	Bayes	2.79		2.54	2.23	
	Bias	ML	27.1	31.4	33.7	ML
		GP	31.39	34.68	36.22	
		Bayes	41.7	41.7	41.8	
	SD	ML	38.64	41.54	37.45	ML
		GP	44.44	42.39	39.39	
		Bayes	50.33	48.56	40.21	
	RASE	ML	37.4	37.8	44.2	ML
		GP	40.9	38.8	45.3	
		Bayes	41.5	50.5	50.2	
	CP	ML	99.2	98.5	99.4	ML
		GP	96.7	98.9	97.9	
		Bayes	53.3	50.8	50.1	

من جدول (3-12) يتضح ما يأتي:

1. عند الكمية المشاهدة $m=10$ تفوقت طريقة بيز في تقدير معاملات المعادلة التفاضلية الجزئية تليها طريقة العملية الكاوسية واخيراً طريقة الامكان الأعظم.
2. عند الكمية المشاهدة $m=75$ تفوقت طريقة العملية الكاوسية في تقدير معاملات المعادلة التفاضلية الجزئية. تليها طريقة الامكان الاعظم، واخيراً طريقة بيز في التقدير.
3. عند الكمية المشاهدة $m=1000$ تفوقت طريقة العملية الكاوسية في تقدير معاملات المعادلة التفاضلية تليها طريقة الامكان الاعظم، واخيراً طريقة بيز في التقدير. ونلاحظ انه كلما زادت الكمية المشاهدة اقتربت طريقة العملية الكاوسية من طريقة الامكان الاعظم في تقدير معاملات المعادلة التفاضلية الجزئية.

جدول (12-3)

معلمات المعادلة التفاضلية الجزئية الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير الثلاث ومقدار التحيز (Bias) والانحراف المعياري (SD) والجذر التربيعي لمعدل مجموع مربعات الخطأ (RASE) ومدة التغطية (CP) عند الكميات المشاهدة $m = 10, 75, 1000$ للمعلمات المقدرة عند المعلمات

$$\theta_1 = 1, \theta_2 = 1, \theta_3 = 2$$
 الافتراضية

m	Parameters	θ_1	θ_2	θ_3		
	True	1	1	2		
10	Estimated	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$	$\hat{\theta}_3$	Best	
	ML	2.89	1.88	1.81		
	GP	2.66	1.76	1.99		
	Bayes	1.28	1.65	2.37		
	Bias	ML	110.11	120.47	118.8	Bayes
		GP	99.67	98.87	89.54	
		Bayes	78.9	88.7	89.3	
	SD	ML	64.7	67.78	69.67	Bayes
		GP	55.66	56.67	57.45	
		Bayes	54.21	54.67	56.44	
	RASE	ML	77.7	79.6	88.6	Bayes
		GP	67.5	66.9	69.9	
		Bayes	65.2	60.7	63.8	
	CP %	ML	65.6	64.3	66.5	Bayes

		GP	82.3	84.4	81.3	
		Bayes	87.7	88.9	81.9	
75	ML	2.56		1.83	1.73	
	GP	2.22		1.13	1.23	
	Bayes	1.88		1.83	2.87	
	Bias	ML	66.68	68.78	75.35	GP
		GP	63.44	67.78	73.32	
		Bayes	67.8	71.3	71.3	
	SD	ML	50.5	53.6	59.8	GP
		GP	38.44	39.48	48.44	
		Bayes	65.22	65.67	67.77	
	RASE	ML	51.2	56.5	55.5	GP
		GP	44.5	53.2	49.9	
		Bayes	53.6	54.7	54.3	
	CP	ML	89.8	88.9	91.2	GP
		GP	90.9	93.4	94.4	
		Bayes	66.6	65.8	71.4	
1000	ML	2.34		1.21	1.22	
	GP	2.11		1.26	1.08	
	Bayes	2.71		2.79	3.21	
	Bias	ML	42.22	48.65	55.31	GP
		GP	39.32	40.49	48.58	

	SD	Bayes	56.6	55.7	59.4	GP	
		ML	38.4	36.6	41.6		
		GP	38.44	37.45	29.38		
	RASE	Bayes	50.37	48.11	49.98	GP	
		ML	34.6	35.7	39.6		
		GP	33.3	34.6	30.8		
	CP	Bayes	40.3	38.7	40.2	GP	
		ML	96.4	97.4	97.9		
		GP	98.9	99.7	99.8		
			Bayes	53.4	51.5	56.9	

من جدول (13-3) يتضح ما يأتي:

1. عند الكمية المشاهدة $m=10$ تفوقت طريقة بيز في تقدير معاملات المعادلة التفاضلية الجزئية تليها طريقة العملية الكاوسية واخيراً طريقة الامكان الأعظم.
2. عند الكمية المشاهدة $m=75$ تفوقت طريقة الامكان الاعظم في تقدير معاملات المعادلة التفاضلية الجزئية. تليها طريقة العملية الكاوسية، واخيراً طريقة بيز في التقدير.
3. عند الكمية المشاهدة $m=1000$ تفوقت طريقة العملية الكاوسية في تقدير معاملات المعادلة التفاضلية تليها طريقة الامكان الاعظم، واخيراً طريقة بيز في التقدير.

جدول (13-3)

معلمات المعادلة التفاضلية الجزئية الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير الثلاث ومقدار التحيز (Bias) والانحراف المعياري (SD) والجذر التربيعي لمعدل مجموع مربعات الخطأ (RASE) ومدة

التغطية (CP) عند الكميات المشاهدة $m = 10, 75, 1000$ للمعاملات المقدرة عند المعلمات

الافتراضية عند المعلمات الافتراضية $\theta_1 = 6, \theta_2 = 4, \theta_3 = 3$

m	Parameters	θ_1	θ_2	θ_3		
	True	6	4	3		
10	Estimated	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$	$\hat{\theta}_3$	Best	
	ML	8.56	6.76	4.87		
	GP	6.78	4.88	3.77		
	Bayes	6.43	4.31	3.38		
	Bias	ML	127.27	133.12	110.34	Bayes
		GP	110.43	117.34	108.65	
		Bayes	96.7	87.9	89.8	
	SD	ML	99.19	98.22	100.5	Bayes
		GP	88.41	87.56	87.44	
		Bayes	77.17	78.66	73.65	
	RASE	ML	66.8	65.5	63.7	Bayes
		GP	63.4	62.8	60.9	
		Bayes	60.2	59.8	56.8	
	CP %	ML	88.9	87.9	84.48	Bayes
		GP	91.3	93.5	92.1	
		Bayes	94.8	95.5	96.4	
	75	ML	6.43	4.44	3.29	

