



جمهورية العراق
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة كربلاء
كلية الإدارة و الاقتصاد
قسم الإحصاء
الدراسات العليا



طريقة جديدة بيزية ضبابية حصينة عامة للتوزيعات الإحتمالية

إطروحة

مقدمة الى مجلس كلية الإدارة والاقتصاد في جامعة كربلاء
وهي جزء من متطلبات نيل درجة دكتوراه فلسفة في علوم الإحصاء

تقدم بها

بشار خالد علي

إشراف

أ.د. مهدي وهاب نعمة

1443 هـ

2022 م



﴿وَلَقَدْ رَآهُ بِالأُفُقِ المُبِينِ* وَمَا هُوَ عَلَى
الْغَيْبِ بِضَنِينِ* وَمَا هُوَ بِقَوْلِ شَيْطَانٍ رَّجِيمِ*
فَإِن تَذَهَبُونَ* إِنَّ هُوَ إِلاَّ ذِكْرٌ لِلْعَالَمِينَ*
لِمَن شَاءَ مِنكُمْ أَن يَسْتَقِيمَ* وَمَا تَشَاءُونَ
إِلاَّ أَن يَشَاءَ اللهُ رَبُّ الْعَالَمِينَ﴾

صدق الله العلي العظيم

(التكوير: الآية ٢٣-٢٩)

إقرار المشرف

أشهد بأن إعداد هذه الأطروحة الموسومة (طريقة جديدة ببزية ضبابية حصينة عامة للتوزيعات الاحتمالية) والتي تقدم بها الطالب " بشار خالد علي " قد جرى بإشرافي في قسم الاحصاء - كلية الادارة والاقتصاد - جامعة كربلاء ، وهي جزء من متطلبات نيل درجة دكتوراه فلسفة في علوم في الاحصاء.


أ. د. مهدي وهاب نعمة نصر الله

التاريخ: / / 2022

توصية رئيس قسم الاحصاء

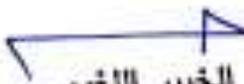
بناءً على توصية الاستاذ المشرف، أرشح الأطروحة للمناقشة.


أ. د. شروق عبد الرضا سعيد الصباح
رئيس قسم الاحصاء

التاريخ: / / 2022

إقرار الخبير اللغوي

أشهد أن الأطروحة الموسومة بـ (طريقة جديدة بيزية ضبابية حصينة عامة للتوزيعات الإحتمالية) للطلاب "بشار خالد علي" قد جرى مراجعتها من الناحية اللغوية حتى أصبحت خالية من الأخطاء اللغوية والأسلوبية ولأجله وقعت.


الخبير اللغوي
م. صلاح مهدي جابر

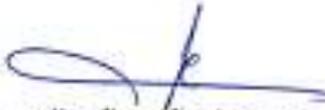
إقرار لجنة المناقشة

نشهد نحن رئيس وأعضاء لجنة المناقشة بأننا قد اطلعنا على الأطروحة الموسومة
(طريقة جديدة بيزية ضبابية حصينة عامة للتوزيعات الاحتمالية) والمقدمة من قبل
الطالب 'بشار خالد علي' وناقشنا الطالب في محتوياتها وفيما له علاقة بها ،
ووجدنا بأنها جديرة بنيل درجة دكتوراه فلسفة في علوم الإحصاء بتقدير (امتياز) .


أ.د شروق عبد الرضا سعيد السباح

عضواً

2022 / /


أ. د. رحيم جبار ظاهر الحمزاوي

رئيساً

2022 / /


أ.م.د. هناء سعد محمد شبيب

عضواً

2022 / /


أ. م. د. تهاثي مهدي عباس محمد

عضواً

2022 / /


أ. د. مهدي وهاب نعمة نصر الله

عضواً ومشرفاً

2022 / /


أ. م. د. صدى فايز محمد

عضواً

2022 / /

إقرار رئيس لجنة الدراسات العليا

بناء على اقرار الخبيرين العلميين والخبير اللغوي على أطروحة الطالب
" بشار خالد علي " الموسومة بـ (طريقة جديدة بيزية ضبابية حصينة عامة
للتوزيعات الإحتمالية) ارشح هذه الأطروحة للمناقشة.



أ. د. محمد حسين كاظم الجبوري
رئيس لجنة الدراسات العليا
معاون العميد للشؤون العلمية والدراسات العليا

مصادقة مجلس الكلية

صديق مجلس كلية الإدارة والاقتصاد / جامعة كربلاء على قرار لجنة

المناقشة.



أ.د. علاء فرحان طالب الجبوري

عميد كلية الإدارة والاقتصاد- جامعة كربلاء

2022 / 6 / 21

الإهداء ...

إلى ...

مَنْ أَمَلِي رِضَاهُ وَغَايَتِي حُبُّهُ وَرَجَائِي غَفْرَانُهُ

اللَّهُ رَبُّ الْعَالَمِينَ

ذِي الْخَلْقِ الْعَظِيمِ

مُحَمَّدٍ (صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ) وَآلِهِ الطَّيِّبِينَ الطَّاهِرِينَ

مَنْ أَعْطَانِي الْأَرْضَ وَالْأَمَانَ وَالْهَيُوتَةَ أَعْطَانِي حُبِّي وَعِلْمِي
والتضحية

(وَطَنِي)

مَنْ لَمْ تَغْفَلْ عَيُونُهُمْ عَنِّي حُبًّا وَإِجْلَالًا وَعِرْفَانًا...

القناديل المضيئة في سماء العلم والمعرفة

(أَسَاتِدَتِي الْفَضْلَاءُ)

كُلِّ مَنْ تَمَنَّى لِي النَّجَاحَ وَالتَّقَدُّمَ

أُهْدِي ثَمْرَةَ جُهْدِي الْمُتَوَاضِعِ

الباحث

شكر وإمتنان ...

الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات , والصلاة والسلام على رسول الله وخاتم النبيين وعلى آله الطيبين الطاهرين , سبحانه لا علم لنا الا ما علمتنا إنك العليم الحكيم .

إعترافاً مني بالحق قبل الجميل فإن الأطروحة لم تكن لتظهر بالشكل الذي ظهرت به لولا الاستاذ الدكتور الفاضل (مهدي وهاب نصر الله) الذي تفضل بالإشراف على الإطروحة وهو في كل ذلك كان يقف امامي وليس بجانبني والذي لا أعده مشرفاً فحسب وانما هو سندي واخي الكبير فله كل الإعتزاز والإحترام والتقدير والإعتراف بالجميل, سائلاً الله العلي القدير إن يحفظه وينعم عليه بالصحة والعافية وأن يوفقه في مسعاه إنه سميع عليم.

كما اتقدم بالشكر والامتنان الى اساتذتي في قسم الاحصاء - كلية الادارة والاقتصاد - جامعة كربلاء لما بذلوه من جهد وعناء في مدة دراسة الماجستير والدكتوراه. واخص منهم بالذكر (ا. د. شروق عبد الرضا سعيد) لدعمها المستمر لي في مدة دراسة الماجستير والدكتوراه فجزاها الله خير الجزاء.

كما اتقدم بالشكر الجزيل الى السادة رئيس واعضاء لجنة المناقشة المحترمين لتفضلهم بقبول مناقشة الإطروحة ولما سيبدون من ملاحظات قيّمة تسهم في إغناءها.

واقدم شكري وتقديري الى كل الزملاء والزميلات في مرحلة الماجستير ومرحلة الدكتوراه

الباحث

قائمة المحتويات

الصفحة	الموضوع
ب	الآية القرآنية
ج	الإهداء
د	شكر وامتنان
ق	المستخلص
1-9	الفصل الأول (منهجية الأطروحة والإستعراض المرجعي)
1-2	1.1 المقدمة
2-3	1.2 مشكلة الإطروحة
3	1.3 هدف الإطروحة
4-9	1.4 الاستعراض المرجعي
10-93	الفصل الثاني (الجانب النظري)
11-43	المبحث الأول (نظرية المجموعات الضبابية) (Fuzzy set theory)
10	2.1.1 تمهيد (Preface)
10-11	2.1.2 الضبابية والمنطق الضبابي (Fuzziness and Fuzzy logic)
11-13	2.1.3 المجموعة الضبابية والمجموعة التقليدية (Fuzzy and Crisp set)
13-24	2.1.4 دوال الإنتماء (Membership functions)

14	2.1.4.1 التعبير عن دوال الإنتماء (Membership functions Expression)
14-15	2.1.4.2 مميزات دوال الإنتماء (Features of Membership Functions)
16-24	2.1.4.3 أنواع دوال الإنتماء (Membership functions types)
25	2.1.5 الداعم للمجموعة الضبابية (Support for fuzzy set)
25	2.1.6 ارتفاع المجموعة الضبابية (Height for fuzzy set)
25-26	2.1.7 المجموعة الضبابية المحدبة (Convex Fuzzy set)
26	2.1.8 المجموعة الضبابية المعيارية: (Normalized Fuzzy Set)
26-29	2.1.9 الأرقام الضبابية: (Fuzzy Numbers)
29	2.1.10 القطع الفا (α -cut)
29-30	2.1.11 مجموعة القطع الفا (α -cut set)
30-31	2.1.12 مجموعة المستوى (Level set)
31	2.1.13 نقطة عبور المجموعة الضبابية: (Crossover point of the fuzzy sets)
31	2.1.14 فضاء العينة الضبابي: (Fuzzy sample space)
32	2.1.15 الحدث الضبابي: (Fuzzy Event)
32-33	2.1.16 التوزيع الاحتمالي الضبابي: (Fuzzy probability Distribution)
33-34	2.1.17 الاحتمال الشرطي الضبابي Fuzzy Conditional Probability
34-41	2.1.18 التوزيع الاحتمالي الضبابي المقترح (Suggested Fuzzy Probability Distribution)

42-93	المبحث الثاني (الحصانة ونظرية بيز) (Robustness and Bayes theory)
42	2.2.1 تمهيد (Preface)
42-44	2.2.2 مفهوم الحصانة: (Robust Concept)
44	2.2.3 المقدرات الحصينة: (Robust Estimators)
44-45	2.2.4 المشاهدات الشاذة: (Outlier observations)
45-48	2.2.5 نظرية بيز في التقدير (Bayesian Theorem in Estimation)
48	2.2.6 دوال الخسارة (Loss Functions)
49-52	2.2.7 دوال الكثافة الاحتمالية السابقة (prior probability density functions)
53-54	2.2.8 الحصانة في التقدير البيزي (Robustness in Bayes Estimation)
55-57	2.2.9 الطريقة البيزية الحصينة المقترحة (Proposed Robust Bayesian method)
57-58	2.2.10 الصيغة العامة للطريقة البيزية الحصينة الضبابية المقترحة (Proposed Fuzzy Robust Bayesian method)
58-93	2.2.11 مقدر بيز الضبابي الحصين المقترح لبعض توزيعات الفشل الاحتمالية
58-79	2.2.11.1 مقدر بيز الضبابي الحصين المقترح لتوزيع الأسي
70-81	2.2.11.2 مقدر بيز الضبابي الحصين المقترح لتوزيع وبيبل
82-93	2.2.11.3 مقدر بيز لتوزيع كوما راسوامي القياسي
94-123	الفصل الثالث (الجانب التجريبي)

94	3.1 تمهيد: (Preface)
94-95	3.2 مفهوم المحاكاة: (Simulation Concept)
95-100	3.3 وصف تجارب المحاكاة: (Describe of simulation experiments)
100-122	3.4 تحليل نتائج المحاكاة: (Analysis of Simulation Result)
124-139	الفصل الرابع (الجانب التطبيقي)
124	4.1 التمهيد : (Preface)
124-125	4.2 الدعامة القلبية: (Heart Stent)
125-126	4.3 البيانات التطبيقية (Applied data)
126-133	4.4 اختبار البيانات (Data test)
126-128	4.4.1 اختبار ملائمة البيانات (Data Fitting)
129-133	4.4.2 اختبار القيم الشاذة (Outlier test)
133-138	4.5 تضبيب البيانات (Data Fuzziness)
138-139	4.6 تحليل البيانات (Data analyzing)
140-141	الفصل الخامس (الاستنتاجات والتوصيات)
140	5.1 الإستنتاجات (Conclusions)
141	5.2 التوصيات (Recommendations)
142-150	المصادر

142-143	أولاً: المصادر العربية
143-150	ثانياً: المصادر الأجنبية
A	Abstract

قائمة الجداول

الصفحة	عنوان الجدول	رقم الجدول
95	القيم الافتراضية لمعلمة التوزيع الأسي	(3-1)
96	القيم الافتراضية لمعاملات توزيع ويبل	(3-2)
96	القيم الافتراضية لمعاملات توزيع كوماراسوامي القياسي	(3-3)
101-102	تقدير المعلمات ومتوسط مربعات الخطأ MSE عند الطرائق البيزية التقليدية والمقترحة عند معاملات القطع $\alpha - \text{cut} = 0.2, 0.4, 0.5, 0.7, 0.9$ وعند القيمة الافتراضية لمعلمة التوزيع الأسي $\lambda = 1$ ومعلمات توزيع ويبل $\theta = 3, p = 2$ ومعلمات توزيع كوماراسوامي القياسي $\theta = 3, \beta = 3$ لملوثة واحدة	(3-3)
102-103	تقدير المعلمات ومتوسط مربعات الخطأ MSE عند الطرائق البيزية التقليدية والمقترحة عند معاملات القطع $\alpha - \text{cut} = 0.2, 0.4, 0.5, 0.7, 0.9$ وعند القيمة الافتراضية لمعلمة التوزيع الأسي $\lambda = 1.5$ ومعلمات توزيع ويبل $\theta = 2, p = 2.5$ ومعلمات توزيع كوماراسوامي القياسي $\theta = 1, \beta = 2$ لملوثة واحدة	(3-4)
103-104	تقدير المعلمات ومتوسط مربعات الخطأ MSE عند الطرائق البيزية التقليدية والمقترحة عند معاملات القطع $\alpha - \text{cut} = 0.2, 0.4, 0.5, 0.7, 0.9$ وعند القيمة الافتراضية لمعلمة التوزيع الأسي $\lambda = 4$ ومعلمات توزيع ويبل $\theta = 3, p = 4$ ومعلمات توزيع كوماراسوامي القياسي $\theta = 4, \beta = 1$ لملوثة واحد	(3-5)
104-105	تقدير المعلمات ومتوسط مربعات الخطأ MSE عند الطرائق البيزية التقليدية والمقترحة عند معاملات القطع $\alpha - \text{cut} = 0.2, 0.4, 0.5, 0.7, 0.9$ وعند القيمة الافتراضية لمعلمة التوزيع الأسي $\lambda = 5$ ومعلمات توزيع ويبل $\theta = 2, p = 5$ ومعلمات توزيع كوماراسوامي القياسي $\theta = 1, \beta = 5$ لملوثة واحدة	(3-6)

106-107	تقدير المعلمات ومتوسط مربعات الخطا MSE عند الطرائق البيزية التقليدية والمقترحة عند معاملات القطع $\alpha - \text{cut} = 0.2, 0.4, 0.5, 0.7, 0.9$ وعند القيمة الافتراضية لمعلمة التوزيع الأسي $\lambda = 8$ ومعلمات توزيع ويبل $\theta = 5, \beta = 3.5, p = 2.5$ ومعلمات توزيع كوماراسوامي القياسي $\theta = 5, \beta = 2.5$ لملوثة واحدة	(3-7)
107-108	تقدير المعلمات ومتوسط مربعات الخطا MSE عند الطرائق البيزية التقليدية والمقترحة عند معاملات القطع $\alpha - \text{cut} = 0.2, 0.4, 0.5, 0.7, 0.9$ وعند القيمة الافتراضية لمعلمة التوزيع الأسي $\lambda = 1$ ومعلمات توزيع ويبل $\theta = 3, \beta = 3, p = 2$ ومعلمات توزيع كوماراسوامي القياسي $\theta = 3, \beta = 3$ لملوثتين	(3-8)
108-109	تقدير المعلمات ومتوسط مربعات الخطا MSE عند الطرائق البيزية التقليدية والمقترحة عند معاملات القطع $\alpha - \text{cut} = 0.2, 0.4, 0.5, 0.7, 0.9$ وعند القيمة الافتراضية لمعلمة التوزيع الأسي $\lambda = 1.5$ ومعلمات توزيع ويبل $\theta = 2, \beta = 2, p = 2.5$ ومعلمات توزيع كوماراسوامي القياسي $\theta = 1, \beta = 2$ لملوثتين	(3-9)
109-110	تقدير المعلمات ومتوسط مربعات الخطا MSE عند الطرائق البيزية التقليدية والمقترحة عند معاملات القطع $\alpha - \text{cut} = 0.2, 0.4, 0.5, 0.7, 0.9$ وعند القيمة الافتراضية لمعلمة التوزيع الأسي $\lambda = 4$ ومعلمات توزيع ويبل $\theta = 3, \beta = 1, p = 4$ ومعلمات توزيع كوماراسوامي القياسي $\theta = 4, \beta = 1$ لملوثتين	(3-10)
111-112	تقدير المعلمات ومتوسط مربعات الخطا MSE عند الطرائق البيزية التقليدية والمقترحة عند معاملات القطع $\alpha - \text{cut} = 0.2, 0.4, 0.5, 0.7, 0.9$ وعند القيمة الافتراضية لمعلمة التوزيع الأسي $\lambda = 5$ ومعلمات توزيع ويبل $\theta = 2, \beta = 5, p = 5$ ومعلمات توزيع كوماراسوامي القياسي $\theta = 1, \beta = 5$ لملوثتين	(3-11)
112-113	تقدير المعلمات ومتوسط مربعات الخطا MSE عند الطرائق البيزية التقليدية والمقترحة عند معاملات القطع $\alpha - \text{cut} = 0.2, 0.4, 0.5, 0.7, 0.9$ وعند	(3-12)

	القيمة الافتراضية لمعلمة التوزيع الأسي $\lambda = 8$ ومعلمات توزيع ويبل $\theta = 2.5, p = 3.5$ ومعلمات توزيع كوماراسوامي القياسي $\theta = 5, \beta = 2.5$ لملوثتين	
113-114	تقدير المعلمات ومتوسط مربعات الخطا MSE عند الطرائق البيزية التقليدية والمقترحة عند معاملات القطع $\alpha - \text{cut} = 0.2, 0.4, 0.5, 0.7, 0.9$ وعند القيمة الافتراضية لمعلمة التوزيع الأسي $\lambda = 1$ ومعلمات توزيع ويبل $\theta = 3, p = 2$ ومعلمات توزيع كوماراسوامي القياسي $\theta = 3, \beta = 3$ لثلاث ملوثات	(3-13)
114-115	تقدير المعلمات ومتوسط مربعات الخطا MSE عند الطرائق البيزية التقليدية والمقترحة عند معاملات القطع $\alpha - \text{cut} = 0.2, 0.4, 0.5, 0.7, 0.9$ وعند القيمة الافتراضية لمعلمة التوزيع الأسي $\lambda = 1.5$ ومعلمات توزيع ويبل $\theta = 2, p = 2.5$ ومعلمات توزيع كوماراسوامي القياسي $\theta = 1, \beta = 2$ لثلاث ملوثات	(3-14)
116-117	تقدير المعلمات ومتوسط مربعات الخطا MSE عند الطرائق البيزية التقليدية والمقترحة عند معاملات القطع $\alpha - \text{cut} = 0.2, 0.4, 0.5, 0.7, 0.9$ وعند القيمة الافتراضية لمعلمة التوزيع الأسي $\lambda = 4$ ومعلمات توزيع ويبل $\theta = 3, p = 4$ ومعلمات توزيع كوماراسوامي القياسي $\theta = 4, \beta = 1$ لثلاث ملوثات	(3-15)
117-118	تقدير المعلمات ومتوسط مربعات الخطا MSE عند الطرائق البيزية التقليدية والمقترحة عند معاملات القطع $\alpha - \text{cut} = 0.2, 0.4, 0.5, 0.7, 0.9$ وعند القيمة الافتراضية لمعلمة التوزيع الأسي $\lambda = 5$ ومعلمات توزيع ويبل $\theta = 2, p = 5$ ومعلمات توزيع كوماراسوامي القياسي $\theta = 1, \beta = 5$ لثلاث ملوثات	(3-16)
118-119	تقدير المعلمات ومتوسط مربعات الخطا MSE عند الطرائق البيزية التقليدية والمقترحة عند معاملات القطع $\alpha - \text{cut} = 0.2, 0.4, 0.5, 0.7, 0.9$ وعند	(3-17)

	القيمة الافتراضية لمعلمة التوزيع الأسي $\lambda = 8$ ومعلمات توزيع ويبل $\theta = 2.5, p = 3.5$ ومعلمات توزيع كوماراسوامي القياسي $\theta = 5, \beta = 2.5$ لثلاث ملوثات	
125-126	أوقات الفشل للدعامة القلبية	(4-1)
126	احصاءات العينة الحقيقية	(4-2)
127	إختبارات ملائمة البيانات	(4-3)
129-132	نتائج إختبار القيم الشاذة	(4-4)
134-136	المشاهدات الحقيقية ودرجة انتماء كل مشاهدة	(4-5)
137-138	المشاهدات الحقيقية ودرجة انتماء كل مشاهدة عند كل مستوى قطع	(4-6)
139	يبين نتائج تحليل البيانات الحقيقية عند طرائق التقدير الاعتيادية والمقترحة	(4-7)

قائمة الاشكال

الصفحة	عنوان الشكل	رقم الشكل
11	نظام المنطق الضبابي	2-1
12	التمثيل البياني للمجموعة التقليدية Crisp set	2-2
13	التمثيل البياني للمجموعة الضبابية Fuzzy set	2-3
15	مميزات دالة الإلتناء	2-4
16	دالة الإلتناء المفردة Singleton	(2-5)
17	(a) دالة الإلتناء المثلثية المتماثلة (b) دالة الإلتناء المثلثية العامة	(2-6)
18	دالة الإلتناء شبه المنحرف العامة	(2-7)
20	دالة L-شبه المنحرف	(2-8)
19	دالة R-شبه المنحرفة	(2-9)
20	دالة الإلتناء الأسية	(2-10)
21	دالة الإلتناء π	(2-11)
22	دالة الإلتناء الكاوسية	(2-12)
23	دالة الإلتناء اللوجستية	(2-13)
24	دالة الإلتناء كاما	(2-14)
24	دالة الإلتناء الأسية الزائفة	(2-15)
26	المجموعة الضبابية المحدبة $\mu_A(t) \geq \mu_A(r)$	(2-16)

27	الرقم الضبابي (Fuzzy Number)	(2-17)
28	الرقم الضبابي المثلثي $\tilde{N} = (a_1/a_2/a_3)$	(2-18)
29	الرقم الضبابي شبه المنحرف $\tilde{M} = (a_1/a_2, a_3/a_4)$	(2-19)
30	مجموعة المستوى α والقطع α للمجموعة الضبابية \tilde{A}	(2-20)
31	يمثل مجموعة المستوى Λ	(2-21)
32	الأحداث الضبابية	(2-22)
56	التمثيل البياني (a) إنموذج بيز القياسي (b) إنموذج بيز الحصين المقترح	(2-23)
100	خوارزمية تضبيب البيانات	(3-1)
121	منحنى دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الاسي عند طراق التقدير البيزية التقليدية والمقترحة عند القطع 0.9	(3-2)
121	منحنى دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الاسي عند طراق التقدير البيزية التقليدية والمقترحة عند القطع 0.7	(3-3)
121	منحنى دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الاسي عند طراق التقدير البيزية التقليدية والمقترحة عند القطع 0.5	(3-4)
121	منحنى دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الاسي عند طراق التقدير البيزية التقليدية والمقترحة عند القطع 0.4	(3-5)
121	منحنى دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الاسي عند طراق التقدير البيزية التقليدية والمقترحة عند القطع 0.2	(3-6)
122	منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ويبيل عند طراق التقدير البيزية التقليدية والمقترحة عند القطع 0.9	(3-7)
122	منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ويبيل عند طراق التقدير البيزية التقليدية والمقترحة عند القطع 0.7	(3-8)
122	منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ويبيل عند طراق التقدير البيزية التقليدية	(3-9)

	والمقترحة عند القطع 0.5	
122	منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ويبيل عند طراق التقدير البيزية التقليدية والمقترحة عند القطع 0.4	(3-10)
122	منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ويبيل عند طراق التقدير البيزية التقليدية والمقترحة عند القطع 0.2	(3-11)
123	منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع KUM عند طراق التقدير البيزية التقليدية والمقترحة عند القطع 0.9	(3-12)
123	منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع KUM عند طراق التقدير البيزية التقليدية والمقترحة عند القطع 0.7	(3-13)
123	منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع KUM عند طراق التقدير البيزية التقليدية والمقترحة عند القطع 0.5	(3-14)
123	منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع KUM عند طراق التقدير البيزية التقليدية والمقترحة عند القطع 0.4	(3-15)
123	منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع KUM عند طراق التقدير البيزية التقليدية والمقترحة عند القطع 0.2	(3-16)
128	منحنى دالة الكثافة الاحتمالية للبيانات الحقيقية عند قيم مختلفة لمعاملات توزيع ويبيل	(4-1)
129	منحنى دالة الكثافة الاحتمالية التراكمية للبيانات الحقيقية عند قيم مختلفة لمعاملات توزيع ويبيل	(4-2)
133	الرسم الصندوقي للبيانات الحقيقية	(4-3)

قائمة المصطلحات والرموز المستعملة في هذا البحث

المصطلح باللغة العربية	المصطلح باللغة الانكليزية	رمز المصطلح
يشير للضبابية	Fuzzy Bar	\sim
مجموعة ضبابية	Fuzzy set	\tilde{A}
الدالة المميزة للمجموعة التقليدية	Characteristic function	$\mu_A(x)$
دالة الانتماء (العضوية) للمجموعة الضبابية	Membership function for Fuzzy set	$\mu_{\tilde{A}}(x)$
مجموعة المستوى الفا	α - level set for fuzzy set	A^α
متجه مشاهدات العينة	sample Observation Vector	x or t
المتجه الضبابي	Fuzzy vector	\tilde{x} or \tilde{t}
مجموعة المستوى من عدة قيم لـ α	Level set	Λ
الرقم الضبابي	Fuzzy numver	\tilde{N}
مقياس الاحتمال الضبابي	Fuzzy probability mesure	$P_\theta(\tilde{X})$
مشاهدات العينة الضبابية	Fuzzy set observation	$\tilde{t}_{A(\alpha)}$
الدالة التوزيعية الضبابية	Fuzzy Cumulative distribution function	$\tilde{F}(\tilde{t}_{A(\alpha)})$
دالة الكثافة الاحتمالية الضبابية	Fuzzy probability function	$\tilde{f}(\tilde{t})$
التوزيع اللاحق الضبابي	Fuzzy posterior distribution	$\tilde{h}(\underline{\theta}/\tilde{t}_{A(\alpha)_i}/\hat{\vartheta})$

مقدر بيز الغير المعلوماتي القياسي	Non –informatve standard bayes	NSB
مقدر بيز الغير المعلوماتي الضبابي الحصين	n –informatve robust fuzzy standard bayes	NRFS
مقدر بيز المعلوماتي القياسي	Informatve standard bayes	INSB
مقدر بيز المعلوماتي الضبابي الحصين	informatve robust fuzzy standard bayes	INRFSB
دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة للمتغيرين $\tilde{t}_{A(\alpha)}, \lambda$	Joint distribution for $\tilde{t}_{A(\alpha)}, \lambda$	$G(\tilde{t}_{A(\alpha)_i}, \lambda_i)$
نجد الدالة الحدية للمتغير $\tilde{t}_{A(\alpha)_i}$	Marginal distribution for $\tilde{t}_{A(\alpha)_i}$	$M(\tilde{t}_{A(\alpha)_i})$
التوزيع الاسي	Exponential distribution	Exp
توزيع ويبيل	Weibull distribution	Weibull
توزيع كوماراسوامي	Kumaraswamy distribution	Kum

تواجهنا في الكثير من مواقف الحياة اليومية وعند الشروع بعمليات التحليل الاحصائي بيانات نعاني من عدم الدقة في قياستها ، اما بسبب اخطاء المشاهدة او القياس او عدم توفر الظروف الملائمة لجمع تلك البيانات ، مثل اوقات الفشل للمكائن والمعدات والاجهزة الكهربائية والبيانات الطبية والهندسية والاقتصادية . وغالباً ما ترافق تلك البيانات قيم قد تكون بعيدة عن النسق الأصلي للبيانات والتي تشكل بيانات متينة الذيل. فعند تقدير هذه الظواهر التي نعاني من عدم الدقة في قياساتها فضلاً عن وجود القيم الشاذة فيها باستعمال طرائق التقدير الاعتيادية يؤدي الى تقديرات مضللة وغير دقيقة وغير ممثلة لواقع الظاهرة المدروس. لذلك لابد من ايجاد الطرائق الملائمة والحسنة للتقدير في ظل تلك الظروف لضمان دقة التقديرات المستحصل عليها .

في هذه الأطروحة تم إقتراح طريقة لتحويل اي توزيع احتمالي تقليدي (Probability distribution) الى توزيع احتمالي ضبابي (Fuzzy probability distribution) باستعمال مبدأ مجموعة القطع (α -cut set) وذلك بايجاد الدالة التوزيعية التراكمية الضبابية (Fuzzy cumulative distributon function) عند اي قيمة من قيم مجموعة القطع $\tilde{t}_{A(\alpha)}$ ومن ثم اشتقاق هذه التراكمية الضبابية لايجاد الدالة الاحتمالية الضبابية $\tilde{f}(\tilde{t})$. ومن ثم ايجاد طريقة بيزية تتمتع بالحصانة باقتراح أن لكل معلمة من المعلمات المراد تقديرها عند كل مفردة من مفردات متجه العينة t_i المسحوبة من توزيع احتمالي $\varphi(t_i | \theta_i)$ هنالك معلومات اولية تتمثل بتوزيع اولي $\pi(\theta_i | \vartheta)$ للمعلمة (θ_i) بالمعلمة (المعلمات) الزائدية (ϑ) . وبدمج التوزيع الاحتمالي الضبابي المقترح مع طريقة بيز الحصينة المقترحة تم الحصول على طريقة جديدة بيزية ضبابية حصينة عامة للتوزيعات الإحتمالية. وتم تطبيق هذه الطريقة على ثلاثة توزيعات احتمالية وهي التوزيع الاسي (Exponential distribution) وتوزيع ويبل (Weibull distribution) وتوزيع كوماواسومي القياسي (Standrad Kumaraswamy distribution). وباستعمال تجارب محاكاة مونت-كارلو تم اختبار الطريقة المقترحة ومقارنتها بالطريقة البيزية العادية بتوليد عينة تقليدية بحجم (100) مشاهدة ومن ثم استعمال خمس قيم للقطع هي $(\alpha - \text{cut} = 0.2, 0.4, 0.5, 0.7, 0.9)$ ، وتم تلوين البيانات بقيمة شاذة واحدة وقيمتين وثلاث قيم وبعدها تم الحصول على المجموعات الضبابية التي استعملت في ايجاد مقدرات بيز. تم التوصل الى ان الطريقة المقترحة فعالة في تقدير معلمات التوزيع الاحتمالي بصورة اكثر دقة من الطريقة البيزية الاعتيادية عند احتواء البيانات على قيم شاذة . كذلك تم تطبيق الطريقة المقترحة على بيانات حقيقية سحبت بطريقة عشوائية تخص أوقات الفشل للدعامة القلبية (دعامة القسطرة القلبية) التي تمثل الوقت بالشهر من بداية تركيب الدعامة القلبية ولغاية توقف الدعامة عن العمل (فشلها) لـ (100) مريض تم اجراء قسطرة قلبية لهم والتي تم الحصول عليها من مركز شهيد المحراب لجراحة وقسطرة القلب التابع لمستشفى مرجان التعليمي العام - دائرة صحة بابل خلال سنة (2021) وتم التوصل الى ان الطريقة المقترحة فعالة وملائمة في تقدير معلمات توزيع البيانات الحقيقية.

الفصل الأول

منهجية الأطروحة

والإستعراض المرجعي

1.1 المقدمة (Introduction)

إنَّ ما يشغل الباحث في حقول المعرفة كافة هو طبيعة البيانات ومن النادر جداً أن تكون هذه البيانات مهياً مباشرة لاستعمال الأساليب الإحصائية التي تعطي تقديرات مناسبة ، ففي حالة حصول خرق لإحدى الشروط المطلوبة للتقدير أو عدم الدقة في البيانات فإنه يستوجب البحث عن أساليب مختلفة لمعالجة تلك الحالات.

تعد مسألة التقديرات الحصينة في سياق الإستدلال من المسائل المهمة ، ففي عام (1853) طرح (Box) فكرة الحصانة وقال أنه لبناء إنموذج فعال يجب ان يكون حصيناً (Robust) لضمان عدم وجود مخاطر فيه ومن ثمَّ يؤدي الى إستدلالات محكمة وموثوقة (Passarin, 2004, 1).

يشير مصطلح الحصانة إلى قوة النموذج الإحصائي والاختبارات والإجراءات وفقاً للشروط المحددة للتحليل الإحصائي الذي تأمل الدراسة تحقيقه. بالنظر إلى استيفاء شروط الدراسة هذه ، يمكن التحقق من صحة النماذج من خلال استخدام البراهين الرياضية. لذلك ، فإن الإحصائيات الحصينة هي أي إحصاءات تنتج أداءً جيداً عندما يتم استخلاص البيانات من مجموعة واسعة من التوزيعات الاحتمالية التي لا تتأثر إلى حد كبير بالقيم الشاذة أو حالات الخروج الصغيرة من افتراضات النموذج في مجموعة بيانات معينة. بمعنى آخر ، الإحصاء الحصين يقاوم الأخطاء في النتائج. اما إجراءات الحصانة البيزية تتطوي ضمن مبدئين ، الأول يعتمد على فئة التوزيعات السابقة ، والآخر يتبنى مبدأ الاعتدالية لتوزيع المشاهدات اي عدم وجود الشواذ في بيانات العينة السابقة او الحالية. وان تحقق هذه الافتراضات ينتج توزيعات لاحقة مناسبة والتي تكون حساسة لنقاط المشاهدات الشاذة او غير النمطية ومن ثمَّ تؤثر بشدة على التقديرات ، ففي كثير من الاحيان لا تتحقق الافتراضات الاساسية للإنموذج او تكون التوزيعات الاولية غير دقيقة وغير مناسبة لذلك قام العديد من الباحثين مثل (Zellner, 1976; Dawid, 197; Box & Tiao, 1968, 1992) باستعمال النماذج الحصينة لتلافي تلك المشاكل. (Berger, 1994, 1).

وبما أن عملية التقدير تعتمد على المشاهدات والتي في كثير من الاحيان لا يمكن تسجيلها بدقة نظراً لأخطاء التجربة ، الحكم الشخصي ، أو بعض المواقف غير المتوقعة . عندئذ تكون العشوائية والضبابية خليطاً فيها ويعبر عنها بأرقام ضبابية ، لذلك لا بد من إعمال أساليب التقدير الإحصائي التقليدية للأرقام الحقيقية الى أرقام ضبابية لغرض الوصول الى تقديرات اكثر دقة من تلك التي تنتجها التقديرات التقليدية.

في هذه الإطروحة تم تبني مبدأ الضبابية والحصانة في أن واحد ضمن سياق نظرية بيز في التقدير للوصول الى مقدر بيزي ضبابي حصين مقترح. لذا كانت هيكلة الاطروحة متضمنة خمسة فصول:

الأول منهجية الإطروحة ضم المقدمة ، مشكلة الإطروحة ، هدف الإطروحة والإستعراض المرجعي لأهم البحوث وبعض الدراسات السابقة ذات الصلة بموضوع الإطروحة. الثاني كان الجانب النظري والذي قسم الى مبحثين الأول تضمن عرضاً لمبادئ نظرية المجموعات الضبابية وأساسياتها. والثاني تطرق لأهم المفاهيم الأساسية الخاصة بنظرية بيز وعرض وافي لموضوع الحصانة وتأثيرها في عملية التقدير ، وكذلك عرضاً للطريقة البيزية الضبابية الحصينة المقترحة.

الثالث شمل الجانب التجريبي، اذ تضمن تجارب محاكاة باستعمال محاكاة مونت -كارلو لاختبار الطريقة المقترحة.

الرابع تضمن الجانب التطبيقي، إذ استخدمت بيانات حقيقية تمثل عينة عشوائية من أوقات الفشل للداعمة القلبية (Heart Stent) التي تمثل الوقت بالشهر من بداية تركيب الدعامة القلبية ولغاية توقعها عن العمل لـ (100) مريض تم إجراء قسطرة قلبية لهم والتي تم الحصول عليها من مركز شهيد المحراب لجراحة وقسطرة القلب التابع لمستشفى مرجان التعليمي العام - دائرة صحة بابل خلال سنة (2021).

الخامس شمل أهم الاستنتاجات والتوصيات التي تمخضت عنها الإطروحة وتم التوصل اليها في الجانبين التجريبي والتطبيقي.

1.2 مشكلة الإطروحة: (Problem of thesis)

يتم في الإحصاء التطبيقي، بناء إنموذج أو صيغة أو مجموعة صيغ أو نماذج بالإستناد على الخبرات والتجارب السابقة لغرض توفير تمثيل أكثر دقة وواقعية لظاهرة ما في الواقع. وبعد ذلك يكون الهدف هو التوصل الى أفضل الإستدلالات فيما يخص تلك الظاهرة. ولما كان الاستدلال الاحصائي وفقاً لنظرية بيز يتم في بيئة تتسم بالمجازفة (المخاطرة) ، اذ يمتلك متخذ القرار معلومات تتعلق باحتمالات المعلمات المختلفة او التوزيع الاحتمالي لها باعتبارها متغيرات عشوائية على افتراض ان المعلومات الاولية عن المعلمة (المعلمات) يمكن صياغتها في صيغة دالة احتمالية تسمى التوزيع الاولي (Prior) لهذه المعلمة (المعلمات) العشوائية. وبما ان مقدر بيز هو ذلك المقدر الذي يعظم توقع

دالة المنفعة او يصغر توقع دالة الخسارة لذلك لابد من البحث عن مقدر بيضي يتمتع بالحصانة وله الدقة الكافية في تقليل الخسارة او تعظيم المنفعة , فضلاً عن أن الكثير من الظواهر تعاني من مشكلة عدم الدقة في قياساتها وتمتلك صفة الضبابية فان الاخذ بنظر الاعتبار الحصانة في التقدير البيضي مع الضبابية في البيانات سينتج لنا مقدر يتمتع بالدقة العالية في تمثيله للظاهرة المدروسة. وبما ان الكثير من الدراسات والبحوث السابقة تناولت موضع الحصانة البيضية بمعزل عن الضبابية ولم تدمج مبدأ الحصانة مع مبدأ المنطق الضبابي لذلك كان لابد من دمج الحصانة والضبابية في صيغة واحدة لإنتاج مقدر قادر على تمثيل الظاهرة المدروسة. ولما كانت معظم البيانات في الواقع لايمكن الحصول عليها بصورة دقيقة او قد تحتوي على بعض القيم الشاذة فيها ومنها بيانات الفشل للداعمة القلبية التي عند جمعها لوحظ وجود قيم شاذة فيها لذلك كان لابد من البحث عن طريقة فعالة في تقدير هذه الظاهرة.