	GP	6.54		4.55	3.49		
	Bayes	7.96		4.89	8.99		
	Bias	ML	71.6	79.4	78.6	ML	
		GP	78.78	82.79	85.77		
		Bayes	87.60	85.8	86.88		
	SD	ML	54.26	62.66	68.9	ML	
		GP	56.55	70.22	70.34		
		Bayes	65.56	78.78	76.78		
	RASE	ML	44.5	43.9	52.2	ML	
		GP	45.5	46.4	53.1		
		Bayes	51.3	54.5	56.7		
	CP	ML	98.6	97.7	94.3	ML	
		GP	93.9	95.7	93.4		
		Bayes	78.9	86.6	80.5		
	1000	ML	6.28		4.25	3.31	
		GP	6.10		4.11	3.13	
		Bayes	9.21		7.37	5.21	
		Bias	ML	51.3	43.3	53.1	GP
GP			23.23	24.11	28.33		
Bayes			60.43	64.66	68.67		
SD		ML	39.44	48.65	45.66	GP	
		GP	35.66	40.66	40.43		

	RASE	Bayes	51.44	44.66	57.65	GP	
		ML	30.2	30.8	36.7		
		GP	22.7	26.4	31.2		
	CP	Bayes	44.7	50.5	48.6	GP	
		ML	98.8	98.9	98.6		
		GP	99.9	99.9	99.9		
		CP	Bayes	50.7	66.8	67.5	GP
			ML	98.8	98.9	98.6	
			GP	99.9	99.9	99.9	

ويمكن تلخيص عدد مرات الافضلية ونسب الافضلية لطرائق التقدير في الجدول (14-3) الاتي:

جدول (14-3) افضلية طرائق التقدير عند مستويات التشويش الابيض المختلفة

σ	الطريقة	حجم العينة									عدد مرات الافضلية	نسبة الافضلية
		10	25	50	75	100	150	200	500	1000		
0.01	MLE	0	0	1	1	2	3	4	4	4	19	53
	GP	0	1	2	3	2	1	0	0	0	9	25

	Bayes	4	3	1	0	0	0	0	0	0	8	22
0.05	MLE	0	0	0	1	2	1	1	2	2	9	25
	GP	1	0	4	3	2	3	3	2	2	20	56
	Bayes	3	4	0	0	0	0	0	0	0	7	19
0.09	MLE	0	0	1	1	0	0	1	1	1	5	14
	GP	0	0	1	3	4	4	3	3	3	21	58
	Bayes	4	4	2	0	0	0	0	0	0	10	28

يتضح من جدول (3-14) ما يأتي:

1. تفوق طريقة بيز في التقدير على باقي طرائق التقدير عند احجام الكميات المشاهدة ($m=10,25$) لجميع تجارب المحاكاة.
2. عند مستوى تشويش (0.01) تفوقت طريقة الامكان الاعظم على باقي طرائق التقدير عند احجام الكميات المشاهدة ($m=100, 150,200,500,1000$) بنسبة افضلية (53%) . تليها طريقة العملية الكاوسية بنسبة افضلية (25%) عند احجام الكميات المشاهدة ($m=50,75$) ومن ثم طريقة بيز بنسبة افضلية (22%) عند احجام الكميات المشاهدة ($m=10, 25, 50$)
3. عند مستوى تشويش (0.05) تفوقت طريقة العملية الكاوسية على باقي طرائق التقدير عند احجام الكميات المشاهدة ($m=50, 75, 100, 150,200,500,1000$) بنسبة افضلية (56%). تليها طريقة الامكان الاعظم بنسبة افضلية (25%) ومن ثم طريقة بيز بنسبة افضلية (19%).
4. عند مستوى تشويش (0.09) تفوقت طريقة العملية الكاوسية على باقي طرائق التقدير عند احجام الكميات المشاهدة ($m=50, 75, 100, 150,200,500,1000$) بنسبة افضلية (58%). تليها طريقة بيز بنسبة افضلية (28%) ومن ثم طريقة الامكان الاعظم بنسبة افضلية (14%).

3-3 القسم الثاني: الجانب التطبيقي

1-3-3 تمهيد preface:

تناول هذا القسم محاكاة سلوك فايروس Covid-19 للتعرف على سلوكه الحقيقي وذلك بأعتماد بيانات حقيقية خاصة بمرضى فايروس Covid-19 باستعمال طريقة بيز التي عرضت في الجانب النظري من هذه الرسالة على الانموذج الذي يمثل سلوك الفايروس لغرض تقدير معالمته والتي تم التوصل الى افضليتها من بين الطرائق المستعملة في الرسالة بالاعتماد على نتائج تجارب المحاكاة .

2-3-3 نمذجة ديناميكية الفايروس لـ Covid-19 (26)،(63)،(33)،(45)،(36)**(Modeling of Viral Dynamics in Covid-19)**

تعد دراسة ديناميكية الفايروس في Covid-19 ذات أهمية كبيرة لأنها توفر نظرة ثاقبة في عملية سلوك الفايروس والخلايا المصابة والقضاء عليه في أثناء تناول جرعات العلاج المضاد للفايروسات ، كذلك يمكن استعمال تقديرات المعلومات الديناميكية الفيروسية لتحديد عمر هذه الفايروسات وذلك لتقدير كمية الجرعات العلاجية التي يحتاجها المريض وتقييم فعالية هذه الجرعات من العلاج إذ ان فايروس Covid-19 وجوده قد يؤدي الى أمراض خطيرة مثل تليف الرئة ومن ثم الوفاة. ولقد تحسنت العلاجات المضادة للفايروسات ومع ذلك قد ينتعش الفايروس من جديد بعد التوقف عن العلاج ما أدى الى ضرورة التعمق اكثر لمعرفة التسبب في الإصابة بهذه الفايروسات ودراسة سلوكها ونمذجتها.

انتشر مرض (COVID-19) في انحاء العالم كافة، وهو مرض معدي تسببه الإصابة بفايروس كورونا (SARS-CoV-2) ، والذي سبب جائحة فايروس كورونا العالمية . وقد تم استعمال الكثير من النماذج الرياضية لدراسة السمات المسببة لمرض عدوى SARS-CoV-2 عن طريق فحص التفاعل بين الفايروس والخلايا والاستجابات المناعية. أن الديناميكيات الفيروسية لعدوى SARS-CoV-2 لها عدة مراحل مميزة. ففي المرحلة الأولية يزداد الحمل الفيروسي بسرعة ويصل إلى الذروة ، تليها مرحلة تلاشي الفايروس(الاضمحلال) التي يُحتمل أن تنتجها الخلايا للمفاوية كهدف ثانوي للعدوى. وفي المرحلة الأخيرة ينخفض الحمل الفيروسي بسبب ظهور الاستجابات المناعية التكيفية.