1.3 هدف الأطروحة: (Aim of Thesis)

ترمي الإطروحة إلى تحقيق الاهداف الآتية:

1. اقتراح طريقة عامة لتحويل أي توزيع فشل مستمر الى توزيع فشل ضبابي وتطبيق هذه الطريقة على على ثلاثة توزيعات احتمالية وهي التوزيع الاسي (Exponential distribution) وتوزيع ويبيل (Weibull distribution) وتوزيع كوماراسوامي القياسي (Standrad Kumaraswamy distribution) للحصول على توزيع اكثر دقة ومرونة للملاحظات الغير دقيقة.
2. اقتراح طريقة بيضية حصينة يكون احتمالية الحصول على المشاهدة مشروطاً بتوزيعها السابق اذ سيكون للمفردات الشاذة احتمالية تختلف عن احتمالية باقي المشاهدات.
3. استعمال الصيغة البيضية الحصينة من خلال تعويض التوزيع الاحتمالي الضبابي بدلاً من التوزيع الاحتمالي التقليدي لنحصل على طريقة بيضية ضبابية حصينة .

1.4 الاستعراض المرجعي: (Review of Literature)

يعد العالمان الأذربيجاني (Lotfi Zadah) والالمانى (D. Klaua) أول من وضعاً أسس نظرية المجموعات الضبابية (Fuzzy sets Theory) عام (1965) عندما استخدماً مصطلح المتغيرات الضبابية على التعابير والألفاظ اللغوية التقريبية أو غير الدقيقة أو غير المحددة بتعريفهما المجموعة الضبابية بأنها مجموعة من العناصر التي يكون لكل عنصر فيها درجة انتماء تقع بين الصفر والواحد تميزه عن غيره من العناصر في المجموعة يتم تعيينها عن طريق دالة انتماء. (Zadeh, 1965) (Klaua, D., 1965) .

ويعد الباحثان (Berger & Berliner) عام (1985) أول من استخدماً فكرة التقدير البيزي الحصين من جانبين، الأول اعتمد على صنف التلوث ϵ -contamination بتحديدهم نسب تلوث مختلفة في البيانات ، والثاني اعتمد على صنف الإمكان الأعظم النوع الثاني II-ML للتوزيع الطبيعي باستعمال محاكاة مونت-كارلو.

وتلتهم بعد ذلك العديد من الدراسات والبحوث التي تناولت موضوع الضبابية وموضوع الحصانة البيزية نذكر بعضاً منها كالاتي:

أولاً: دراسات تناولت موضوع الضبابية :

1. في عام 2004 قدر (Wu) المعولية الضبابية باستعمال الأسلوب البيزي (Bayes Approach) في ظل البيئة الضبابية إذ افترض معالجة ضبابية لمتغيرات ضبابية بتوزيعات سابقة ضبابية واستخدمت طريقة تقدير بيز التقليدية لإنشاء مقدر بيز النقطي الضبابي للمعولية باستعمال خاصية *Resolution Identity* بتحديد درجة انتماء لاي تقدير بيزي للمعولية.

2. في عام 2006 قدر (Huang) وآخرون المعولية البيزية لبيانات الحياة الضبابية إذ استخدم طريقة بيز لتقدير المعولية الضبابية بالاعتماد على حجم عينة صغير إذ افترض طريقة جديدة لتحديد دالة الانتماء لتقدير المعلمات ودالة المعولية لتوزيعات حياة متعددة المعلمات وهي التوزيع الطبيعي وتوزيع وبيبل.

3. قامت (أوجي) عام 2009 بايجاد مقدرات بيز لدالة المعولية الضبابية للتوزيع الأسي باستعمال المحاكاة مع تطبيقها على الشركة العامة للصناعات الكهربائية إذ استخدمت طريقتان لتقدير المعولية الضبابية؛ الأولى طريقة تعتمد على استعمال تعريف المعولية الضبابية (FRDP)، والآخرى طريقة بيز (*Bayes approach*) وتوصلت في الجانب التجريبي الى أن طريقة بيز هي الأفضل في تقدير المعولية الضبابية عندما تمتلك بيانات العينة الضبابية درجة إنتماء أقل أو مساوية الى 0.1 ولأحجام العينات الصغيرة , وعندما تكون قيمة معدل أوقات الفشل أكبر من واحد ولجميع قيم α فإن طريقة بيز هي الأفضل في تقدير المعولية الضبابية لأحجام العينات الصغيرة، وطريقة FRDP هي الأفضل في تقدير المعولية الضبابية لأحجام العينات الكبيرة .

4. في عام 2010 استند (*Karpisek*) وآخرون الى التوزيع الاحتمالي الضبابي وخصائصه لتعريف المعولية الضبابية إذ وصفوا أنموذجين للمعولية الضبابية باستعمال توزيع واييل الضبابي (*Fuzzy Weibul Distribution*) لتقدير المعولية الضبابية للهياكل الخرسانية. واستنتجوا أن طريقة المجموعة الضبابية تسمح بالتحليل المنطقي والنظامي لحالات عدم التاكيد , وان المعولية الضبابية لتوزيع ويبيل مناسبة لتحديد معولية الهياكل الخرسانية .

5. وكذلك اشتق (*Kareema*) و (*Abdul Hameed*) عام (2012) دالة الكتلة الاحتمالية الضبابية للتوزيع الهندسي ودالة التوزيع التراكمي الضبابية وبعض خصائص التوزيع الضبابية مثل المتوسط الضبابي , التباين الضبابي , وتوليد العزوم الضبابية , واستنتجت بأنه يمكن الانتقال للتضبيب للحصول على مجموعة ضبابية عن طريق مجال المعلمة , وايضا كل الصيغ التي تستعمل نظرية الاحتمالات يمكن تضبيبها.

6. في عام 2014 قدم (*Safdar*) طريقة جديدة للحصول على توزيع احتمالي ضبابي تستند الى دالة الكثافة الاحتمالية المعروفة للتوزيع وتستند الى خاصية (*Resolution-Identity*) للحصول على رقم ضبابي واثبت فاعلية وكفاية هذه الطريقة .

7. في عام 2017 قدر (*A. Ibrahim*) و (*A. Mohammed*) معلمات ومعولية التوزيع الاسي الضبابي بمعلمتين إذ قدر معلمة القياس (λ) بطريقة العزوم وطريقة الامكان الاعظم

ثم قدروا دالة المعولية الضبابية وقارنا بين النتائج باستعمال مقياس متوسط مربعات الخطأ , بافتراض ارقام ضبابية $k=0.3, 0.5$. واستنتجا بان المقدر الضبابي للمعولية افضل من المقدر التقليدي) .

8. في عام 2020 قدر (Hawash) معولية التوزيع المختلط (أسي-كاما) باستعمال ثلاثة طرائق للتقدير وهي طريقة الامكان الاعظم وطريقة العزوم وطريقة المربعات الصغرى التفاضلية في ظل بيئة ضبابية بافتراضه عامل للضبابية $K=0.3, 0.7$ وتوصل الى ان طريقة الامكان الاعظم حققت نسبة افضلية 50% وتليها طريقة العزوم وطريقة المربعات الصغرى التفاضلية بنسبة 25%.

ثانياً: دراسات تناولت موضوع الحصانة والتقدير البيزي :

1. في عام 2002 قارن (Adam) بين نظرية القرار البيزية بعدم وجود نظرية القرار الحصينة مع نظرية القرار البيزية مع وجود نظرية القرار الحصينة اذ وجد بان نظرية القرار البيزية مع نظرية القرار الحصين تولد لنا حالة متكاملة من الدقة والكفاية في التقدير.
2. في عام (2007) هدفت (الياسري) الى الوصول الى مقدرات كفاءة لدالة المعولية التقريبية لتوزيع ويبيل عن طريق دراسة الطرائق الاعتيادية المتمثلة بطريقة الامكان الاعظم وطريقة العزوم وطريقة White وكذلك الطرائق الحصينة الاعتيادية المتمثلة بطريقة مقدرات M وكذلك اسلوب بيز. وتم اقتراح اسلوب بيز بالاعتماد على دالة سابقة مرافقة طبيعية فضلا عن اقتراح ثلاث طرائق وفق اسلوب بيز الحصين. إذ افترض الاسلوب المقترح الاول لبيز الحصين ان هنالك درجة اعتقاد للباحث بنسبة معينة (نسبة وقوع الباحث في خطأ تحديد المعلومات الاولية) فقد تم تحديد المعلومات الاولية الدقيقة التي سوف يتم دمجها مع مشاهدات العينة للحصول على مقدر بيز اما الاسلوب الثاني المقترح لبيز الحصين فقد عالج مشكلة تلوث مشاهدات العينة او المعلومات الاولية. في حين ان اسلوب بيز الحصين المقترح الثالث قد عالج ظهور المشكلتين معاً أي عدم الدقة في تحديد المعلومات الاولية وكذلك احتمال تلوث مشاهدات العينة او المشاهدات الاولية. وجرت المقارنة بين طرائق التقدير المدروسة باستعمال اسلوب المحاكاة وتم التوصل الى نجاح الطرائق المقترحة في تقدير دالة المعولية التقريبي

- لتوزيع ويبل. بالاعتماد على المقياسين الاحصائيين متوسطه مربعات الخطأ التكاملي (Integral Mean Square Error) (EMSE) ومتوسط الخطأ النسبي المطلق التكاملي (Integral Mean Absolute Percentage Error) (EMAPE).
3. في عام (2013) استخدم (Chaturvedi & Pati) التحليل البيزي الحصين لتقدير معلمات انموذج ويبل للفشل في ظل توزيع اولي من الصنف ϵ -II-ML. اذ تم الحصول على مقدرات Bayes لمتوسط العمر ودالة المعولية ومعدل الفشل في ظل دالة خسارة تربيعية ودالة خسارة LINEX باستعمال محاكاة مونت- كارلوا عن واستخدم معاينة جيبس Gibbs sampler لتوليد العينات. وتوصل الى كفاية انموذج بيز الحصين في التقدير مقارنة بالطرائق الاعتيادية .
4. في عام 2018 اقترح (Wang & Beli) انموذج بيبي حصين كبديل للانموذج القياسي يعطي حماية للبيانات التي تتضمن قيم شاذة او تبتعد عن الافتراضات الاساسية ووفقاً للانموذج المقترح على عدة نماذج منها انحدار بواسون والانحدار اللوجستي والنماذج الاحتمالية وتوصلا بان الانموذج المقترح يعطي تقديرات اكثر دقة من الانموذج التقليدي.
5. في عام 2016 اقترح (Seo & Kim) طريقة بيبي حصينة تعتمد على حصانة التوزيع الاول لمعلومات التوزيع الاسي بمعلمتين في ظل بيانات مراقبة هجينة من النوع الاول , ولكل معلمة تم اشتقاق التوزيع اللاحق المقابل لمقدر بيز الحصين في ظل دالة خسارة تربيعية , وعن طريق تجارب محاكاة تم اختبار الطريقة على مجموعة بيانات حقيقية باستعمال معياري متوسط مربعات الخطأ ومقدار التحيز , واثبتت تجارب المحاكاة ان مقدر بيز المستند الى توزيع اولي حصين افضل من مقدر بيز المستند الى توزيع اولي غير حصين ما يؤكد ان طريقة بيز الحصينة افضل من الطريقة الاعتيادية في تقدير معلمات التوزيع الاسي.
6. في عام 2019 استخدم (Panwar) وآخرون المنهج البيبي الحصين لتحليل اوقات الحياة لتوزيع ماكسويل (Maxwell Distribution) بالاستناد الى التوزيع الأولي صنف الامكان الاعظم النوع الثاني في ظل

- دالة خسارة تربيعية **Square Loss function** ودالة خسارة لينكس (**LINEX Loss function**) في حالة بيانات تامة وبيانات مراقبة هجينة تصاعدية من النوع الأول . وظهرت نتائج الدراسة بان الاخذ بنظر الاعتبار التلوث في البيانات يزيد من دقة التقديرات المستحصل عليها .
7. **في عام 2020 قدم (Shan)** وآخرون طريقة لتقدير انموذج الانحدار الخطي الجزئي باستعمال المنهج البيزي عند افتراض الابتعاد عن التوزيع الطبيعي وتمت مقارنته مع الطرائق التقليدية . وتوصلوا الى ان الطريقة المقترحة في ظل الحصانة تولد تقديرات اكثر دقة من الطرائق التقليدية (**Shan et al, 2020**)
8. **في العام نفسه (2020) استخدم (Entsar & Ahmed)** طريقة بيز القياسية وطريقة بيز الحصينة لتقدير المعلمة (**P**) ودالة البقاء للتوزيع ذي الحدين في حالة تعارض البيانات السابقة لتجربتي محاكاة. كانت التجربة الأولى في حالة البيانات السابقة غير المتضاربة. أظهرت نتائج المحاكاة للتجربة الأولى أن طريقة بيز الحصينة هي الأفضل باستعمال معيار متوسط مربعات الخطأ التكاملي (**IMSE**). في حين التجربة الثانية كانت في حالة وجود تعارض سابق في البيانات. أظهرت نتائج المحاكاة أن طريقة بيز الحصينة هي الأفضل باستعمال معيار متوسط مربعات الخطأ التكاملي (**IMSE**) ومن ثمّ ، فإن طريقة **Bayes** الحصينة هي الأفضل في كلتا الحالتين لتقدير المعلمة (**p**) ودالة البقاء للتوزيع ذي الحدين.
9. **في نفس العام (2020) استخدم (Baltagi et al.)** الحصانة البيزية لإنموذج البيانات الطولية الديناميكية باستعمال صنف التوزيعات السابقة الملوثة **ε-contamination** بنسب تلوث معينة وصنف الامكان الاعظم النوع الثاني ثانيا لتقدير الانموذج وعن طريق تجارب محاكاة مونت-كارلو بينوا ان مقدر بيز الحصين للأنموذج ذو كفاية عالية ويمكن الاعتماد عليه في حالة البيانات الملوثة.

نلاحظ من ما تم الاطلاع عليه من دراسات وابحاث سابقة انه لم يتناول أحد الباحثين موضوع الضبابية والحصانة في آن واحد ولاحتى في المنهج البيزي وان اغلب الباحثين عند اجراءهم دراسات عن مشكلة ما تدخل الضبابية فيها فانهم يفترضون رقما (عددا ثابتا) يعد كعامل للضبابية لغرض دراسة الضبابية وليس لديهم صيغة ثابتة لتحويل توزيع الفشل الاعتيادي الى توزيع فشل ضبابي وكذلك جميع الدراسات التي تناولت موضوع الحصانة البيزية اعتمدت على مبدأ اصناف التوزيعات الاولية الملوثة التي وضعت من لدن باحثين في هذا المجال او اعتمدت على التلوث في مشاهدات العينة.

في هذه الاطروحة (تم ايجاد طريقة بيزية ضبابية حصينة تعتمد على مبدأ تخصيص توزيع اولي لكل معلمة من معلومات التوزيع الاحتمالي لكل مشاهدة من مشاهدات العينة وبذلك نضمن ان تكون لكل مشاهدة من مشاهدات العينة مستقلة تماماً عن المشاهدة الأخرى مع تطبيق الطريقة على التوزيع الاحتمالي الضبابي الذي سيتم تحويله من توزيع احتمالي اعتيادي الى ضبابي بموجب طريقة مقترحة تعتمد على ايجاد دالة التوزيع التراكمية الضبابية عند مجموعة القطع (α)).

الفصل الثاني

الجانب النظري

المبحث الأول

نظرية المجموعات الضبابية

(Fuzzy sets theory)

2.1.1 تمهيد (Preface)

يتولد في الكثير من التطبيقات العملية ، في الصناعات ، وقياس الجهد ، والتيار ، ودرجة الحرارة والحقل الطبي ، وما إلى ذلك ، خطأ في القياس وهذا يسبب عدم الدقة في البيانات لذلك يمكن تمثيل عدم الدقة هذه بواسطة المبدأ الضبابي باستعمال دوال انتماء معينة تحدد درجة أهمية الكائن بالنسبة لمجموعته.

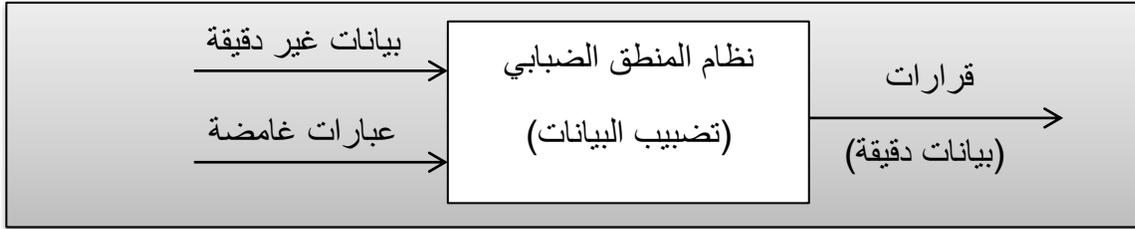
في هذا المبحث تم عرض بعض المفاهيم الأساسية في نظرية المجموعة الضبابية وكذلك عرضاً لأهم دوال الإنتماء والأرقام الضبابية والتوزيع الإحتمالي الضبابي والأحداث الضبابية.

2.1.2 الضبابية والمنطق الضبابي (Fuzziness and Fuzzy logic)

تزداد أهمية المعرفة البشرية في الوقت الحاضر والتي تُكتسب من تجارب العالم الذي نعيش فيه واستعمال قدراتنا على التفكير في خلق كتلة من المعلومات (أي صياغة معرفتنا البشرية بطريقة منهجية) ، ولكننا نظلُّ مقيدين في قدرتنا على إدراك العالم والتفكير العميق فيه فنجد أنفسنا في مواجهة عدم اليقين (عدم الدقة) في كل مكان وزمان والنتائج عن نقص المعلومات وعلى وجه الخصوص عدم الدقة في القياسات (المشاهدات) فنحن نفهم المعاني الأساسية للكلمة ونستطيع التواصل الى درجة مقبولة لغوياً ولكننا لا يمكننا الاتفاق بدقة فيما بيننا بالكلمة المفردة او المصطلحات ذات المعنى السليم فباختصار تكون لغاتنا الطبيعية ضبابية (غامضة) فتتخلل تصوراتنا للعالم الحقيقي مفاهيم ليس لها حدود محددة بشكل قاطع مثل "طويل" ، "أكثر بكثير" ، "صغير" ، وما الى ذلك فهي صحيحة الى حد ما وخاطئة الى حد ما ويمكننا تسمية هذه المصطلحات بالمفاهيم الضبابية أو الغامضة (Fuzzy)، وهي مفاهيم يعمل معها الدماغ البشري ولكن لا تعمل معها اجهزة الكمبيوتر ، فاصبحت الضبابية حلاً للمشاكل التي تعاني من عدم الدقة في قياساتها. (Zadeh, 1973,28).

ويعد المنطق الضبابي من الأدوات الرياضية والتقنيات الحديثة الذي أظهر مقدره كبيرة في حل المشاكل على نطاق واسع في مجالات تطبيقية مختلفة ، ثم تطور هذا المنطق ليمس معظم الجوانب التكنولوجية الحديثة. وهو أحد أكثر الطرائق العملية لمحاكاة الخبرة البشرية بطريقة واقعية عن طريق فرضية مفادها أن البشر لا يمثلون فئات من الأشياء (مثل فئة الرجال البدينين ، أو فئة الأرقام

التي تزيد كثيرًا عن 50) بعدها منفصلة تمامًا ولكن بالأحرى كمجموعات قد تكون فيها درجات انتماء مختلفة. ولوجود الكثير من الظواهر تتعامل مع معلومات غير دقيقة وغير محددة بشكل واضح جاءت نظرية المنطق الضبابي لسد ثغرات كبيرة في المنطق التقليدي (**Crisp**) عند الاستدلال في ظروف غير مؤكدة (**Uncertain**) وغير دقيقة والذي يعد كحل لمشكلة تمثيل المعلومات التقريبية بالتركيز على الاستنتاج عن طريق التعابير اللغوية بإعطاء درجة انتماء (عضوية) لأي عنصر في المجموعة ضمن المجال الحقيقي $[0, 1]$ تحدد هذه الدرجة في انتماء العنصر الى المجموعة الجزئية الضبابية. والشكل (2-1) يبين نظام المنطق الضبابي الذي يقبل البيانات غير الدقيقة والعبارات الضبابية ليجهز لنا قاعدة لاتخاذ قرارات دقيقة.



شكل (2-1) نظام المنطق الضبابي

وتعد الضبابية (**Fuzziness**) العملية التي يتم فيها تحويل الكميات غير الدقيقة إلى ضبابية ويتم تشكيل القيم الضبابية عن طريق تحديد بعض أوجه عدم الدقة الموجودة في القيم التقليدية باستعمال دوال الإنتماء ، والفرق بين العشوائية والضبابية هو ان الضبابية تصف غموض الحدث والعشوائية تصف عدم اليقين في وقوع الحدث. ويمكن أن نرى بشكل عام مجموعات غير تقليدية أي فيها عدم يقين ، ومن ثم فإن لها حدودًا واضحة ، ولكن في حالة المجموعة الضبابية ، نظرًا لحدوث عدم الدقة (عدم اليقين) ، قد يتم تحديد الحدود بشكل ضبابي. (S. N. Sivanandam & et al, 2007, 76)

2.1.3 المجموعة الضبابية والمجموعة التقليدية (Fuzzy and Crisp set)

يعد مفهوم المجموعة الضبابية من المرتكزات الأساسية للعلوم الرياضية الحديثة، فالمفهوم العادي للمجموعة وكما يعرف بـ (المجموعة التقليدية) بأنها مجموعة تكون العناصر فيها أما تنتمي او لا تنتمي اليها مع التمييز المطلق بين الإنتماء وعدم الإنتماء ، مع وجود حدود واضحة ودقيقة جداً لكل عنصر ينتمي اليها فلا يسمح للعنصر ان يكون في المجموعة او لا يكون فيها في الوقت نفسه (**Pak** & et al , 2013, 341-342).

لتكن Ω مجموعة شاملة (Universe of discourse) , وان A مجموعة جزئية منها , فان كل عنصر x في A يمكن ان ينتمي أو لا ينتمي للمجموعة A .
ولتكن $\mu_A(x)$ دالة مميزة للمجموعة A تعطي لكل عنصر في المجموعة Ω درجة إنتماء الى المجموعة A وتكون هذه الدالة ثنائية القيم $\{0,1\}$ إذ أن:

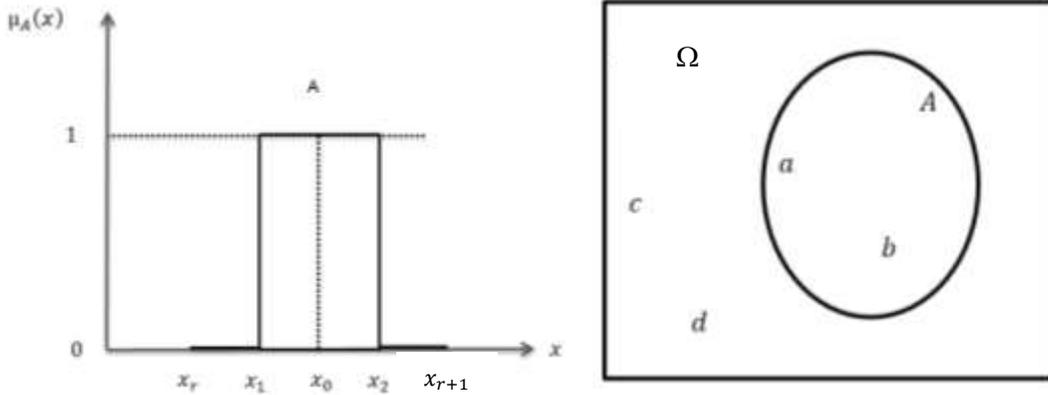
$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \in A \\ 0, & \text{if } x \notin A \end{cases}$$

فاذا كانت $\mu_A(x) = 1$ فان العنصر x له انتماء تام للمجموعة A

واذا كانت $\mu_A(x) = 0$ فان العنصر x لاينتمي بتاتا للمجموعة A

(H. Garg et al, 2013, 397) (A. Ibrahim, A. Mohammed, 2017, 143)

والشكل (2-2) يبين المجموعة التقليدية إذ نلاحظ فيه أن الإلتواء للعناصر x_r و x_{r+1} يساوي صفرأ وللعناصر x_0 و x_1 و x_2 يساوي واحداً , وان العناصر فيها اما تنتمي للمجموعة او لاتتنمي اليها.



الشكل (2-2) التمثيل البياني للمجموعة التقليدية (Crisp set)

(Kwang H. Lee, 2004, 7)

أما المجموعة الضبابية (Fuzzy set) فهي مجموعة حدودها غامضة , كل عنصر في المجموعة الضبابية له درجة انتماء معينة , وتُميَّز المجموعة الضبابية بدالة انتماء (Membership function) التي تُخصص لكل عنصر في المجموعة درجة انتماء في الفترة $[0, 1]$. وفيها يسمح للعنصر او الكائن بالإنتماء الجزئي (Partial Membership) .

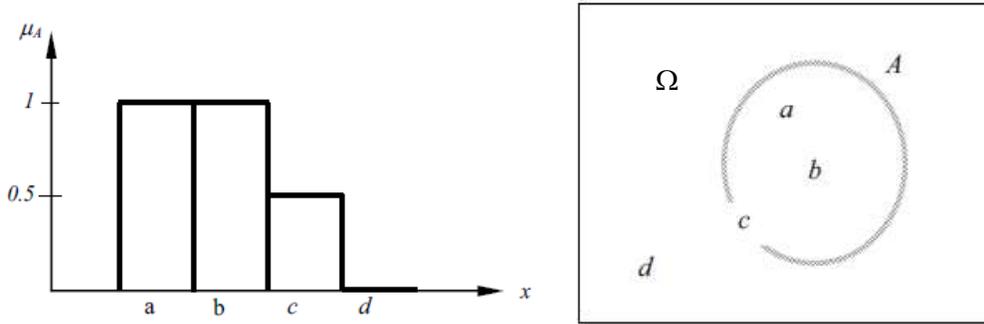
(Pak, 2017, 504)

لتكن Ω مجموعة شاملة فان المجموعة الضبابية الجزئية \tilde{A} من Ω والمميزة بدالة انتماء $\mu_{\tilde{A}}(x)$ التي تنتج قيم بين $[0, 1]$ لكل قيم x في فضاء العينة الضبابية فالمجموعة الضبابية هي مجموعة الأزواج المرتبة:

$$\tilde{A} = \{(x_i, \mu_{\tilde{A}}(x_i)), x \in \Omega, i = 1, 2, 3, \dots, n, 0 \leq \mu_{\tilde{A}}(x) \leq 1\} \quad \dots (2-1)$$

لنفرض ان $\mu_{\tilde{A}}(x_0) = 1$ فان x_0 ينتمي تماماً الى \tilde{A} وإذا كانت $\mu_{\tilde{A}}(x_1) = 0$ فان x_1 لا ينتمي تماماً الى المجموعة \tilde{A} وإذا كانت $\mu_{\tilde{A}}(x_1) = 0.9$ فان x_1 ينتمي بدرجة 0.9 الى \tilde{A} . وإذا كانت $\mu_{\tilde{A}}(x)$ مساوية الى واحد أو صفر سنحصل على مجموعة جزئية غير ضبابية (Crisp subset) من فضاء العينة (Ω) . (Danyaro & et al., 2010, 240).

والشكل (2-3) يبين المجموعة الضبابية إذ نلاحظ فيه أن الإلتواء العنصر c يمكن ان يقع بين الصفر والواحد والعناصر a, b درجة إلتواءها تساوي واحداً، وان العناصر يمكن ان تنتمي للمجموعة A بدرجات انتماء مختلفة.



الشكل (2-3) التمثيل البياني للمجموعة الضبابية (Fuzzy set)

(بشار, 2018, 17) (Kwang H. Lee, 2004, 8)

2.1.4 دوال الإلتواء (Membership functions)

تعد دالة الإلتواء (Membership function) من الدوال الأساسية والمهمة في نظرية المجموعات الضبابية والتي تستعمل لتوليد إلتواء العناصر ضمن المجموعة الضبابية إذ تولد قيم ضمن الفترة $[0, 1]$ لتمثل درجة انتماء كل عنصر موجود في المجموعة الشاملة التقليدية ضمن المجموعة الضبابية (Fuzzy set) (Abboudi & et al, 2020, 614). بمعنى آخر هي الدالة التي ترسم درجة أهمية العنصر (درجة الإلتواء) في المجموعة الشاملة الى المجموعة الضبابية، وهي دالة ذات قيمة موجبة (Rutkowski, 2004, 7-8).

تمثل دوال الإنتماء بمخطط محوره الصادي (**Y-axis**) يمثل درجة الإنتماء للمجموعة والمحور السيني (**X-axis**) يمثل القيم الاعتيادية للمتغير الضبابي، وإن الشرط الاساس لهذه الدوال أن يكون مداها بين الصفر والواحد، عندما تكون درجة الإنتماء 1 تعني إن القيمة هي بالتأكيد تنتمي للمجموعة ودرجة الإنتماء صفر تعني إن القيمة لا تنتمي للمجموعة، والقيمة البينية ما بين القيمتين (0,1) تعرف درجات إنتماء العناصر في المجموعة. وإن دالة الإنتماء في المجموعة الضبابية هي تعميم للدالة المميزة للمجموعة التقليدية واعتماداً على نوع دالة الإنتماء يتم الحصول على انواع مختلفة من المجموعات الضبابية (H. Garg et al, 2013, 398).

2.1.4.1 التعبير عن دوال الإنتماء (Membership functions Expression)

هنالك أسلوبان للتعبير عن دوال الإنتماء للمجموعات الضبابية :

1- الأسلوب العددي (Numerical Approach)

هو أسلوب يعبر عن درجة الإنتماء للمجموعة الضبابية كمتجه من الأعداد تعتمد أبعاده على مستوى القطع (**Level of cut**)، بمعنى آخر هو عدد من العناصر المنقطعة في المجموعة الشاملة. وهذا الأسلوب غير دقيق في تحديد درجة الإنتماء كونه يعبر عن الخبرة الشخصية للباحث ولا يعتمد أسلوب علمي دقيق.

2- الأسلوب الدالي (Functional Approach)

هو الأسلوب الأدق في تعيين درجات الإنتماء للعناصر إذ يبني على تعريف دالة الإنتماء للمجموعة الضبابية بشكل تحليلي (**Analytic**)، الذي يسمح بحساب درجة الإنتماء لكل عنصر في المجموعة الشاملة.

(A. Sancho-Royo & J. L. Verdegay, 2019)

2.1.4.2 مميزات دوال الإنتماء (Features of Membership Functions)

تُحدد دوال الإنتماء بثلاث خصائص رئيسية هي:

1- النواة (اللب) (Core)

إذا كانت \tilde{A} مجموعة ضبابية , فإن لبها هو عندما تكون درجة انتماءها كاملة وتساوي 1.

2- الداعم (القاعدة) (Support)

إذا كانت \tilde{A} مجموعة ضبابية , فإن العناصر المتضمنة في المجموعة \tilde{A} والتي درجة إنتماءها أكبر من الصفر تمثل الداعم لتلك المجموعة :

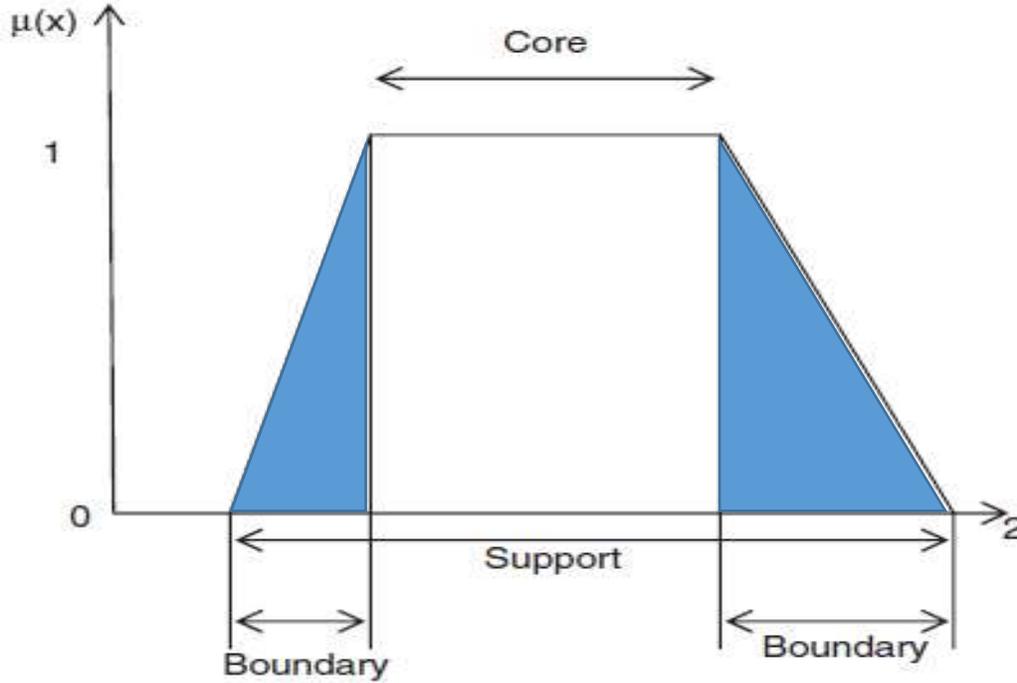
$$\text{Support}(\tilde{A}) = \{x \in \Omega / \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\} \quad \dots (2-2)$$

3- الحدود (Boundary)

إذا كانت \tilde{A} مجموعة ضبابية , فإن العناصر المتضمنة في المجموعة \tilde{A} والتي درجة إنتماءها أكبر من الصفر وغير كاملة أي ان :

$$\text{Boundary}(\tilde{A}) = \{x \in \Omega ; 0 < \mu_{\tilde{A}}(x) < 1\} \quad \dots (2-3)$$

(Chaira, 2019, 4-5) (S. N. Sivanandam & et al, 2007, 73-75)



شكل (2-4) مميزات دالة الإنتماء

(S. N. Sivanandam & et al, 2007, 74)

2.1.4.3 أنواع دوال الإنتماء (Membership functions types)

اقترح العالم زاده (Zadeh) مجموعة من دوال الإنتماء لإتخاذ قرارات مناسبة في حالة عدم اليقين والتي يمكن تصنيفها الى مجموعتين وكالاتي:

1. دوال الإنتماء الخطية (Linear membership functions) والتي ترسم كخط مستقيم.
2. دوال الإنتماء اللاخطية (Non-Linear membership functions) والتي ترسم على شكل منحنيات.

(S. N. Sivanandam & et al , 2007, 3)

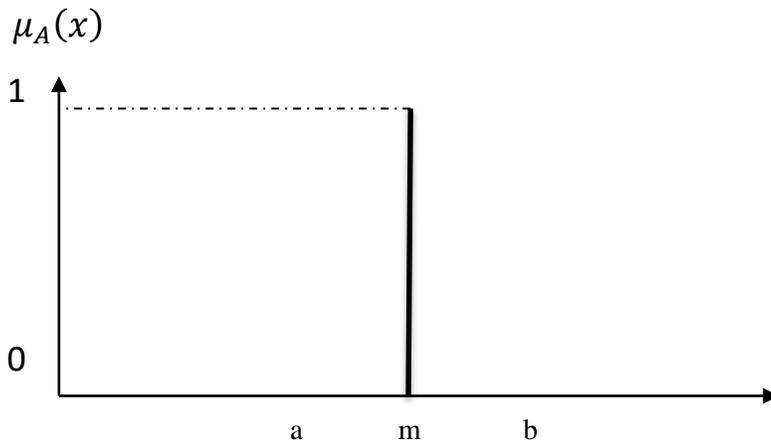
ويعد شكل دالة الإنتماء من المعايير المهمة التي يجب مراعاتها لغرض الحصول على المجموعة الضبابية, فهناك العديد من دوال الإنتماء وهي :

1- دالة الإنتماء المفردة (Singleton membership Function)

هي من دوال الإنتماء الخطية وتأخذ القيمة (0) لكل قيم المجموعة الشاملة فيما عدا النقطة المركزية (m) فانها تأخذ القيمة (1) لذا فهي تعد تمثيلاً للقيمة التقليدية ،ويعبر عنها بالصيغة الآتية :
(Ghelli & et al., 2016, 5)

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \neq m \\ 1 & \text{if } x = m \end{cases} \quad \dots (2-4)$$

والشكل (2-5) يبين دالة الإنتماء المفردة



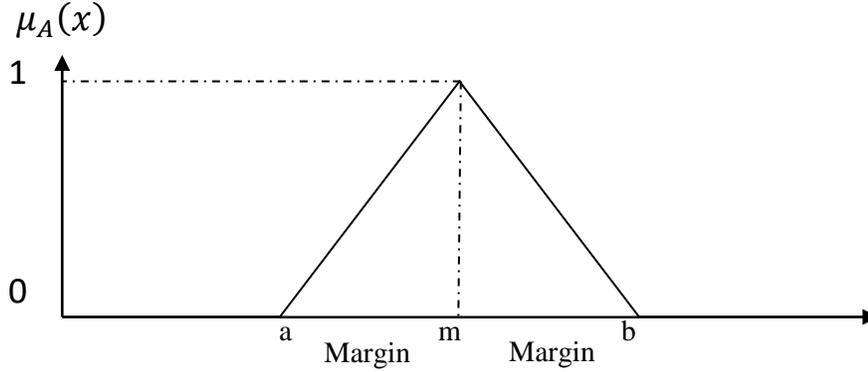
شكل (2-5) دالة الإنتماء المفردة Singleton

-2 دالة الإنتماء المثلثية (Triangular membership Function)

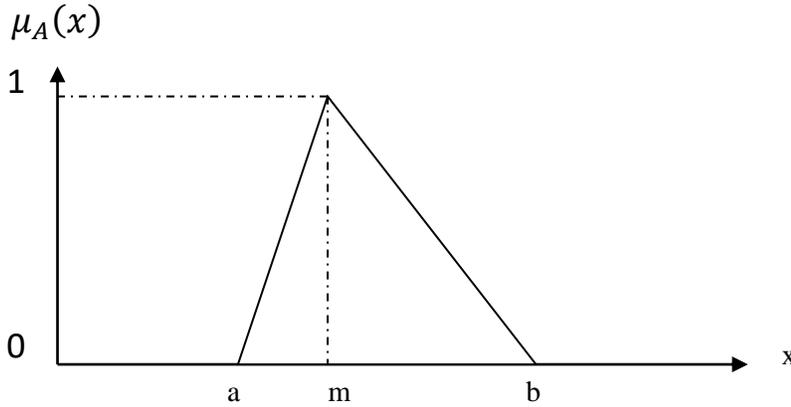
هي من دوال الإنتماء الخطية وتكون محددة بثلاث معلمات هي حد أدنى (a) وحد أعلى (b) ومشروطة بقيمة مركزية (m) وتكون صيغتها كالآتي :

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq a \\ \frac{x-a}{m-a} & \text{if } a < x \leq m \\ \frac{b-x}{b-m} & \text{if } m < x < b \\ 1 & \text{if } x \geq b \end{cases} \quad \dots (2-5)$$

إذ أن $a < m < b$, وتكون متماثلة اذا كانت القيم الحدية (Margin) $b - m$ يساوي $m - a$ والشكل (2-6) (a) يبين دالة الإنتماء المثلثية المتماثلة (b) يبين دالة الإنتماء المثلثية العامة. (de Barros, 2017, 29) (Chaira, 2019, 6).