ويمكن أن تؤدي الإصابة ب (Covid-19) إلى تلف الخلايا التي يدخلها . والذي يتكون عادة من ثلاثة مراحل: المرحلة النضحية ، المرحلة التكاثرية ، والمرحلة التليفية. في المرحلة النضحية ، يتم تجنيد

الخلايا المناعية في الرئة ، ما يتسبب في تراكم السوائل في مجال الرئة. والذي يمنع بدوره الحويصلات الهوائية من البقاء مفتوحة لتبادل الغازات. وتتميز المرحلة التكاثرية بتجديد الخلايا الظهارية السخية من النوع الثاني (الخلايا الرئوية). عند التكاثر ، تنقل الخلايا الظهارية من النوع الثاني الى الخلايا الرئوية وتحدث التهاباً مفرط النشاط يعزز بشكل كبير التفاعل النضحي. ومن ثم قد تواجه الخلايا الرئوية تأخيراً كبيراً في اداء عملها. فضلاً عن ذلك ، ان مايقارب 30% من المصابين بفايروس COVID-19 لا تظهر عليهم أعراض الاصابة، لأن مراحل تطور الفايروس لا تظهر عليهم ، لذلك يمكن أن يكون تكاثر الخلايا الرئوية عند الحد الأدنى. لذلك ، عند دراسة الديناميكيات الفيروسية في المرحلة المبكرة من العدوى ، فان ذلك يتطلب معرفة هيئة تكاثر وموت الخلايا الرئوية في انموذج مبسط ليتناسب مع البيانات.

استعملت في هذه الرسالة ثلاثة نماذج لدراسة ديناميكية فايروس Covid-19 ، الأول هو الانموذج الاساسي البسيط والذي يتضمن فقط الخلايا المستهدفة والخلايا المصابة بالفايروس وتم استعمال التباينات في الانموذج لدراسة الديناميكيات داخل المضيف للعديد من حالات العدوى الفايروسية مثل فايروس نقص المناعة المكتسبة والتهاب الكبد الفايروسي والانفلونزا . اما الأنموذج الثاني فقد تضمن مرحلة تلاشي (اضمحلال) الفايروس الذي كان في الإنموذج الأول الأساسي، والثالث تضمن مجموعة الخلايا المستهدفة الثانوية للفايروس المعدي.

لذلك فان العناصر الرئيسية في ديناميكية الاصابة بفايروس (Covid-19) هي :

1. الخلايا المستهدفة (غير المصابة) (Uninfected cells) (أي الخلايا التي لم تصب بالفايروس بعد وهي معرضة للأصابة) والتي يتم ترميزها بالحرف T.
2. الخلايا المصابة (Infected cells) وتنتج هذه الخلايا من الخلايا التي تُستهدف بالفايروس ويرمز لها بالحرف I
3. الحمل الفيروسي (Viral load) وهو معدل الكتلة الحركية للفايروس ويرمز له بـ BVT .

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\beta VT \quad \dots(3-83)$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \beta VT - \delta I \quad \dots(3-84)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = PL - CV \quad \dots(3-85)$$

اذ أن :

T الخلايا المستهدفة

V المسبب للعدوى وهو الاصابة بفايروس Covid-19

I الخلايا المصابة المتولدة من جراء العدوى بالفايروس Covid-19

βVT معدل الكتلة الحركية للفايروس

δ معدل الوفاة للفايروس

P معدل انتاج الفايروسات في كل خلية مصابة

C معدل اضمحلال الفايروس

اذ أن الخلايا المستهدفة T التي يفترض بان تصاب بالعدوى V والتي تولد الخلايا I بمعدل حركي βVT وتموت بمعدل δ والتي تنتج الفايروسات التاجية بمعدل P لكل خلية مصابة بمعدل تلاشي للفايروس التاجي C.

ولانموذج بمرحلة اضمحلال من الدرجة الأولى والذي يتضمن اربعة متغيرات هي الخلايا المستهدفة T والخلايا المصابة في مرحلة الاضمحلال الأولى I_1 وتنتج خلايا مصابة I_2 والفايروس V ، إذ أن الخلايا المستهدفة التي تصاب بالعدوى وتدخل المرحلة الأولى (مرحلة الاضمحلال) إذ عندها لا تنتج فايروسات. وهي تعمل على انتاج الخلايا المصابة I_2 بمعدل انتقال K ويكون الانموذج الديناميكي كالاتي:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\beta VT$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial t} = \beta VT - K I_1 \quad \dots (3-86)$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial t} = K I_1 - \delta I_2 \quad \dots(3-87)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = P I_2 - CV \quad \dots(3-88)$$

وقد وجدت دراسة جديدة إصابة الخلايا اللمفاوية T بفيروس Covid-19 لذلك تم تضمين الخلايا اللمفاوية كمجموعة خلايا مستهدفة ثانوية في الانموذج الأساس وكالاتي:

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = -\beta VT_1 \quad \dots(3-89)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = \lambda - \beta VT_1 \quad \dots(3-90)$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \beta V(T_1 + T_2) - [\delta(t) + wT_2]I \quad \dots(3-91)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = PI - CV \quad \dots(3-92)$$

إذ أن:

T_1 تركيز الخلايا الرئوية

T_2 تركيز الخلايا اللمفاوية إذ يوجد هنا مستوى ثابت نسبياً من الخلايا اللمفاوية في جسم الشخص السليم. كما أن دوران الخلايا اللمفاوية غير المصابة بطيء أيضاً.

λ معدل ثابت يمثل تجنيد الخلايا اللمفاوية إلى موقع الإصابة بسبب الاستجابة الالتهابية في الرئة.

β معدل عدد الخلايا اللمفاوية والخلايا الرئوية المصابة بالفيروس

δ معدل الوفاة للفايروس

P معدل انتاج الفايروسات في كل خلية مصابة

C معدل اضمحلال الفايروس

تتكون الخلايا اللمفاوية بشكل أساس من الخلايا المستهدفة T والخلايا β والخلايا القاتلة الطبيعية (NK). تنظم الخلايا T الاستجابات المناعية الفطرية والتكيفية. تنتج الخلايا β أجساماً مضادة ويمكن للخلايا القاتلة الطبيعية NK التعرف على الخلايا المجهدة وقتلها في غياب الأجسام المضادة. بسبب نقص البيانات عن الاستجابات المناعية الفطرية والتكيفية لتكوين الإنموذج ، نفترض أن تركيز الخلايا اللمفاوية يتناسب مع الاستجابة المناعية الفطرية ونستعمل المصطلح $\omega T_2 I$ ، ω لتمثيل إزالة الخلايا المصابة عن طريق الاستجابة المناعية الفطرية. يُفترض أن الاستجابة المناعية التكيفية تنشط في اليوم μ ويزداد معدل وفيات الخلايا المصابة من المعدل الأساس δ_I ، باتباع دالة أسية δ_I

$\text{Exp}(\sigma(t - \mu))$ ، إذ ان σ تحدد مدى سرعة زيادة معدل الوفيات. وان $\delta(t)$ ، هي δ_I عندما $t > \mu$ وهي $\delta_I \text{Exp}(\sigma(t - \mu))$ عندما $t \geq \mu$. وعلى الرغم من أنه يمكننا استعمال دالة التشبع لتعيين الحد الأقصى لمعدل الوفيات ، كما هو مستعمل فإنه سيتم اضافة معلمة للتقدير من ملاءمة البيانات. نظرًا لأننا نهدف إلى نمذجة القضاء الفيروسي في نهاية العدوى ، فإن الدالة المتزايدة بشكل كبير تكون معقولة لهذا الغرض.

ولغرض محاكاة الانموذج (4-91) تم تثبيت معدل الوفيات الأساسي للخلايا المصابة (δ_I) ليكون خليتين في اليوم ومعدل تجنيد الخلايا الليمفاوية (λ) ليكون 10^4 خلية لكل ملتر في اليوم . ويبلغ العدد الإجمالي لخلايا الحويصلات الهوائية داخل الإنسان مايقارب 6×10^8 خلية. تشكل الخلايا الرئوية من النوع الثاني 60% من إجمالي الخلايا السنخية ، ويبلغ حجم الرئة مايقارب 6000 مل. ومن ثم ، يتم اختيار القيمة الأولية للخلايا الرئوية لتكون $60 \times 6 \times 10^8 = 3.6 \times 10^{10}$ (خلية / مل) والقيمة الأولية للخلايا الليمفاوية في موقع الإصابة هي 0. اي لا توجد خلايا مصابة في الوقت الابتدائي. وتم ملائمة النماذج مع بيانات الحمل الفيروسي المستخرج من اللعاب عن طريق المسحة لاشخاص بلغ عددهم (15) شخصاً مصاباً بالفايروس . ونظرًا لأن الكثير من العدوى المبكرة تحدث في الرئة ولا تنتقل سوى نسبة صغيرة من الفيروسات إلى السائل الرئوي فورًا بعد الإصابة ، نفترض أن $V(0)$ هو تركيز فيروسي أولي فعال ونختار قيمة $V(0)$ من 10^{-6} إلى 10^{-3} نسخ من الحمض النووي الريبي / مل ، والتي يمكن أن تولد أفضل النوبات. ويتم تقدير بقية المعلمات عن طريق تركيب النماذج على بيانات الحمل الفيروسي.

وقد تبين ان أفضل ما يناسب البيانات من الجهاز التنفسي باستعمال الانموذج (3-91) موضحة في جدول (15-3) لخمسة عشر مريضاً مصابين بفايروس (Covid-19)

جدول (15-3) ملائمة الانموذج (3-91) لبيانات الجهاز التنفسي للمصابين بفايروس Covid-19

Patient	β (ml/virus/day)	p per day	c per day	ω (ml/cell/day)	σ per day	V(0) RNA/ml	μ	AIC
1	5.9×10^{-7}	7.9×10^5	18	2.1×10^{-4}	10^{-3}	10^{-3}	9	-4.262035
2	4.9×10^{-6}	1.3×10^6	40	1.6×10^{-4}	0.15	10^{-4}	7	-1.533223
3	2.3×10^{-6}	1.2×10^3	5.5	10^{-3}	0.11	10^{-3}	10	-13.22877
4	8.9×10^{-7}	5.7×10^3	5.5	1.2×10^{-3}	0.51	10^{-4}	7	6.682511
7	1.1×10^{-6}	1.1×10^3	208	4.4×10^{-4}	0.10	10^{-3}	8	2.231213
8	7.1×10^{-7}	1.2×10^5	111	4×10^{-5}	0.11	10^{-4}	5	6.927564

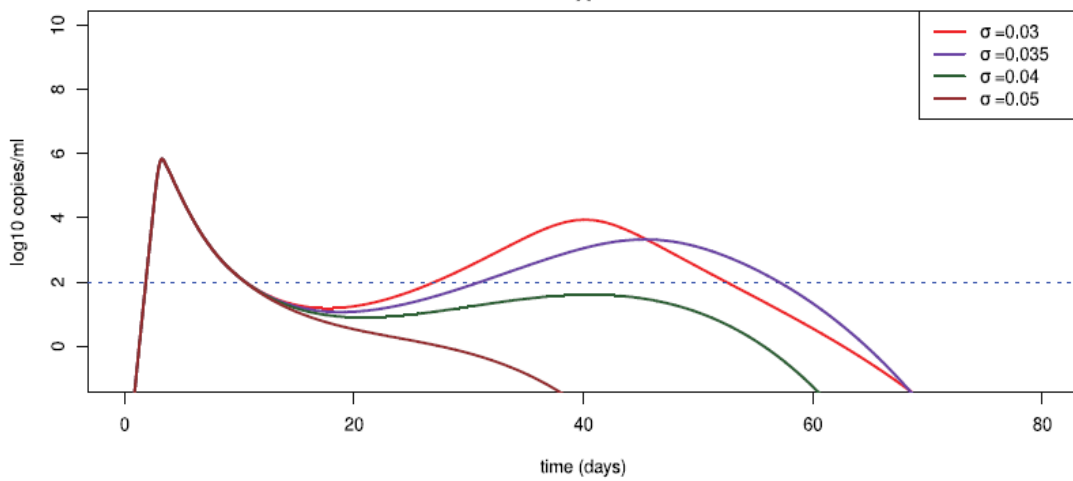
9	6.6×10^{-3}	4.5×10^6	112	5×10^{-5}	0.22	10^{-6}	6	8.675554
10	5.6×10^{-5}	7.3×10^7	116	6×10^{-6}	1.26	10^{-5}	7	7.698683
11	1.2×10^{-7}	1.5×10^4	5.9	1.6×10^{-3}	0.66	10^{-4}	6	6.654738
12	10.1×10^{-5}	3.1×10^5	3.1	1.7×10^{-3}	0.41	10^{-2}	5	5.487921
13	5.8×10^{-5}	6.2×10^7	115	5×10^{-6}	1.43	10^{-5}	6	7.897756
14	1.2×10^{-6}	2.8×10^2	190	5.1×10^{-5}	1.12	10^{-1}	5	3.458893
15	5.1×10^{-7}	5.2×10^5	11	3.1×10^{-4}	10^{-3}	10^{-3}	8	-5.334569

من جدول (3-15) ان الانموذج (91-3) ملائم بشكل كبير لبيانات الاصابات بفايروس Covid-19. إذ أن هذا الانموذج يظهر انخفاضاً فيروسيًا أحادي الطور بعد الذروة. هذا لا يتوافق مع الاضمحلال الفيروسي أو حتى الذروة الثانية التي لوحظت في بعض المرضى. ولا يستعمل معدلاً ثابتاً لوصف إزالة الخلايا المصابة. ولا يستعمل معدلاً ثابتاً والذي ينجح في تفسير الاضمحلال الفيروسي والانخفاض اللاحق للحمل الفيروسي الذي لوحظ في المرضى.