(a)



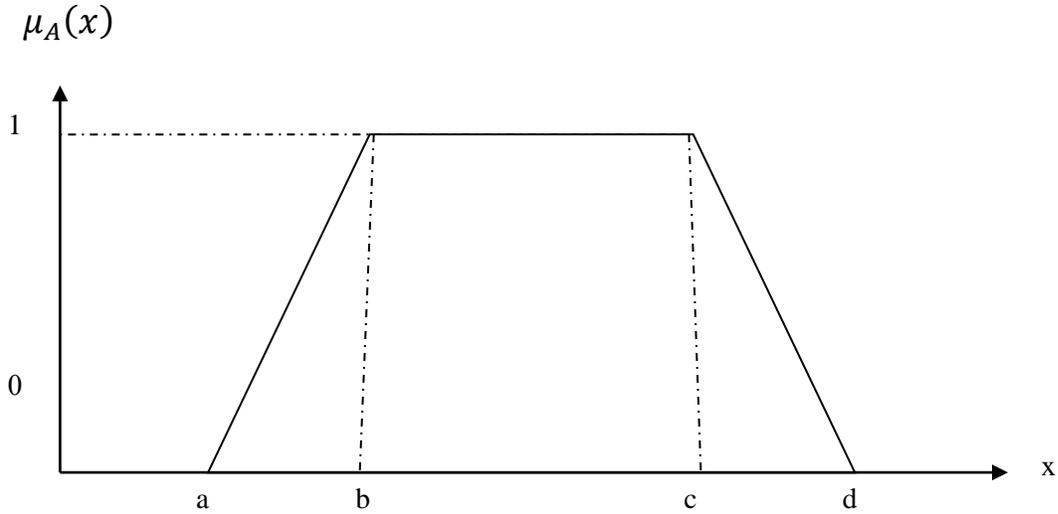
(b)

شكل (2-6) (a) دالة الإنتماء المثلثية المتماثلة (b) دالة الإنتماء المثلثية العامة

3- دالة الإنتماء شبه المنحرف (Trapezoid Function)

هي من دوال الإنتماء الخطية التي لها أربعة معلمات حد أدنى (a) وحد أعلى (d) ومشروطة بقيمتين مركزيين (b) و (c) على الترتيب وتكون صيغتها كالاتي:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{if } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{if } b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c} & \text{if } c < x \leq d \\ 1 & \text{if } x \geq d \end{cases} \quad \dots (2-6)$$



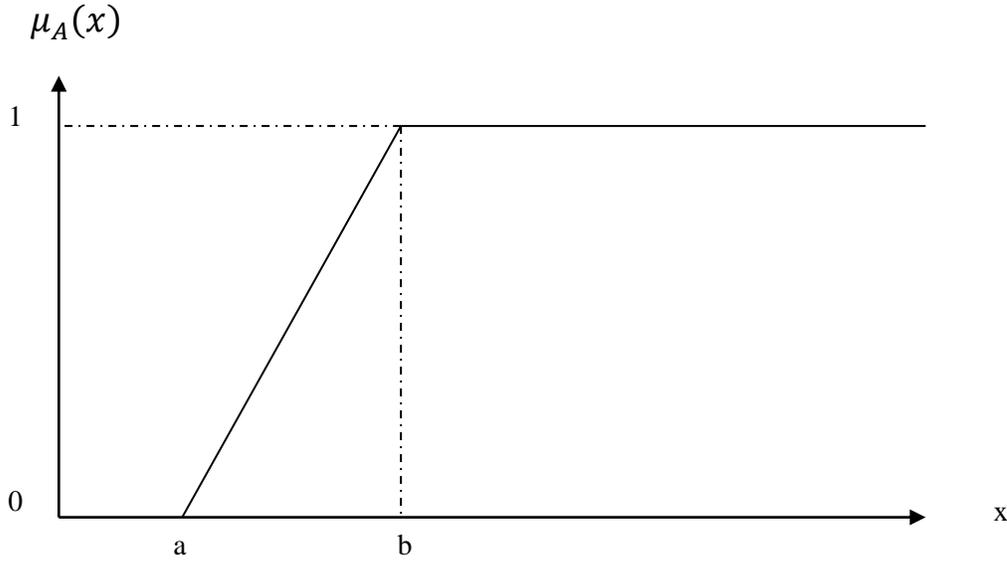
شكل (2-7) دالة الإنتماء شبه المنحرف العامة

وهناك نوعان من الحالات الخاصة لدالة شبه المنحرف :

أ- دالة الإنتماء شبه المنحرف L - membership Function)

هي حالة خاصة لدالة شبه المنحرف عندما يكون $c = d = +\infty$

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{if } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{if } x > b \end{cases} \quad \dots (2-7)$$

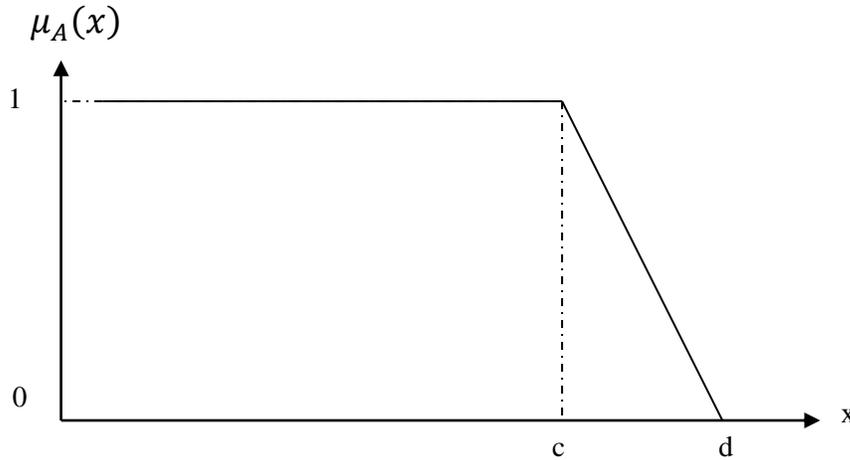


شكل (2-8) دالة L-شبه المنحرف

ب- دالة الإنتماء R – (R – membership Function)

هي حالة خاصة لدالة شبه المنحرف عندما يكون $a = b = -\infty$

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x > d \\ \frac{d-x}{d-c} & \text{if } c \leq x \leq d \\ 1 & \text{if } x < c \end{cases} \quad \dots (2-8)$$



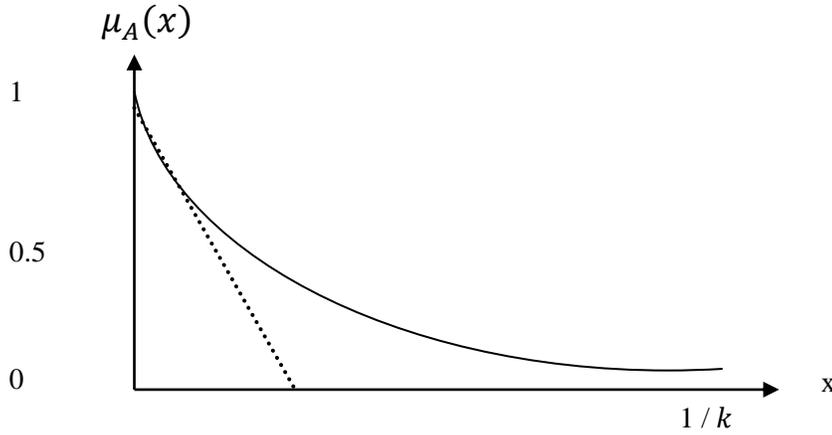
شكل (2-9) دالة R-شبه المنحرفة

(de Barros, 2017, 30) (Chaira, 2019, 7)

4- دالة الإنتماء الأسية (Exponential membership Function)

هي من دوال الإنتماء غير الخطية وتكون مميزة بمعلمة واحدة k اذا ان $k > 0$ ويمكن التعبير عنها بالصيغة الآتية :

$$\mu_e(x, k) = e^{-kx} \quad \dots (2-9)$$



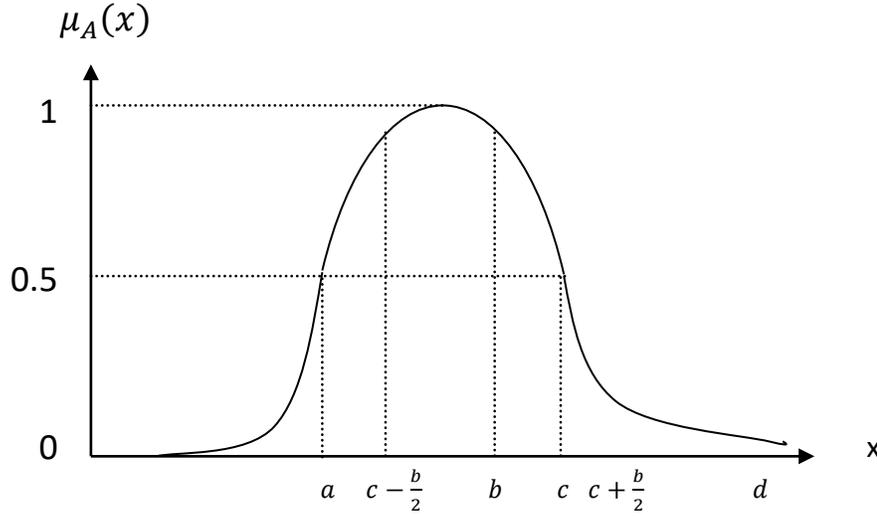
الشكل (2-10) دالة الانتماء الأسية

5- دالة (pi - Function) pi

تعد دوال الإنتماء غير خطية وتعد بديلا جيدا للدوال المثلثية التي تمتلك نقطتي انقلاب $c \pm \frac{b}{2}$ عند كل جانب من الدالة وهي مميزة بأربعة معلمات (a, b, c, d) اذا ان a, d تمثلان معلمتي موقع منحنى الدالة و b, c تمثلان معلمتي قياس منحنى الدالة , وصيغتها كالآتي:

(MathWorks , 2021)

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq a \\ 2 \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^2 & \text{if } a \leq x \leq \frac{a+b}{2} \\ 1 - 2 \left(\frac{x-b}{b-a} \right)^2 & \text{if } \frac{a+b}{2} \leq x \leq b \\ 1 & \text{if } b \leq x \leq c \\ 1 - 2 \left(\frac{x-c}{d-c} \right)^2 & \text{if } c \leq x \leq \frac{c+d}{2} \\ 2 \left(\frac{x-d}{b-c} \right)^2 & \text{if } \frac{c+b}{2} \leq x \leq d \\ 0 & \text{if } x \geq d \end{cases} \quad \dots (2-10)$$

الشكل (2-11) دالة الانتماء μ_A

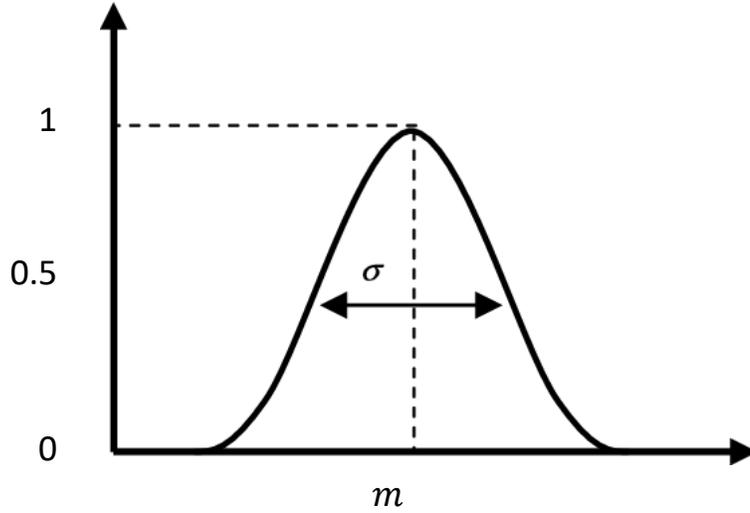
(Wang & et al , 2006,1483)

6- الدالة الكاوسية (Gaussian Function)

من دوال الإنتماء اللاخطية تمتلك تقريباً شكل الناقوس وتكون مميزة بقيمة مركزية m و قيمة تمثل مقياس لمنحنى الدالة σ وهي الانحراف المعياري للمجموعة الضبابية (عرض المجموعة الضبابية) والتي كلما كانت صغيرة زاد اقتراب منحنى الدالة من القيمة المركزية وصيغتها كالتالي

:(A. Hameed, 2011,7)

$$\mu_A(x) = \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) \quad \dots (2-11)$$



الشكل (2-12) دالة الإنتماء الكاوسية

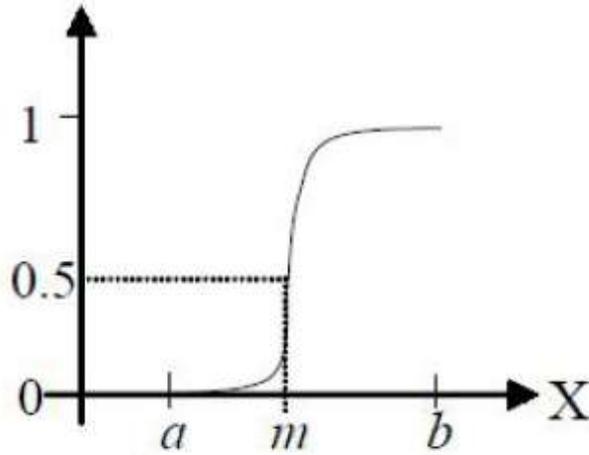
7- الدالة اللوجستية (Logistic membership Function)

من دوال الإنتماء اللاخطية تحتوي عاملاً مهماً هو عامل الضبابية (α) وتتراوح قيمتها ($0 < \alpha < \infty$) الذي يقيس درجة الضبابية فعندما ($\alpha \rightarrow 0$) فهذا يشير الى عدم وجود ضبابية اما اذا اقتربت α الى ∞ فان الضبابية تكون كبيرة جدا , ولها حد ادنى a وحد اعلى b ويمكن التعبير عنها بما يأتي

(Sengupta & et al , 2008, 5263):

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & x < a \\ \frac{w}{1+ue^{\alpha x}} & a < x < b \\ 0 & x > b \end{cases} \quad \dots (2-12)$$

إذ أن (w, u) قيم ثابتة موجبة.



الشكل (2-13) دالة الإنتماء اللوجستية

8- دالة كاما (Gamma membership Function)

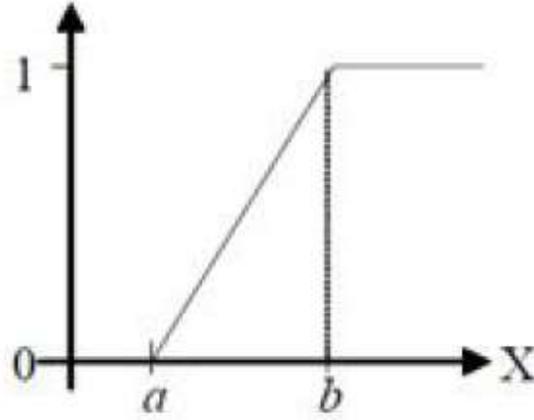
من دوال الإنتماء اللاخطية وتكون معرفة بحد ادنى وقيمة $k > 0$ ويمكن التعبير عنها بما يأتي :

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq a \\ \frac{k(x-a)^2}{1+k(x-a)^2} & \text{if } x > b \end{cases} \quad \dots (2-13)$$

وتتميز هذه الدالة بنمو سريع يبدأ من a , وان k يحدد معدل النمو, وتكون خطا افقيا عند 1.

ويمكن ان يعبر عن هذه الدالة كدالة خطية بالصيغة الآتية:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{if } a < x \leq b \\ 1 & \text{if } x > b \end{cases} \quad \dots (2-14)$$



الشكل (2-14) دالة الإنتماء كما

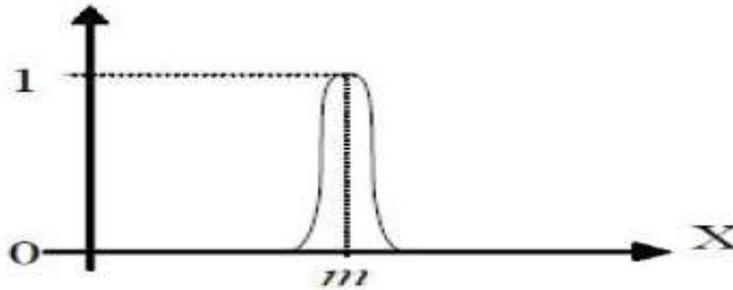
(S. N. Sivanandam & et al, 2007, 77)

9- دالة الإنتماء الأسية الزائفة (Pseudo -Exponential membership Function)

من دوال الإنتماء اللاخطية وتكون معرفة بقيمة مركزية m وقيمة $k > 1$ وكلما زادت قيمة k زاد معدل

النمو ويصبح منحنى الدالة ناقوسي الشكل , ويمكن التعبير عنها بما يأتي :

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq a \\ \frac{1}{1+k(x-m)^2} & \text{if } x > b \end{cases} \quad \dots (2-15)$$



الشكل (2-15) دالة الإنتماء الأسية الزائفة

(S. N. Sivanandam & et al, 2007, 78)

2.1.5 الداعم للمجموعة الضبابية (Support for fuzzy set)

إذا كانت \tilde{A} مجموعة ضبابية , فان مجموعة العناصر في \tilde{A} والتي درجة إنتماءها أكبر من الصفر , أي أن:

$$Support(\tilde{A}) = \{x \in X / \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\} \quad \dots (2-16)$$

(بشار , 2018 , 17)

2.1.6 ارتفاع المجموعة الضبابية (Height for fuzzy set)

إذا كانت \tilde{A} مجموعة ضبابية , فان ارتفاعها هو أعلى قيمة من قيم دوال انتماءها , أي أن:

$$hgt(\tilde{A}) = \sup_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x) \quad \dots (2-17)$$

(بشار , 2018 , 17)

2.1.7 المجموعة الضبابية المحدبة (Convex Fuzzy set)

بافتراض ان المجموعة الشاملة X معرفة في الفضاء الاقليدي ذو البعد n , R^n , فاذا كانت كل مجموعات القطع α محدبة , فان المجموعة الضبابية لكل تلك المجموعات تكون محدبة :

$$\mu_A(t) \geq \min[\mu_A(r), \mu_A(s)] \quad \dots (2-18)$$

إذ

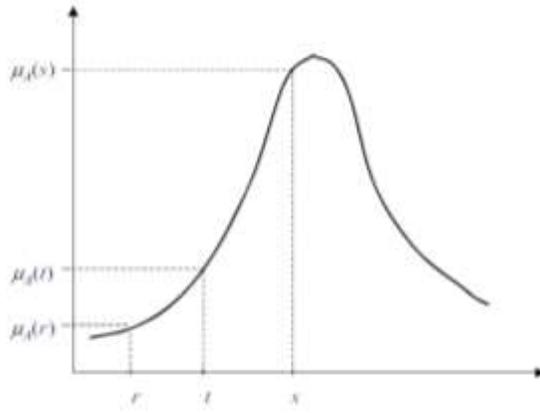
$$t = \lambda r + (1 - \lambda)s$$

إذ ان :

$$r, s \in R^n, \lambda \in [0,1]$$

فإن المجموعة الضبابية \tilde{A} تكون مجموعة محدبة (Convex)

(بشار , 2018 , 18-19) (Gadjiev, 2021, 278)



الشكل (2-16) المجموعة الضبابية المحدبة $\mu_A(t) \geq \mu_A(r)$

2.1.8 المجموعة الضبابية المعيارية: (Normalized Fuzzy Set)

\tilde{A} تدعى مجموعة ضبابية معيارية، إذا وجد عنصر مثل $x \in X$ بحيث ان الحد الاقصى لدالة الإنتماء يساوي 1 والذي يمثل طول المجموعة الضبابية (Norm) أي أن:

$$\tilde{A}' = norm(\tilde{A}) \Leftrightarrow \mu_{\tilde{A}'}(x) = \frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{hgt(\tilde{A})} ; \forall x \in X \quad \dots (2-19)$$

إذ أن:

$\mu_{\tilde{A}}(x)$ دالة الإنتماء للمجموعة الضبابية \tilde{A}

$\mu_{\tilde{A}'}(x)$ دالة الإنتماء للمجموعة الضبابية المعيارية \tilde{A}'

$hgt(\tilde{A})$ إرتفاع المجموعة الضبابية

(Babuska, 1998, 229)

2.1.9 الارقام الضبابية: (Fuzzy Numbers)

تستعمل الارقام الضبابية لوصف حالة عدم التأكد (Uncertainty) , وهي ارقام غالباً ما تكون ثلاثية الشكل **Triangular** او شبه منحرفة الشكل **Trapezoidal** او اي شكل اخر .

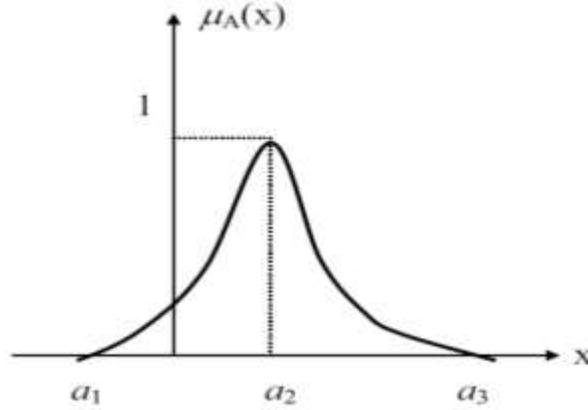
والرقم الضبابي هو مجموعة ضبابية بالشروط الآتية :

1- مجموعة ضبابية محدبة (Convex) ومعيارية (Normalized)

2- دالة الإنتماء $\mu_{\bar{a}}$ وتكون مستمرة من جهة اليمين

3- مجموعة المستوى α محددة لكل $\alpha \in [0,1]$

4- معرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية R .



الشكل (17- 2) الرقم الضبابي (Fuzzy Number)

2.1.9.1 الرقم الضبابي المثلثي (Triangular Fuzzy Number)

يعرف بثلاثة ارقام a_1, a_2, a_3 إذ أن $a_1 < a_2 < a_3$ وقاعدة المثلث الفترة $[a_1, a_3]$ ورأسه عند $x = a_2$ ويمكن أن يكتب بالصيغة الآتية :

$$\tilde{N} = (a_1/a_2/a_3)$$

ويكون الرقم الضبابي المثلثي $\tilde{N} = (a_1/a_2/a_3)$ مميزا بدالة انتماء مثلثية (Triangular membership function) وصيغتها كالاتي :

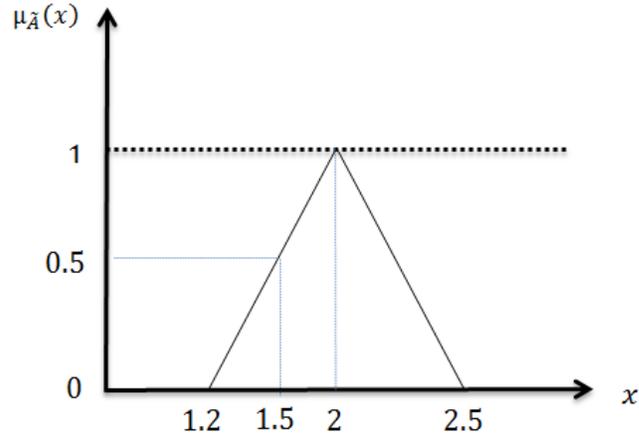
$$\mu_{\tilde{N}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a_1}{a_2-a_1} & a_1 \leq x \leq a_2 \\ \frac{a_3-x}{a_3-a_2} & a_2 \leq x \leq a_3 \\ 0 & o.w \end{cases} \quad \dots (2-20)$$

فمثلاً الرقم الضبابي المثلثي الآتي :

$$\tilde{N} = (1.2/2/2.5)$$

المبين في الشكل (18-2) ونلاحظ انه $\tilde{N} = (1.6) = 0.5$ و $\tilde{N} = (2) = 1$

(Kwang, 2004, 9)



الشكل (2-18) الرقم الضبابي المثلثي $\tilde{N} = (a_1/a_2/a_3)$

2.1.9.2 الرقم الضبابي شبه المنحرف (Trapezoidal Fuzzy Number)

يعرف بأربعة أرقام a_1, a_2, a_3, a_4 إذ $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ وقاعدة المثلث الفترة $[a_1, a_4]$ وقيمته عند الفترة $[a_2, a_3]$ ويمكن ان يكتب بالصيغة الآتية :

$$\tilde{M} = (a_1/a_2, a_3/a_4)$$

ويكون الرقم الضبابي شبه المنحرف $\tilde{M} = (a_1/a_2, a_3/a_4)$ مميز بدالة انتماء شبه منحرفة (Trapezoidal membership function) وصيغتها كالآتي :

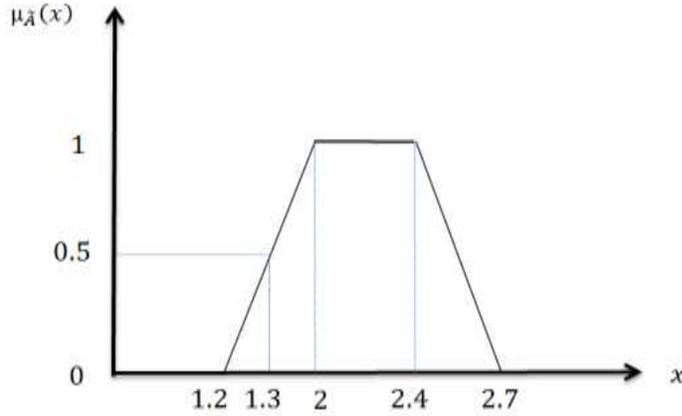
$$\mu_{\tilde{M}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a_1}{a_2-a_1} & a_1 \leq x \leq a_2 \\ 1 & a_2 \leq x \leq a_3 \\ \frac{a_4-x}{a_4-a_3} & a_3 \leq x \leq a_4 \\ 0 & o.w \end{cases} \quad \dots (2-21)$$

لتوضيح ما الرقم الضبابي شبه المنحرف نفرض الرقم الضبابي الآتي :

$$\tilde{N} = (1.2/2, 2.4/2.7)$$

المبين في الشكل (2-19) ونلاحظ أنه $\tilde{N} = (2, 2.4) = 1$ و $\tilde{N} = (1.3) = 0.5$

(Pak, 2016, 93)



الشكل (2-19) الرقم الضبابي شبه المنحرف $\tilde{M} = (a_1/a_2, a_3/a_4)$

2.1.10 القطع الفا (α -cut)

قدم مبدأ القطع في المجموعة الضبابية لأول مرة من لدن زاده (Zadeha, 1971) , وتعرف α بانها ادنى درجة انتماء لاي عنصر في المجموعة الضبابية \tilde{A} وتقع قيمته ضمن الفترة $[0, 1]$. (H. Garg et al, 2013, 398) , والتي تمثل درجة انتماء العناصر المهمة كون الإنتماء المهم ينحصر بين قيمتين (a_1, a_m) على خط الارتكاز للمجموعة الضبابية ($Support \tilde{A}$) وماعدا تلك القيم يكون قليل الأهمية وخارج نطاق العمل ($cut - out$) (أوجي, 2015).

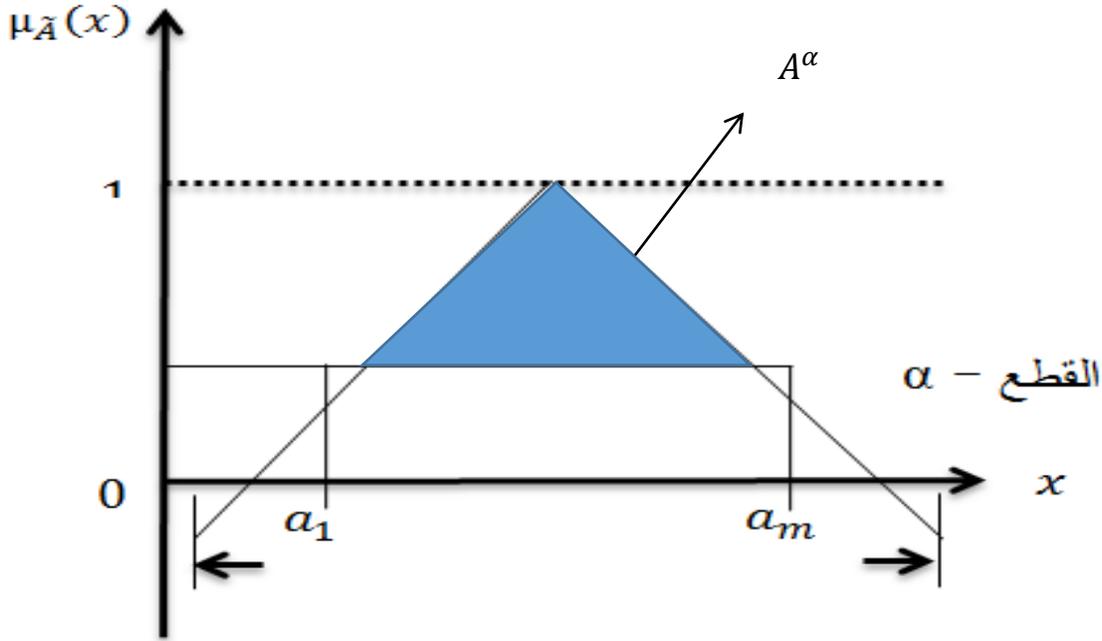
2.1.11 مجموعة القطع الفا (α -cut set)

يعرف القطع الفا للمجموعة الضبابية \tilde{A} وهو المجموعة التقليدية التي عناصرها تنتمي للمجموعة الضبابية \tilde{A} والتي لها درجة انتماء اكبر او تساوي α , ورياضياً يمكن ان تكتب كالاتي:

$$A^\alpha = \{\tilde{x} \in X; \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\} \quad \dots (2-22)$$

إذ ان $0 < \alpha < 1$, Ω المجموعة الشاملة (Universe of discourse)

(الغنام وهبة, 2009, 170) (Khoolenjani, 2016, 183) (H. Garg et al, 2013, 398)

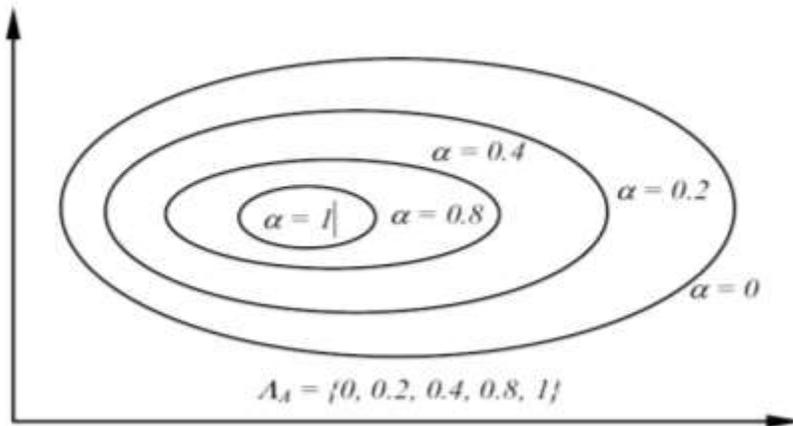


الشكل (2-20) مجموعة القطع A^α والقطع α للمجموعة الضبابية
 نلاحظ من الشكل (2-20) ان المثلث المحدد باللون الازرق هو مجموعة القطع وهي المجموعة
 الضبابية التي نتجت بتحديد العناصر التي لها درجة انتماء اكبر او تساوي القطع α .

2.1.12 مجموعة المستوى (Level set)

هي المجموعة المستحصل عليها من عدة قيم لـ α إذ أن (R. Yager, 2008, 3565):

$$\Lambda = \{ \alpha / \mu_{\tilde{A}}(x) = \alpha, \alpha > 0, x \in \Omega \} \quad \dots (2-23)$$



الشكل (2-21) مجموعة المستوى Λ (Kwang H. Lee, 2004, 9)

إذ نلاحظ من الشكل (2-21) أنه كلما كبرت قيمة (α) قل عدد العناصر التي لها درجة انتماء اكبر منها او تساويها ضمن المجموعة الضبابية \tilde{A} (اي تقل الضبابية).

2.1.13 نقطة عبور المجموعة الضبابية: (Crossover point of the fuzzy sets)

هي النقطة التي يكون العنصر في المجموعة الضبابية \tilde{A} له درجة انتماء تساوي 0.5 أي أن:

$$x = \{x \in \tilde{A}; \mu_{\tilde{A}}(x) = \frac{1}{2}\} \quad \dots (2-26)$$

(Gadjiev, 2021, 278)

2.1.14 فضاء العينة الضبابي: (Fuzzy sample space)

هو الأجزاء الضبابية $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$ من $X = (X_1, \dots, X_n)$, بعبارة اخرى هو مجموعة المجموعات الجزئية الضبابية لـ X بدوال انتماء لها قياس بوريل (*Borel Measure*) , وتحقق قيد التعامد (Torabi, 2009, 1621) :

$$\sum_{\tilde{x} \in X} \mu_{\tilde{x}}(x) = 1 \quad \dots (2-27)$$

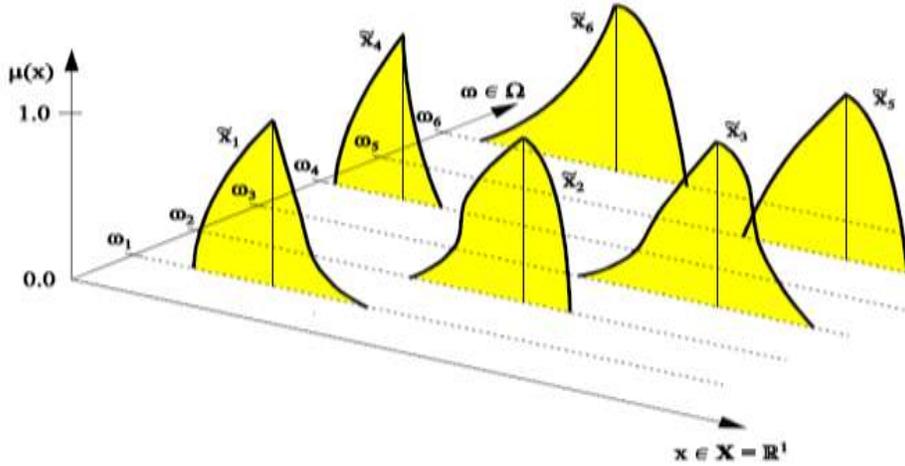
لكل $x \in X$, ويسمى ايضا نظام المعلومات الضبابية (FIS) .

وان قياس بوريل نسبة لـ (*Emile Borel*) , هو كل قياس معرف على مجموعات بوريل, ومجموعات بوريل أي فضاء طوبولوجي يمكن تشكيله من المجموعات المفتوحة (المغلقة) عن طريق التقاطع والاتحاد والاتمام النسبي , والفضاء التوبولوجي مجموعة كل مجموعات بوريل في X جبر سيكما التي تسمى جبر بوريل (*Borel Algebra*) او جبر سيكما بوريل (σ - *Borel Algebra*) (بشار , 2018 , 22) .

2.1.15 الحدث الضبابي (Fuzzy Event)

لتكن $\Omega = (X_1, \dots, \dots, X_n)$ مجموعة في الفضاء الاقليدي (Euclidean space) التي تمثل المجموعة الشاملة و Σ أصغر حقل (جبر) سيكما بورل (Smallest Borel σ -Field) في (Ω) . وأن أصغر حقل سيكما بوريل يضم أصغر جبر سيكما لكل المجموعات المفتوحة (المغلقة) عن طريق التقاطع والاتحاد والاتمام النسبي. (بشار, 2018, 22)

فان الحدث الضبابي من (Ω) هو المجموعة الضبابية الجزئية (Fuzzy subset) \tilde{A} لأي نقطة x من (Ω) التي دالة انتمائها $\mu_{\tilde{A}}(x)$ دالة قابلة للقياس بوريل (Borel measurable). (Pak, 2017, 505)



شكل (2-22) الأحداث الضبابية

2.1.16 التوزيع الاحتمالي الضبابي (Fuzzy probability Distribution)

في نظرية الاحتمالات , اذا كانت لدينا تجربة بالمجموعة الشاملة Ω بفضاء احتمالي $(\Omega, \sigma, P_\theta)$ إذ (Ω, σ) يمثل فضاء مقياس قابل للقياس (Mesurable) وان σ هو حقل السكما الذي يمثل كل الاحداث الممكن تكوينها من المجموعة الشاملة والتي مقياسها الاحتمالي P_θ الذي ينتمي الى عائلة المقاييس الاحتمالية $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ في (Ω, f) . (Pak & et al., 2013, 3)

ولتكن $A \in \Omega$ تمثل مجموعة جزئية من المجموعة الشاملة , فان احتمال اي نقطة في الفضاء الاقليدي مثل x في A يكون كالآتي:

$$P_{\theta}(x) = \int_A dP_{\theta}$$

والذي يطابق:

$$P_{\theta}(x) = \int_A \mu_A(x) dP_{\theta} = E(\mu_A(x)) \quad \dots (2-28)$$

اذ ان $\mu_A(x)$ تمثل الدالة المميزة لـ A والتي يعبر عنها كالاتي:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in A \\ 0 & \text{if } x \notin A \end{cases}$$

اي ان احتمال وقوع اي حدث يساوي توقع دالته المميزة

فاذا كانت لدينا المجموعة الضبابية \tilde{A} في Ω لها دالة انتماء $\mu_{\tilde{A}}(x)$ التي تربط كل نقطة x في Ω عدد حقيقي في الفترة $[0, 1]$ إذ $\mu_{\tilde{A}}(x)$ تمثل درجة الإنتماء لـ x في \tilde{A} .