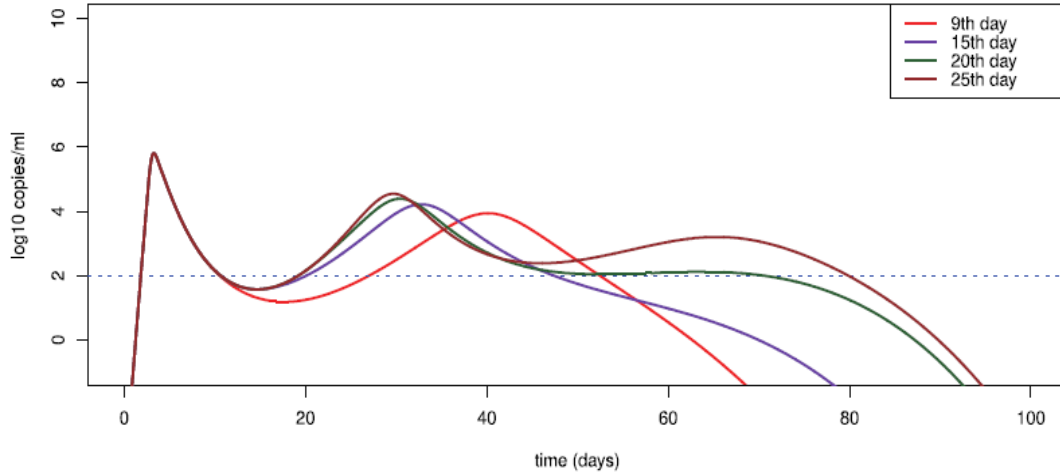
تُظهر عملية المحاكاة للانموذج (91-3) أن الديناميكية الفيروسية لعدوى Covid-19 يمكن أن تظهر في عدة مراحل مميزة في المرحلة الأولى، تصاب الخلايا المستهدفة الأولية وتستهلك بسرعة. يواجه الحمل الفيروسي زيادة كبيرة في مستوى الذروة. هذا يتفق مع البيانات السريرية التي لوحظت من بداية متلازمة الضائقة التنفسية الحادة وبعد الذروة الفيروسية ينخفض الحمل الفيروسي قليلاً ويدخل مرحلة الاضمحلال إذ يظل الحمل الفيروسي دون تغيير تقريباً أو ينخفض ببطء. وان مرحلة الاضمحلال الفيروسي هذه هي إصابة الخلايا اللمفاوية كهدف ثانوي. فبدون إصابة الخلايا اللمفاوية، سيستمر فيروس SARS-CoV-2 في إصابة الخلايا الرئوية واستنفادها. نتيجة لذلك، سينخفض الحمل الفيروسي بسرعة ويفقد الفرد المصاب قابلية الشفاء. بعد استمرار الحمل الفيروسي لمدة من الوقت (على سبيل المثال أسبوع في بعض المرضى)، تلحق المرحلة اللاحقة ظهور الاستجابة المناعية التكيفية. مقارنة الفايروس بعد مايقارب أسبوعاً من ظهور متلازمة الضائقة التنفسية الحادة في مرضى COVID-19. في هذه المرحلة، ينخفض الحمل الفيروسي بسرعة إلى مستوى لا يمكن اكتشافه. وهذا يتفق أيضاً مع المرضى الذين تمت متابعتهم. ويظهر جدول (3-15) ان معدل الإنتاج الفيروسي والاستجابة المناعية (الموصوفة بواسطة ω و σ) كبيرة جداً. وهذا يتفق مع مسار انتشار فيروس SARS-CoV-2 من إنسان إلى آخر. ينتقل الفيروس من مضيف إلى آخر عن طريق هواء الزفير أو الرذاذ التنفسي أو رذاذ الجسيمات الدقيقة. تحدث العدوى الأولية لـ SARS-CoV-2 في

الجزء التنفسي العلوي بينما يحدث النسخ المتماثل المنتظم داخل الرئة. ويشير هذا إلى أن ارتداء قناع الوجه (الكمامة) هو وسيلة فعالة لمنع انتقال SARS-CoV-2 من الأفراد المصابين.

ان العملية البيولوجية الكامنة وراء الارتداد الفيروسي غير معروفة. وتوضح المحاكاة التي تم اجرائها أنه إذا كانت قيمة σ صغيرة وهي المعلمة التي تحدد مدى سرعة معدل وفاة الخلايا المصابة والذي يزداد مع ظهور الاستجابة المناعية التكيفية وكما موضح في شكل (1-3) ، أي أن معدل إزالة الخلايا المصابة يزداد ببطء مع ظهور الاستجابة المناعية التكيفية ، عندئذ يتم توقع ذروة فيروسية ثانية لأن الاستجابة المناعية التكيفية ليست كافية للتحكم في تكاثر الفيروس. ومن ثم ، يمكن ملاحظة الارتداد الفيروسي الذي يستمر لمدة من الزمن. مع زيادة $\delta(t)$ إلى ما فوق مستوى معين ، سينخفض الحمل الفيروسي مرة أخرى ويتم التخلص منه في النهاية . ويؤثر توقيت ظهور الاستجابة المناعية التكيفية أيضًا في ارتداد الفيروس واستمراره. إذا تم تنشيط الجهاز المناعي التكيفي لاحقًا ، فيمكن أن يستمر الحمل الفيروسي عند مستوى أعلى لمدة أطول (2-4).



شكل (1-3) الديناميكيات الفيروسية المتوقعة بقيم مختلفة لـ σ



شكل (2-3) إعادة انتعاش الفيروس واستمراره بافتراض تنشيط الاستجابة المناعية التكيفية في اليوم 9 و 15 و 20 و 25 على الترتيب. تم تثبيت المعلمة σ لتكون 0.03/يوم

1-2-3-3 وصف البيانات الحقيقية :

البيانات التي تم اعتمادها تمثل كمية الخلايا اللمفاوية والتي هي جزء مهم من نظام المناعة وهي مصنوعة من لدن الجهاز المناعي لمحاربة الأمراض وهي خلايا كتلة التمايز CD4+ وخلايا CD8+T في جسم الشخص المصاب بمقاسة بالميكرو لتر وقياسات لكمية الفيروس Covid-19 في الرئة او ما يسمى بالحمل الفيروسي والتي تم الحصول عليها من دائرة صحة كربلاء /مشفى الحسين التعليمي لغرض تطبيق طرائق التقدير لغرض المقارنة بين الاختلافات في ديناميكية الفيروس للمرضى لغرض تطبيق الانموذج (91-3) والبيانات مبينة في الجدول الاتي :-

جدول (16-3) قياسات خلايا (T) (خلايا كتلة التمايز CD4+ + خلايا CD8+T) وقياسات الحمل

الفايروسى (βVT) للمرضى المصابين بفايروس Covid-19

Patient	T	βVT	Patient	T	βVT
1	8216	70	16	9842	89
2	7832	60	17	8515	56
3	8669	67	18	7991	49
4	8864	82	19	8499	82

5	8946	85	20	8877	26
6	9376	61	21	9213	56
7	9110	54	22	8101	36
8	8042	40	23	8444	34
9	9867	21	24	9227	27
10	8392	21	25	9116	35
11	8199	76	26	8598	64
12	8517	35	27	8394	56
13	8147	49	28	7872	44
14	9053	74	29	9620	27
15	8528	20	30	9284	31

2-2-3-3 تقدير معلمات إنموذج COVID-19 في البيانات الحقيقية :

تم تقدير معلمات الانموذج (91-3) باستعمال طريقة التقدير التي عرضت في الجانب النظري من هذه الدراسة والتي تفوقت على طريقة الامكان الاعظم (ML) وطريقة العملية الكاوسية (GP) في الجانب التجريبي وهي طريقة بيز (Bayes) لتفسير ديناميكية الفايروس بالجسم وحسب تحليل نتائج المرضى الواردة في الجدول (3-16) كانت نتائج تقدير المعلمات لأنموذج المعادلة التفاضلية الجزئية للمرضى المصابين بفايروس COVID-19 كالاتي:

جدول (3-17) معدل القيم التقديرية لمعلمات الانموذج التفاضلي الجزئي وفق طريقة بيز

Patient	method	$\hat{\lambda}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\delta}$	\hat{P}	\hat{C}
1	Bayes	6.5466	2902	0.6577	1.5112	12.4519
2	Bayes	7.4990	2878	0.7644	1.3333	13.5892

3	Bayes	8.4990	2878	0.7644	1.3333	12.5892
4	Bayes	7.3448	3123	0.6686	2.4352	10.6555
5	Bayes	8.4533	3129	0.6667	2.5666	11.5098
6	Bayes	12.3433	3367	0.7688	2.8756	12.7654
7	Bayes	12.6755	4033	0.8977	0.7833	10.5655
8	Bayes	11.5690	3690	0.6678	0.8525	11.8985
9	Bayes	11.7899	3487	0.4579	0.6722	11.7032
10	Bayes	10.6787	3313	0.5433	0.8222	13.5665
11	Bayes	12.9988	3567	0.6757	0.5466	13.5464
12	Bayes	12.8988	3280	0.6788	0.5678	13.4309
13	Bayes	10.2311	3453	0.6543	0.4097	11.8765
14	Bayes	11.7865	3788	0.8284	0.6690	12.5544
15	Bayes	12.7565	3577	0.4991	0.5653	12.7866
16	Bayes	12.4529	4475	0.9598	0.3361	12.8655
17	Bayes	13.4353	4556	0.9875	0.6904	12.4563
18	Bayes	12.5764	3125	0.5463	0.4353	12.5555
19	Bayes	8.7422	2376	0.2242	0.0685	1.5744
20	Bayes	12.8743	3321	0.7933	0.6882	12.6423
21	Bayes	12.4578	2399	0.8289	0.6999	12.1332
22	Bayes	12.4577	4803	0.4444	0.6893	10.3456
23	Bayes	12.7853	3495	0.8906	0.7786	12.1254
24	Bayes	12.4346	4363	0.3873	0.6686	12.2222
25	Bayes	12.3456	3489	0.9875	0.7655	12.6323
26	Bayes	14.5697	4908	0.3113	0.2527	8.5785
27	Bayes	12.3264	2453	0.4353	0.3434	8.8965
28	Bayes	12.5453	3457	0.5678	0.5678	13.5755
29	Bayes	14.4455	5699	0.2133	0.3345	5.7866

30	Bayes	12.5666	3349	0.8859	0.9786	12.9866
----	-------	---------	------	--------	--------	---------

نلاحظ من جدول (17-3) ما يأتي:

1. ان معدل تجنيد الخلايا الليمفاوية إلى موقع الإصابة بسبب الاستجابة الالتهابية في الرئة يوميا $(\lambda \hat{=} 11.86712)$ ولجميع المرضى المصابين بفايروس COVID-19 . وان ادنى معدل تجنيد الخلايا الليمفاوية هو $(\lambda \hat{=} 6.5466)$ و اعلى معدل تجنيد هو $(\lambda \hat{=} 14.6575)$
2. معدل عدد الخلايا الليمفاوية والخلايا الرئوية المصابة بالفايروس ولجميع المرضى بلغ $(\beta \hat{=} 3556)$. وان ادنى معدل لعدد الخلايا الليمفاوية والخلايا الرئوية المصابة بالفايروس هو $(\beta \hat{=} 2290)$ و اعلى معدل هو $(\beta \hat{=} 5699)$.
3. معدل موت الفايروس (وفاة الفايروس) عند جميع المرضى بلغ $(\delta \hat{=} 0.64342)$ وان ادنى معدل لوفاة الفايروس هو $(\delta \hat{=} 0.1233)$ و اعلى معدل هو $(\delta \hat{=} 0.9907)$.
4. معدل إنتاج الفايروسات في كل خلية مصابة لجميع المرضى بلغ $(\hat{P} = 0.98118)$ وان ادنى معدل لوفاة الفايروس هو $(\hat{P} = 0.0685)$ و أعلى معدل هو $(\hat{P} = 3.9987)$.
5. معدل إضمحلال الفايروس لجميع المرضى بلغ $(\hat{P} = 10.73775)$ وان ادنى معدل لاضمحلال الفايروس البالغ $(\hat{P} = 5.674)$ و أعلى معدل هو $(\hat{P} = 13.5776)$.

الفصل الرابع

الاستنتاجات والتوصيات

الاستنتاجات والتوصيات

سيتم في هذا الفصل تقديم أهم الاستنتاجات والتوصيات التي تم التوصل إليها لدى الباحث فيما يخص الجانب التجريبي والجانب التطبيقي وبعض الدراسات المستقبلية للاستفادة منها .

1-4 الاستنتاجات :

- 1- أظهر الجانب التجريبي وبالاعتماد على المعايير الاحصائية المذكوره أنفاً تفوق طريقة بيز (Bayes) على كل من طريقة الامكان الاعظم وطريقة العملية الكاوسية في العينات الصغيره .
- 2- نلحظ عند زيادة نسبة التشويش الابيض في العينات المتوسطة والكبيرة فأن طريقة العملية الكاوسية تكون متفوقة على طريقة بيز وطريقة الامكان الاعظم .
- 3- عدم تأثر طريقة بيز في جميع تجارب المحاكاة عند اختلاف مستوى التشويش الابيض.
- 4- اما الجانب التطبيقي فقد اظهر وجود مقاومة للفايروس من الخلايا للمفاوية في موقع الإصابة ادت الى سرعة تلاشي الفايروس للمصابين ب(Covid -19) وهذا واضح من معدل تجنيد الخلايا للمفاوية المقدر.
- 5- اضمحلال فايروس كورونا استجاب لجرعات العلاج داخل المستشفيات والذي حفز انتاج الخلايا للمفاوية فقد كان معدل اضمحلال الفايروس عالياً.

2-4 التوصيات :

- 1- اعتماد الدراسة لدى وزارة الصحة لفهم السلوك الحقيقي لكمية الخلايا اللمفاوية لمرضى Covid-19).
- 2- استعمال الطرائق الاحصائية المعتمدة في تقدير معلمات المعادلات التفاضلية بمختلف انواعها .
- 3- استعمال طريقة بيز للبيانات الصغيرة التي تتبع سلوك المعادلات التفاضلية الجزئية .
- 4- استعمال طريقة العملية الكاوسية في حال وجود بيانات تمتلك تشويش عالي للبيانات المتوسطة والكبيرة .
- 5- استعمال دوال خسارة اخرى غير دالة الخسارة التربيعية المستعملة في طريقة بيز في هذه الرسالة لمعرفة سلوك تقدير بيز في ظل وجود تلك الدوال .
- 6- استعمال بيانات حقيقية اخرى لمرض اخر .بيانات تخص الانهار او البترول لموضوع الدراسة نفسة.
- 7- التطرق الى انواع المعادلات التفاضلية الجزئية كموضوع للدراسة كالمعادلات الجزئية الحرارية او معادلات الموجة ...والخ.