وان Ω مجموعة في الفضاء الاقليدي ذو البعد (R) و Σ اصغر حقل سيكما - بوريل (Smallest Boral σ -field) في Ω . فان التوزيع الاحتمالي الضبابي لقيم المجموعة الضبابية \tilde{X} هو الراسم P_{θ} في \tilde{X} الى الفترة $[0, 1]$ بحيث:

$$P_{\theta}(\tilde{X}) = \int_{\Omega} \mu_{\tilde{A}}(x) dP_{\theta} = E(\mu_{\tilde{A}}(x)) ; \tilde{x} \in \tilde{X} \quad \dots (2-29)$$

أي ان احتمال وقوع الحدث ضبابي هو توقع دالة انتماءه

إذ أن $P_{\theta}(\tilde{X})$ مقياس احتمال العنصر \tilde{x} و $\mu_{\tilde{A}}(x)$ دالة انتماء العنصر x في المجموعة الضبابية الجزئية \tilde{A} (Wang & et al. , 2018, 4)

2.1.17 الاحتمال الشرطي الضبابي Fuzzy Conditional Probability :

نفرض ان P_{θ} يمثل التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X بدالة كثافة احتمالية $g(X)$, فان دالة الكثافة الشرطية لـ X عندما تكون \tilde{A} معرفة كالاتي :

$$g(X/\tilde{A}) = \frac{\mu_{\tilde{A}}(x)g(x)}{\int \mu_{\tilde{A}}(x)g(x)dx} \quad \dots (2-30)$$

وهي المجموعة المؤلفة من كل الاحداث المشاهدة من التجربة المحددة بنظام المعلومات الضبابية (Fuzzy Information System) FIS المرتبط بها. (Pak, 2017, 504)

2.1.18 التوزيع الاحتمالي الضبابي المقترح:

(Suggested Fuzzy Probability Distribution)

لنفرض ان اوقات الفشل $t \in T$ غير دقيقة وغير مؤكدة ويعبر عنها بارقام ضبابية $\tilde{t} \in \tilde{T}$, بحيث أن:

$$\tilde{t} = \{[0, \infty), \mu_{\tilde{t}}(t)\}$$

فان متجه مشاهدات العينة التقليدي الذي يمكن ان نحصل عليه من المجموعة الضبابية والذي يمثل كل العناصر التي تكون لها درجة انتماء اكبر او تساوي القطع الفا (α -cut) والذي يمثل درجة انتماء العناصر التي نهتم بها ويعبر عن تلك العناصر بالمجموعة $A^{(\alpha)}$ بحيث ان :

$$A^{(\alpha)} = \{\tilde{t} = [0, \infty) \in \tilde{T}, \mu_{\tilde{t}}(t) = \alpha ; \mu_{\tilde{t}}(t) \geq \alpha\} \quad \dots (2-31)$$

إذ أن:

$$\alpha \text{ معامل القطع, } 0 < \alpha < 1$$

$\mu_{\tilde{t}}(t)$ دالة الإنتماء التي عن طريقها يتم توليد درجة انتماء كل وقت فشل في فضاء العينة ويمكن ان تأخذ اي شكل من أشكال دوال الإنتماء .

فإن $(\tilde{t}_{A^{(\alpha)}})$ قابل للقياس بوريل (Borel Measurable) والذي سيمثل فضاء العينة الضبابي والاحداث تمثل اصغر حقل سيمكا بوريل (σ -Borel) , فان دالة التوزيع التجميعية الضبابية ($\overline{\text{CDF}}$) (Fuzzy Cumulative Distribution Function) عند اي قيمة من قيم فضاء العينة الضبابي $A^{(\alpha)}$ ولأي توزيع فشل يمكن الحصول عليها كالاتي:

$$\tilde{F}(\tilde{t}_{A^{(\alpha)}}) = \int_0^{\tilde{t}_{A^{(\alpha)}}} f(u) du \quad \dots (2-32)$$

وباشتقاق الصيغة (2-32) بالنسبة لـ $(\tilde{t}_{A^{(\alpha)}})$ نحصل على التوزيع الإحتمالي الضبابي وكما يأتي:

$$\tilde{f}(\tilde{t}) = \frac{\partial \tilde{F}(\tilde{t}_{A(\alpha)})}{\partial \tilde{t}_{A(\alpha)}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{t}_{A(\alpha)}} \left[\int_0^{\tilde{t}_{A(\alpha)}} f(u) du \right] ; 0 < \tilde{t}_{A(\alpha)} < \infty \quad \dots (2-33)$$

2.1.18.1 التوزيع الأسي الضبابي (Fuzzy Exponential distribution)

ان دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الأسي التقليدي تأخذ الشكل الآتي :

$$f(t, \lambda) = \lambda e^{-\lambda t} ; t > 0 \quad \dots (2-34)$$

بتطبيق الصيغة (2-32) لإيجاد دالة الاحتمال التراكمي الضبابية للتوزيع الأسي وكما يأتي:

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\tilde{t}_{A(\alpha)}) &= \int_0^{\tilde{t}_{A(\alpha)}} f(u) du \\ &= \int_0^{\tilde{t}_{A(\alpha)}} \lambda e^{-\lambda u} du \\ &= \lambda \int_0^{\tilde{t}_{A(\alpha)}} e^{-\lambda u} du \\ &= -e^{-\lambda u} \Big|_0^{\tilde{t}_{A(\alpha)}} \\ &= 1 - e^{-\lambda \tilde{t}_{A(\alpha)}} = F(\tilde{t}_{A(\alpha)}) \quad \dots (2-35) \end{aligned}$$

فان دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الأسي الضبابي يمكن الحصول عليها كالاتي:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\tilde{t}_{A(\alpha)}) &= \frac{\partial \tilde{F}(\tilde{t}_{A(\alpha)})}{\partial \tilde{t}_{A(\alpha)}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{t}_{A(\alpha)}} \left[1 - e^{-\lambda \tilde{t}_{A(\alpha)}} \right] \\ &= \lambda e^{-\lambda \tilde{t}_{A(\alpha)}} = f(\tilde{t}_{A(\alpha)}) \quad \dots (2-36) \end{aligned}$$

2.1.18.2 توزيع ويبيل الضبابي (Fuzzy Weibull distribution)

ان دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ويبيل التقليدي تأخذ الشكل الآتي :

$$f(t, \theta, \lambda) = \theta p t^{\theta-1} e^{-p t^\theta} ; t, \theta, p > 0 \quad \dots (2-37)$$

بتطبيق الصيغة (2-32) لإيجاد دالة الاحتمال التراكمي الضبابية لتوزيع ويبيل وكما يأتي:

$$\tilde{F}(\tilde{t}_{A(\alpha)}) = \int_0^{\tilde{t}_{A(\alpha)}} f(u) du$$

$$= \int_0^{\tilde{t}_{A(\alpha)}} \theta p t^{\theta-1} e^{-pt^\theta} du$$

$$= \theta p \int_0^{\tilde{t}_{A(\alpha)}} t^{\theta-1} e^{-pt^\theta} du$$

$$\text{Let } z = pt^\theta \Rightarrow t = \left(\frac{z}{p}\right)^{\frac{1}{\theta}} \Rightarrow dt = \frac{1}{\theta p} \left(\frac{z}{p}\right)^{\frac{1}{\theta}-1} dz$$

$$\begin{aligned} \therefore \tilde{F}(\tilde{t}_{A(\alpha)}) &= \theta \lambda \int_0^{p\tilde{t}_{A(\alpha)}^\theta} \left(\left(\frac{z}{p}\right)^{\frac{1}{\theta}}\right)^{\theta-1} e^{-z} \frac{1}{\theta p} \left(\frac{z}{p}\right)^{\frac{1}{\theta}-1} dz \\ &= \theta p \int_0^{p\tilde{t}_{A(\alpha)}^\theta} \left(\left(\frac{z}{p}\right)^{\frac{1}{\theta}}\right)^{\theta-1} e^{-z} \frac{1}{\theta p} \left(\frac{z}{p}\right)^{\frac{1}{\theta}-1} dz \end{aligned}$$

$$= \int_0^{p\tilde{t}_{A(\alpha)}^\theta} e^{-z} dz$$

$$= -e^{-pu} \Big|_0^{p\tilde{t}_{A(\alpha)}^\theta}$$

$$= 1 - e^{-p\tilde{t}_{A(\alpha)}^\theta} = F(\tilde{t}_{A(\alpha)}) \quad \dots (2-38)$$

فان دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ويبيل الضبابي يمكن الحصول عليها كالآتي:

$$\tilde{f}(\tilde{t}_{A(\alpha)}) = \frac{\partial \tilde{F}(\tilde{t}_{A(\alpha)})}{\partial \tilde{t}_{A(\alpha)}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} [1 - e^{-p\tilde{t}_{A(\alpha)}^\theta}]$$

$$= p\theta \tilde{t}_{A(\alpha)}^{\theta-1} e^{-p\tilde{t}_{A(\alpha)}^\theta} = f(\tilde{t}_{A(\alpha)}) \quad \dots (2-39)$$

2.1.18.3 توزيع فريجت الضبابي (Fuzzy Frechet distribution)

ان دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع فريجت التقليدي تأخذ الشكل الآتي :

$$f(t, \theta, \beta) = \theta \beta t^{-(\theta+1)} e^{-\beta t^{-\theta}} ; \quad t, \theta, \beta > 0 \quad \dots (2-40)$$

بتطبيق الصيغة (2-32) لإيجاد دالة الاحتمال التراكمي الضبابية لتوزيع فريجت وكما يأتي:

$$\tilde{F}(\tilde{t}_{A(\alpha)}) = \int_0^{\tilde{t}_{A(\alpha)}} f(u) du$$

$$= \int_0^{\tilde{t}_{A(\alpha)}} \theta \beta x^{-(\theta+1)} e^{-\beta x^{-\theta}} du$$

$$= \theta \beta \int_0^{\tilde{t}_{A(\alpha)}} x^{-(\theta+1)} e^{-\beta x^{-\theta}} du$$

$$\text{Let } z = \beta x^{-\theta} \Rightarrow x = \left(\frac{z}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\theta}} \Rightarrow dx = -\frac{1}{\theta \beta} \left(\frac{z}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\theta}-1} dz$$

$$\therefore \tilde{F}(\tilde{t}_{A(\alpha)}) = \theta \beta \int_0^{\beta \tilde{t}_{A(\alpha)}^{-\theta}} \left(\frac{z}{\beta}\right)^{\theta-1} e^{-z} \frac{1}{\theta \beta} \left(\frac{z}{\beta}\right)^{\frac{1}{\theta}-1} dz$$

$$= \theta \beta \int_0^{\beta \tilde{t}_{A(\alpha)}^{-\theta}} \left(\frac{z}{\beta}\right)^{-(\theta+1)} e^{-z} \frac{1}{\theta \beta} \left(\frac{z}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\theta}-1} dz$$

$$= - \int_0^{\beta \tilde{t}_{A(\alpha)}^{-\theta}} e^{-z} dz$$

$$= \int_{\beta \tilde{t}_{A(\alpha)}^{-\theta}}^{\infty} e^{-z} dz$$

$$= -e^{-\lambda u} \Big|_{\beta \tilde{t}_{A(\alpha)}^{-\theta}}^{\infty}$$

$$= e^{-\beta \tilde{t}_{A(\alpha)}^{-\theta}}$$

... (2-41)

فان دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع فريجت الضبابي يمكن الحصول عليها كالاتي:

$$\tilde{f}(\tilde{t}_{A(\alpha)}) = \frac{\partial \tilde{F}(\tilde{t}_{A(\alpha)})}{\partial \tilde{t}_{A(\alpha)}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \left[e^{-\beta \tilde{t}_{A(\alpha)}^{-\theta}} \right]$$

$$= \theta \beta \tilde{t}_{A(\alpha)}^{-(\theta+1)} e^{-\beta \tilde{t}_{A(\alpha)}^{-\theta}} = f(\tilde{t}_{A(\alpha)}) \quad \dots (2-42)$$

2.1.18.4 توزيع كوشي المبتور الضبابي

(Fuzzy truncated Cauchy distribution)

ان دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع كوشي المبتور التقليدي تأخذ الشكل الآتي:

$$f(t, \theta, \delta) = \frac{\theta}{\left[\arctan(\theta\delta) + \frac{\pi}{2} \right] [1 + \theta^2(t - \delta)^2]} \quad 0 < t < \infty \quad \dots (2-43)$$

بتطبيق الصيغة (2-32) لإيجاد دالة الاحتمال التراكمي الضبابية لتوزيع كوشي المبتور وكما يأتي:

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\tilde{t}_{A(\alpha)}) &= \int_0^{\tilde{t}_{A(\alpha)}} \frac{\theta}{\left[\arctan(\theta\delta) + \frac{\pi}{2} \right] [1 + \theta^2(t - \delta)^2]} d\tilde{t}_{A(\alpha)} \\ &= \frac{\theta}{\left[\arctan(\theta\delta) + \frac{\pi}{2} \right]} \int_0^{\tilde{t}_{A(\alpha)}} \frac{1}{(1 + \theta^2(u - \delta)^2)} du \end{aligned}$$

نستخرج التكامل فقط :

$$\begin{aligned} &\int_0^{\tilde{t}_{A(\alpha)}} \frac{1}{1 + \theta^2(u - \delta)^2} du \\ &= \int_0^{\tilde{t}_{A(\alpha)}} \frac{1}{1 + \frac{(u - \delta)^2}{(1/\theta^2)}} du \\ &= \int_0^{\tilde{t}_{A(\alpha)}} \frac{1}{\frac{(1/\theta^2) + (u - \delta)^2}{(1/\theta^2)}} du \\ &= \int_0^{\tilde{t}_{A(\alpha)}} \frac{1}{\theta^2((1/\theta^2) + (u - \delta)^2)} du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1/\theta^2 \left[\arctan \left(\frac{(u - \delta)}{1/\theta} \right) \right]_0^{\tilde{t}_{A^{(\alpha)}}} \\
&= 1/\theta^2 [\arctan (\theta(\tilde{t}_{A^{(\alpha)}} - \delta))] \\
&= 1/\theta^2 [\arctan (\theta\tilde{t}_{A^{(\alpha)}} - \theta\delta)] \\
\therefore \tilde{F}(\tilde{t}_{A^{(\alpha)}}) &= \frac{[\arctan (\theta(\tilde{t}_{A^{(\alpha)}} - \delta))]}{\theta [\arctan (\theta\delta) + \frac{\pi}{2}]} \quad \dots (2-44)
\end{aligned}$$

فان دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع كوشي المبتور الضبابي يمكن الحصول عليها كالآتي:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(\tilde{t}_{A^{(\alpha)}}) &= \frac{\partial \tilde{F}(\tilde{t}_{A^{(\alpha)}})}{\partial \tilde{t}_{A^{(\alpha)}}} = \frac{\partial \left[\frac{[\arctan (\theta(\tilde{t}_{A^{(\alpha)}} - \delta))]}{\theta [\arctan (\theta\delta) + \frac{\pi}{2}]} \right]}{\partial \tilde{t}} \\
&= \frac{1}{\theta [\arctan (\theta\delta) + \frac{\pi}{2}]} \frac{1}{1/\theta^2 [1 + \theta^2 (\tilde{t}_{A^{(\alpha)}} - \delta)^2]} \\
&= \frac{\theta}{[\arctan (\theta\delta) + \frac{\pi}{2}] [1 + \theta^2 (\tilde{t}_{A^{(\alpha)}} - \delta)^2]} = f(\tilde{t}_{A^{(\alpha)}}) \quad \dots (2-45)
\end{aligned}$$

2.1.18.5 توزيع كوماراسوامي القياسي الضبابي

(Fuzzy Standard Kumaraswamy distribution)

ان دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع كوماراسوامي القياسي تأخذ الشكل الآتي:

$$f(t, \theta, \beta) = \theta \beta t^{\beta-1} [1 - t^\beta]^{\theta-1} \quad 0 < t < 1 \quad \dots (2-46)$$

بتطبيق الصيغة (2-32) لإيجاد دالة الاحتمال التراكمي الضبابية لتوزيع كوماراسوامي القياسي وكما يأتي:

$$\begin{aligned}
\tilde{F}(\tilde{t}_{A^{(\alpha)}}) &= \int_0^{\tilde{t}_{A^{(\alpha)}}} f(u) du \\
&= \int_0^{\tilde{t}_{A^{(\alpha)}}} \theta \beta x^{\beta-1} [1 - x^\beta]^{\theta-1} du
\end{aligned}$$

$$= \theta \beta \int_0^{\tilde{t}_{A(\alpha)}} t^{\beta-1} [1 - t^\beta]^{\theta-1} du$$

$$\text{Let } z = t^\beta \Rightarrow t = (z)^{\frac{1}{\beta}} \Rightarrow dt = \frac{1}{\beta} (z)^{\frac{1}{\beta}-1} dz$$

$$\begin{aligned} \therefore \tilde{F}(\tilde{t}_{A(\alpha)}) &= \theta \beta \int_0^{\tilde{t}_{A(\alpha)}^\beta} \left((z)^{\frac{1}{\beta}} \right)^{\beta-1} [1 - z]^{\theta-1} \frac{1}{\beta} (z)^{\frac{1}{\beta}-1} dz \\ &= \theta \int_0^{\tilde{t}_{A(\alpha)}^\beta} [1 - z]^{\theta-1} dz \\ &= -\theta \int_{\tilde{t}_{A(\alpha)}^\beta}^0 [1 - z]^{\theta-1} dz \\ &= -\theta \frac{[1-z]^\theta}{\theta} \Big|_{\tilde{t}_{A(\alpha)}^\beta}^0 \\ &= 1 - \left[1 - \tilde{t}_{A(\alpha)}^\beta \right]^\theta \quad \dots (2-47) \end{aligned}$$

فان دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع كوماراسوامي القياسي الضبابي يمكن الحصول عليها كالآتي:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\tilde{t}_{A(\alpha)}) &= \frac{\partial \tilde{F}(\tilde{t}_{A(\alpha)})}{\partial \tilde{t}_{A(\alpha)}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \left[1 - \left[1 - \tilde{t}_{A(\alpha)}^\beta \right]^\theta \right] \\ &= \theta \beta \tilde{t}_{A(\alpha)}^{\beta-1} \left[1 - \tilde{t}_{A(\alpha)}^\beta \right]^{\theta-1} = f(\tilde{t}_{A(\alpha)}) \quad \dots (2-48) \end{aligned}$$

2.1.18.6 توزيع أسي-باريتو المركب الضبابي

(Fuzzy Exponential-Pareto distribution)

ان دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع أسي باريتو المركب تأخذ الشكل الآتي:

$$f(t, \theta, \beta) = \frac{1}{(1+t)^{(\theta+1)}} [1 - (1+t)^{-\theta}]^{\beta-1} \quad t, \theta, \beta > 0 \quad \dots (2-49)$$

بتطبيق الصيغة (2-32) لإيجاد دالة الاحتمال التراكمي الضبابية لتوزيع اسي-باريتو المركب وكما يأتي:

$$\tilde{F}(\tilde{t}_{A(\alpha)}) = \int_0^{\tilde{t}_{A(\alpha)}} f(u) du$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\tilde{t}_{A(\alpha)}} \frac{1}{(1+t)^{(\theta+1)}} \left[1 - (1+t)^{-\theta}\right]^{\beta-1} du \\
 &= \left[1 - (1 + \tilde{t}_{A(\alpha)})^{-\theta}\right]^{\beta} \quad \dots (2-50)
 \end{aligned}$$

فان دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع لتوزيع اسي-باريتو الضبابي يمكن الحصول عليها كالآتي:

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}(\tilde{t}_{A(\alpha)}) &= \frac{\partial \tilde{F}(\tilde{t}_{A(\alpha)})}{\partial \tilde{t}_{A(\alpha)}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \left[\left[1 - (1 + \tilde{t}_{A(\alpha)})^{-\theta}\right]^{\beta} \right] \\
 &= (1 + \tilde{t}_{A(\alpha)})^{-(\theta+1)} \left[1 - (1 + \tilde{t}_{A(\alpha)})^{-\theta}\right]^{\beta-1} = f(\tilde{t}_{A(\alpha)}) \quad \dots(2-51)
 \end{aligned}$$

المبحث الثاني

الحصانة ونظرية بيز

(Robustness and Bayes theory)

2.2.1 تمهيد (Preface)

تعد الإحصاءات الحصينة (Robust statistic) امتداداً للإحصاءات التقليدية (Classic statistic) التي تأخذ بعين الاعتبار على وجه التحديد حقيقة أن النماذج التقليدية تقدم فقط تقريباً للآلية العشوائية الأساسية الحقيقية التي تولد البيانات. ولكن في الممارسة العملية تكاد الافتراضات الإنموجية لا تتفق تماماً مع ما تقدمه تلك الآلية العشوائية. إذ يمكن أن يكون جزءاً من المشاهدات لها أنماطاً لا تشترك مع الجزء الأكبر من البيانات الباقية ومن ثم تكون قيماً شاذة (Outliers). قد يكون لحدوث الانحرافات عن افتراضات الإنموج بقيم غير نمطية آثار غير متوقعة وضارة على نتائج التحليل. ولو تناولنا مفهوم الحصانة من وجهة نظرية بيز لوجدنا انه يعتمد على ثلاث اتجاهات رئيسة ، الأول يعتمد على عدم دقة المعلومات السابقة (Priors) والثاني يعتمد على تلوث مشاهدات العينة الحالية أو المشاهدات السابقة أو عدم تحقق فروض الأخطاء العشوائية أما الإتجاه الأخير فيتمثل بالإعتماد على عدم الدقة في تحديد دالة الخسارة. في هذه الأطروحة تم إقتراح أسلوب جديد حصين يعتمد على مبدأ تخصيص توزيع سابق لكل معلمة يتم تقديرها من كل مشاهدة من مشاهدات العينة. تم في هذا المبحث عرضاً لمفهوم الحصانة والتقدير الحصينة ومفهوم القيم الشاذة وكذلك عرضاً لمفهوم نظرية بيز في التقدير.

2.2.2 مفهوم الحصانة: (Robust Concept)

يحدث في بعض الأحيان عند القيام بالتحليل الإحصائي لمجموعة من المشاهدات أن بعضها تتحرف أو تشذ عن الكمية الأكبر من المشاهدات الموجودة معها ومن ثم يطلق على تلك المشاهدات المنحرفة تسمية شواذ (Outliers) أو (Anomalous) والتي في حالة وجودها ضمن البيانات فأن المقدرات التقليدية تخفق في إعطاء تقديرات دقيقة عن معالم المجتمع الإحصائي الذي سُحبت منه تلك البيانات بسبب اختراق الشروط الأساسية لها ، لذا فأن استعمال التحليلات الإحصائية لبيانات تحتوي على قيم شاذة يعد مشكلة حقيقية يجب تجنبها.

ولقد أهتم الإحصائيون بمسألة فحص البيانات للتأكد من مدى نقاوتها من القيم الشاذة بوصفها مرحلة أولى تسبق مرحلة الاستدلال الإحصائي. إذ أخذت تنقية البيانات إتجاهين أحدهما الأوسع انتشاراً والذي يجري بموجبه تشذيب المشاهدات الشاذة ثم التعامل مع العينة المشذبة. أما الاتجاه الآخر فيتم بموجبه تعديل المشاهدات الشاذة وذلك بإعادة تقديرها بحيث يكون التعامل مع العينة كاملة. إلا أن اتجاهاً آخر مهما برز لمعالجة تلك المشكلة وذلك بأن تقدر المعلمات المطلوبة دون الحاجة إلى فحص البيانات وذلك باستعمال الطرائق الحصينة لإن تقديراتها تكون حصينة عند عدم تحقق الافتراضات الأساسية كابتعاد الخطأ العشوائي عن التوزيع الطبيعي وأتباعه توزيعاً آخر أو عند وجود التلوث (Contamination). (الياسري, 2007, 3-2)

وقد تنامي في السنوات الأخيرة الاتجاه نحو المقدرات الإحصائية الحصينة سواء أكانت في الاتجاه التقليدي أم في اتجاه بيز، لأن مميزات المقدرات الحصينة تكون قليلة الحساسية والتأثر بالتحديد غير الدقيق للمعلومات السابقة أو باتجاه الشواذ أو في حالة وجود الحالتين معاً. ويعد (Box, 1953) أول من تطرق إلى موضوع الحصانة وأوضح بأن الطريقة الإحصائية الجيدة يجب أن تكون حساسة (Sensitive) لأي تغيرات في المعلمات المراد تقديرها والفرضيات المراد اختبارها، ولكن تلك الطريقة يجب أن تكون غير حساسة لأي تغيرات أخرى (Box, 1980, 384).

هناك تعريفات مختلفة لـ "الإحصاءات الحصينة". بالمعنى الدقيق للكلمة، الإحصاء الحصين (Robust statistics) هو الذي يقاوم الأخطاء في النتائج الناتجة عن الانحرافات بالافتراضات. هذا يعني أنه إذا تم إستيفاء الافتراضات تقريباً، فسيظل المقدر الحصين (Robust estimator) يتمتع بكفاية معقولة، وتحيزاً صغيراً إلى حد معقول، فضلاً عن أنه غير متحيز بشكل مقارب (Asymptotically).

(Farcomeni, A. & Greco, L., 2015)

وواحدة من أهم الحالات هي الحصانة التوزيعية. عادة ما تكون الإجراءات الإحصائية التقليدية حساسة للبيانات "طويلة الذيل" (Heavy tail). وهذا يعني أنها ستتأثر بشدة بوجود القيم الشاذة في البيانات، وقد تكون التقديرات التي تنتجها مشوهة بشدة إذا كانت هناك قيم شاذة في البيانات، مقارنة بما ستكون عليه إذا لم يتم تضمين تلك القيم. على النقيض من ذلك، فإن المقدرات الأكثر حصانة هي التي ليست حساسة جداً للتشوهات التوزيعية وتقاوم أيضاً وجود القيم الشاذة بشكل فعال. (Portnoy & He, 2000)

فالحصانة (Robustness) هي مقدرة طريقة نفذت في ظروف إعتيادية بإسلوب معين وضمن إفتراضات معينة والتي تم الحصول منها على نتائج موثوقة على البقاء غير متأثرة وتعطي النتائج نفسها عند تطبيقها ضمن ظروف مغايرة وفي أسلوب مختلف وضمن إفتراضات مختلفة او حتى في حالة غياب الإفتراضات (Ferreira, 2017, 163).

2.2.3 المقدرات الحصينة: (Robust Estimators)

ان طرائق التقدير التقليدية قد اخذت شوطاً كبيراً في مجال التحليل الاحصائي لعدة سنوات بسبب مميزاتها الجيدة عند تحقق بعض الفرضيات, ولكن عند اتباع تلك الطرائق في التقدير ليس اكثر اماناً من تطبيق طرائق التقدير الحصينة وذلك لان الظروف الواجب توفرها لتطبيق الطرائق التقليدية ليست بالسهلة , مثل عدم وجود قيم شاذة (ملوثة) او إتباع الخطأ العشوائي توزيعاً غير التوزيع الذي يناسب الطريقة المعتمدة في التقدير إذ قال (Huber) ان وجود مشاهدة شاذة (ملوثة) واحدة قد تهدم المزايا الجيدة لمقدرات المربعات الصغرى. لذلك فقد تم اعتماد مبدأ الحصانة في التقدير كبديل للطرائق التقليدية في تقدير معالم التوزيع الاحتمالي إذ تتصف هذه الطرائق الحصينة بانها قليلة الحساسية تجاه القيم الشاذة وتعمل بشكل جيد تحت مختلف التوزيعات (الصراف وآخرون , 2016, 279).

فالمقدر القادر على تصنيف البيانات إلى قيم شاذة ومشاهدات نظيفة (غير شاذة) ، وإيجاد ملاءمة معقولة للجزء الأكبر من البيانات هو المقدر الحصين (Rusiecki, 2009, 112).

ويعرف المقدر الحصين (Robust Estimator) بأنه المقدر الذي يتصف باحتفاظه بالعديد من الخصائص المرغوب بها للتقديرات عند انتهاك بعض الفرضيات , كما يتصف بأنه مقاوم لحالات تلوث البيانات بقيم شاذة ويكون ملائماً لفئة واسعة من التوزيعات (الصراف وآخرون , 2016,

(280)

2.2.4 المشاهدات الشاذة: (Outlier observations)

يُقصد بالشذوذ في البيانات وجود وتداخل آليات عشوائية مختلفة أحدهما تنتج غالبية البيانات ، والأخرى مسؤولة عن حدوث القيم الشاذة. وحتى لو تمكنا من تحديد إنموذج لغالبية البيانات ، فليس من الواضح كيفية إختيار اتجاهات الإنحرافات عن إفتراضات الإنموذج التي تسببها القيم الشاذة. بهذا المعنى ، فمن المفترض أن تكون القيم الشاذة في البيانات قيماً غير متوقعة ، ولا يمكن للتحليل الكشف عن عملية توليدها العشوائي.

(Farcoment & Gareco, 2015, 4)

وتعرف القيمة الشاذة (**outlier**) أو القيمة الملوثة (**Contaminants**) بأنها نقاط إعتباطية في الطبيعة تمثل مشاهدة او مجموعة من المشاهدات خارجة عن النمط الطبيعي لمجموعة البيانات . (هبة الله : 2005 , 4) وانها نقاط بيانات تكون مبتعدة عن غالبية نقاط البيانات الاخرى (أي أنها مشاهدات لا تتسجم مع بقية بيانات المجموعة لأي متغير من المتغيرات لظاهرة معينة أو لمجموعة من الظواهر) , فقد تكون قيمة هذه المُشاهدة كبيرة أو قد تكون صغيرة واقعة في أحد طرفي مجموعة المُشاهدات المرتبة تصاعدياً أو تنازلياً، وأن تطرفها قد يكون في حالات كثيرة مسألة طبيعية ملازمة لبعض المتغيرات. (الياسري: 2007, 6) . وتكون مولدة بطريقة مختلفة عن طريقة توليد المشاهدات الاصلية. (Hekimoglu & Erenoglu , 2013, 419-421) , وهي المشاهدات التي تظهر بصورة غير متناسقة مع ما تبقى من مجموعة البيانات (Obikee & et.al., 2014 , 536).

2.2.5 نظرية بيز في التقدير (Bayesian Theorem in Estimation)

سمي منهج بيز نسبةً الى الفيلسوف والرياضي الانكليزي توماس بيز (Tomas Bayes) ونشرها بعد وفاته ريتشارد برايس (Price, R.) عام (1763) ، اللذان أول من كتبا العلاقة بين الاحتمالات الحدية والشرطية. إلا أن بيير سيمون لابلاس (Pierre-Simon Laplace) هو من ابتكر صيغة شاملة من هذه المنهجية لتتناول موضوعات الميكانيكا السماوية، الإحصاء الطبي، والمعولية ، والتشريع . والاحتمال البيزي السابق، الذي يستعمل المُعطيات السابقة المُتماثلة التي تتبع قانون لابلاس (قانون الاستنتاج غير الكافي)، والذي أُطلق عليه اسم الاحتمال العكسي (**Inversion probability**) لأنه يُستنتج بشكل عكسي من المشاهدات. وبعد عشرينيات القرن الماضي، فإن الاحتمال العكسي حل محله على الأغلب مجموعة من المناهج التي أصبحت تُسمى بالإحصاءات التكرارية (Howson, C. & Urbach, P., 2005). وبذلك وجدت مدرستان في التقدير: الاولى تسمى المدرسة التقليدية (التكرارية) والتي تفترض ان المعلمات المراد تقديرها كميات ثابتة يتم تقديرها بالطرائق التقليدية مثل طريقة الامكان الاعظم وطريقة المربعات الصغرى وطريقة العزوم وغيرها ، والاخرى تسمى المدرسة البيزية والتي تفترض أن المعلمة (المعطيات) المجهولة الخاصة بالتوزيع الاحتمالي تعد كمتغيرات عشوائية وان هنالك معلومات سابقة عنها (اولية) تصاغ تلك المعلومات على شكل توزيع احتمالي يعرف بدالة الكثافة الاحتمالية السابقة (**Prior Probability function**) وعادة ما يكون هذا التوزيع غير ملائم أي أن تكامله لكل مجاله لا يساوي واحدا إذ يتم التعرف على هذه المعلومات من بيانات وتجارب سابقة أو من النظرية التي تحكم الظاهرة. . وايضاً تعتمد نظرية

يبرز على المعلومات الحالية للعينة التي يمكن ان تُمثل بدالة الامكان (**Likelihood Function**) الخاصة بالمشاهدات الحالية . ودمج دالة الكثافة الاحتمالية السابقة للمعلمت مع دالة الامكان الاعظم للمشاهدات الحالية نحصل على التوزيع الاحتمالي اللاحق (**Posterior**) وعند دالة خسارة (**Loss Function**) التي يمكن عن طريقها قياس الخسارة الناتجة عن اتخاذ القرار بالاعتماد على قيمة ($\hat{\theta}$) بينما القرار الواجب اتخاذه يعتمد على (θ) اي وجود فرق بين المعلمة وتقديرها.

لذلك فإنه لإيجاد مقدر بيز يجب ان نحصل على الآتي :

1- الدالة الاساسية وهي الدالة الاحتمالية لتوزيع البيانات $f(t_1, t_2, \dots, t_n | \theta)$ ومنها نحصل على دالة الامكان للمشاهدات الحالية $l(t_1, t_2, \dots, t_n | \theta)$.

2- الاحتمال السابق (**prior distribution**) ($\pi(\theta)$ (قبل المعاينة)

3- نجد الاحتمال اللاحق (**Posterior Distribution**) (بعد المعاينة)

$h(\theta_i | t_1, t_2, \dots, t_n)$ حسب نظرية بيز نحصل على التوزيع اللاحق باستعمال صيغة بيز

العكسية (**Bays Inversion Formula**) وكالآتي:

$$h(\theta | t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{l(t_1, t_2, \dots, t_n | \theta) \pi(\theta)}{\int_{\mathcal{V}_\theta} l(t_1, t_2, \dots, t_n | \theta) \pi(\theta) d\theta} \quad \dots (2-52)$$

وتُعرف بأنها دالة شَرطية لمجال المعلمة (المعلمت) (θ) بوجود معلومات العينة الحالية وهي دالة تمثل كل المعلومات السابقة والحالية عن (θ) المراد تقديرها .

ومن معادلة (2-52) يمكن كتابة الآتي :

$$f(t) = \int l(t_1, t_2, \dots, t_n | \theta) \pi(\theta) d\theta \quad \dots (2-53)$$

والتي تمثل دالة الكثافة الاحتمالية الحدية (Marginal p. d. f) للمتغير العشوائي المشاهد (t) وتسمى بثابت التناسب .

وأن :

$$g(t_1, t_2, \dots, t_n | \theta) = l(t_1, t_2, \dots, t_n | \theta) \pi(\theta) \quad \dots (2-54)$$

تمثل دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة (**Joint p. d. f**). إذ يمكن التعبير عن دالة الكثافة الاحتمالية اللاحقة بشكل تناسبي مع دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة وكالآتي :

$$h(\underline{\theta} | t_1, t_2, \dots, t_n) \propto g(t_1, t_2, \dots, t_n | \underline{\theta}) \quad \dots (2-55)$$

ومن ثم فإن مقدر بيز ($\hat{\underline{\theta}}_{Bayes}$) للمعلمة (المعلمات) ($\underline{\theta}$) يمكن الحصول عليه باستعمال اي دالة خسارة (**Loss Function**) إذ يرمز لها بالرمز $l(\hat{\underline{\theta}}, \underline{\theta})$ التي يعد توفرها أمراً أساسياً في طريقة بيز في التقدير خلافاً للطرائق الأخرى، قد يتم إيجاد توقع دالة الخسارة (**Expected Loss Function**) الذي يعرف بدالة المخاطرة (**Risk Function**) ويرمز لها بالرمز $R(\hat{\underline{\theta}}, \underline{\theta})$ وكالاتي:-

$$\begin{aligned} R(\hat{\underline{\theta}}, \underline{\theta}) &= E[l(\hat{\underline{\theta}}, \underline{\theta})] \\ &= \int_{V_{\underline{\theta}}} l(\hat{\underline{\theta}}, \underline{\theta}) h(\underline{\theta} | t_1, t_2, \dots, t_n) d\underline{\theta} \quad \dots (2-56) \end{aligned}$$

إذ إن مقدر بيز ($\hat{\underline{\theta}}_{Bayes}$) للمعلمة (المعلمات) ($\underline{\theta}$) هو المقدر الذي يجعل دالة المخاطرة في نهايتها الصغرى أي يجعلها أقل.

وللأعمام اذا كانت دالة بالمعلمة (المعلمات) ($\underline{\theta}$) وأردنا إيجاد مقدر الدالة $g(\underline{\theta})$ بطريقة بيز فإنه بالاعتماد على دالة الكثافة الاحتمالية اللاحقة للدالة $g(\underline{\theta})$ يمكن إيجاد دالة الكثافة الاحتمالية اللاحقة للدالة $g(\underline{\theta})$ أي $h(g(\underline{\theta}) | t_1, t_2, \dots, t_n)$ وكالاتي:

$$h(g(\underline{\theta}) | t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{\int_{V_{\underline{\theta}}} g(\underline{\theta}) l(t_1, t_2, \dots, t_n | \underline{\theta}) \pi(\underline{\theta}) d\underline{\theta}}{\int_{V_{\underline{\theta}}} l(t_1, t_2, \dots, t_n | \underline{\theta}) \pi(\underline{\theta}) d\underline{\theta}} \quad \dots (2-57)$$

فإنه يمكن تقدير الدالة $g(\underline{\theta})$ عند اي دالة خسارة ولتكن:

$$l(\hat{g}(\underline{\theta}), g(\underline{\theta})) = g(\underline{\theta})_{Loss} \quad \dots (2-58)$$

فان مقدر بيز للدالة $g(\underline{\theta})$ باستعمال دالة خسارة معينة هو التوقع لدالة الكثافة الاحتمالية اللاحقة للدالة $g(\underline{\theta})_{Loss}$ أي يكون :

$$\begin{aligned} \hat{g}(\underline{\theta}) &= E_{g(g(\underline{\theta})_{Loss} | t_1, t_2, \dots, t_n)} \\ &= \int_{V_{g(\underline{\theta})}} g(\underline{\theta})_{Loss} h(g(\underline{\theta}) | t_1, t_2, \dots, t_n) dg(\underline{\theta}) \quad \dots (2-59) \end{aligned}$$

$$= \int_{V_{g(\underline{\theta})}} \frac{\int_{V_{\underline{\theta}}} g(\underline{\theta})_{Loss} l(t_1, t_2, \dots, t_n | \underline{\theta}) \pi(\underline{\theta}) d\underline{\theta}}{\int_{V_{\underline{\theta}}} l(t_1, t_2, \dots, t_n | \underline{\theta}) \pi(\underline{\theta}) d\underline{\theta}} dg(\underline{\theta}) \quad \dots (2-60)$$

إذ إن مقدر بيز ($\hat{g}(\underline{\theta})_{Bayes}$) للدالة $g(\underline{\theta})$ هو المقدر الذي يجعل دالة المخاطرة في نهايتها الصغرى.