المعروف

اولا: المصادر العربية

القران الكريم

- 1- اس ،فارلو ،(2005)،"المعادلات التفاضلية الجزئية"، جامعة عمر المختار البيضاء.
- 2- العاني ، عطا الله ثامر ،(1990)، "مقدمة الى المعادلات التفاضلية الجزئية"، جامعة بغداد.
- 3- العويضي حسن ، عبد الوهاب عباس ، وسناء علي زارع،(2010)،"المعادلات التفاضلية" ، الجزء الاول ، دار الرشد.
- 4- مصباح جمعة عقل ، القاضي زياد عبد الكريم ، وابو زلطة محمد خليل ،(2010)" نظم المعادلات التفاضلية والمعادلات التفاضلية الجزئية " ، مكتبة المجتمع العربي للنشر والتوزيع .
- 5- الهنادوة عايش ،اسماعيل بوقفة،(2010) ،"المعادلات التفاضلية العادية حلول وتطبيقات"،جامعة العلوم والتكنولوجيا ،الجمهورية اليمنية .
- 6- الوندي ،وفاء جعفر حسين ،(2018)،" تقدير المعلمات الثابتة والمتغيرة الزمن في نماذج المعادلات التفاضلية اللاخطية مع تطبيق عملي "، اطروحة دكتوراه فلسفة في الاحصاء ،جامعة بغداد ،كلية الادارة والاقتصاد.

ثانيا: المصادر الاجنبية:

- 7-Al-Rob, M. F. A. A. (2016). Finite Difference and Finite Element Methods for Solving Elliptic Partial Differential Equations (Doctoral dissertation).
- 8-Adziewski, K., & Siddiqi, A. H. (2013). Introduction to partial differential equations for scientists and engineers using mathematica. CRC Press. .
- 9- AL-Nasrawi , J. A. A. A. (2015). Exact Solutions for- Some Nonlinear Partial Differential Equations In Mathematical Physics Faculty Of Science .Minia University.

10- AL-Rawdanee ,E. H. M.(2021). On the solution of a classical optimal control problem for partial differential equations.thesis. mustansiriyah university .

11- Anwar ,J. M. J,and Yusur, S. A. (2013). New Travelling Waves Solutions for Solving Burger's Equations by Tan-Cot function method. International Journal Of Computational Engineering Research (ijceronline.com) Vol. 03 Issue. 12

12-Asirvadam,V. and others . (2017). Maximum likelihood inference for Univariate Delay Differential Equation Models with multiple Delays .university Teknologi petronas seriIskandar.perak.Malaysia .<https://doi.org/10.1155/2017/6148934>.

13- Simon , B.A. (1982). CALCULUS With Analytic Geometry .California state University.Hayward

14- Berry, S. M., Carroll, R. J., & Ruppert, D. (2002). Bayesian smoothing and regression splines for measurement error problems. Journal of the American Statistical Association, 97(457), 160-169.

15- Brenner, S. C., & Scott, L. R. (1994). The Mathematical theory of finite element methods Springer-Verlag. New York.

- 16- Calderhead, B., Girolami, M., & Lawrence, N. (2008). Accelerating Bayesian inference over nonlinear differential equations with Gaussian processes. *Advances in neural information processing systems*, 21.
- 17- Chen, W. H. (1974). Estimation of parameters in partial differential equations--with applications to petroleum reservoir description (Doctoral dissertation, California Institute of Technology).
- 18- Craigmile, P. F. (2016). Maximum likelihood estimation for stochastic differential equations using sequential Gaussian-process-based optimization.
- 19- De Boor, C., & De Boor, C. (1978). A practical guide to splines (Vol. 27, p. 325). New York: springer-verlag.
- 20- Domokos, A.(2017). Differential Equations Theory and Applications. California stste.University Sacramento.
- 21- Duncan, T.and Paski . D. (1999). Adaptive- control of continuous time linear stochastic systems. *Math count sugonal sys* 3-45-46.
- 22 -Evans, L. C. (2010). *Partial differential equations* (Vol. 19). American Mathematical Soc.
- 23- Folland, G. B. (2020). Introduction to partial differential equations. Princeton university press.

-
-
- 24- Albert, C. G. (2019). Gaussian processes for data fulfilling linear differential equations. In Multidisciplinary Digital Publishing Institute Proceedings (Vol. 33, No. 1, p. 5).
- 25- Schneider, G., Craigmire, P. F., & Herbei, R. (2017). Maximum likelihood estimation for stochastic differential equations using sequential kriging-based optimization. *Technometrics*, 59(2), 178-188.
- 26- Zhiru, G., Yinghui, X., Chao, S., Xu, W., Ye, G., Shi, Q., & Kewei, M. (2020). A systematic review of asymptomatic infections with COVID-19. *Journal of Microbiology, Immunology and Infection*.
- 27- Girolami, M. (2008). Bayesian inference for differential equations. *Theoretical Computer Science*, 408(1), 4-16.
- 28- Girolami, M.J., cockayne, C., oates, J. & sullivan, T. (2017). probabilistic numerical methods for partial differential equations and Bayesian inverse problems. university of Berlin. arxiv:1605-07811v3.
- 29- Hunber., M. (1993). Parameter estimation for stochastic differential equation .Thesis .University of southerner California.
- 30- Hurn., A. Lindsay., K., and Martin., V. (2003). On the E±cacy of Simulated Maximum Like- lihood for Estimating the Parameters of Stochastic. Dierential Equations. *Journal of Time Series Analysis*. 24. 45-63.

31- Jasim.,D. K .(2020). The continuous classical optimal control problem for a system of partial differential equations. thesis. mustansiriyah university.

32- Jeffrey., A.(2003). Applied Partial differential equations .printed on acid-free paper .university of newcastle-upon-tyne.

33-Mizumoto, K., Kagaya, K., Zarebski, A., & Chowell, G. (2020). Estimating the asymptomatic proportion of coronavirus disease 2019 (COVID-19) cases on board the Diamond Princess cruise ship, Yokohama, Japan, 2020. *Eurosurveillance*, 25(10), 2000180.

34- Ladas.,G.N. F .(1982)” An Introduction to differential equations.University of Rhode Island.

35- Lo, A. W. (1988). Maximum likelihood estimation of generalized Itô processes with discretely sampled data. *Econometric Theory*, 4(2), 231-247.

36- Rothe, C., Schunk, M., Sothmann, P., Bretzel, G., Froeschl, G., Wallrauch, C., ... & Hoelscher, M. (2020). Transmission of 2019-nCoV infection from an asymptomatic contact in Germany. *New England journal of medicine*, 382(10), 970-971.

37- Marrel, A., Iooss, B., Laurent, B., & Roustant, O. (2009). Calculations of sobol indices for the gaussian process metamodel. *Reliability Engineering and System Safety*, 94(3), 742-751.