(Kruschke & Vanpaemel, 2015, 281)

2.2.6 دوال الخسارة (Loss Functions)

تختلف التقديرات البيزية تبعاً لاختلاف أنواع دوال الخسارة الذي يعد توفرها ضرورياً على العكس من الأساليب الأخرى لتقدير معلمة أو متجه المعلمات ($\hat{\theta}$) بهدف الحصول على مقدر بيزي تكون عنده الخسارة (المتوقعة اللاحقة اقل ما يمكن) ، وهذا المقدر يرتبط بشكل رئيس بدالة المخاطرة (**Risk function**) ويجعلها في نهايتها الصغرى ، التي يتم الحصول عليها عن طريق اخذ التوقع لدالة الخسارة (**Expected Loss Function**) ويرمز لها بالرمز $R(\hat{\theta}, \theta)$ وذلك لغرض إختبار دقة الأسلوب البيزي للحصول على المعلمة (المعلمات) المقدر ، وتعد دالة الخسارة مقياس لمقدار الخسارة الناتجة من اتخاذ القرار الذي يعتمد على المقدر البيزي.

وهي كمية الخسارة التي يمكن التعرض لها إذا تم تقدير المعلمة (المعلمات) (θ) بالمقدر ($\hat{\theta}$) فدائماً ما يكون هناك فرق ملاحظ بين المقدر والمعلمة وتكون دالة الخسارة مقياساً للفرق ($\hat{\theta} - \theta$) أو للنسبة ($\hat{\theta}/\theta$) أو كليهما. وهي تعكس الدقة (**Precision**) في التقدير. ويمكن ان تكون ($\hat{\theta} = \theta$) وهذا يشير إلى عدم وجود خسارة . أو تكون ($\hat{\theta} < \theta$) وتدعى هذه الحالة بالتقدير الواطئ (المنخفض) (**Under Estimation**) . أو تكون ($\hat{\theta} > \theta$) وتدعى بالتقدير العالي (المرتفع) (**Over Estimation**) . وبذلك سوف تكون هنالك قيم مختلفة لدالة الخسارة وتُعرف دالة الخسارة بانها دالة ذات قيمة حقيقية موجبة تحقق الآتي :

(Biagini & Massimo, 2016, 108)

1. $l(\hat{\theta}, \theta) > 0$; $\forall \hat{\theta} \neq \theta$
2. $l(\hat{\theta}, \theta) = 0$; $\forall \hat{\theta} = \theta$

وتكون دوال الخسارة غير المتزنة على نوعين:

2.2.6.1 دوال الخسارة المتماثلة (Symmetric Loss Functions)

إذا كان مقدار الخسارة المتحقق بدالة الخسارة للموجب مساوياً للخطأ السالب بالاتجاه نفسه أُطلق على دالة الخسارة بالمتماثلة (**Symmetric**) ، ورياضياً دالة الخسارة يقال لها بانها متماثلة إذا

كانت دالة لمطلق الفرق ما بين المقدر $(\hat{\theta})$ والمعلمة (المعلمات) (θ) أي $|\hat{\theta} - \theta|$. ومن دوال الخسارة المتماثلة هي دالة الخسارة التربيعية (Squared Error Loss Function)

2.2.6.2 دوال الخسارة غير المتماثلة (Asymmetric Loss Functions)

ان استعمال دوال الخسارة المتماثلة يقوم على افتراض أن الخسارة هي نفسها في أي إتجاه ولكن هذا الإفتراض من الممكن ان لا يتحقق في عدة حالات , ففي بعض الحالات يكون الخطأ الموجب أكثر أهمية من الخطأ السالب والعكس بالعكس وعليه فإن استعمال دوال الخسارة المتماثلة يكون غير مناسب , لذلك يفضل استعمال دوال الخسارة غير المتماثلة . ومن دوال الخسارة غير المتماثلة هي دالة خسارة الأنتروبي العامة (General Entropy Loss Function) ودالة الخسارة الأسية الخطية لينكس (LINEX Loss Function) ودالة الخسارة لديكروت (DeGroot Loss Function). (الياسري, 2007, 23)

2.2.7 دوال الكثافة الاحتمالية السابقة

(Prior Probability density functions)

أن مسألة تحديد نوع دالة الكثافة السابقة للمعلمة (المعلمات) هو من الموضوعات المهمة في دراسة التقدير بأسلوب بيز إذ أن هذا التحديد يعتمد على نوع المعلومات السابقة المتوفرة لدى الباحث والتي تعكس درجة اعتقاده وتصوراته عن المعلمة موضوع البحث إذ تُصاغ هذه المعلومات بشكل توزيع احتمالي مناسب او غير مناسب . ان تحديد دالة الكثافة الاحتمالية السابقة يعتمد على أسلوبين: احدهما الأسلوب العلمي وفيه تكون المعلومات من جنس البيانات المستعملة وعندها تسمى دالة الكثافة السابقة المستندة الى البيانات (Data Based prior p.d.f)، او تكون هذه المعلومات تم الحصول عليها عن طريق اعتبارات غير متعلقة بالبيانات او من غير جنس البيانات فقد يتم جمعها عن طريق الافتراضات النظرية والمشاهدات وعندها تسمى دالة الكثافة السابقة غير المستندة الى البيانات (Non-Data Based prior p.d.f) , وكذلك يتم الحصول على المعلومات نتيجة الخلط بين الأسلوب العلمي والافتراض الشخصي وأن هذه المعلومات التي نحصل عليها يكون لها دور كبير وبارز في تحديد دالة الكثافة السابقة (الياسري, 2007, 24)، وهناك أنواع من دوال الكثافة السابقة كما يأتي:

2.2.7.1 دالة الكثافة الاحتمالية السابقة غير المعلوماتية:

(Non-Informative Prior p.d.f)

غالبًا ما يُنظر إلى إختيار التوزيع السابق للتحليل البيزي للإنموذج الإحصائي على أنه فن أكثر من كونه علماً. وعندما لا نتمكن من اشتقاق التوزيع السابق من المعلومات المتوفرة ، يتم بناءه على أنه توزيع اولي غير معلوماتي. وعلى الرغم من أن التوزيع اللاحق المقابل يجب أن يكون مناسباً (Proper) ومن ثم يشكل دالة كثافة احتمالية صحيحة. فتستعمل دالة الكثافة السابقة غير المعلوماتية عندما تكون المعلومات السابقة المتوفرة لدى الباحث غير كافية أو معدومة بشكل نهائي ولا يوجد تصور واضح عن المعلمة (المعلمات) المجهولة المراد تقديرها فالفكرة الأساسية هي ان التوزيع السابق الضعيف بالمعلومات ، والذي يحتوي على بعض المعلومات الكافية لـ "تنظيم" التوزيع اللاحق ، أي لإبقائه تقريباً ضمن الحدود المعقولة ولكن دون محاولة الحصول على المعرفة العلمية الكاملة عن المعلمة الأساسية (Kamary, 2017, 23). وفي هذا الجانب فقد توصل العالم جيفري (Jeffery) الى وضع قاعدتين أساسيتين عن طريقها يتم تحديد دوال التوزيع السابق (prior distribution) وكما يأتي:

القاعدة الأولى: تعتمد على فترة المعلمة (المعلمات) في تحديد التوزيع السابق وكما يأتي:

1. عدّ التوزيع السابق للمعلمة (المعلمات) توزيعاً منتظماً (Uniform Distribution) اذا كانت المعلمة (المعلمات) المراد تقديرها (θ) لها مجال $(-\infty, \infty)$ وبهذا تكون دالة الكثافة الاحتمالية السابقة $\pi(\theta)$ كما يأتي:

$$\pi(\theta) \propto \text{constant} \quad -\infty < \theta < \infty$$

2. عدّ التوزيع الاحتمالي السابق توزيعاً لوغاريتمياً ومنتظماً اذا كانت المعلمة (المعلمات) المراد تقديرها (θ) لها مجال ضمن المجال الموجب للأعداد الطبيعية $(0, \infty)$ وبهذا تكون دالة الكثافة الاحتمالية السابقة $\pi(\theta)$ كما يأتي:

$$\pi(\theta) \propto \frac{1}{\theta} \quad ; \quad 0 < \theta < \infty$$

إذ أن الدالة الاحتمالية السابقة التي يتم الحصول عليها وفق القاعدة الأولى غير مناسبة وذلك لان تكامل هذه الدالة في مجالها لا يساوي الواحد الصحيح ، لكن عند دمجها مع دالة الإمكان للمشاهدات $l(t|\theta)$ سوف نحصل على دالة كثافة احتمالية لاحقة ملائمة (Proper).

(Held et al, 2014, 185-186)

القاعدة الثانية: بالاعتماد على معلومة فيشر (Fisher Information) الذي يعرف بقانون (Jeffery) للاحتمال السابق القياسي إذ ان دالة الكثافة الاحتمالية السابقة للمعلمة (المعلمات) تتناسب مع الجذر التربيعي لمحدد لمصفوفة معلومات فيشر , أي أن:

$$\pi(\underline{\theta}) \propto \sqrt{|I(\underline{\theta})|} \quad \dots (2-61)$$

$$\begin{aligned} \pi(\underline{\theta}) &= \text{constant} \sqrt{|I(\underline{\theta})|} \\ &= K \sqrt{|I(\underline{\theta})|} \quad \dots (2-62) \end{aligned}$$

أذ أن:

$I(\underline{\theta})$: هي مصفوفة معلومة فشر ذات بعد $k \times k$ والتي عناصرها (i, j) والتي يمكن ان تكتب بعدة صيغ هي :

$$-nE \left[\frac{\partial^k \log f(t_1, t_2, \dots, t_n | \underline{\theta})}{d\theta_i \theta_j \dots \theta_k} \right] \quad \dots (2-63)$$

$$E \left[\frac{\partial \log f(t_1, t_2, \dots, t_n | \underline{\theta})}{d\theta_i \theta_j \dots \theta_k} \right]^2 \quad \dots (2-64)$$

$$nE \left[\frac{\partial \log f(t_1, t_2, \dots, t_n | \underline{\theta})}{d\theta_i \theta_j \dots \theta_k} \right]^2 \quad \dots (2-65)$$

$$-E \left[\frac{\partial^k \log f(t_1, t_2, \dots, t_n | \underline{\theta})}{d\theta_i \theta_j \dots \theta_k} \right] \quad \dots (2-66)$$

where $i, j = 1, 2, \dots, k$

(Ali et al, 2013, 6069))(Kamary, 2017, 53)

2.2.7.2 دالة الكثافة الاحتمالية السابقة للمعلوماتية:

(Informative prior p.d.f)

تستعمل هذه الدالة عندما تتوفر المعلومات المسبقة الكافية لدى الباحث عن المعلمة (المعلمات) المراد تقديرها، وتتماز دالة الكثافة الاحتمالية السابقة للمعلوماتية بأنها تكون معروفة

المعلومات وتكون المعلمة مقيدة بمدد معينة استناداً الى المعلومات التي يحصل عليها الباحث، ان وضع القيود عن المعلومات المراد تقديرها من الأمور المهمة التي يلجأ اليها الباحث معتمداً على المعلومات المتوفرة عن تلك المعلمة، ان صياغة دالة الكثافة الاحتمالية السابقة للمعلوماتية يعتمد اعتماداً وثيقاً على هذه القيود، وان الدالة الاحتمالية السابقة المصاغة في هذه الحالة مشابهة للدالة غير المعلوماتية المصاغة حسب تطبيق قاعدة جيفري (Jeffrey) بهدف الحصول على افضل مقدر.

2.2.7.3 دالة الكثافة الاحتمالية السابقة المعتمدة على عينة سابقة:

تستعمل هذه الدالة عندما تكون المعلومات المتوفرة لدى الباحث عن المعلمة (المعلومات) المراد تقديرها قليلة جداً إذ يتم الحصول على معلومات عن طريق التجارب السابقة او الحالية، إذ تقسم البيانات الى قسمين ، القسم الأول يكون لها توزيع احتمالي اولي غير معلوماتي قد نحصل على التوزيع اللاحق للعينة الأولى وذلك عن طريق دمجها مع دالة الإمكان للعينة الأولى يتم استعمال هذا التوزيع كتوزيع احتمالي اولي للمعلمة الثانية ، ومن ثم توظف هذه المعلومات التي تم الحصول عليها من التجربة قيد الدراسة ليتم صياغتها بشكل دالة الإمكان من اجل الحصول على توزيع لاحق مناسب ومنه يمكن الحصول على مقدرات بيز للمعلمات. (الياسري, 2007, 25)

2.2.7.4 دالة الكثافة لاحتمالية السابقة المرافقة الطبيعية:

(Conjugate prior p.d.f)

وهي من اكثر الدوال استعمالاً بالمقارنة مع الدوال الذي تم ذكرها سابقاً لأنها دوال احتمالية معروفة وتتميز به هذه الدالة بصفات جيدة إذ تبنى بالاعتماد على دالة الإمكان للمشاهدات بوصفها دالة بالمعلمة (المعلمات) (θ) اذ ان دالة الإمكان $L(\theta|t)$ ودالة الكثافة الاحتمالية السابقة $\pi(\theta)$ وكذلك دالة الكثافة الاحتمالية اللاحقة $h(\theta|t)$ تتميز بأن لها الصيغ الدالية نفسها لكن بمعلمات مختلفة فضلاً عن كونها محددة وواضحة لذلك يفضل استعمال مثل هكذا نوع من الدوال بدلاً عن الدوال الكثافة الاحتمالية السابقة غير المعلوماتية التي تم ذكرها سابقاً كونها دالة غير ملائمة .

2.2.8 الحصانة في التقدير البيزي (Robustness in Bayes Estimation)

يقول (Box, 1980) أنه لبناء إنموذج كفوء, فإنه يجب ان يكون الإنموذج حصيناً (Robust) والذي يعني جعل الإنموذج مضموناً لمواجهة المخاطر المحتملة التي يمكن ان تؤدي الى إضعافه ويؤدي الى استدلالات مضللة وغير دقيقة (Passarin, 2004, 5).

وتعد مشكلة عدم دقة المعلومات السابقة من تحديد التوزيع السابق (Prior Distribution) في تقدير بيز واحدة من اتجاهات تحليل بيز الحصين , فهناك أصناف (عوائل) من التوزيع المُسبق إذ يُمثل صنف التوزيع المُسبق التوزيع الذي تتبعه المعلومات المسبقة. ونتيجة لعدم التأكد من التحديد الدقيق لإنموذج دالة هذه المعلومات وهي المشكلة الأساسية في أساليب بيز فقد دُرست الحصانة أو الحساسية لمقدرات بيز تحت أصناف مختلفة من التوزيعات المُسبقة ومن هذه الأصناف ما يأتي:

1. الصنف الذي تكون فيه المعلومات المُسبقة عبارة عن خليط (mixtures) من المعلومات المُسبقة الأساسية (Base prior) المتمثلة بدالة كثافة احتمالية سابقة مرافق طبيعي (Natural conjugate) وبتقة $(1 - \varepsilon)$ حيثُ أن ε يُمثل احتمال أن المعلومات المُسبقة تبتعد عن المعلومات الأساسية π_0 . أما المعلومات الأخرى فهي المعلومات الملوثة التي تكون بصورة دالة احتمالية سابقة غير ملائمة (Improper) أو قد تتمثل بدالة احتمالية سابقة غير معلوماتية (Non-informative). إذ يُمكن التعبير عن هذا الصنف من المعلومات المُسبقة وفق الصيغة العامة الآتية:

$$\Gamma = \{\pi(\theta): \pi(\theta) = (1 - \varepsilon)\pi_0(\theta) + \varepsilon q(\theta); q(\theta) \in Q\}$$

إذ أن:

$\pi_0(\theta)$: المعلومات المُسبقة الأساسية.

$q(\theta)$: الدالة الاحتمالية السابقة غير المعلوماتية فيما يخص المعلومات الملوثة باحتمال ε .

Q : صنف التلوّث.

2. إذا كانت المعلومات المُسبقة تنتمي الى صنف يستبدل ε بدالة ملائمة $\varepsilon(\theta)$ وفق الصيغة الآتية:

$$\Gamma = \{Q: \varepsilon(\theta)\} = \{\pi(\theta) = (1 - \varepsilon)\pi_0(\theta) + \varepsilon(\theta)q(\theta); q(\theta) \in Q\}$$

3. الصنف الذي تكون فيه المعلومات المُسبقة خليط وفقاً لما يأتي:

$$\Gamma = \{\pi: \pi(\theta) = \pi_i(\theta)\}; i = 1, 2, \dots, k$$

إذ أن:

$\pi_i(\theta)$: هي توزيعات مُسبقة مفترضة إلى المعلمة (θ) وباحتمال P_i وبذلك يظهر k من الدوال اللاحقة تبعاً لكل دالة مُسبقة وكما يأتي:

$$P_1(\theta/X), P_2(\theta/X), \dots, P_k(\theta/X)$$

وتكون هنالك عائلة من التوزيعات الخليطة للتوزيع المُسبق للمعلمة θ :

$$\pi(\theta) = \sum_{i=1}^k P_i \pi_i(\theta)$$

4. صنف التكامل ويكون وفق الصيغة الآتية:

$$\Gamma = \{\pi(\theta): \int g_i(\theta) \pi(\theta) d\pi(\theta) = \mu_i, i = 1, 2, \dots, n\}$$

إذ أن:

$g_i(\theta), \mu_i$: معلومات مسبقة محددة.

5. الصنف الذي تكون المعلومات المُسبقة عبارة عن حدود لمدى من الاحتمالات المجزأة وكما يأتي:

$$\Gamma(\alpha, \beta) = \{\pi: \pi(\theta): \alpha_i \leq \int \pi(\theta) d\theta \leq \beta_i; i = 1, 2, \dots, n\}$$

إذ أن β_i, α_i أعداد محددة وهي كما يأتي:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \leq \sum_{i=1}^n \beta_i, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i \leq 1 \leq \sum_{i=1}^n \beta_i$$

6. الصنف الملوث (الملوث ε -ML-II): أقرح (Berger, 1985) صنفاً من التوزيعات السابقة يعتمد على تقدير الامكان الاعظم سمي بالصنف الملوث (الملوث ε -ML-II) والمعرف بالدالة الآتية:

$$\Gamma = \{q(\theta): q(\theta) = (1 - \varepsilon)q_0(\theta) + \varepsilon q_1(\theta); q(\theta) \in G\}$$

إذ أن:

$q_0(\theta)$: المعلومات المسبقة الاساسية

$q_1(\theta)$: المعلومات المسبقة الملوثة

ε : احتمال الخطأ في اختيار المعلومات السابقة (نسبة التلوث في التوزيع السابق)

وأن $0 < \varepsilon < 1$. (Berger & Berliner, 1986, 463-466)

2.2.9 الطريقة البيزية الحصينة المقترحة:

(Proposed Robust Bayesian method)

تأخذ النمذجة البيزية بنظر الإعتبار عدم الدقة عن المعلمات المجهولة في إنموذج إحصائي (Gelman et al., 2014). لذلك فإن الإنموذج البيزي يستعمل مجموعة بيانات العينة t_i الذي تتمثل بدالة الامكان للملاحظات الحالية إذ يكون لدينا التوزيع الأصلي لمفردات العينة الحالية والذي يمثل دالة الكثافة الاحتمالية للبيانات $\varphi(t_i/\theta)$ بمتجه المعلمات θ , والتوزيع السابق (Prior Distribution) $\pi(\theta/\vartheta)$ بمتجه المعلمات الزائدية (ϑ) (Hyper parameters) , بعبارة أخرى:

$$\{t_i/\theta \sim iid \varphi(t_i/\theta), \theta \sim \pi(\theta/\vartheta)\}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \dots (2-67)$$

لايجاد التوزيع المشترك اللاحق (Joint posterior distribution) لـ $\varphi(\theta/t_i)$ عند متجه المعلمات الزائدية (ϑ) كالاتي:

$$h(\theta/t_i/\vartheta) = \frac{\pi(\theta/\vartheta) \prod_{i=1}^n \varphi(t_i/\theta)}{\int_{\forall \theta} \pi(\theta/\vartheta) \prod_{i=1}^n \varphi(t_i/\theta)} \quad \dots (2-68)$$

نلاحظ في الإنموذج (2-68) ان للمعلمة المقدره من مشاهدات العينة ككل هناك توزيعاً أولياً واحداً وهو $\pi(\theta/\vartheta)$ بالمعلمة (المعلمات) الزائدية (ϑ) وهذا لا يحقق الحصانة في التقدير لان كل مفردات بيانات العينة الحالية سيكون لها توزيع اولي مشترك بحيث ان للمفردات ذات النسق الواحد وللمفردات الشاذة سيكون لهما الاحتمال السابق نفسه. ولجعل الإنموذج (2-68) يتمتع بالحصانة سوف نقترح بأن لكل معلمة من المعلمات المراد تقديرها عند كل مفردة من مفردات متجه العينة t_i المسحوبة من $\varphi(t_i/\theta_i)$ هناك معلومات اولية تتمثل بتوزيع اولي للمعلمة $\pi(\theta_i/\vartheta)$ بالمعلمة (θ_i) (المعلمات) الزائدية (ϑ) اي انه :

$$t_i/\theta_i \sim iid \varphi(t_i/\theta_i), \theta_i \sim iid \pi(\theta_i/\vartheta), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \dots (2-69)$$

فان التوزيع المشترك اللاحق الحصين لـ $\varphi(\theta/t_i)$ للمعلمات $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ يكون بالصيغة الآتية:

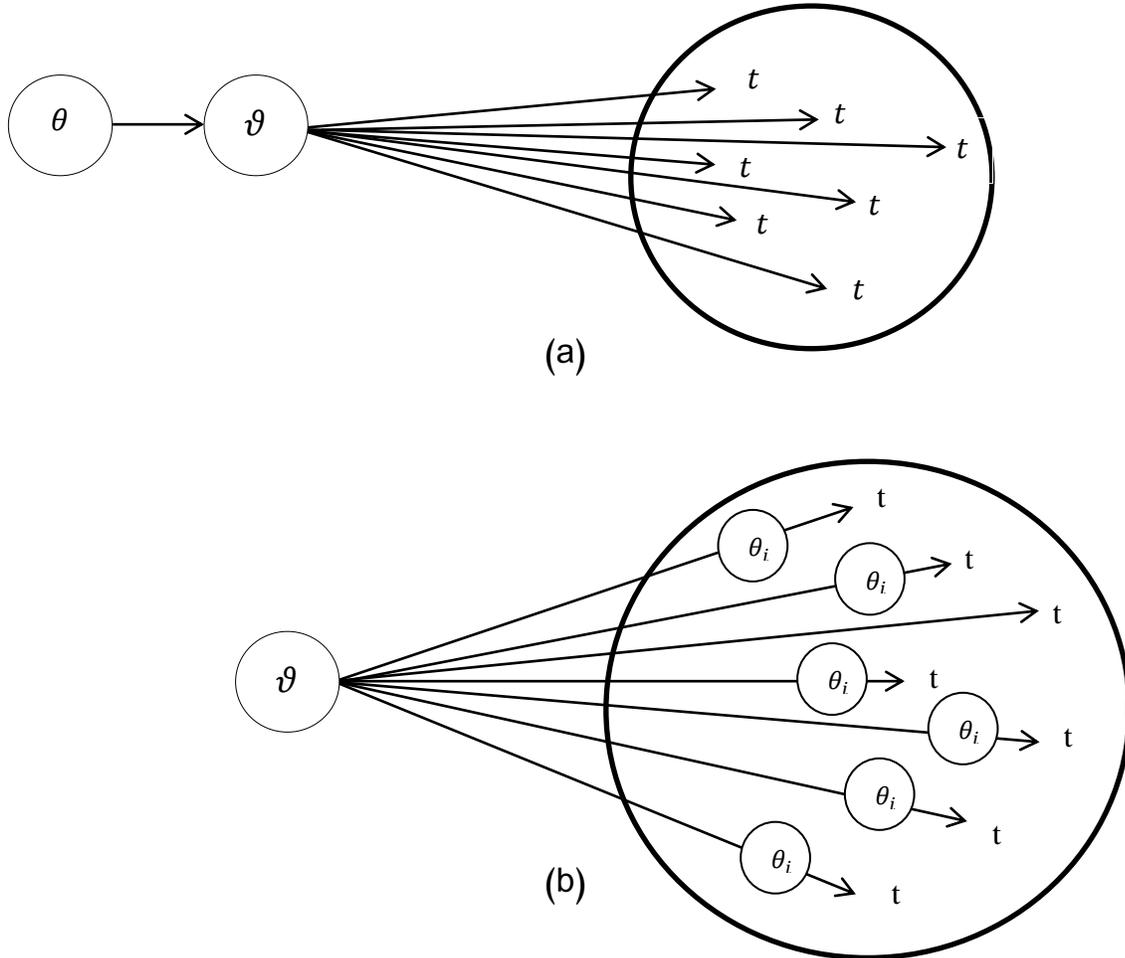
$$\text{IH}(\theta/t_i/\vartheta) = \frac{\prod_{i=1}^n \pi(\theta_i/\vartheta) \varphi(t_i/\theta_i)}{\int_{\forall \theta} \prod_{i=1}^n \pi(\theta_i/\vartheta) \varphi(t_i/\theta_i)} \quad \dots (2-70)$$

والإنموذج (2-70) سيتضمن بان تكون كل مشاهدة من مشاهدات العينة مستقلة عن المشاهدة الأخرى تماماً ومشروطة بتقدير المعلمة (θ_i) قد يكون احتمالية الحصول على المفردة مشروطاً بتوزيعها السابق فبذلك سيكون للمفردات (الشاذة) والمختلفة عن نسق البيانات احتمالية تختلف عن احتمالية باقي المفردات ذات النسق المتقارب، بعبارة أخرى ستكون بيانات العينة مستقلة عن بعضها بشكل كامل.

فان الاحتمال لكل مفردة من البيانات المستقلة والمتماثلة التوزيع (*iid*) يمكن الحصول عليه كالآتي:

$$\varphi(t_i/\vartheta) = \int \pi(\theta_i/\vartheta) \varphi(t_i/\theta_i) d\theta_i \quad \dots (2-71)$$

فبذلك ستتحكم المعلمة θ_i في تشتت البيانات. والشكل (2-23) يوضح الفرق بين طريقة بيز القياسية وطريقة بيز الحصينة المقترحة.



شكل (2-23) التمثيل البياني (a) إنموذج بيز القياسي (b) إنموذج بيز الحصين المقترح (الباحث)

ولغرض تقدير الإنموذج (2-70) لابد من تقدير المعلمات الزائدية ($\underline{\vartheta}$) التي تحمل معلومات مشتركة عن البيانات , ففي طريقة بيز القياسية يتم وضع التوزيع السابق بافتراض المعلمات الزائدية ($\underline{\vartheta}$) ومن ثم حساب التوزيع اللاحق لها (**Posterior**) . ولكن في هذه الاطروحة تم اقتراح ايجاد مقدر للمعلمات الزائدية ($\underline{\vartheta}$) باستعمال طريقة الامكان الأعظم، اذ يمكن ايجاد ($\hat{\underline{\vartheta}}$) التي تعظم تكامل دالة الامكان للبيانات في الإنموذج الحصين وكالاتي:

$$\hat{\underline{\vartheta}}_{mle} = arg \max_{\underline{\eta}} \sum_{i=1}^n \log (\int \varphi(t_i/\underline{\vartheta}) d\theta_i) \quad \dots (2-72)$$

$$= arg \max_{\underline{\eta}} \sum_{i=1}^n \log (\int \varphi(t_i/\theta_i)\pi(\theta_i/\underline{\vartheta}) d\theta_i) \quad \dots (2-73)$$

إذ أن $arg \max$ هو الوسيط الأعظمي

لذلك فان التوزيع اللاحق الحصين المقترح سيكون كالاتي:

$$h(\underline{\theta}/t_i/\hat{\underline{\vartheta}}_{mle}) = \frac{\prod_{i=1}^n \pi(\theta_i/\hat{\underline{\vartheta}}_{mle}) \varphi(t_i/\theta_i)}{\int_{\forall \theta_i} \prod_{i=1}^n \pi(\theta_i/\hat{\underline{\vartheta}}_{mle}) \varphi(t_i/\theta_i) d\theta_i} \quad \dots (2-74)$$

2.2.10 الصيغة العامة للطريقة البيزية الحصينة الضبابية المقترحة:

(Proposed Fuzzy Robust Bayesian method)

لاحظنا سابقا أن التوزيع الاحتمالي الضبابي المقترح هو توزيع احتمالي تقليدي بالبيانات الضبابية \tilde{t} عند مجموعة القطع $A^{(\alpha)}$ اي انه يمكن تحويل اي توزيع احتمالي ضبابي بإيجاد اوقات الفشل الضبابية $\tilde{t}_{A^{(\alpha)}}$ عند اي قيمة من قيم القطع (α) اي ان:

$$\tilde{f}(\tilde{t}_{A^{(\alpha)}}) = f(\tilde{t}_{A^{(\alpha)}}) \quad \dots (2-75)$$

لذلك عند تعويض التوزيع الاحتمالي الضبابي في الصيغة (2-33) بدلاً من التوزيع الاحتمالي التقليدي في صيغة بيز الحصينة المقترحة (2-74) نحصل على الاتي:

$$\tilde{h}(\underline{\theta}/\tilde{t}_{A^{(\alpha)}}/\hat{\underline{\vartheta}}) = \frac{\prod_{i=1}^n \pi(\theta_i/\hat{\underline{\vartheta}}) \tilde{\varphi}(\tilde{t}_{A^{(\alpha)}}/\theta_i)}{\int \prod_{i=1}^n \pi(\theta_i/\hat{\underline{\vartheta}}) \tilde{\varphi}(\tilde{t}_{A^{(\alpha)}}/\theta_i) d\theta_i} \quad \dots (2-76)$$

والصيغة (2-76) تمثل التوزيع الاحتمالي الحصين الضبابي اللاحق (Fuzzy Robust Posterior) لبيانات العينة الضبابية التي منه يمكن إيجاد مقدر بيز الحصين الضبابي $\hat{\theta}_{BRF}$ عند أي دالة خسارة.

2.2.11 مقدر بيز الضبابي الحصين المقترح لبعض توزيعات الفشل الاحتمالية:

نقدم في هذه الفقرة تطبيق طريقة بيز الضبابية الحصينة المقترحة على بعض توزيعات الفشل الاحتمالية وكما يأتي:

2.2.11.1 مقدر بيز الضبابي الحصين المقترح للتوزيع الأسي

1- مقدر بيز القياسي غير المعلوماتي للتوزيع الأسي في ظل دالة خسارة تربيعية وبيانات تقليدية

(Non-Informative Standard Bayesian Estimator for Exponential Distribution) (NSBexp)

لنفرض انه لدينا اوقات فشل t_1, t_2, \dots, t_n إذ أن $t \in T$ لها توزيع أسي بالمعلمة (λ) فان دالة الكثافة الإحتمالية التقليدية هي:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad ; \quad t, \lambda > 0 \quad \dots (2-77)$$

فإن دالة الامكان للتوزيع الأسي يمكن أن تكتب كالاتي:

$$\begin{aligned} L_{exp} &= \prod_{i=1}^n f(t_i, \lambda) \\ &= \prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda t_i} \\ &= \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n t_i} \quad \dots (2-78) \end{aligned}$$

وحسب قاعدة جفري (Jeffery role) فإن التوزيع السابق للمعلمة المراد تقديرها λ يكون كالاتي:

$$\pi(\lambda) \propto \sqrt{I(\lambda)}$$

$$\pi(\lambda) = \text{Constant} \sqrt{I(\lambda)}$$

$$= K \sqrt{I(\lambda)}$$

$$I(\lambda) = -\tilde{n}E \left[\frac{\partial^2 \text{Ln}f(t)}{\partial \lambda^2} \right]$$

$$\text{Ln}f(t) = \text{Ln}(\lambda e^{-\lambda t}) = \text{Ln}(\lambda) - \lambda t$$

$$\frac{\partial \text{Ln}f(t)}{\partial \lambda} = \frac{1}{\lambda} - t$$

$$\frac{\partial^2 \text{Ln}f(t)}{\partial \lambda^2} = -\frac{1}{\lambda^2}$$

$$E \left[\frac{\partial^2 \text{Ln}f(t)}{\partial \lambda^2} \right] = E \left[-\frac{1}{\lambda^2} \right] =$$

$$\therefore I(\lambda) = -nE \left[\frac{\partial^2 \text{Ln}f(t)}{\partial \lambda^2} \right] = \frac{n}{\lambda^2}$$

ولذلك فإن التوزيع السابق للمعلمة λ يكون كالآتي:

$$\pi(\lambda) = K \sqrt{I(\lambda)}$$

$$= K \sqrt{\frac{n}{\lambda^2}} = K \frac{\sqrt{n}}{\lambda} \quad \dots (2-79)$$

وعليه فإن دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة للمتغيرين t, λ هي:

$$\mathbf{G}(t_i, \lambda) = \pi(\lambda) \prod_{i=1}^{\tilde{n}} f(t_i)$$

$$= K \frac{\sqrt{n}}{\lambda} \prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda t_i}$$

$$= K \frac{\sqrt{n}}{\lambda} \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n t_i}$$

$$= K \sqrt{n} \lambda^{n-1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^n t_i} \quad \dots (2-80)$$

ومن معادلة (2-80) نجد الدالة الحدية للمتغير t_i وكما يأتي:

$$M(t_i) = \int_0^{\infty} K \sqrt{n} \lambda^{n-1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^n t_i} d\lambda$$

$$= K \sqrt{n} \int_0^{\infty} \lambda^{n-1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^n t_i} d\lambda$$

$$= \frac{K\sqrt{n}\Gamma(n)}{(\sum_{i=1}^n t_i)^n}$$

وعليه فان التوزيع اللاحق الشرطي يكون كما يأتي:

$$\begin{aligned} h(\lambda/t_i) &= \frac{G(t_i, \lambda)}{M(t_i)} \\ &= \frac{K\sqrt{n}\lambda^{n-1}e^{-\lambda\sum_{i=1}^n t_i}}{\frac{K\sqrt{n}\Gamma(n)}{(\sum_{i=1}^n t_i)^n}} \\ &= \frac{(\sum_{i=1}^n t_i)^n}{\Gamma(n)} \lambda^{n-1} e^{-\lambda\sum_{i=1}^n t_i} \quad \dots (2-81) \end{aligned}$$

نلاحظ ان التوزيع السابق ما هو الا توزيع كاما بالمعلمتين $(\alpha = n, \beta = \sum_{i=1}^n t_i)$.

فان مقدر بيز القياسي الغير المعلوماتي في ظل دالة خسارة تربيعية ما هو الا توقع التوزيع اللاحق للمعلمة المراد تقديرها وكالاتي:

$$\hat{\lambda}_{\text{NISBexp}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n t_i} \quad \dots (2-82)$$

2- مقدر بيز القياسي الضبابي الحصين المقترح الغير معلوماتي للتوزيع الأسي:

(Non-Informative Robust Fuzzy Standard Bayesian Estimator for Exponential Distribution) (NRFSBexp)

لنفرض انه لدينا اوقات فشل t_1, t_2, \dots, t_n إذ أن $t \in \mathbf{T}$ لها توزيع أسي بالمعلمة (λ) فان المجموعة الضبابية عند القطع α $\tilde{A}_\alpha = \{\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \dots, \tilde{t}_n\}$, إذ أن $\tilde{t} \in \tilde{\mathbf{T}}$, $\tilde{t} =$ $\{[0, \infty), \mu_{\tilde{t}}(t)\}$ لها توزيع أسي ضبابي بالمعلمة λ بدالة الكثافة الإحتمالية الضبابية الآتية:

$$\tilde{f}(\tilde{t}_{A(\alpha)}) = \lambda e^{-\lambda \tilde{t}_{A(\alpha)}} \quad \tilde{t}_{A(\alpha)}, \lambda > 0 \quad \dots (2-83)$$

وحسب قاعدة جفري (Jeffery role) فإن التوزيع السابق للمعلمة λ يكون كالآتي:

$$\pi(\lambda) \propto \sqrt{I(\lambda)}$$

$$\begin{aligned} \pi(\lambda) &= \text{Constant} \sqrt{I(\lambda)} \\ &= K \sqrt{I(\lambda)} \end{aligned}$$

$$I(\lambda) = -\tilde{n}E \left[\frac{\partial^2 \text{Ln}f(t)}{\partial \lambda^2} \right]$$

$$\text{Ln}\tilde{f}(\tilde{t}_{A(\alpha)}) = \text{Ln} \left(\lambda e^{-\lambda \tilde{t}_{A(\alpha)}} \right) = \text{Ln}(\lambda) - \lambda \tilde{t}_{A(\alpha)}$$

$$\frac{\partial \text{Ln}\tilde{f}(\tilde{t}_{A(\alpha)})}{\partial \lambda} = \frac{1}{\lambda} - \tilde{t}_{A(\alpha)}$$

$$\frac{\partial^2 \text{Ln}\tilde{f}(\tilde{t}_{A(\alpha)})}{\partial \lambda^2} = -\frac{1}{\lambda^2}$$

$$E \left[\frac{\partial^2 \text{Ln}\tilde{f}(\tilde{t}_{A(\alpha)})}{\partial \lambda^2} \right] = E \left[-\frac{1}{\lambda^2} \right]$$

$$\therefore I(\lambda) = -\tilde{n}E \left[\frac{\partial^2 \text{Ln}\tilde{f}(\tilde{t}_{A(\alpha)})}{\partial \lambda^2} \right] = \frac{\tilde{n}}{\lambda^2}$$

ولذلك فإن التوزيع السابق للمعلمة λ يكون كالآتي:

$$\begin{aligned} \pi(\lambda) &= K \sqrt{I(\lambda)} \\ &= K \sqrt{\frac{\tilde{n}}{\lambda^2}} = K \frac{\sqrt{\tilde{n}}}{\lambda} \end{aligned} \quad \dots (2-84)$$

وحسب طريقة بيز الضبابية الحصينة المقترحة في الصيغة (2-67) , فإن التوزيع السابق لكل معلمة مقدره من كل مشاهدة من مشاهدات العينة الضبابية سيكون كالآتي:

$$\pi(\lambda_i) = K \frac{\sqrt{\tilde{n}}}{\lambda_i} \quad \dots (2-85)$$

وعليه فإن دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة للمتغيرين λ , $\tilde{t}_{A(\alpha)}$ هي:

$$\begin{aligned}
 G(\tilde{t}_{A(\alpha)_i}, \lambda_i) &= \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \pi(\lambda_i) \tilde{f}(\tilde{t}_{A(\alpha)_i}) \\
 &= \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \frac{K\sqrt{\tilde{n}}}{\lambda_i} \lambda_i e^{-\lambda_i \tilde{t}_{A(\alpha)_i}} \\
 &= \prod_{i=1}^{\tilde{n}} K\sqrt{\tilde{n}} e^{-\lambda_i \tilde{t}_{A(\alpha)_i}} \\
 &= (K\sqrt{\tilde{n}})^{\tilde{n}} \prod_{i=1}^{\tilde{n}} e^{-\lambda_i \tilde{t}_{A(\alpha)_i}} \quad \dots (2-86)
 \end{aligned}$$

ومن معادلة (2-86) نجد الدالة الحدية للمتغير $\tilde{t}_{A(\alpha)_i}$ وكما يأتي:

$$\begin{aligned}
 M(\tilde{t}_{A(\alpha)_i}) &= (K\sqrt{\tilde{n}})^{\tilde{n}} \int_0^{\infty} \left[\prod_{i=1}^{\tilde{n}} e^{-\lambda_i \tilde{t}_{A(\alpha)_i}} \right] d\lambda_i \\
 &= (K\sqrt{\tilde{n}})^{\tilde{n}} \int_0^{\infty} \left[e^{-\lambda_1 \tilde{t}_{A(\alpha)_1}} \cdot e^{-\lambda_2 \tilde{t}_{A(\alpha)_2}} \dots e^{-\lambda_{\tilde{n}} \tilde{t}_{A(\alpha)_{\tilde{n}}}} \right] d\lambda_i \\
 &= (K\sqrt{\tilde{n}})^{\tilde{n}} \left[\int_0^{\infty} e^{-\lambda_1 \tilde{t}_{A(\alpha)_1}} d\lambda_1 \cdot \int_0^{\infty} e^{-\lambda_2 \tilde{t}_{A(\alpha)_2}} d\lambda_2 \dots \int_0^{\infty} e^{-\lambda_{\tilde{n}} \tilde{t}_{A(\alpha)_{\tilde{n}}}} d\lambda_{\tilde{n}} \right] \\
 &= (K\sqrt{\tilde{n}})^{\tilde{n}} \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \left[\int_0^{\infty} e^{-\lambda_i \tilde{t}_{A(\alpha)_i}} d\lambda_i \right] \quad \dots (2-87)
 \end{aligned}$$

من معادلة (2-87) نعمل الآتي:

$$\text{Let } u = \lambda_i \tilde{t}_{A(\alpha)_i} \Rightarrow \lambda_i = \frac{u}{\tilde{t}_{A(\alpha)_i}} \Rightarrow d\lambda_i = \frac{1}{\tilde{t}_{A(\alpha)_i}} du$$

$$\begin{aligned}
 \therefore M(\tilde{t}_{A(\alpha)_i}) &= (K\sqrt{\tilde{n}})^{\tilde{n}} \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \left[\int_0^{\infty} e^{-u} \frac{1}{\tilde{t}_{A(\alpha)_i}} du \right] \\
 &= (K\sqrt{\tilde{n}})^{\tilde{n}} \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \frac{1}{\tilde{t}_{A(\alpha)_i}} \left(\int_0^{\infty} e^{-u} du \right) \\
 &= (K\sqrt{\tilde{n}})^{\tilde{n}} \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \frac{1}{\tilde{t}_{A(\alpha)_i}} \quad \dots (2-88)
 \end{aligned}$$

$$= \frac{(K\sqrt{\tilde{n}})^{\tilde{n}}}{\prod_{i=1}^{\tilde{n}} \tilde{t}_{A(\alpha)_i}} \quad \dots (2-89)$$

وعليه فان التوزيع اللاحق الشرطي الضبابي الحصين يكون كما يأتي:

$$\begin{aligned}
 h\left(\lambda/\tilde{t}_{A(\alpha)_i}\right) &= \frac{G(\tilde{t}_{A(\alpha)_i}, \lambda_i)}{M(\tilde{t}_{A(\alpha)_i})} \\
 &= \frac{(K\sqrt{\tilde{n}})^{\tilde{n}} \prod_{i=1}^{\tilde{n}} e^{-\lambda_i \tilde{t}_{A(\alpha)_i}}}{\frac{(K\sqrt{\tilde{n}})^{\tilde{n}}}{\prod_{i=1}^{\tilde{n}} \tilde{t}_{A(\alpha)_i}}} \\
 &= \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \tilde{t}_{A(\alpha)_i} \prod_{i=1}^{\tilde{n}} e^{-\lambda_i \tilde{t}_{A(\alpha)_i}} \\
 &= \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \tilde{t}_{A(\alpha)_i} e^{-\lambda_i \tilde{t}_{A(\alpha)_i}} \quad \dots (2-90)
 \end{aligned}$$

ولإثبات أن التوزيع اللاحق في المعادلة (2-90) هو دالة احتمالية كالآتي:

$$\begin{aligned}
 &\int_0^\infty \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \tilde{t}_{A(\alpha)_i} e^{-\lambda_i \tilde{t}_{A(\alpha)_i}} d\lambda_i \\
 &\left(\tilde{t}_{A(\alpha)_i}\right)^{\tilde{n}} \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \int_0^\infty e^{-\lambda_i \tilde{t}_{A(\alpha)_i}} d\lambda_i \\
 \text{Let } u &= \lambda_i \tilde{t}_{A(\alpha)_i} \Rightarrow \lambda_i = \frac{u}{\tilde{t}_{A(\alpha)_i}} \Rightarrow d\lambda_i = \frac{1}{\tilde{t}_{A(\alpha)_i}} du \\
 \therefore &\left(\tilde{t}_{A(\alpha)_i}\right)^{\tilde{n}} \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \int_0^\infty e^{-u} \frac{1}{\tilde{t}_{A(\alpha)_i}} du = 1
 \end{aligned}$$

فان مقدر بيز القياسي الضبابي الحصين غير المعلوماتي في ظل دالة خسارة تربيعية ما هو الا توقع التوزيع اللاحق أي أن:

$$\begin{aligned}
 \hat{\lambda}_{\text{NRFSBexp}} &= \int_0^\infty \lambda_i \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \tilde{t}_{A(\alpha)_i} e^{-\lambda_i \tilde{t}_{A(\alpha)_i}} d\lambda_i \\
 &= \left(\tilde{t}_{A(\alpha)_i}\right)^{\tilde{n}} \int_0^\infty \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \lambda_i^{\frac{1}{\tilde{n}}} e^{-\lambda_i \tilde{t}_{A(\alpha)_i}} d\lambda_i
 \end{aligned}$$

$$\text{Let } u = \lambda_i \tilde{t}_{A(\alpha)_i} \Rightarrow \lambda_i = \frac{u}{\tilde{t}_{A(\alpha)_i}} \Rightarrow d\lambda_i = \frac{1}{\tilde{t}_{A(\alpha)_i}} du$$

$$\therefore \hat{\lambda}_{\text{NIRFSBexp}} = \left(\tilde{t}_{A(\alpha)_i} \right)^{\tilde{n}} \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \left(\frac{1}{\tilde{t}_{A(\alpha)_i}} \right)^{\frac{1}{\tilde{n}}+1} \int_0^{\infty} u^{\frac{1}{\tilde{n}}} e^{-u} du$$

$$\therefore \hat{\lambda}_{\text{NIRFSBexp}} = \left(\tilde{t}_{A(\alpha)_i} \right)^{\tilde{n}} \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \left(\frac{1}{\tilde{t}_{A(\alpha)_i}} \right)^{\frac{1}{\tilde{n}}+1} \Gamma\left(\frac{1}{\tilde{n}} + 1\right) \quad \dots (2-91)$$

3- مقدر بيز القياسي المعلوماتي للتوزيع الأسي في ظل دالة خسارة تربيعية ولبينات تقليدية

(Informative Standard Bayesian Estimator for Exponential Distribution) (INSBexp)

لنفرض انه لدينا اوقات فشل t_1, t_2, \dots, t_n إذ أن $t \in \mathbf{T}$ لها توزيع أسي بالمعلمة (λ) فان دالة الكثافة الإحتمالية التقليدية هي:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad t, \lambda > 0 \quad \dots (2-92)$$

فأن دالة الامكان للتوزيع الأسي يمكن أن تكتب كالاتي:

$$\begin{aligned} L_{exp} &= \prod_{i=1}^n f(t_i) \\ &= \prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda t_i} \\ &= \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n t_i} \end{aligned} \quad \dots (2-93)$$

ولنفرض ان هنالك معلومات أولية عن المعلمة المراد تقديرها λ والمتمثلة بدالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع كاما بالمعلمات الزائدية a, b والتي تكون بالشكل الآتي:

$$\pi(\lambda) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \lambda^{a-1} e^{-b\lambda} \quad \dots (2-94)$$

وعليه فأن دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة للمتغيرين t, λ هي:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(t_i, \lambda) &= \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n t_i} \frac{b^a}{\Gamma(a)} \lambda^{a-1} e^{-b\lambda} \\ &= \frac{b^a}{\Gamma(a)} \lambda^{n+a-1} e^{-\lambda(\sum_{i=1}^n t_i + b)} \end{aligned} \quad \dots (2-95)$$

ومن معادلة (2-95) نجد الدالة الحدية للمتغير t_i وكما يأتي:

$$M(t_i) = \int_0^{\infty} \frac{b^a}{\Gamma(a)} \lambda^{n+a-1} e^{-\lambda(\sum_{i=1}^n t_i + b)} d\lambda \quad \dots (2-96)$$

من معادلة (2-96) نجري الآتي:

$$\begin{aligned} \text{Let } u &= \lambda(\sum_{i=1}^n t_i + b) \Rightarrow \lambda = \frac{u}{(\sum_{i=1}^n t_i + b)} \Rightarrow \\ d\lambda &= \frac{1}{(\sum_{i=1}^n t_i + b)} du \\ \therefore M(t_i) &= \frac{b^a}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} \left(\frac{u}{(\sum_{i=1}^n t_i + b)} \right)^{n+a-1} e^{-u} \frac{1}{(\sum_{i=1}^n t_i + b)} du \\ &= \frac{b^a}{\Gamma(a)} \left(\frac{1}{(\sum_{i=1}^n t_i + b)} \right)^{n+a} \int_0^{\infty} u^{n+a-1} e^{-u} du \\ &= \frac{b^a}{\Gamma(a)} \left(\frac{1}{(\sum_{i=1}^n t_i + b)} \right)^{n+a} \Gamma(n+a) \quad \dots (2-2) \end{aligned}$$

وعليه فان التوزيع اللاحق الشرطي الضبابي يكون كما يأتي:

$$\begin{aligned} h(\lambda/t_i) &= \frac{G(t_i, \lambda)}{M(t_i)} \\ &= \frac{\frac{b^a}{\Gamma(a)} \lambda^{n+a-1} e^{-\lambda(\sum_{i=1}^n t_i + b)}}{\frac{b^a}{\Gamma(a)} \left(\frac{1}{(\sum_{i=1}^n t_i + b)} \right)^{n+a} \Gamma(n+a)} \\ &= \frac{(\sum_{i=1}^n t_i + b)^{n+a}}{\Gamma(n+a)} \lambda^{n+a-1} e^{-\lambda(\sum_{i=1}^n t_i + b)} \quad \dots (2-97) \end{aligned}$$

نلاحظ ان التوزيع السابق معادلة (2-97) ما هو الا توزيع كاما بالمعلمتين $(\alpha = n + a, \beta = (\sum_{i=1}^n t_i + b))$.

فان مقدر بيز القياسي المعلوماتي لبيانات تقليدية في ظل دالة خسارة تربيعية ما هو الا توقع التوزيع اللاحق وكالآتي:

$$\hat{\lambda}_{INSBexp} = \frac{n+a}{\sum_{i=1}^n t_i + b} \quad \dots (2-98)$$

أما المعلمات الزائدية (a, b) فيتم افتراضها ارقام صغيرة.

4- مقدر بيز القياسي الضبابي الحصين المقترح المعلوماتي للتوزيع الأسي:

(Informative Suggested Robust Fuzzy Standard Bayesian Estimator for Exponential Distribution) (INRFSBexp)

لنفرض انه لدينا اوقات فشل t_1, t_2, \dots, t_n إذ أن $t \in T$ لها توزيع أسي بالمعلمة (λ) فان المجموعة الضبابية عند القطع α $\tilde{A}_\alpha = \{\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \dots, \tilde{t}_{\tilde{n}}\}$, إذ أن $\tilde{t} \in \tilde{T}$, $\tilde{t} = \{[0, \infty), \mu_{\tilde{t}}(t)\}$ لها توزيع أسي ضبابي بالمعلمة λ بدالة الكثافة الاحتمالية الضبابية الآتية:

$$\tilde{f}(\tilde{t}_{A(\alpha)}) = \lambda e^{-\lambda \tilde{t}_{A(\alpha)}} \quad \tilde{t}_{A(\alpha)}, \lambda > 0 \quad \dots (2-99)$$

ولنفرض ان هنالك معلومات أولية عن المعلمة المراد تقديرها λ والمتمثلة بدالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع كاما بالمعلمات الزائدية a, b والتي تكون بالشكل الآتي:

$$\pi(\lambda) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \lambda^{a-1} e^{-\lambda b} \quad \dots (2-100)$$

وبموجب طريقة بيز الضبابية الحصينة المقترحة فان لكل مشاهدة من المشاهدات الضبابية سيكون للمعلمة المراد تقديرها توزيع احتمالي أولي فيكون التوزيع السابق لكل مشاهدة كالاتي:

$$\pi(\lambda_i) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \lambda_i^{a-1} e^{-\lambda_i b} \quad \dots (2-101)$$

وعليه فان دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة للمتغيرين $\lambda, \tilde{t}_{A(\alpha)}$ هي:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(\tilde{t}_{A(\alpha)_i}, \lambda_i) &= \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \frac{b^a}{\Gamma(a)} \lambda_i^{a-1} e^{-\lambda_i b} \lambda_i e^{-\lambda_i \tilde{t}_{A(\alpha)_i}} \\ &= \left(\frac{b^a}{\Gamma(a)} \right)^{\tilde{n}} \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \lambda_i^a e^{-\lambda_i b} e^{-\lambda_i \tilde{t}_{A(\alpha)_i}} \\ &= \left(\frac{b^a}{\Gamma(a)} \right)^{\tilde{n}} \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \lambda_i^a e^{-\lambda_i (\tilde{t}_{A(\alpha)_i} + b)} \quad \dots (2-102) \end{aligned}$$

ومن معادلة (2-102) نجد الدالة الحدية للمتغير $\tilde{t}_{A(\alpha)_i}$ وكما يأتي:

$$M(\tilde{t}_{A(\alpha)_i}) = \left(\frac{b^a}{\Gamma(a)} \right)^{\tilde{n}} \int_0^\infty \left[\prod_{i=1}^{\tilde{n}} \lambda_i^a e^{-\lambda_i (\tilde{t}_{A(\alpha)_i} + b)} \right] d\lambda_i$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{b^a}{\Gamma(a)}\right)^{\tilde{n}} \int_0^\infty \left[\lambda_1^a e^{-\lambda_1(\tilde{t}_{A(\alpha)_1} + b)} \lambda_2^a e^{-\lambda_2(\tilde{t}_{A(\alpha)_2} + b)} \dots \lambda_{\tilde{n}}^a e^{-\lambda_{\tilde{n}}(\tilde{t}_{A(\alpha)_{\tilde{n}}} + b)} \right] d\lambda_i \\
 &= \left(\frac{b^a}{\Gamma(a)}\right)^{\tilde{n}} \left[\int_0^\infty \lambda_1^a e^{-\lambda_1(\tilde{t}_{A(\alpha)_1} + b)} d\lambda_1 \cdot \int_0^\infty \lambda_2^a e^{-\lambda_2(\tilde{t}_{A(\alpha)_2} + b)} d\lambda_2 \dots \int_0^\infty \lambda_{\tilde{n}}^a e^{-\lambda_{\tilde{n}}(\tilde{t}_{A(\alpha)_{\tilde{n}}} + b)} d\lambda_{\tilde{n}} \right] \\
 &= \left(\frac{b^a}{\Gamma(a)}\right)^{\tilde{n}} \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \int_0^\infty \lambda_i^a e^{-\lambda_i(\tilde{t}_{A(\alpha)_i} + b)} d\lambda_i \quad \dots (2-103)
 \end{aligned}$$

من معادلة (2-103) نجري الآتي:

$$\begin{aligned}
 \text{Let } u &= \lambda_i (\tilde{t}_{A(\alpha)_i} + b) \Rightarrow \lambda_i = \frac{u}{(\tilde{t}_{A(\alpha)_i} + b)} \Rightarrow \\
 d\lambda_i &= \frac{1}{(\tilde{t}_{A(\alpha)_i} + b)} du \\
 \therefore M(\tilde{t}_{A(\alpha)_i}) &= \left(\frac{b^a}{\Gamma(a)}\right)^{\tilde{n}} \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \int_0^\infty \left(\frac{u}{(\tilde{t}_{A(\alpha)_i} + b)}\right)^a e^{-u} \frac{1}{(\tilde{t}_{A(\alpha)_i} + b)} du \\
 &= \left(\frac{b^a}{\Gamma(a)}\right)^{\tilde{n}} \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \left(\frac{1}{\tilde{t}_{A(\alpha)_i} + b}\right)^{a+1} \int_0^\infty u^a e^{-u} du \\
 &= \left(\frac{b^a}{\Gamma(a)}\right)^{\tilde{n}} \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \left(\frac{1}{\tilde{t}_{A(\alpha)_i} + b}\right)^{a+1} \Gamma(a + 1)
 \end{aligned}$$

وعليه فان التوزيع اللاحق الشرطي الضبابي يكون كما يأتي:

$$\begin{aligned}
 h(\lambda/\tilde{t}_{A(\alpha)_i}) &= \frac{G(\tilde{t}_{A(\alpha)_i}, \lambda_i)}{M(\tilde{t}_{A(\alpha)_i})} \\
 &= \frac{\left(\frac{b^a}{\Gamma(a)}\right)^{\tilde{n}} \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \lambda_i^a e^{-\lambda_i(\tilde{t}_{A(\alpha)_i} + b)}}{\left(\frac{b^a}{\Gamma(a)}\right)^{\tilde{n}} \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \left(\frac{1}{\tilde{t}_{A(\alpha)_i} + b}\right)^{a+1} \Gamma(a+1)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\prod_{i=1}^{\tilde{n}} \lambda_i^a e^{-\lambda_i (\tilde{t}_{A(\alpha)_i} + b)}}{\prod_{i=1}^{\tilde{n}} (\tilde{t}_{A(\alpha)_i} + b)^{a+1} \Gamma(a+1)} \\
 &= \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \frac{(\tilde{t}_{A(\alpha)_i} + b)^{a+1} \lambda_i^a e^{-\lambda_i (\tilde{t}_{A(\alpha)_i} + b)}}{\Gamma(a+1)} \\
 &= \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \frac{(\tilde{t}_{A(\alpha)_i} + b)^{(a+1)}}{\Gamma(a+1)} \lambda_i^{(a+1)-1} e^{-\lambda_i (\tilde{t}_{A(\alpha)_i} + b)} \quad \dots (2-104)
 \end{aligned}$$

نلاحظ ان التوزيع السابق معادلة (2-104) ما هو الا توزيع كاما بالمعلمتين $(\alpha = a + 1, \beta = \tilde{t}_{A(\alpha)_i} + b)$

لذلك فان مقدر بيز الضبابي الحصين المقترح في ظل دالة خسارة تربيعية هو توقع التوزيع اللاحق وكما يأتي:

$$\hat{\lambda}_{\text{INRFSBexp}} = \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \frac{a+1}{\tilde{t}_{A(\alpha)_i} + b} \quad \dots (2-105)$$

أما المعلمات الزائدية (a, b) نقترح تقديرها وفقاً لطريقة الإمكان الأعظم وكما يأتي:

$$\pi(\lambda_i) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \lambda_i^{a-1} e^{-\lambda_i b}$$

$$L = \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \pi(\lambda_i)$$

$$= \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \frac{b^a}{\Gamma(a)} \lambda_i^{a-1} e^{-\lambda_i b}$$

$$= \left(\frac{b^a}{\Gamma(a)} \right)^{\tilde{n}} \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \lambda_i^{a-1} e^{-\lambda_i b}$$

$$Ln(L) = \tilde{n} Ln \left(\frac{b^a}{\Gamma(a)} \right) + (a - 1) \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \ln(\lambda_i) - \lambda_i b$$

$$= a\tilde{n}Ln(b) - \tilde{n}ln(\Gamma(a)) + (a - 1) \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \ln(\lambda_i) - \lambda_i b \quad \dots (2-106)$$

من معادلة (2-106) نشق مرة لا a ومرة لا b ونساوي بالصفر نحصل على :

$$\frac{\partial Ln(L)}{\partial \hat{a}} = \tilde{n}Ln(\hat{b}) - \frac{\tilde{n}}{\Gamma(\hat{a})} \psi(a) - \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \ln(\lambda_i) = 0 \quad \dots (2-107)$$

إذ أن:

$$\Gamma(\hat{a}) \text{ هي دالة كاما والتي تساوي } \int_0^{\infty} \lambda_i^{\hat{a}-1} e^{-\frac{\lambda_i}{\hat{a}}} \text{ ... (2-108)}$$

$\psi(a) = \Gamma'(\hat{a})$ هي المشتقة الأولى لدالة كاما ويطلع عليها دالة digamma والتي صيغتها بحسب متسلسلة (Hurwitz Zeta function) كالآتي:

$$\psi(a) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(a+\tilde{n})^2} \text{ ... (2-108)}$$

وعليه فإن المعادلة (2-107) تصبح كالآتي:

$$\therefore \frac{\partial \text{Ln}(L)}{\partial \hat{a}} = \tilde{n} \text{Ln}(\hat{b}) - \frac{\tilde{n}}{\Gamma(\hat{a})} \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \frac{1}{(a+\tilde{n})^2} - \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \ln(\lambda_i) = 0 \text{ ... (2-109)}$$

$$\frac{\partial \text{Ln}(L)}{\partial \hat{b}} = \frac{\hat{a}\tilde{n}}{\hat{b}} - \lambda_i = 0$$

$$\Rightarrow \hat{b} = \frac{\hat{a}\tilde{n}}{\lambda_i} \text{ ... (2-110)}$$

من معادلة (2-109) نلاحظ انه لا يمكن تعظيم هذه الدالة مباشرة بالنسبة المعلمة a لذلك سيتم استعمال طرائق التحليل العددي.

وعليه بعد ايجاد تقديرات المعلمات الزائدية نعوضها في المعادلة (2-105) لنحصل على مقدر بيز الضبابي الحصين المعلوماتي لمعلمة التوزيع الأسي الضبابي وكالآتي:

$$\hat{\lambda}_{\text{INRFSBexp}} = \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \frac{a_{mle}+1}{\tilde{t}_{A(\omega)_i} + b_{mle}} \text{ ... (2-111)}$$

2.2.11.2 مقدر بيز الضبابي الحصين المقترح لتوزيع ويبل:

1- مقدر بيز القياسي غير المعلوماتي لتوزيع ويبل في ظل دالة خسارة تربيعية وليبيانات تقليدية

(Non-Informative Standard Bayesian Estimator for Weibull Distribution) (NSBweibull)

لنفرض انه لدينا اوقات فشل t_1, t_2, \dots, t_n إذ أن $t \in T$ لها توزيع ويبل بالمعلمتين (p) و (θ) فان دالة الكثافة الإحتمالية التقليدية هي:

$$f(t, \theta, p) = p\theta t^{p-1} e^{-\theta t^p} ; \quad t, p, \theta > 0 \quad \dots (2-112)$$

فأن دالة الامكان لتوزيع ويبل يمكن أن تكتب كالاتي:

$$\begin{aligned} L_{Weibull} &= \prod_{i=1}^n f(t_i, p, \theta) \\ &= \prod_{i=1}^n p\theta t_i^{p-1} e^{-\theta t_i^p} \\ &= \theta^n p^n \prod_{i=1}^n t_i^{p-1} e^{-\theta t_i^p} \end{aligned}$$

وبحسب قاعدة جفري (Jeffery role) فأن التوزيع السابق للمعلمة المراد تقديرها θ علماً انه سيتم اعتبار p ثابت يكون كالاتي:

$$\pi(\theta) \propto \sqrt{I(\theta)}$$

$$\begin{aligned} \pi(\theta) &= \text{Constant} \sqrt{I(\theta)} \\ &= K \sqrt{I(\theta)} \end{aligned}$$

$$I(\theta) = -\tilde{n}E \left[\frac{\partial^2 \text{Ln}f(t)}{\partial \theta^2} \right]$$

$$\text{Ln}f(t) = \text{Ln}(p\theta t_i^{p-1} e^{-\theta t_i^p}) = \text{Ln}(p) + \text{Ln}(\theta) + (p-1) \sum_{i=1}^n \text{Ln}(t_i) - \theta t_i^p$$

$$\frac{\partial \text{Ln}f(t)}{\partial \theta} = \frac{1}{\theta} - t_i^p$$

$$\frac{\partial^2 \text{Ln}f(t)}{\partial \theta^2} = -\frac{1}{\theta^2}$$

$$E \left[\frac{\partial^2 \text{Ln}f(t)}{\partial \theta^2} \right] = E \left[-\frac{1}{\theta^2} \right]$$

$$\therefore I(\theta) = -nE \left[\frac{\partial^2 \text{Ln}f(t)}{\partial \lambda^2} \right] = \frac{n}{\theta^2}$$

ولذلك فان التوزيع السابق للمعلمة λ يكون كالآتي:

$$\pi(\theta) = K \sqrt{\frac{n}{\theta^2}} = K \frac{\sqrt{n}}{\theta} \quad \dots (2-113)$$

وعليه فان دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة للمتغيرين t_i, θ هي:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(t_i, \theta) &= \pi(\theta) \prod_{i=1}^n f(t_i, p, \theta) \\ &= K\sqrt{n}\theta^{n-1} p^n \prod_{i=1}^n t_i^{p-1} e^{-\theta t_i^p} \end{aligned} \quad \dots (2-114)$$

ومن معادلة (2-114) نجد الدالة الحدية للمتغير t_i وكما يأتي:

$$\begin{aligned} M(t_i) &= K\sqrt{n} \left[\int_0^\infty \int_0^\infty \theta^{n-1} p^n \prod_{i=1}^n t_i^{p-1} e^{-\theta t_i^p} d\theta dp \right] \\ &= K\sqrt{n} \left[\int_0^\infty p^n \left(\prod_{i=1}^n t_i \right)^{p-1} \int_0^\infty \theta^{n-1} e^{-\theta t_i^p} d\theta dp \right] \end{aligned}$$

$$\text{Let } u = \theta t_i^p \Rightarrow \theta = \frac{u}{\sum_{i=1}^n t_i^p} \Rightarrow d\theta = \frac{1}{\sum_{i=1}^n t_i^p} du$$

$$\begin{aligned} \therefore M(t_i) &= K\sqrt{n} \left[\int_0^\infty p^n \left(\prod_{i=1}^n t_i \right)^{p-1} \int_0^\infty \left(\frac{u}{\sum_{i=1}^n t_i^p} \right)^{n-1} e^{-u} \frac{1}{\sum_{i=1}^n t_i^p} du dp \right] \\ &= K\sqrt{n} \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^n t_i^p} \right)^n \left[\int_0^\infty p^n \left(\prod_{i=1}^n t_i \right)^{p-1} \int_0^\infty u^{n-1} e^{-u} du dp \right] \\ &= K\sqrt{n} \Gamma(n) \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^n t_i^p} \right)^n \left[\int_0^\infty p^n \left(\prod_{i=1}^n t_i \right)^{p-1} dp \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= K\sqrt{n}p^n\Gamma(n)\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^n t_i^p}\right)^n \left[\int_0^\infty \left(\prod_{i=1}^n t_i\right)^{p-1} dp \right] \\
&= K\sqrt{n}p^n\Gamma(n)\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^n t_i^p}\right)^n [e^{(p-1)\sum_{i=1}^n \ln(t_i)}] \quad \dots (2-115)
\end{aligned}$$

وعليه فان التوزيع اللاحق الشرطي يكون كما يأتي:

$$\begin{aligned}
h(\theta/t_i) &= \frac{G(t_i, \theta)}{M(t_i)} \\
&= \frac{K\sqrt{n}\theta^{n-1}p^n \prod_{i=1}^n t_i^{p-1} e^{-\theta t_i^p}}{K\sqrt{n}p^n\Gamma(n)\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^n t_i^p}\right)^n [e^{(p-1)\sum_{i=1}^n \ln(t_i)}]} \\
&= \frac{(\sum_{i=1}^n t_i^p)^n}{\Gamma(n)} \theta^{n-1} e^{-\theta \sum_{i=1}^n t_i^p} \quad \dots (2-116)
\end{aligned}$$

نلاحظ ان المعادلة (2-116) تمثل توزيع كما بالمعلمتين $(\alpha = n, \beta = \sum_{i=1}^n t_i^p)$

فان مقدر بيز القياسي غير المعلوماتي في ظل دالة خسارة تربيعية ما هو الا توقع التوزيع اللاحق للمعلمة المراد تقديرها وكالاتي:

$$\hat{\theta}_{\text{NSBweibull}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n t_i^p} \quad \dots (2-117)$$

2- مقدر بيز القياسي الضبابي الحصين المقترح غير المعلوماتي لتوزيع ويبيل:

(Non-Informative Robust Fuzzy Standard Bayesian Estimator for Weibull Distribution) (NRFSBweibull)

لنفرض انه لدينا اوقات فشل t_1, t_2, \dots, t_n إذ أن $t \in \mathbf{T}$ لها توزيع ويبيل بالمعلمة (θ) فان المجموعة الضبابية عند القطع α $\tilde{A}_\alpha = \{\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \dots, \tilde{t}_n\}$, إذ أن $\tilde{t} =$, $\tilde{t} \in \tilde{\mathbf{T}}$ لها توزيع ويبيل ضبابي بالمعلمة θ بدالة الكثافة الاحتمالية الضبابية الآتية:

$$\tilde{f}(\tilde{t}_{A(\alpha)}, \theta, p) = p\theta \tilde{t}_{A(\alpha)}^{p-1} e^{-\theta \tilde{t}_{A(\alpha)}^p} ; \quad t, p, \theta > 0 \quad \dots (2-118)$$

وأن معلمة الشكل Shape Parameter $p > 0$ معلمة القياس Scale Parameter $\theta > 0$

وبحسب قاعدة جفري فإن التوزيع السابق للمعلمة المراد تقديرها θ علما سيتم اعتبار المعلمة p ثابت يكون كالآتي:

$$\pi(\theta) \propto \sqrt{I(\theta)}$$

$$\pi(\theta) = \text{Constant} \sqrt{I(\theta)}$$

$$= K \sqrt{I(\theta)}$$

$$I(\theta) = -nE \left[\frac{\partial^2 \text{Ln} \tilde{f}(\tilde{t}_{A(\alpha)})}{\partial \theta^2} \right]$$

$$\text{Ln} \tilde{f}(\tilde{t}_{A(\alpha)_i}) = \text{Ln} \left(p \theta \tilde{t}_{A(\alpha)_i}^{p-1} e^{-\theta \tilde{t}_{A(\alpha)_i}^p} \right) = \text{Ln}(p) + \text{Ln}(\theta) + (p-1) \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \ln(\tilde{t}_{A(\alpha)_i}) - \theta \tilde{t}_{A(\alpha)_i}^p$$

$$\frac{\partial \text{Ln} \tilde{f}(\tilde{t}_{A(\alpha)_i})}{\partial \theta} = \frac{1}{\theta} - \tilde{t}_{A(\alpha)_i}^p$$

$$\frac{\partial^2 \text{Ln} \tilde{f}(\tilde{t}_{A(\alpha)})}{\partial \theta^2} = -\frac{1}{\theta^2}$$

$$\therefore I(\theta) = -nE \left[-\frac{1}{\theta^2} \right]$$

$$\therefore I(\theta) = n \left[\frac{1}{\theta^2} \right] = \frac{n}{\theta^2}$$

$$\pi(\theta, \lambda) = K \sqrt{I(\theta)}$$

$$= K \sqrt{\frac{\tilde{n}}{\theta^2}}$$

$$= \frac{K\sqrt{\tilde{n}}}{\theta}$$

... (2-119)

وحسب طريقة بيز الضبابية الحصينة المقترحة فإن التوزيع السابق لكل معلمة مقدره من كل مشاهدة من مشاهدات العينة الضبابية سيكون كالآتي:

$$\pi(\theta_i, \lambda_i) = \frac{K\sqrt{\tilde{n}}}{\theta_i} \quad \dots (2-120)$$

وعليه فإن دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة للمتغيرين $\tilde{t}_{A(\alpha)}, \theta_i$ هي:

$$\begin{aligned} G(\tilde{t}_{A(\alpha)_i}, \theta_i) &= \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \pi(\theta_i) \tilde{f}(\tilde{t}_{A(\alpha)_i}) \\ &= \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \frac{K\sqrt{\tilde{n}}}{\theta_i} p \theta_i \tilde{t}_{A(\alpha)_i}^{p-1} e^{-\theta_i \tilde{t}_{A(\alpha)_i}^p} \\ &= (K\sqrt{\tilde{n}})^{\tilde{n}} p^{\tilde{n}} \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \tilde{t}_{A(\alpha)_i}^{p-1} e^{-\theta_i \tilde{t}_{A(\alpha)_i}^p} \quad \dots (2-121) \end{aligned}$$

ومن معادلة (2-121) نجد الدالة الحدية للمتغير $\tilde{t}_{A(\alpha)_i}$ وكما يأتي:

$$\begin{aligned} M(\tilde{t}_{A(\alpha)_i}) &= (K\sqrt{\tilde{n}})^{\tilde{n}} p^{\tilde{n}} \int_0^\infty \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \tilde{t}_{A(\alpha)_i}^{p-1} dp \int_0^\infty \left[\prod_{i=1}^{\tilde{n}} e^{-\frac{\tilde{t}_{A(\alpha)_i}^p}{\theta_i}} \right] d\theta_i \\ &= (K\sqrt{\tilde{n}p})^{\tilde{n}} \left[(p-1) \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \ln(\tilde{t}_{A(\alpha)_i}) \right. \\ &\quad \left. - \theta_i \tilde{t}_{A(\alpha)_i}^p \int_0^\infty \left[e^{-\theta_1 \tilde{t}_{A(\alpha)_1}^p} d\theta_1 e^{-\theta_2 \tilde{t}_{A(\alpha)_2}^p} d\theta_2 \dots e^{-\theta_{\tilde{n}} \tilde{t}_{A(\alpha)_{\tilde{n}}}^p} d\theta_{\tilde{n}} \right] \right] \\ &= (K\sqrt{\tilde{n}p})^{\tilde{n}} \left[(p-1) \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \ln(\tilde{t}_{A(\alpha)_i}) - \theta_i \tilde{t}_{A(\alpha)_i}^p \right] \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \int_0^\infty e^{-\theta_i \tilde{t}_{A(\alpha)_i}^p} d\theta_i \quad \dots (2-122) \end{aligned}$$

$$\text{let } u = \theta_i \tilde{t}_{A(\alpha)_i}^p \Rightarrow \theta_i = \frac{u}{\tilde{t}_{A(\alpha)_i}^p} \Rightarrow d\theta_i = \frac{1}{\tilde{t}_{A(\alpha)_i}^p} du$$

$$\begin{aligned} \therefore M(\tilde{t}_{A(\alpha)_i}) &= (K\sqrt{\tilde{n}p})^{\tilde{n}} \left[(p-1) \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \ln(\tilde{t}_{A(\alpha)_i}) - \theta_i \tilde{t}_{A(\alpha)_i}^p \right] \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \int_0^\infty e^{-u} \frac{1}{\tilde{t}_{A(\alpha)_i}^p} du \\ &= \left(\frac{K\sqrt{\tilde{n}p}}{\tilde{t}_{A(\alpha)_i}^p} \right)^{\tilde{n}} \left[(p-1) \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \ln(\tilde{t}_{A(\alpha)_i}) - \theta_i \tilde{t}_{A(\alpha)_i}^p \right] \dots (2-2) \end{aligned}$$

وعليه فإن التوزيع اللاحق الشرطي الضبابي يكون كما يأتي:

$$\begin{aligned}
 h\left(\theta/\tilde{t}_{A^{(\alpha)}_i}\right) &= \frac{G(\tilde{t}_{A^{(\alpha)}_i}, \theta)}{M(\tilde{t}_{A^{(\alpha)}_i})} \\
 &= \frac{(K\sqrt{\tilde{n}})^{\tilde{n}} p^{\tilde{n}} \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \tilde{t}_{A^{(\alpha)}_i}^{p-1} e^{-\theta \tilde{t}_{A^{(\alpha)}_i}^p}}{\left(\frac{K\sqrt{\tilde{n}}p}{\tilde{t}_{A^{(\alpha)}_i}}\right)^{\tilde{n}} \left[(p-1) \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \ln(\tilde{t}_{A^{(\alpha)}_i}) - \theta \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \tilde{t}_{A^{(\alpha)}_i}^p\right] \dots} \\
 &= \frac{\left[(p-1) \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \ln(\tilde{t}_{A^{(\alpha)}_i}) - \theta \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \tilde{t}_{A^{(\alpha)}_i}^p\right]}{\left(\frac{1}{\tilde{t}_{A^{(\alpha)}_i}}\right)^{\tilde{n}} \left[(p-1) \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \ln(\tilde{t}_{A^{(\alpha)}_i}) - \theta \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \tilde{t}_{A^{(\alpha)}_i}^p\right]} \prod_{i=1}^{\tilde{n}} e^{-\theta \tilde{t}_{A^{(\alpha)}_i}^p} \\
 &= \left(\tilde{t}_{A^{(\alpha)}_i}^p\right)^{\tilde{n}} \prod_{i=1}^{\tilde{n}} e^{-\theta \tilde{t}_{A^{(\alpha)}_i}^p} \dots (2-123)
 \end{aligned}$$

لذا لاثبات ان الدالة (2-123) دالة احتمالية كالآتي:

$$\begin{aligned}
 &\int_0^\infty \left(\tilde{t}_{A^{(\alpha)}_i}^p\right)^{\tilde{n}} \prod_{i=1}^{\tilde{n}} e^{-\theta \tilde{t}_{A^{(\alpha)}_i}^p} \\
 &\left(\tilde{t}_{A^{(\alpha)}_i}^p\right)^{\tilde{n}} \prod_{i=0}^{\tilde{n}} \int_0^\infty e^{-\theta \tilde{t}_{A^{(\alpha)}_i}^p} d\theta_i
 \end{aligned}$$

$$\text{let } u = \theta_i \tilde{t}_{A^{(\alpha)}_i}^p \Rightarrow \theta_i = \frac{u}{\tilde{t}_{A^{(\alpha)}_i}^p} \Rightarrow d\theta_i = \frac{1}{\tilde{t}_{A^{(\alpha)}_i}^p} du$$

$$\therefore \left(\tilde{t}_{A^{(\alpha)}_i}^p\right)^{\tilde{n}} \prod_{i=0}^{\tilde{n}} \int_0^\infty e^{-u} \frac{1}{\tilde{t}_{A^{(\alpha)}_i}^p} du$$

$$\therefore \frac{\left(\tilde{t}_{A^{(\alpha)}_i}^p\right)^{\tilde{n}}}{\left(\tilde{t}_{A^{(\alpha)}_i}^p\right)^{\tilde{n}}} \int_0^\infty e^{-u} du = 1$$