38- Mohsin., A.K .(2019). Approximate methods for solving partial integro-differential equations of fractional order.thesis.mustansiriyah university.

39- Morton, K. W., & Mayers, D. F. (2005). Numerical solution of partial differential equations: an introduction. Cambridge university press.

40- Juan, P. (2019). Spatio-temporal hierarchical Bayesian analysis of wildfires with Stochastic Partial Differential Equations. A case study from Valencian Community (Spain).

41- Panichkitkosolkul, W. (2016). Confidence intervals for the process capability index C_p based on confidence intervals for variance under non-normality. Malays. J. Math. Sci, 10(1), 101-115.

42- Dawkins, P. (2007). Differential Equations. Lamar University.

43- Piterbarg., L . Rovorskii., B. (2015).Maximum Likelihood in the equation of Physics oceanography . ONR.No,00014-91j-1526, Southern California .

44-Prithwish.,B., Subhashis.,G .(2014). BAYESIAN ESTIMATION IN DIFFERENTIAL EQUATION MODELS. MSC 2014 subject classifications: 62J02. 62G08. 62G20. 62F15. the Annals of Statistics.

- 45- Mason, R. J. (2020). Pathogenesis of COVID-19 from a cell biology perspective. *European Respiratory Journal*, 55(4).
- 46- Rai.,P. Tripathi., S .(2019) . Gaussian process for estimating parameters of partial differential equations and its application to the Richards equation . Springer-Verlag GmbH Germany. part of Springer Nature Stochastic Environmental Research and Risk Assessment.
- 47- Rasmussen, C. E., & Williams, C. K. (2006). *Gaussian processes for machine learning*, vol. 1.
- 48- Salim.,O. H. (2021). Non polynomial spline functions for solving fractional partial differential equations. thesis. mustansiriyah university.
- 49- Samson ., A.maud., D .valentine., G.(2011). Maximum likelihood estimation for stochastic differential equations with random effects.university parissud.france .scandinavian journal of statistics .[https://hal. Archives-ouvertes.fr/hal-00650844](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00650844).
- 50- Silva. , P ., Trigo., A.,Varajão. J ., Pinto., T. (2010) . Simulation – Concepts and Applications. M.D. Lytras et al. (Eds.): WSKS 2010, Part II. CCIS 112, pp. 429–434. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2010.

51- Solak, E., Murray-Smith, R., Leithead, W. E., Leith, D., & Rasmussen, C. (2002). Derivative observations in Gaussian process models of dynamic systems. *Advances in neural information processing systems*, 15.

52- Huang, H., Handel, A., & Song, X. (2020). A Bayesian approach to estimate parameters of ordinary differential equation. *Computational statistics*, 35(3), 1481-1499.

53- Farlow, S. J. (1993). *Partial differential equations for scientists and engineers*. Courier Corporation.

54- Stavroulakis., L., Tersian..P., Stepan., A.(2004). *Partial Differential Equations An Introduction With Mathematics and Maple*".World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd.

55- Sun, A. Y., Wang, D., & Xu, X. (2014). Monthly streamflow forecasting using Gaussian process regression. *Journal of Hydrology*, 511, 72-81.

56- Archambeau, C., Cornford, D., Opper, M., & Shawe-Taylor, J. (2007, March). Gaussian process approximations of stochastic differential equations. In *Gaussian Processes in Practice* (pp. 1-16). PMLR.

57- Warren., R., Vanderbeek., R., and Ahl., J. (2010). Estimation and discrimination of aerosols using multiple wavelength LIWR lidar. Proceedings of SPIE.7665.766504-1.

58- Warren., R., Vanderbeek., R., Ben-David., A. and Ahl., J. (2008). Simultaneous estimation of aerosol cloud concentration and spectral backscatter from multiple-wavelength lidar data. Applied Optics. 47(24).4309-4320.

59- Warren, R. E., Vanderbeek, R. G., & Ahl, J. L. (2009, May). Detection and classification of atmospheric aerosols using multi-wavelength LWIR lidar. In Chemical, Biological, Radiological, Nuclear, and Explosives (CBRNE) Sensing X (Vol. 7304, p. 73040E). International Society for Optics and Photonics.

60- Wazwaz, A. M. (2009). Solitary Waves Theory. In Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory (pp. 479-502). Springer, Berlin, Heidelberg.

61- Xun., A. X ., Jiguo., C. B ., Bani., M. C., Raymond., J., Carroll., C and Arnab., M.d.(2013). Parameter Estimation of Partial Differential Equation Models. Journal of the American Statistical Association. Publication details.including instructions for authors and subscription information: <http://amstat.tandfonline.com/loi/uasa20>.

62- Young.,C., peter.,G.,Nygaard., N ., Henrik .,M.(2000). parameter estimation in stochastic differential equations .an over view.university of Denmark.www.elsevier.com //locate/arcontrol annual reviews in control 24(2000)83.99.

63- Xu, Z., Shi, L., Wang, Y., Zhang, J., Huang, L., Zhang, C., ... & Wang, F. S. (2020). Pathological findings of COVID-19 associated with acute respiratory distress syndrome. *The Lancet respiratory medicine*, 8(4), 420-422.

Abstract

Abstract

The Study Seeks to estimate the parameter of the partial differential equation, as some of its types and classifications were studied and its parameters were estimated by three methods of estimation (the Maximum likelihood Method, Gaussian process, the Standard Bayes Method) .For the purpose of comparing the methods of estimating the parameters of the partial differential equation, the Monte Carlo Simulation method was employed to conduct several experiments at nine different sizes (Small, Medium, large) and at levels of white noise(0.01,0.05,0.09) and through the four statistical criteria (Bais, Squara roots of average squared errors, Standard deviations, Coverage probabilities) .The Results showed the superiority of the standard Bayes method in calculating the estimations of the partial different equation at the small sample sizes according to the different level of noise and the superiority of the maximum likelihood method ,followed by the gaussian process for medium and large samples at the white noise level (0.01) , while at the white white noise level (0.05 & 0.09) the gaussian process method was superior to medium and large sample sizes . The best method in the simulation results , which is the standard Bayes method ,was applied to real data with a view (30) representing the amount of lymphocytes and their relationship to the (Covid -19 virus) . The advantage of the Bayes method has been proven ,as the standard Bayes method matched in representing the data accurately and correctly . we found that the rate of recrument of lymphocytes to the site of injury due to the inflammatory response in the lung per day is(11.86712) for all patients with (Covid -19) and that the average number of lymphocytes and infected lung cells the virus has reached (3556) and for all patients.

**Republic of Iraq
Ministry of higher Education and Scientific
Research
University of Karbala
Faculty of Administration and Economics
Department of statistics**



Estimating Parameters for Partial Differential Equations with Practical Application

A Thesis Submitted to
Council of The Administration and Economics/ Karbala
University as Partial fulfillment of the Requirements for the
Degree of Master of Science in Statistics
Presented by researcher

Zahraa Mohsin Neamah AL-Araji

Supervised By
Ass. Prof. Dr. Mushtaq Kareem Abd Al-Rahem

م 2022

هـ 1444

Holy Karbala