فان مقدر بيز القياسي غير المعلوماتي في ظل دالة خسارة تربيعية ما هو الا توقع التوزيع اللاحق للمعلمة المراد تقديرها وكالآتي:

$$\hat{\theta}_{\text{NRFSBweibull}} = \int_0^\infty \theta_i \left(\tilde{t}_{A^{(\alpha)}_i}^p\right)^{\tilde{n}} \prod_{i=0}^{\tilde{n}} e^{-\theta_i \tilde{t}_{A^{(\alpha)}_i}^p} d\theta_i$$

$$= \left(\tilde{t}_{A^{(\alpha)}_i}^p \right)^{\tilde{n}} \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \int_0^{\infty} \theta_i^{\frac{1}{\tilde{n}}} e^{-\theta_i \tilde{t}_{A^{(\alpha)}_i}^p} d\theta_i$$

$$\text{let } u = \theta_i \tilde{t}_{A^{(\alpha)}_i}^p \Rightarrow \theta_i = \frac{u}{\tilde{t}_{A^{(\alpha)}_i}^p} \Rightarrow d\theta_i = \frac{1}{\tilde{t}_{A^{(\alpha)}_i}^p} du$$

$$\therefore \hat{\theta}_{\text{NRFSBweibull}} = \left(\tilde{t}_{A^{(\alpha)}_i}^p \right)^{\tilde{n}} \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \left(\frac{1}{\tilde{t}_{A^{(\alpha)}_i}^p} \right)^{\frac{1}{\tilde{n}}+1} \int_0^{\infty} u^{\frac{1}{\tilde{n}}} e^{-u} du$$

$$= \left(\tilde{t}_{A^{(\alpha)}_i}^p \right)^{\tilde{n}} \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \left(\frac{1}{\tilde{t}_{A^{(\alpha)}_i}^p} \right)^{\frac{1}{\tilde{n}}+1} \int_0^{\infty} u^{\frac{1}{\tilde{n}}} e^{-u} du$$

$$= \left(\tilde{t}_{A^{(\alpha)}_i}^p \right)^{\tilde{n}} \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \left(\frac{1}{\tilde{t}_{A^{(\alpha)}_i}^p} \right)^{\frac{1}{\tilde{n}}+1} \Gamma\left(\frac{1}{\tilde{n}} + 1\right) \dots (2-124)$$

3- مقدر بيز القياسي المعلوماتي لتوزيع ويبل لبيانات تقليدية :

(Informative Standard Bayesian Estimator for Weibull Distribution) (INSBweibull)

لنفرض انه لدينا اوقات فشل t_1, t_2, \dots, t_n إذ أن $t \in T$ لها توزيع ويبل بالمعلمتين (p) و (θ) فان دالة الكثافة الإحتمالية التقليدية هي:

$$f(t, \theta, p) = p\theta t^{p-1} e^{-\theta t^p} ; \quad t, p, \theta > 0 \quad \dots (2-125)$$

فإن دالة الامكان لتوزيع ويبل يمكن أن تكتب كالاتي:

$$\begin{aligned} L_{\text{Weibull}} &= \prod_{i=1}^n f(t_i, p, \theta) \\ &= \prod_{i=1}^n p\theta t_i^{p-1} e^{-\theta t_i^p} \\ &= \theta^n p^n \prod_{i=1}^n t_i^{p-1} e^{-\theta t_i^p} \end{aligned}$$

ولنفرض ان هنالك معلومات سابقة عن المعلمة المراد تقديرها θ والمتمثلة بدالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع كاما بالمعلمات الزائدية a, b والتي تكون بالشكل الآتي:

$$\pi(\theta) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \theta^{a-1} e^{-b\theta} \quad \dots (2-126)$$

وعليه فإن دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة للمتغيرين t_i, θ هي:

$$\begin{aligned} G(t_i, \theta) &= \frac{b^a}{\Gamma(a)} p^n \left[\prod_{i=1}^n t_i^{p-1} \right] \theta^{n+a-1} e^{-b\theta} e^{-\theta t_i^p} \\ &= \frac{b^a}{\Gamma(a)} p^n \left[\prod_{i=1}^n t_i^{p-1} \right] \theta^{n+a-1} e^{-\theta(b+t_i^p)} \quad \dots (2-127) \end{aligned}$$

ومن معادلة (2-127) نجد الدالة الحدية للمتغير t_i وكما يأتي:

$$M(t_i) = \frac{b^a p^n}{\Gamma(a)} \left[\int_0^\infty \prod_{i=1}^n t_i^{p-1} dp \right] \int_0^\infty \theta^{n+a-1} e^{-\theta(b+t_i^p)} d\theta \quad \dots (2-128)$$

من معادلة (2-128) نجري الآتي:

$$\begin{aligned} \text{Let } u &= \theta(b + t_i^p) \Rightarrow \theta = \frac{u}{(b+t_i^p)} \Rightarrow d\theta = \frac{1}{(b+t_i^p)} du \\ &= \frac{b^a p^n}{\Gamma(a)} \left[\int_0^\infty \prod_{i=1}^n t_i^{p-1} dp \right] \int_0^\infty \left(\frac{u}{(b+t_i^p)} \right)^{n+a-1} e^{-u} \frac{1}{(b+t_i^p)} du \\ &= \frac{b^a p^n}{\Gamma(a)} (b + t_i^p)^{n+a} \left[\int_0^\infty \prod_{i=1}^n t_i^{p-1} dp \right] \int_0^\infty u^{n+a-1} e^{-u} du \\ &= \frac{\Gamma(n+a) b^a p^n}{\Gamma(a)} (b + t_i^p)^{-(n+a)} \left[\int_0^\infty \prod_{i=1}^n t_i^{p-1} dp \right] \\ &= \frac{\Gamma(n+a) b^a p^n}{\Gamma(a)} (b + t_i^p)^{n+a} \left[e^{(p-1) \sum_{i=1}^n \ln(t_i)} \right] \quad \dots (2-129) \end{aligned}$$

وعليه فان التوزيع اللاحق الشرطي يكون كما يأتي:

$$\begin{aligned} h(\theta/t_i) &= \frac{G(t_i, \theta)}{M(t_i)} \\ &= \frac{\frac{b^a}{\Gamma(a)} p^n \left[\prod_{i=1}^n t_i^{p-1} \right] \theta^{n+a-1} e^{-\theta(b+t_i^p)}}{\frac{\Gamma(n+a) b^a p^n}{\Gamma(a)} (b+t_i^p)^{n+a} \left[e^{(p-1) \sum_{i=1}^n \ln(t_i)} \right]} \\ &= \frac{(b+t_i^p)^{n+a}}{\Gamma(n+a)} \theta^{n+a-1} e^{-\theta \sum_{i=1}^n (b+t_i^p)} \quad \dots (2-130) \end{aligned}$$

نلاحظ من معادلة (2-130) بان التوزيع اللاحق ما هو الا توزيع كاما بالمعلمتين

$$(\alpha = n + a, \beta = \sum_{i=1}^n (b + t_i^p))$$

فان مقدر بيز القياسي المعلوماتي لبيانات تقليدية في ظل دالة خسارة تربيعية ما هو الا توقع التوزيع اللاحق وكالاتي:

$$\hat{\theta}_{\text{INSBweibull}} = \frac{n+a}{\sum_{i=1}^n (b+t_i^p)} \quad \dots (2-131)$$

4- مقدر بيز القياسي الضبابي الحصين المعلوماتي لتوزيع ويبيل:

(Informative Suggested Robust Fuzzy Standard Bayesian Estimator for Exponential Distribution) (INRFSBweibull)

لنفرض انه لدينا اوقات فشل t_1, t_2, \dots, t_n إذ أن $t \in \mathbf{T}$ لها توزيع ويبيل بالمعلمتين (θ) و (p) فان المجموعة الضبابية عند القطع α $\tilde{A}_\alpha = \{\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \dots, \tilde{t}_n\}$, إذ أن $\tilde{t} \in \tilde{\mathbf{T}}$, $\tilde{t} = \{[0, \infty), \mu_{\tilde{t}}(t)\}$, لها توزيع ويبيل ضبابي بدالة الكثافة الاحتمالية الضبابية الآتية:

$$\tilde{f}(\tilde{t}_{A(\alpha)}, \theta, p) = p\theta \tilde{t}_{A(\alpha)}^{p-1} e^{-\theta \tilde{t}_{A(\alpha)}^p} ; t, p, \theta > 0 \quad \dots (2-132)$$

ولنفرض ان هنالك معلومات سابقة عن المعلمة المراد تقديرها θ والمتمثلة بدالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع كما بالمعلمات الزائدية a, b والتي تكون بالشكل الآتي:

$$\pi(\theta) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \theta^{a-1} e^{-b\theta} \quad \dots (2-133)$$

وبموجب طريقة بيز الضبابية الحصينة المقترحة فإن لكل معلمة مقدرة لكل مشاهدة من المشاهدات الضبابية سيكون هنالك توزيع احتمالي سابق للمعلمة المراد تقديرها فيكون التوزيع السابق لكل معلمة كالاتي:

$$\pi(\theta_i) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \theta_i^{a-1} e^{-b\theta_i} \quad \dots (2-134)$$

وعليه فإن دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة للمتغيرين $\tilde{t}_{A(\alpha)}, \theta_i$ هي:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(\tilde{t}_{A(\alpha)_i}, \theta_i) &= \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \frac{b^a}{\Gamma(a)} \theta_i^{a-1} e^{-b\theta_i} p \theta_i \tilde{t}_{A(\alpha)_i}^{p-1} e^{-\theta_i \tilde{t}_{A(\alpha)_i}^p} \\ &= \left(\frac{pb^a}{\Gamma(a)} \right)^{\tilde{n}} \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \tilde{t}_{A(\alpha)_i}^{p-1} \theta_i^a e^{-\theta_i (b + \tilde{t}_{A(\alpha)_i}^p)} \quad \dots (2-135) \end{aligned}$$

ومن معادلة (2-135) نجد الدالة الحدية للمتغير $\tilde{t}_{A^{(\alpha)}_i}$ وكما يأتي:

$$\begin{aligned} M(\tilde{t}_{A^{(\alpha)}_i}) &= \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\frac{pb^a}{\Gamma(a)} \right)^{\tilde{n}} \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \tilde{t}_{A^{(\alpha)}_i}^{p-1} \theta_i^a e^{-\theta_i(b+\tilde{t}_{A^{(\alpha)}_i}^p)} dp d\theta_i \\ &= \left(\frac{pb^a}{\Gamma(a)} \right)^{\tilde{n}} \left[\int_0^\infty \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \tilde{t}_{A^{(\alpha)}_i}^{p-1} dp \right] \int_0^\infty \theta_1^a e^{-\theta_1(b+\tilde{t}_{A^{(\alpha)}_1}^p)} d\theta_1 \int_0^\infty \theta_2^a e^{-\theta_2(b+\tilde{t}_{A^{(\alpha)}_2}^p)} d\theta_2 \dots \int_0^\infty \theta_{\tilde{n}}^a e^{-\theta_{\tilde{n}}(b+\tilde{t}_{A^{(\alpha)}_{\tilde{n}}}^p)} d\theta_{\tilde{n}} \\ &= \left(\frac{pb^a}{\Gamma(a)} \right)^{\tilde{n}} \left[\int_0^\infty \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \tilde{t}_{A^{(\alpha)}_i}^{p-1} dp \right] \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \int_0^\infty \theta_i^a e^{-\theta_i(b+\tilde{t}_{A^{(\alpha)}_i}^p)} d\theta_i \end{aligned}$$

$$\text{let } u = \theta_i (b + \tilde{t}_{A^{(\alpha)}_i}^p) \Rightarrow \theta_i = \frac{u}{(b + \tilde{t}_{A^{(\alpha)}_i}^p)}$$

$$\Rightarrow d\theta_i = \frac{1}{(b + \tilde{t}_{A^{(\alpha)}_i}^p)} du$$

$$\begin{aligned} \therefore M(\tilde{t}_{A^{(\alpha)}_i}) &= \left(\frac{pb^a}{\Gamma(a)} \right)^{\tilde{n}} \left[\int_0^\infty \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \tilde{t}_{A^{(\alpha)}_i}^{p-1} dp \right] \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \int_0^\infty \left(\frac{u}{(b + \tilde{t}_{A^{(\alpha)}_i}^p)} \right)^a e^{-u} \frac{1}{(b + \tilde{t}_{A^{(\alpha)}_i}^p)} du \\ &= \left(\frac{pb^a}{\Gamma(a)} \right)^{\tilde{n}} \left(\frac{u}{(b + \tilde{t}_{A^{(\alpha)}_i}^p)} \right)^{\tilde{n}(a+1)} \left[\int_0^\infty \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \tilde{t}_{A^{(\alpha)}_i}^{p-1} dp \right] \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \int_0^\infty u^a e^{-u} du \\ &= \left(\frac{pb^a}{\Gamma(a)} \right)^{\tilde{n}} \left(\frac{1}{(b + \tilde{t}_{A^{(\alpha)}_i}^p)} \right)^{\tilde{n}(a+1)} (\Gamma(a+1))^{\tilde{n}} \left[\int_0^\infty \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \tilde{t}_{A^{(\alpha)}_i}^{p-1} dp \right] \\ &= \left(\frac{pb^a \Gamma(a+1)}{\Gamma(a)} \right)^{\tilde{n}} \left(\frac{1}{(b + \tilde{t}_{A^{(\alpha)}_i}^p)} \right)^{\tilde{n}(a+1)} \left[e^{(p-1) \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \ln(\tilde{t}_{A^{(\alpha)}_i})} \right] \dots (2-136) \end{aligned}$$

وعليه فان التوزيع اللاحق الشرطي الضبابي يكون كما يأتي:

$$h(\theta_i / \tilde{t}_{A^{(\alpha)}_i}) = \frac{G(\tilde{t}_{A^{(\alpha)}_i}, \lambda_i)}{M(\tilde{t}_{A^{(\alpha)}_i})}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\left(\frac{pb^a}{\Gamma(a)}\right)^{\tilde{n}} \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \tilde{t}_{A(\alpha)_i}^{p-1} \theta_i^a e^{-\theta_i \left(b + \tilde{t}_{A(\alpha)_i}^p\right)}}{\left(\frac{pb^a \Gamma(a+1)}{\Gamma(a)}\right)^{\tilde{n}} \left(\frac{1}{\left(b + \tilde{t}_{A(\alpha)_i}^p\right)}\right)^{\tilde{n}(a+1)} \left[e^{(p-1) \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \ln\left(\tilde{t}_{A(\alpha)_i}\right)} \right]} \\
 &= \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \frac{\left(b + \tilde{t}_{A(\alpha)_i}^p\right)^{a+1}}{\Gamma(a+1)} \theta_i^{(a+1)-1} e^{-\theta_i \left(b + \tilde{t}_{A(\alpha)_i}^p\right)} \quad \dots (2-137)
 \end{aligned}$$

نلاحظ ان التوزيع اللاحق ما هو الا مضروب توزيع كما بالمعلمتين

$$(\alpha = a + 1, \beta = b + \tilde{t}_{A(\alpha)_i}^p)$$

فإن مقدر بيز القياسي الضبابي الحصين المعلوماتي في ظل دالة خسارة تربيعية ما هو الا توقع التوزيع اللاحق الضبابي الحصين وكالاتي:

$$\hat{\theta}_{\text{INRFSBweibull}} = \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \frac{a+1}{b + \tilde{t}_{A(\alpha)_i}^p} \quad \dots (2-138)$$

أما المعلمات الزائدية (a, b) فسيتم تقديرها وفقاً لطريقة الإمكان الأعظم وكما يأتي:

$$\pi(\theta_i) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \theta_i^{a-1} e^{-b\theta_i}$$

$$L = \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \pi(\theta_i)$$

$$= \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \frac{b^a}{\Gamma(a)} \theta_i^{a-1} e^{-b\theta_i}$$

$$= \left(\frac{b^a}{\Gamma(a)}\right)^{\tilde{n}} \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \theta_i^{a-1} e^{-b\theta_i}$$

$$= \left(\frac{b^a}{\Gamma(a)}\right)^{\tilde{n}} \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \theta_i^{a-1} e^{-b \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \theta_i}$$

$$\ln(L) = \tilde{n} \ln\left(\frac{b^a}{\Gamma(a)}\right) + (a-1) \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \ln(\theta_i) - b \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \theta_i$$

$$= a\tilde{n} \ln(b) - \tilde{n} \ln(\Gamma(a)) + (a-1) \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \ln(\theta_i) - b \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \theta_i \quad \dots (2-139)$$

من معادلة (2-139) نشق مرة لا a ومرة لا b ونساوي بال صفر نحصل على :

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial \hat{a}} = \tilde{n} \ln(\hat{b}) + \frac{\tilde{n}}{\Gamma(\hat{a})} \psi(a) - \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \theta_i = 0 \quad \dots (2-140)$$

إذ أن:

$$\int_0^{\infty} \theta_i^{\hat{a}-1} e^{-\hat{a}\theta_i} \text{ تساوي دالة كاما والتي تساوي } \Gamma(\hat{a})$$

هي المشتقة الأولى لدالة كاما ويطلق عليها دالة digamma والتي صيغتها بحسب متسلسلة (Hurwitz Zeta function) كالآتي:

$$\psi(a) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(a+\tilde{n})^2} \quad \dots (2-141)$$

وعليه فإن المعادلة (2-140) تصبح كالآتي:

$$\therefore \frac{\partial \ln(L)}{\partial \hat{a}} = \tilde{n} \ln(\hat{b}) + \frac{\tilde{n}}{\Gamma(\hat{a})} \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \frac{1}{(a+\tilde{n})^2} - \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \theta_i = 0 \quad \dots (2-142)$$

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial \hat{b}} = \frac{\hat{a}\tilde{n}}{\hat{b}} - \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \theta_i = 0$$

$$\Rightarrow \hat{b} = \frac{\hat{a}\tilde{n}}{\sum_{i=1}^{\tilde{n}} \theta_i} \quad \dots (2-143)$$

من معادلة (2-142) نلاحظ أنه لا يمكن تعظيم هذه الدالة مباشرة بالنسبة المعلمة a لذلك سيتم استعمال احدى طرائق التحليل العددي.

وعليه بعد ايجاد تقديرات المعلمات الزائدية نعوضها في المعادلة (2-138) لنحصل على مقدر بيز الضبابي الحصين المعلوماتي لمعلمة توزيع ويبيل وكالآتي:

$$\hat{\theta}_{\text{NRFSBweibull}} = \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \frac{a_{mle}+1}{b_{mle}+\tilde{\tau}_{A(\alpha)}^p} \quad \dots (2-144)$$

2.2.11.3 مقدر بيز لتوزيع كوماراسوامي القياسي:

1- مقدر بيز القياسي الغير معلوماتي لتوزيع كوماراسوامي القياسي في ظل دالة خسارة تربيعية وليبيانات تقليدية

(Non-Informative Standard Bayesian Estimator for Kumaraswamy Distribution) (NSBKumar)

لنفرض انه لدينا اوقات فشل t_1, t_2, \dots, t_n إذ أن $t \in T$ لها توزيع كوماراسوامي القياسي بالمعلمتين (θ) و (β) فان دالة الكثافة الإحتمالية التقليدية هي:

$$f(t, \theta, \beta) = \theta \beta t_i^{\beta-1} [1 - t^\beta]^{\theta-1} \quad ; \quad 0 < t < 1, \theta, \beta > 0 \quad \dots (2-145)$$

فإن دالة الامكان لتوزيع كوماراسوامي يمكن أن تكتب كالاتي:

$$\begin{aligned} L_{Kum} &= \prod_{i=1}^n f(t_i, \theta, \beta) \\ &= \prod_{i=1}^n \theta \beta t_i^{\beta-1} [1 - t_i^\beta]^{\theta-1} \\ &= \theta^n \beta^n \prod_{i=1}^n t_i^{\beta-1} \prod_{i=1}^n [1 - t_i^\beta]^{\theta-1} \quad \dots (2-146) \end{aligned}$$

وحسب قاعدة جفري (Jeffery role) فإن التوزيع السابق للمعلمة المراد تقديرها θ بعد أن β ثابت يكون كالاتي:

$$\pi(\theta) \propto \sqrt{I(\theta)}$$

$$\pi(\theta) = \text{Constant} \sqrt{I(\theta)}$$

$$= K \sqrt{I(\theta)}$$

$$I(\theta) = -\tilde{n} E \left[\frac{\partial^2 \ln f(t, \theta, \beta)}{\partial \theta^2} \right]$$

$$f(t) = \ln(\theta) + \ln(\beta) + (\beta - 1) \ln(t_i) + (\theta - 1) \ln(1 - t_i^\beta)$$

$$\therefore f(t) \propto \theta e^{-\theta T}$$

$$T = \frac{1}{(1 - t_i^\beta)} \quad \text{إذ أن}$$

$$Ln f(t) = \ln(\theta) - \theta T \quad \dots (2-147)$$

$$\frac{\partial Ln f(t)}{\partial \theta} = \frac{1}{\theta} - T$$

$$\frac{\partial^2 Ln f(t)}{\partial \theta^2} = -\frac{1}{\theta^2}$$

$$E \left[\frac{\partial^2 Ln f(t)}{\partial \theta^2} \right] = E \left[-\frac{1}{\theta^2} \right] = -E \left[\frac{1}{\theta^2} \right]$$

$$\begin{aligned} E \left(\frac{1}{\theta^2} \right) &= \int_0^1 \frac{1}{\theta^2} \theta \beta t_i^{\beta-1} [1 - t_i^\beta]^{\theta-1} dt \\ &= \frac{\beta}{\theta} \int_0^\infty t_i^{\beta-1} [1 - t_i^\beta]^{\theta-1} dt \end{aligned}$$

$$\text{Let } u = t_i^\beta \Rightarrow t_i = u^{\frac{1}{\beta}} \Rightarrow dt_i = \frac{1}{\beta} u^{\frac{1}{\beta}-1} du$$

$$\begin{aligned} \therefore E \left(\frac{1}{\theta^2} \right) &= \frac{\beta}{\theta} \int_0^\infty \left(u^{\frac{1}{\beta}} \right)^{\beta-1} [1 - u]^{\theta-1} \frac{1}{\beta} u^{\frac{1}{\beta}-1} du \\ &= \frac{1}{\theta} \int_0^\infty e^{-u} du \\ &= \frac{1}{\theta} \Gamma(1) = \frac{1}{\theta} \end{aligned}$$

$$\therefore I(\theta) = -nE \left[\frac{\partial^2 Ln f(t)}{\partial \theta^2} \right] = \frac{n}{\theta}$$

ولذلك فإن التوزيع السابق للمعلمة θ يكون كالآتي:

$$\begin{aligned} \pi(\theta) &= K \sqrt{I(\theta)} \\ &= K \sqrt{\frac{n}{\theta}} \quad \dots (2-148) \end{aligned}$$

وعليه فإن دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة للمتغيرين t, θ بعد أن p ثابت هي:

$$G(t_i, \lambda) = \pi(\theta) \prod_{i=1}^n f(t_i)$$

$$= K\sqrt{n}\theta^{n-\frac{1}{2}}e^{-\theta\sum_{i=1}^n T_i} \quad \dots (2-149)$$

ومن معادلة (2-149) نجد الدالة الحدية للمتغير t_i وكما يأتي:

$$M(t_i) = \left[\int_0^\infty K\sqrt{n}\theta^{n-\frac{1}{2}}e^{-\theta\sum_{i=1}^n T_i} d\theta \right]$$

$$= K\sqrt{n} \left[\int_0^\infty \theta^{n-\frac{1}{2}}e^{-\theta\sum_{i=1}^n T_i} d\theta \right]$$

$$\text{Let } u = \theta \sum_{i=1}^n T_i \Rightarrow \theta = \frac{u}{\sum_{i=1}^n T_i} \Rightarrow d\theta = \frac{1}{\sum_{i=1}^n T_i} du$$

$$\therefore M(t_i) = K\sqrt{n} \left[\int_0^\infty \left(\frac{u}{\sum_{i=1}^n T_i} \right)^{n-\frac{1}{2}} e^{-u} \frac{1}{\sum_{i=1}^n T_i} du \right]$$

$$= K\sqrt{n} \sum_{i=1}^n T_i^{-(n+\frac{1}{2})} \Gamma(n + \frac{1}{2}) \quad \dots (2-150)$$

وعليه فان التوزيع اللاحق الشرطي يكون كما يأتي:

$$h(\theta/t_i) = \frac{G(t_i, \theta)}{M(t_i)}$$

$$= \frac{K\sqrt{n}\theta^{n-\frac{1}{2}}e^{-\theta\sum_{i=1}^n T_i}}{K\sqrt{n} \sum_{i=1}^n T_i^{-(n+\frac{1}{2})} \Gamma(n+\frac{1}{2})}$$

$$= \frac{(\sum_{i=1}^n T_i)^{n+\frac{1}{2}}}{\Gamma(n+\frac{1}{2})} \theta^{(n+\frac{1}{2})-1} e^{-\theta\sum_{i=1}^n T_i} \quad \dots (2-151)$$

ونلاحظ من معادلة (2-151) بان التوزيع اللاحق للمعلمة θ ما هو الا توزيع كاما بالمعلمتين

$$(\alpha = n + \frac{1}{2}, \beta = \sum_{i=1}^n T_i)$$

فان مقدر بيز القياسي غير المعلوماتي في ظل دالة خسارة تربيعية ما هو الا توقع التوزيع اللاحق للمعلمة المراد تقديرها وكالاتي:

$$\hat{\theta}_{NSBKumar} = \frac{n+\frac{1}{2}}{\sum_{i=1}^n T_i} \quad \dots (2-152)$$

2- مقدر بيز القياسي الضبابي الحصين غير المعلوماتي لتوزيع كوماراسوامي القياسي:

(Non-Informative Robust Fuzzy Standard Bayesian Estimator for Kumaraswamy Distribution) (NRFSBKumar)

لنفرض انه لدينا اوقات فشل t_1, t_2, \dots, t_n إذ أن $t \in T$ لها توزيع كوماراسوامي القياسي بالمعلمتين (θ, β) فان المجموعة الضبابية عند القطع α $\tilde{A}_\alpha = \{\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \dots, \tilde{t}_n\}$, إذ أن $\tilde{t} \in \tilde{T}$, $\tilde{t} = \{[0, \infty), \mu_{\tilde{t}}(t)\}$ لها توزيع كوماراسوامي قياسي ضبابي بدالة الكثافة الاحتمالية الضبابية الآتية:

$$\tilde{f}(\tilde{t}_{A(\alpha)}, \theta, \beta) = \theta \beta \tilde{t}_{A(\alpha)}^{\beta-1} [1 - \tilde{t}_{A(\alpha)}^\beta]^{\theta-1} ; 0 < t < 1 , \theta, \beta > 0 \dots (2-153)$$

وبحسب قاعدة جفري فإن التوزيع السابق للمعلمة المراد تقديرها θ إذ سيتم عد المعلمة β ثابتة يكون كالاتي:

$$\pi(\theta) \propto \sqrt{I(\theta)}$$

$$\pi(\theta) = \text{Constant} \sqrt{I(\theta)}$$

$$= K \sqrt{I(\theta)}$$

$$I(\theta) = -nE \left[\frac{\partial^2 \text{Ln} \tilde{f}(\tilde{t}_{A(\alpha)})}{\partial \theta^2} \right]$$

$$\tilde{f}(\tilde{t}_{A(\alpha)}) = \ln(\theta) + \ln(\beta) + (\beta - 1) \ln(\tilde{t}_{A(\alpha)_i}) + (\theta - 1) \ln(1 - \tilde{t}_{A(\alpha)_i}^\beta)$$

$$\therefore \tilde{f}(\tilde{t}_{A(\alpha)}) \propto \theta e^{-\theta T}$$

$$T = \frac{1}{(1 - \tilde{t}_{A(\alpha)_i}^\beta)} : \text{إذ أن}$$

$$\text{Ln} \tilde{f}(\tilde{t}_{A(\alpha)}) = \ln(\theta) - \theta T \dots (2-154)$$

$$\frac{\partial \text{Ln} \tilde{f}(\tilde{t}_{A(\alpha)})}{\partial \theta} = \frac{1}{\theta} - T$$

$$\frac{\partial^2 \text{Ln} \tilde{f}(\tilde{t}_{A(\alpha)})}{\partial \theta^2} = -\frac{1}{\theta^2}$$

$$E \left[\frac{\partial^2 \text{Ln} \tilde{f}(\tilde{t}_{A(\alpha)})}{\partial \theta^2} \right] = E \left[-\frac{1}{\theta^2} \right] = -E \left[\frac{1}{\theta^2} \right]$$

$$\therefore I(\theta) = -\tilde{n} E \left[\frac{\partial^2 \text{Ln} \tilde{f}(\tilde{t}_{A(\alpha)})}{\partial \theta^2} \right] = \frac{\tilde{n}}{\theta}$$

ولذلك فان التوزيع السابق للمعلمة θ يكون كالآتي:

$$\begin{aligned} \pi(\theta) &= K \sqrt{I(\theta)} \\ &= K \sqrt{\frac{\tilde{n}}{\theta}} \end{aligned} \quad \dots (2-155)$$

وبحسب طريقة بيز الضبابية الحصينة المقترحة فان التوزيع السابق لكل معلمة مقدره من كل مشاهدة من مشاهدات العينة الضبابية سيكون كالآتي:

$$\pi(\theta_i) = K \sqrt{\frac{\tilde{n}}{\theta_i}} \quad \dots (2-156)$$

وعليه فان دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة للمتغيرين $\tilde{t}_{A(\alpha)}, \theta_i$ هي:

$$\begin{aligned} G(\tilde{t}_{A(\alpha)_i}, \theta_i) &= \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \pi(\theta_i) \tilde{f}(\tilde{t}_{A(\alpha)_i}) \\ &= \prod_{i=1}^{\tilde{n}} K \sqrt{\frac{\tilde{n}}{\theta_i}} \theta_i e^{-\theta_i T} \\ &= (K \sqrt{\tilde{n}})^{\tilde{n}} \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \theta_i^{\frac{1}{2}} e^{-\theta_i T} \end{aligned} \quad \dots (2-157)$$

ومن معادلة (2-157) نجد الدالة الحدية للمتغير $\tilde{t}_{A(\alpha)_i}$ وكما يأتي:

$$\begin{aligned} M(\tilde{t}_{A(\alpha)_i}) &= (K \sqrt{\tilde{n}})^{\tilde{n}} \int_0^{\infty} \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \theta_i^{\frac{1}{2}} e^{-\theta_i T} d\theta_i \\ &= (K \sqrt{\tilde{n}})^{\tilde{n}} \int_0^{\infty} \left[\theta_1^{\frac{1}{2}} e^{-\theta_1 T} \theta_2^{\frac{1}{2}} e^{-\theta_2 T} \dots \theta_{\tilde{n}}^{\frac{1}{2}} e^{-\theta_{\tilde{n}} T} \right] \theta_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (K\sqrt{\tilde{n}})^{\tilde{n}} \int_0^{\infty} \theta_1^{\frac{1}{2}} e^{-\theta_1 T} \theta_1 \int_0^{\infty} \theta_2^{\frac{1}{2}} e^{-\theta_2 T} \theta_2 \dots \int_0^{\infty} \theta_{\tilde{n}}^{\frac{1}{2}} e^{-\theta_{\tilde{n}} T} \theta_{\tilde{n}} \\
 &= (K\sqrt{\tilde{n}})^{\tilde{n}} \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \int_0^{\infty} \theta_i^{\frac{1}{2}} e^{-\theta_i T_i} d\theta_i
 \end{aligned}$$

$$\text{Let } u = \theta_i T_i \Rightarrow \theta_i = \frac{u}{T_i} \Rightarrow d\theta_i = \frac{du}{T_i}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore M(\tilde{t}_{A(\alpha)_i}) &= (K\sqrt{\tilde{n}})^{\tilde{n}} \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \int_0^{\infty} \left(\frac{u}{T_i}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-u} \frac{1}{\sum_{i=1}^{\tilde{n}} T_i} du \\
 &= (K\sqrt{\tilde{n}})^{\tilde{n}} \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \left(\frac{1}{T_i}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} u^{\frac{1}{2}} e^{-u} du \\
 &= (K\sqrt{\tilde{n}})^{\tilde{n}} \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \left(\frac{1}{T_i}\right)^{\frac{3}{2}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \dots (2-158)
 \end{aligned}$$

وعليه فان التوزيع اللاحق الشرطي الضبابي يكون كما يأتي:

$$\begin{aligned}
 h(\theta/\tilde{t}_{A(\alpha)_i}) &= \frac{G(\tilde{t}_{A(\alpha)_i}, \theta)}{M(\tilde{t}_{A(\alpha)_i})} \\
 &= \frac{(K\sqrt{\tilde{n}})^{\tilde{n}} \prod_{i=0}^{\tilde{n}} \theta_i^{\frac{1}{2}} e^{-\theta T_i}}{(K\sqrt{\tilde{n}})^{\tilde{n}} \prod_{i=0}^{\tilde{n}} \left(\frac{1}{T_i}\right)^{\frac{3}{2}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \\
 &= \frac{\prod_{i=1}^{\tilde{n}} \theta_i^{\frac{1}{2}} e^{-\theta T_i}}{\prod_{i=1}^{\tilde{n}} \left(\frac{1}{T_i}\right)^{\frac{3}{2}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \\
 &= \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \frac{\theta_i^{\frac{1}{2}} e^{-\theta T_i}}{\left(\frac{1}{T_i}\right)^{\frac{3}{2}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \\
 &= \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \frac{T_i^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \theta_i^{\frac{3}{2}-1} e^{-\theta T_i} \dots (2-159)
 \end{aligned}$$

ونلاحظ من معادلة (2-159) أن التوزيع اللاحق للمعلمة θ ما هو الا مضروب توزيع كما بالمعلمتين $(\alpha = \frac{3}{2}, \beta = T_i)$

فان مقدر بيز القياسي غير المعلوماتي في ظل دالة خسارة تربيعية ما هو الا توقع التوزيع اللاحق للمعلمة المراد تقديرها وكالاتي:

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_{\text{NRFSBKumar}} &= \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \frac{3}{2T_i} \\ &= \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \frac{3}{2 \left(\frac{1}{(1 - \tilde{t}_{A(\alpha)_i}^\beta)} \right)} \\ &= \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \frac{3(1 - \tilde{t}_{A(\alpha)_i}^\beta)}{2} \quad \dots (2-160)\end{aligned}$$

3- مقدر بيز القياسي المعلوماتي لتوزيع كوماراسوامي القياسي لبيانات تقليدية :

(Informative Standard Bayesian Estimator for Kumaswamyar Distribution) (INSBKumar)

لنفرض انه لدينا اوقات فشل t_1, t_2, \dots, t_n إذ أن $t \in T$ لها توزيع كوماراسوامي القياسي بالمعلمتين (θ) و (β) فان دالة الكثافة الإحتمالية التقليدية هي:

$$f(t, \theta, \beta) = \theta \beta t^{\beta-1} [1 - t^\beta]^{\theta-1} \quad ; \quad 0 < t < 1, \theta, \beta > 0 \quad \dots (2-161)$$

$$f(t) = \ln(\theta) + \ln(\beta) + (\beta - 1)\ln(t_i) + (\theta - 1)\ln(1 - t^\beta)$$

$$\therefore f(t) \propto \theta e^{-\theta T} \quad \dots (2-162)$$

$$T = \frac{1}{(1 - t^\beta)}$$

فان دالة الامكان لتوزيع كوماراسوامي القياسي يمكن أن تكتب كالاتي:

$$\begin{aligned}L_{Kum} &= \prod_{i=1}^n f(t) \\ &= \prod_{i=1}^n t_i^{\beta-1} \prod_{i=1}^n [1 - t_i^\beta]^{\theta-1} \\ &= \theta^n \beta^n \prod_{i=1}^n t_i^{\beta-1} \prod_{i=1}^n [1 - t_i^\beta]^{\theta-1}\end{aligned}$$

$$= \theta^n e^{-\theta \sum_{i=1}^n T_i} \quad \dots (2-163)$$

ولنفرض ان هنالك معلومات سابقة عن المعلمة المراد تقديرها θ علماً ان β ثابت والمتمثلة بدالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع كاما بالمعلمات الزائدية a, b والتي تكون بالشكل الآتي:

$$\pi(\theta) = \frac{1}{b^a \Gamma(a)} \theta^{a-1} e^{-\frac{\theta}{b}} \quad \dots (2-164)$$

وعليه فان دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة للمتغيرين θ, t_i هي:

$$\begin{aligned} G(t_i, \theta) &= \frac{1}{b^a \Gamma(a)} \theta^{a-1} e^{-\frac{\theta}{b}} \theta^n e^{-\theta \sum_{i=0}^n T_i} \\ &= \frac{1}{b^a \Gamma(a)} \theta^{n+a-1} e^{-\theta \left(\frac{1}{b} + \sum_{i=0}^n T_i \right)} \quad \dots (2-165) \end{aligned}$$

ومن معادلة (2-166) نجد الدالة الحدية للمتغير t_i وكما يأتي:

$$\begin{aligned} M(t_i) &= \int_0^{\infty} \frac{1}{b^a \Gamma(a)} \theta^{n+a-1} e^{-\theta \left(\frac{1}{b} + \sum_{i=1}^n T_i \right)} d\theta \\ &= \frac{1}{b^a \Gamma(a)} \int_0^{\infty} \theta^{n+a-1} e^{-\theta \left(\frac{1}{b} + \sum_{i=1}^n T_i \right)} d\theta \quad \dots (2-167) \end{aligned}$$

$$\text{Let } u = \theta \left(\frac{1}{b} + \sum_{i=0}^n T_i \right) \Rightarrow \theta = \frac{u}{\frac{1}{b} + \sum_{i=1}^n T_i} \Rightarrow d\theta = \frac{1}{\frac{1}{b} + \sum_{i=1}^n T_i} du$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{b^a \Gamma(a)} \int_0^{\infty} \left(\frac{u}{\frac{1}{b} + \sum_{i=1}^n T_i} \right)^{n+a-1} e^{-u} \frac{1}{\frac{1}{b} + \sum_{i=1}^n T_i} du \\ &= \frac{\left(\frac{1}{\frac{1}{b} + \sum_{i=1}^n T_i} \right)^{n+a-1+1}}{b^a \Gamma(a)} \int_0^{\infty} u^{n+a-1} e^{-u} du \\ &= \frac{\left(\frac{1}{\frac{1}{b} + \sum_{i=1}^n T_i} \right)^{n+a}}{b^a \Gamma(a)} \Gamma(n+a) \quad \dots (2-168) \end{aligned}$$

وعليه فان التوزيع اللاحق الشرطي يكون كما يأتي:

$$h(\theta/t_i) = \frac{G(t_i, \theta)}{M(t_i)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\frac{1}{b^a \Gamma(a)} \theta^{n+a-1} e^{-\theta \left(\frac{1}{b} + \sum_{i=1}^n T_i \right)}}{\left(\frac{\frac{1}{b} + \sum_{i=1}^n T_i}{b^a \Gamma(a)} \right)^{n+a} \Gamma(n+a)} \\
 &= \frac{\left(\frac{1}{b} + \sum_{i=1}^n T_i \right)^{n+a}}{\Gamma(n+a)} \theta^{n+a-1} e^{-\theta \left(\frac{1}{b} + \sum_{i=1}^n T_i \right)} \quad \dots (2-169)
 \end{aligned}$$

نلاحظ من معادلة (2-169) ان التوزيع اللاحق ما هو الا توزيع كاما بالمعلمتين

$$(\alpha = n + a, \beta = \frac{1}{b} + \sum_{i=1}^n T_i)$$

فان مقدر بيز القياسي المعلوماتي لبيانات تقليدية في ظل دالة خسارة تربيعية ما هو الا توقع التوزيع اللاحق وكالاتي:

$$\hat{\theta}_{\text{INSBKumar}} = \frac{n+a}{\left(\frac{1}{b} + \sum_{i=1}^n T_i \right)} \quad \dots (2-170)$$

4- مقدر بيز القياسي الضبابي الحصين المعلوماتي لتوزيع كوماراسوامي:

(Informative Robust Fuzzy Standard Bayesian Estimator for Kumaraswamy Distribution) (INRFSBKumar)

لنفرض انه لدينا اوقات فشل t_1, t_2, \dots, t_n إذ أن $t \in \mathbf{T}$ لها توزيع كوماراسوامي بالمعلمتين (θ) و (β) فان المجموعة الضبابية عند القطع α $\tilde{t} = \tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \dots, \tilde{t}_n$ إذ أن $\tilde{t} \in \tilde{\mathbf{T}}$ ، $\tilde{A}_\alpha = \{\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \dots, \tilde{t}_n\}$ لها توزيع كوماراسوامي الضبابي بدالة الكثافة الاحتمالية الضبابية الآتية:

$$\tilde{f}(\tilde{t}_{A(\alpha)}) = \theta \beta \tilde{t}_{A(\alpha)}^{\beta-1} [1 - \tilde{t}_{A(\alpha)}^\beta]^{\theta-1} ; 0 < t < 1 , \theta, \beta > 0 \dots (2-171)$$

$$f(t) = \ln(\theta) + \ln(\beta) + (\beta - 1) \ln(\tilde{t}_{A(\alpha)}) + (\theta - 1) \ln(1 - \tilde{t}_{A(\alpha)}^\beta)$$

$$\therefore f(t) \propto \theta e^{-\theta T}$$

$$T = \frac{1}{\left(1 - \tilde{t}_{A(\alpha)_i}^\beta \right)}$$

ولنفرض ان هنالك معلومات سابقة عن المعلمة المراد تقديرها θ علماً أن β ثابت والمتمثلة بدالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع كاما بالمعلمات الزائدية a, b والتي تكون بالشكل الآتي:

$$\pi(\theta) = \frac{1}{b^a \Gamma(a)} \theta^{a-1} e^{-\frac{\theta}{b}} \quad \dots (2-172)$$

وعليه فإن دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة للمتغيرين $\theta, \tilde{t}_{A(\alpha)}$ هي:

$$\begin{aligned} G(\tilde{t}_{A(\alpha)_i}, \theta) &= \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \frac{1}{b^a \Gamma(a)} \theta_i^{a-1} e^{-\frac{\theta_i}{b}} \theta_i^n e^{-\theta_i \mathbf{T}_i} \\ &= \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \frac{1}{b^a \Gamma(a)} \theta_i^{\tilde{n}+a-1} e^{-\theta_i (\frac{1}{b} + \mathbf{T}_i)} \quad \dots (2-173) \end{aligned}$$

ومن معادلة (2-174) نجد الدالة الحدية للمتغير t_i وكما يأتي:

$$\begin{aligned} M(\tilde{t}_{A(\alpha)_i}) &= \int_0^\infty \left(\frac{1}{b^a \Gamma(a)} \right)^{\tilde{n}} \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \theta_i^{\tilde{n}+a-1} e^{-\theta_i (\frac{1}{b} + \mathbf{T}_i)} d\theta_i \\ &= \left(\frac{1}{b^a \Gamma(a)} \right)^{\tilde{n}} \int_0^\infty \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \theta_i^{\tilde{n}+a-1} e^{-\theta_i (\frac{1}{b} + \mathbf{T}_i)} d\theta_i \\ &= \left(\frac{1}{b^a \Gamma(a)} \right)^{\tilde{n}} \int_0^\infty \left[\theta_1^{\tilde{n}+a-1} e^{-\theta_1 (\frac{1}{b} + \mathbf{T}_1)} d\theta_1 \theta_2^{\tilde{n}+a-1} e^{-\theta_2 (\frac{1}{b} + \mathbf{T}_2)} d\theta_2 \dots \theta_{\tilde{n}}^{\tilde{n}+a-1} e^{-\theta_{\tilde{n}} (\frac{1}{b} + \mathbf{T}_{\tilde{n}})} d\theta_{\tilde{n}} \right] \\ &= \left(\frac{1}{b^a \Gamma(a)} \right)^{\tilde{n}} \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \int_0^\infty \theta_i^{\tilde{n}+a-1} e^{-\theta_i (\frac{1}{b} + \mathbf{T}_i)} d\theta_i \end{aligned}$$

$$\text{Let } u = \theta_i \left(\frac{1}{b} + \mathbf{T}_i \right) \Rightarrow \theta_i = \frac{u}{\frac{1}{b} + \mathbf{T}_i} \Rightarrow d\theta_i = \frac{1}{\frac{1}{b} + \mathbf{T}_i} du$$

$$\begin{aligned} \therefore M(\tilde{t}_{A(\alpha)_i}) &= \left(\frac{1}{b^a \Gamma(a)} \right)^{\tilde{n}} \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \int_0^\infty \left(\frac{u}{\frac{1}{b} + \mathbf{T}_i} \right)^{\tilde{n}+a-1} e^{-u} \frac{1}{\frac{1}{b} + \mathbf{T}_i} du \\ &= \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \frac{1}{b^a \Gamma(a)} \left(\frac{1}{\frac{1}{b} + \mathbf{T}_i} \right)^{\tilde{n}+a} \int_0^\infty u^{\tilde{n}+a-1} e^{-u} du \end{aligned}$$

$$= \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \frac{1}{b^a \Gamma(a)} \left(\frac{1}{\frac{1}{b} + T_i} \right)^{\tilde{n}+a} \Gamma(\tilde{n} + a) \quad \dots (2-175)$$

وعليه فان التوزيع اللاحق الشرطي يكون كما يأتي:

$$\begin{aligned} h\left(\theta / \tilde{t}_{A^{(\alpha)}_i}\right) &= \frac{G(\tilde{t}_{A^{(\alpha)}_i}, \theta)}{M(\tilde{t}_{A^{(\alpha)}_i})} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^{\tilde{n}} \frac{1}{b^a \Gamma(a)} \theta_i^{\tilde{n}+a-1} e^{-\theta_i \left(\frac{1}{b} + T_i\right)}}{\prod_{i=1}^{\tilde{n}} \frac{1}{b^a \Gamma(a)} \left(\frac{1}{\frac{1}{b} + T_i}\right)^{\tilde{n}+a} \Gamma(\tilde{n}+a)} \\ &= \prod_{i=0}^{\tilde{n}} \frac{\frac{1}{b^a \Gamma(a)} \theta_i^{\tilde{n}+a-1} e^{-\theta_i \left(\frac{1}{b} + T_i\right)}}{\frac{1}{b^a \Gamma(a)} \left(\frac{1}{\frac{1}{b} + T_i}\right)^{\tilde{n}+a} \Gamma(\tilde{n}+a)} \\ &= \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \frac{\left(\frac{1}{b} + T_i\right)^{\tilde{n}+a}}{\Gamma(\tilde{n}+a)} \theta_i^{\tilde{n}+a-1} e^{-\theta_i \left(\frac{1}{b} + T_i\right)} \quad \dots (2-176) \end{aligned}$$

نلاحظ من معادلة (2-176) ان التوزيع اللاحق ما هو الا مضروب توزيع كما بالمعلمتين
 $(\alpha = n + a, \beta = \left(\frac{1}{b} + T_i\right))$

فان مقدر بيز القياسي الضبابي الحصين المعلوماتي في ظل دالة خسارة تربيعية ما هو الا توقع التوزيع اللاحق وكالاتي:

$$\hat{\theta}_{\text{INRFSBKumar}} = \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \frac{\tilde{n}+a}{\left(\frac{1}{b} + T_i\right)} \quad \dots (2-177)$$

أما المعلمات الزائدية (a, b) فسيتم تقديرها وفقاً لطريقة الإمكان الأعظم وكما يأتي:

$$\begin{aligned} \pi(\theta_i) &= \frac{1}{\Gamma(a) b^a} \theta_i^{a-1} e^{-\frac{\theta_i}{b}} \\ L &= \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \pi(\theta_i) \\ &= \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \frac{1}{\Gamma(a) b^a} \theta_i^{a-1} e^{-\frac{\theta_i}{b}} \\ &= \left(\frac{1}{\Gamma(a) b^a} \right)^{\tilde{n}} \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \theta_i^{a-1} e^{-\frac{\theta_i}{b}} \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{1}{\Gamma(a)b^a} \right)^{\tilde{n}} \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \theta_i^{a-1} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{\tilde{n}} \theta_i}{b}}$$

$$\ln(L) = \tilde{n} \ln \left(\frac{1}{\Gamma(a)b^a} \right) + (a-1) \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \ln(\theta_i) - \frac{\sum_{i=1}^{\tilde{n}} \theta_i}{b}$$

$$= -a\tilde{n} \ln(b) - \tilde{n} \ln(\Gamma(a)) + (a-1) \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \ln(\theta_i) - \frac{\sum_{i=1}^{\tilde{n}} \theta_i}{b} \quad \dots (2-178)$$

من معادلة (2-178) نشق مرة لا a ومرة لا b ونساوي بالصفر نحصل على :

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial \hat{a}} = -\tilde{n} \ln(\hat{b}) - \frac{\tilde{n}}{\Gamma(\hat{a})} \psi(a) + \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \ln(\theta_i) = 0 \quad \dots (2-179)$$

إذ أن :

$$\int_0^{\infty} \theta_i^{\hat{a}-1} e^{-\hat{a}\theta_i} \text{ تساوي كما والتي تساوي } \Gamma(\hat{a})$$

$\psi(a) = \Gamma'(\hat{a})$ هي المشتقة الأولى لدالة كما ويطلق عليها دالة digamma والتي صيغتها بحسب متسلسلة (Hurwitz Zeta function) كالآتي:

$$\psi(a) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(a+i)^2} \quad \dots (2-180)$$

وعليه فإن المعادلة (2-55) تصبح كالآتي:

$$\therefore \frac{\partial \ln(L)}{\partial \hat{a}} = -\tilde{n} \ln(\hat{b}) - \frac{\tilde{n}}{\Gamma(\hat{a})} \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \frac{1}{(a+i)^2} + \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \ln(\theta_i) = 0 \quad \dots (2-181)$$

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial \hat{b}} = -\frac{\hat{a}\tilde{n}}{\hat{b}} + \frac{\sum_{i=1}^{\tilde{n}} \theta_i}{\hat{b}^2} = 0$$

$$= \frac{-\hat{a}\tilde{n} + \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \theta_i}{\hat{b}^2} = 0$$

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{\tilde{n}} \theta_i}{\hat{a}\tilde{n}} \quad \dots (2-182)$$

من معادلة (2-181) نلاحظ أنه لا يمكن تعظيم هذه الدالة مباشرة بالنسبة للمعلمة b لذا سيتم استعمال احدى طرائق التحليل العددي.

وعليه بعد ايجاد تقديرات المعلمات الزائدية نعوضها في المعادلة (2-177) لنحصل على مقدر بيز الضبابي الحصين المعلوماتي لمعلمة توزيع كوماراسوامي الضبابي الحصين المقترح وكالآتي:

$$\hat{\theta}_{\text{INRFSBKumar}} = \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \frac{\tilde{n} + a_{mle}}{\left(\frac{1}{b_{mle}} + T_i \right)} \quad \dots (2-183)$$

الفصل الثالث

الجانب التجريبي

3.1 تمهيد: (Preface)

أدى التطور الكبير في الحاسبات ووجود برامج محاكاة على درجة عالية من المرونة من استعمال المحاكاة في حل المشاكل العلمية الأمر الذي سهل إختبار الطرائق الرياضية بالاعتماد على مفهوم " دع البيانات تتكلم عن نفسها " وهو محاكاة للطرائق المقترحة والجديدة لاستقصاء صحة ودقة وكفاية تلك الطرائق عن طريق محاكاتها بالإستناد الى البيانات الخاصة بالحالة المدروسة.

في هذا الفصل تم اعتماد أسلوب المحاكاة مونت-كارلو (Monte-Carlo Simulation) لغرض مقارنة مقدرات بيز . اذ شمل هذا الفصل على المفهوم العام للمحاكاة وكذلك وصف لتجربة المحاكاة الخاصة بالإطروحة من حيث قيم المعلمات الإفتراضية للتوزيعات وقيم معاملات القطع وطريقة توليد بيانات التوزيعات المدروسة وتلوين البيانات , وكذلك عرض نتائج تجربة المحاكاة التي تم الحصول عليها وكذلك وصف للخوارزمية التي تم بناؤها من لدن الباحث.

3.2 مفهوم المحاكاة: (Simulation Concept)

تعد المحاكاة سيناريو لتشبيه أو تقليد أي نظام في العالم الحقيقي محاولة لاعادة عملية معينة في ظروف إصطناعية مشابهة للظروف الطبيعية , ومنها بناء إنموذج أصغر حجماً يكون نسخة مطابقة للإنموذج الحقيقي وتنفيذ الاختبارات على الإنموذج المصغر ودراسة نتائجه واعمامها على الإنموذج الأصلي , أو محاكاة حاسوبية عن طريق كتابة برنامج للطرق المراد اختبارها ضمن ظروف برمجية مشابهة للواقع ومن ثم ينظر الى النتائج التي يتم الحصول عليها من البرنامج والاستنتاج على أساسها.

تعد محاكاة الكمبيوتر من الإجراءات المهمة في عملية محاكاة النماذج الرياضية والاحتمالية , فهي محاولة لنمذجة واقع الحياه أو الوضع الإفتراضي على الكمبيوتر بحيث يمكن دراستها لمعرفة كيفية عمل النظام او كيفية سلوك الظاهرة عن طريق تغيير المتغيرات في المحاكاة. واصبحت المحاكاة الحاسوبية جزءاً مفيداً في نمذجة العديد من الظواهر الطبيعية مثل الفيزياء والكيمياء والبيولوجيا والنظم البشرية في الرياضيات والاحصاء والاقتصاد والعلوم الاجتماعية وكذلك في الهندسة للحصول على نظرة ثاقبة في كيفية سلوك تلك الظواهر.

هنالك سمة مشتركة في المحاكاة بين جميع الباحثين وهي محاولة توليد عينة من السيناريوهات التمثيلية للإنموذج والتي يكون فيها التعداد الكامل لجميع الحالات الممكنة باهضاً او مستحيلاً . وهناك عدة طرائق حاسوبية لتشغيل ونمذجة المحاكاة القائمة على الحاسوب والتي من اهمها واكثرها

رواجاً هي محاكاة مونت كارلو (Monte Carlo Simulation) والتي تعتمد على تكوين عينة عشوائية للظاهرة لتائم التوزيع الاحتمالي الذي تسلكه تلك الظاهرة.

في الاحصاء تستعمل المحاكاة لتقييم أداء طريقة ما عندما لا نعرف سابقاً بان تلك الطريقة فعّالة في تأدية ما مطلوب منها .

(Silva& et al., 2010, 429-430)

3.3 وصف تجارب المحاكاة: (Describe of simulation experiments)

إذ اعتمد أسلوب المحاكاة مونت-كارلو (Monte-Carlo Simulation) لغرض مقارنة مقدرات بيز لبيانات تقليدية ومقدرات بيز الضبابية الحصينة المقترحة لثلاث توزيعات احتمالية للفشل وهي التوزيع الأسّي (Exponential distribution)، توزيع ويبل (Weibull distribution)، وتوزيع كوماراسوامي القياسي (Standard Kumaraswamy distribution) لنوعين من التوزيعات الأولية وهي توزيع أولي غير معلوماتي (Non-Informative Prior) وفقاً لقاعدة جفري (Jeffery's rule) وتوزيع معلوماتي (Informative Prior) عند دالة خسارة تربيعية (Squared error loss function)،

ولغرض اختبار طرائق التقدير الضبابية البيزية الحصينة المقترحة تم اجراء الخطوات الآتية:

1. إختيار القيم الافتراضية لمعلمات كل توزيع وكالاتي:

تم الحصول على القيم الافتراضية تجريبياً من إجراء تجارب عدة واختيار القيم إستقرت تقديرات بيز عندها وأعطت افضل النتائج بحيث ان رسم دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع تكون متزايدة برتابة (Monotonic increasing) عند الواحد وكما يأتي:

• اختيار القيم الافتراضية لمعلمة التوزيع الأسّي (Exponential distribution): تم

اختيار خمسة قيم إفتراضية لمعلمة التوزيع الأسّي (λ) وكما مبين في جدول (3-1)

جدول (3-1) القيم الإفتراضية لمعلمة التوزيع الأسّي

Parameter	1	2	3	4	5
λ	1	1.5	4	5	8

- إختيار القيم الافتراضية لمعاملات توزيع ويبيل (Weibull distribution): تم اختيار خمسة قيم إفتراضية لمعاملات توزيع ويبيل (p, θ) وكما مبين في جدول (3-2)

جدول (3-2) القيم الافتراضية لمعاملات توزيع ويبيل

Parameter	1	2	3	4	5
p	2	2.5	4	5	3.5
θ	3	2	3	2	2.5

- إختيار القيم الإفتراضية لمعاملات توزيع كوماراسوامي القياسي (Standard Kumaraswamy distribution): تم إختيار خمسة قيم إفتراضية لمعاملات توزيع كوماراسوامي القياسي (θ, β) وكما مبين في جدول (3-3)

جدول (3-3) القيم الإفتراضية لمعاملات توزيع كوماراسوامي القياسي

Parameter	1	2	3	4	5
θ	3	1	4	1	5
β	3	2	1	5	2.5

2. توليد البيانات (Data generation) :

تم في هذه الخطوة توليد بيانات تقليدية (Traditional data) تتبع التوزيعات متمثلة بالمتجه t من كل توزيع وفقاً للخطوات الآتية:

- توليد متغير يتبع توزيعاً منتظماً $u \sim U(0, 1)$

- توليد بيانات تتبع التوزيع الأسّي بتطبيق طريقة التحويل المعكوس وحسب الصيغة الآتية:

$$t_i = -\frac{\ln(1-u)}{\lambda} \quad \dots (3-1)$$

- توليد بيانات تتبع توزيع ويبيل بتطبيق طريقة التحويل المعكوس وحسب الصيغة الآتية:

$$t_i = \left(-\frac{\ln(1-u)}{\theta} \right)^{\left(\frac{1}{p}\right)} \quad \dots (3-2)$$

• توليد بيانات تتبع توزيع كوماراسوامي القياسي بتطبيق طريقة التحويل المعكوس وحسب الصيغة الآتية:

$$t_i = \left(1 - (1 - u)^{\frac{1}{\beta}} \right)^{\frac{1}{\theta}} \quad \dots (3-3)$$

3. تلويث البيانات (Data Contaminate) :

تم تلويث متجه البيانات التقليدي بقيم ملوثة بإيجاد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لمتجه العينة التقليدي وإضافة القيم الشاذة له بموجب المعادلة الآتية:

$$t_Outlier = mean(t: i) + 3(SD: i) \quad \dots (3-4)$$

إذ أن $i = 1, 2, \dots, n$

(الباحث)

4. تضبيب البيانات (Data Fuzziness) :

يتم تحويل متجه العينة التقليدي $t_Outlier = (t_1, t_2, \dots, t_n)'$ من كل توزيع الى الضبابية وذلك بإيجاد درجة الانتماء المقابلة لكل مشاهدة من مشاهدات متجه العينة التقليدي الملوث باستعمال دالة إنتماء مثلثية وكما يأتي:

$$\mu_A(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t < a \\ \frac{t-a}{b-a} & \text{if } a \leq t \leq b \\ 1 & \text{if } t > b \end{cases} \quad \dots (3-5)$$

إذ أن **a** تمثل اقل قيمة من قيم مشاهدات العينة التقليدي و **b** تمثل اكبر قيمة من قيم مشاهدات متجه العينة التقليدي والذي ينتج لدينا متجه عينة ضبابي $\tilde{t} = \tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \dots, \tilde{t}_n$ يتضمن كل مشاهدة ودرجة انتماءها المقابلة أي :

$$\tilde{t}_i = \{(t_i, \mu_A(t_1)), (t_2, \mu_A(t_2)), \dots, (t_n, \mu_A(t_n))\} \quad \dots (3-6)$$

بعد ذلك يتم الحصول على المجموعة الضبابية عند القطع $\tilde{A}_\alpha = \{\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \dots, \tilde{t}_n\}$ α ولكل توزيع مدروس بإختيار العناصر في المجموعة الضبابية التي لها درجة انتماء اكبر او تساوي القطع α أي أن:

$$\tilde{A}_\alpha = \{\tilde{t} \in T; \mu_{\tilde{A}}(t) \geq \alpha\} \quad \dots (3-7)$$

5. إختيار قيم معاملات القطع: (α -cut)

لغرض اختبار الطريقة المقترحة تم اختيار عدة معاملات للقطع وكالاتي:

$$\alpha - \text{cut} = 0.2, 0.4, 0.5, 0.7, 0.9$$

والسبب في اختيار معاملات القطع هذه الحصول على مختلف انواع العينات الضبابية عند كل مستوى قطع وبالتالي اختبار تأثير احجام العينات الضبابية الى دقة التقدير.
وستكون خطوات خوارزمية تضبيب البيانات كالاتي:

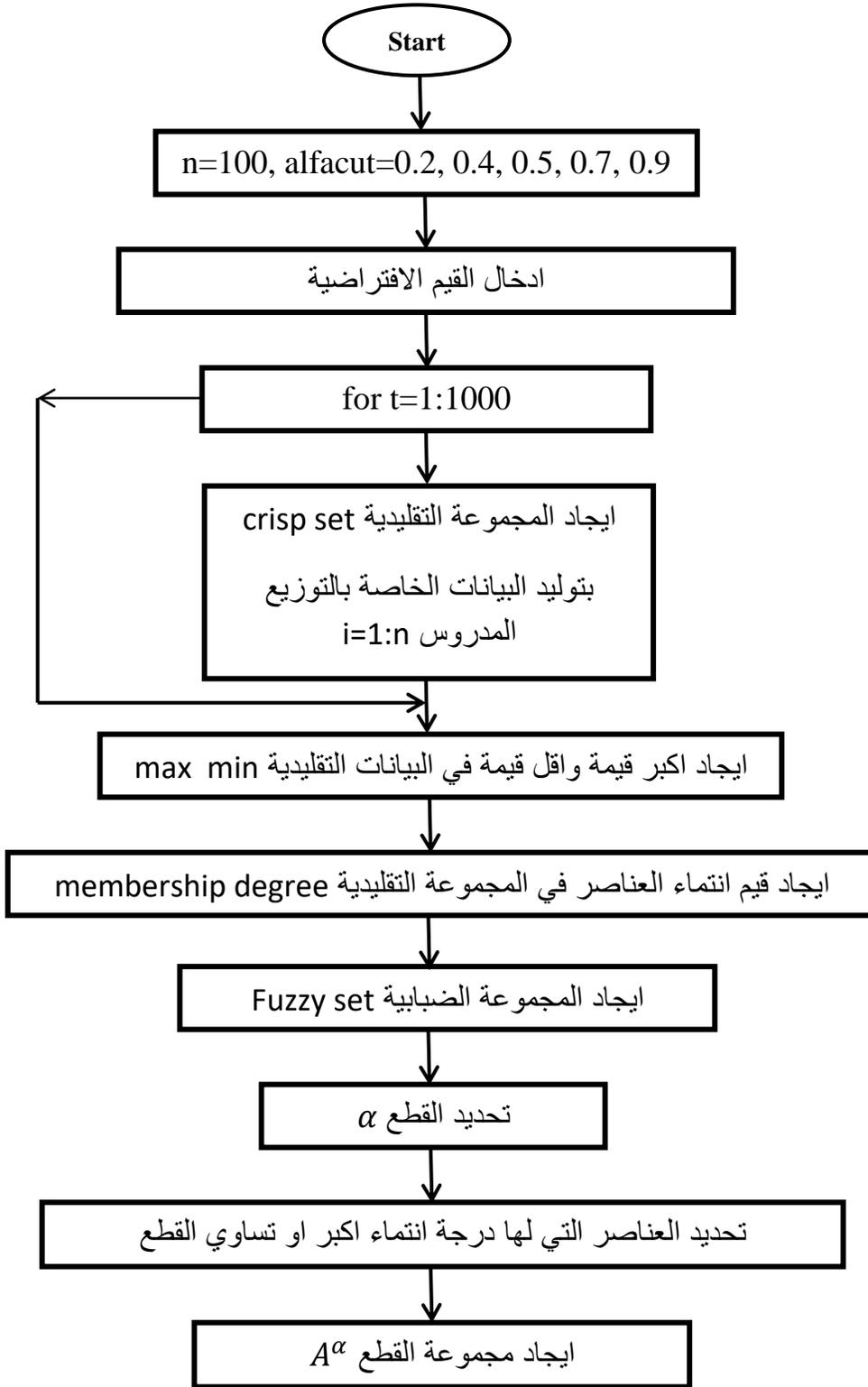
1. ايجاد المجموعة التقليدية x والذي يتولد من دالة التوزيع التراكمية للتوزيع المدروس اذ تم توليد عينة عشوائية بحجم (100) مفردة لكل توزيع وبالتالي يكون تحديد احجام العينات الضبابية بموجب حجم القطع لكل مجموعة فقد يمكن ان تكون المجموعة الضبابية بحجم 15 مفردة او 25 مفردة او 50 مفردة ... حسب حجم القطع ودرجات الانتماء.
2. تحديد اكبر قيمة واعلى قيمة في المتجه x باستعمال الدالتين \max, \min
3. ايجاد متجه قيم الانتماء لكل عنصر في x باستعمال احدى دوال الانتماء ونسميه DM
4. ايجاد المجموعة الضبابية والتي هي عبارة عن مصفوفة مؤلفة من عمودين و n من الصفوف باستعمال الايعاز :

```
fs =sort([x DM'] );
```

5. تحديد قيمة القطع α

6. تحديد العناصر التي لها درجة انتماء اكبر او تساوي القطع المحدد باستعمال الايعاز :
ww=fs(:,1) & fs(:,2)>=alfacut;
7. ايجاد مجموعة القطع باستعمال الايعاز :
ALPHASET=fs(ww) ;
8. ايجاد حجم مجموعة القطع (\tilde{n}) باستعمال الايعاز :
fn =numel(ALPHASET) ;

والشكل (3-1) يمثل خطوات خوارزمية تضبيب البيانات



شكل (3-1) خوارزمية تضبيب البيانات

(الباحث)

6. مقارنة طرائق التقدير: تم مقارنة طرائق التقدير باستعمال معيار متوسط مربعات الخطأ
:(Mean Square error)

$$MSE(\theta) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K (\hat{\theta} - \theta)^2 \quad \dots (3-8)$$

تمثل **K** عدد التكرارات (**Replication**) لكل تجربة . اذ ان كل تجربة كررت (1000) مرة للحصول على تجانس اكبر بالنتائج.

وقد تم الحصول على نتائج المحاكاة باستعمال برنامج (**Matlab 2015**) وعرضت جميع النتائج في جداول خاصة سنبينها لاحقاً.

3.4 تحليل نتائج المحاكاة: (Analysis of Simulation Result)

لغرض محاكاة طرائق التقدير المقترحة تم اعتماد أسلوب المحاكاة مونت-كارلو (**Monte-Carlo Simulation**) لغرض مقارنة مقدرات بيز لبيانات تقليدية ومقدرات بيز الضبابية الحصينة المقترحة لثلاث توزيعات احتمالية للفشل وهي التوزيع الأسي (**Exponential distribution**)، توزيع ويبل (**Weibull distribution**)، وتوزيع كوماراسوامي القياسي (**Standard Kumaraswamy distribution**) لنوعين من التوزيعات الأولية وهي توزيع أولي غير معلوماتي (**Non-Informative Prior**) وفقاً لقاعدة جفري (**Jeffery's rule**) وتوزيع معلوماتي (**Informative Prior**) عند دالة خسارة تربيعية (**Squared error loss function**) وكانت نتائج تجارب المحاكاة كما يأتي:

أولاً: عند إحتواء البيانات على قيمة شاذة واحدة:

جدول (3-3) تقدير المعلمات ومتوسط مربعات الخطا MSE عند الطرائق البيزية التقليدية والمقترحة عند معاملات القطع $\alpha - \text{cut} = 0.2, 0.4, 0.5, 0.7, 0.9$ وعند القيمة الإفتراضية لمعلمة التوزيع الأسّي $\lambda = 1$ ومعلمات توزيع ويبل $\theta = 3, p = 2$ ومعلمات توزيع كوماراسوامي القياسي $\theta = 3, \beta = 3$ لملوثة واحدة

Distribution		Exponential		Weibull		Kumaraswamy		Best
cut	Method	Estimation	MSE	Estimation	MSE	Estimation	MSE	
0.2	NSB	1.65962	0.16740	3.57319	0.67841	3.47762	0.45691	NRFES
	NRFES	1.33242	0.12127	3.3481	0.41057	3.36742	0.33891	
	INSB	1.42765	0.12325	3.45521	0.43111	3.32523	0.28145	INRFSB
	INRFSB	1.33245	0.11254	3.57319	0.67841	3.31462	0.21134	
0.4	NSB	1.52244	0.14246	3.44562	0.57412	3.38733	0.34685	NRFES
	NRFES	1.26246	0.11784	3.31134	0.31342	3.33478	0.23497	
	INSB	1.31733	0.11384	3.23871	0.23134	3.13453	0.18953	INRFSB
	INRFSB	1.21257	0.10241	3.20367	0.14578	3.11353	0.11452	
0.5	NSB	1.32574	0.12238	3.26852	0.37918	3.21985	0.22357	NRFES
	NRFES	1.22257	0.11238	3.23122	0.24478	3.21789	0.20753	
	INSB	1.29734	0.10215	3.20642	0.22246	3.11833	0.12374	INRFSB
	INRFSB	1.11455	0.10184	3.11354	0.03453	3.10443	0.04649	
0.7	NSB	1.22772	0.11531	3.23215	0.27956	3.21985	0.22357	NRFES
	NRFES	1.21356	0.11085	3.21135	0.21445	3.21789	0.20753	
	INSB	1.19565	0.10114	3.18684	0.12457	3.11833	0.12374	INRFSB

	INRFSB	1.12134	0.07772	3.11107	0.02421	3.10443	0.04649	
0.9	NSB	1.22156	0.09531	3.14573	0.11945	3.22019	0.13777	NRFES
	NRFES	1.22111	0.01457	3.12341	0.11432	3.11363	0.11064	
	INSB	1.13635	0.08464	3.12214	0.01241	3.10074	0.02346	INRFSB
	INRFSB	1.11176	0.06369	3.11135	0.00213	3.10016	0.01094	

جدول (3-4) تقدير المعلمات ومتوسط مربعات الخطا MSE عند الطرائق البيزية التقليدية والمقترحة عند معاملات القطع $\alpha - \text{cut} = 0.2, 0.4, 0.5, 0.7, 0.9$ وعند القيمة الإفتراضية لمعلمة التوزيع الأسّي $\lambda = 1.5$ ومعلمات توزيع وبيبل $\theta = 2, p = 2.5$ ومعلمات توزيع كوماراسوامي القياسي $\theta = 1, \beta = 2$ لملوثة واحدة

Distribution		Exponential		Weibull		Kumaraswamy		Best
cut	Method	Estimation	MSE	Estimation	MSE	Estimation	MSE	
0.2	NSB	1.89321	0.67363	2.74957	0.89432	1.64224	0.90382	NRFES
	NRFES	1.72195	0.21723	2.53563	0.32155	1.45911	0.75332	
	INSB	1.67826	0.34987	2.64268	0.66496	1.45362	0.54637	INRFSB
	INRFSB	1.54975	0.09251	2.58447	0.32974	1.33137	0.21441	
0.4	NSB	1.73166	0.44597	2.56493	0.64837	1.55121	0.87443	NRFES
	NRFES	1.63966	0.11580	2.44244	0.22876	1.34268	0.57693	
	INSB	1.53841	0.23965	2.59479	0.59643	1.31624	0.33262	INRFSB
	INRFSB	1.52245	0.08913	2.53454	0.11472	1.21011	0.13133	
0.5	NSB	1.71135	0.41244	2.55536	0.61732	1.5324	0.77443	NRFES
	NRFES	1.61246	0.10577	2.41282	0.28734	1.32157	0.44783	
	INSB	1.53135	0.21568	2.55443	0.51542	1.28535	0.22375	INRFSB

	INRFSB	1.52215	0.08824	2.53111	0.11321	1.20053	0.12324	
0.7	NSB	1.61238	0.23248	2.53267	0.531566	1.2379	0.33495	NRFES
	NRFES	1.52145	0.04351	2.51461	0.11247	1.22146	0.21663	
	INSB	1.51131	0.02477	2.52167	0.33497	1.18943	0.21157	INRFSB
	INRFSB	1.51905	0.08561	2.51161	0.10447	1.15674	0.06321	
0.9	NSB	1.5672	0.07833	2.53189	0.43361	1.22136	0.21086	NRFES
	NRFES	1.51214	0.03113	2.51222	0.10221	1.21072	0.11011	
	INSB	1.51115	0.01254	2.51161	0.22437	1.16359	0.12497	INRFSB
	INRFSB	1.51031	0.07461	2.51002	0.10121	1.12903	0.02198	

جدول (3-5) تقدير المعلمات ومتوسط مربعات الخطأ MSE عند الطرائق البيزية التقليدية والمقترحة عند معاملات القطع $\alpha - \text{cut} = 0.2, 0.4, 0.5, 0.7, 0.9$ وعند القيمة الافتراضية لمعلمة التوزيع الأسّي $\lambda = 4$ ومعلمات توزيع ويبل $\theta = 3, p = 4$ ومعلمات توزيع كوماراسوامي القياسي $\theta = 4, \beta = 1$ لملوثة واحدة

Distribution		Exponential		Weibull		Kumaraswamy		Best
cut	Method	Estimation	MSE	Estimation	MSE	Estimation	MSE	
0.2	NSB	4.52195	0.53155	3.63833	0.13552	4.73566	0.67332	NRFES
	NRFES	4.34215	0.33253	3.45263	0.07844	4.56383	0.53273	
	INSB	4.37364	0.21453	3.61345	0.12358	4.67347	0.43885	INRFSB
	INRFSB	4.31093	0.12585	3.54522	0.02145	4.47523	0.23644	
0.4	NSB	4.32555	0.23465	3.54221	0.12486	4.56485	0.44537	NRFES
	NRFES	4.22143	0.13668	3.34767	0.05684	4.35268	0.34733	
	INSB	4.28334	0.12785	3.43244	0.10954	4.43335	0.23585	INRFSB

	INRFSB	4.25463	0.11454	3.31425	0.00198	4.31235	0.13563	
0.5	NSB	4.321354	0.21142	3.532145	0.12241	4.52145	0.43533	NRFES
	NRFES	4.21433	0.12645	3.31723	0.05122	4.31338	0.31135	
	INSB	4.25311	0.11883	3.41221	0.10234	4.41333	0.23182	INRFSB
	INRFSB	4.23451	0.11213	3.31221	0.00111	4.31210	0.11472	
0.7	NSB	4.23167	0.11127	3.31474	0.11466	4.34895	0.34288	NRFES
	NRFES	4.13583	0.11232	3.23414	0.04385	4.24563	0.24763	
	INSB	4.22325	0.11326	3.21466	0.09819	4.23895	0.12990	INRFSB
	INRFSB	4.21353	0.10853	3.12454	0.00452	4.22367	0.11086	
0.9	NSB	4.22125	0.10754	3.21453	0.08988	4.21044	0.11344	NRFES
	NRFES	4.12355	0.10753	3.1082	0.00813	4.13552	0.13744	
	INSB	4.11126	0.07542	3.11082	0.00981	4.11356	0.07654	INRFSB
	INRFSB	4.10533	0.00568	3.11002	0.00109	4.10754	0.00692	

جدول (3-6) تقدير المعلمات ومتوسط مربعات الخطأ MSE عند الطرائق البيزية التقليدية والمقترحة عند معاملات القطع $\alpha - \text{cut} = 0.2, 0.4, 0.5, 0.7, 0.9$ وعند القيمة الافتراضية لمعلمة التوزيع الأسّي $\lambda = 5$ ومعلمات توزيع ويبل $\theta = 2, p = 5$ ومعلمات توزيع كوماراسوامي القياسي $\theta = 1, \beta = 5$ لملوثة واحدة

Distribution		Exponential		Weibull		Kumaraswamy		Best
cut	Method	Estimation	MSE	Estimation	MSE	Estimation	MSE	
0.2	NSB	5.56833	0.44568	2.76211	0.24773	1.54532	0.21066	NRFES
	NRFES	5.34279	0.21954	2.43252	0.09568	1.34943	0.21395	
	INSB	5.43266	0.12673	2.53635	0.21574	1.45355	0.19039	INRFSB

	INRFSB	5.12458	0.08991	2.34803	0.04894	1.32583	0.11367	
0.4	NSB	5.43801	0.23964	2.66396	0.21347	1.30938	0.11902	NRFES
	NRFES	5.21152	0.11584	2.31893	0.06709	1.22153	0.13744	
	INSB	5.39011	0.12672	2.33611	0.11352	1.24556	0.06966	INRFSB
	INRFSB	5.15643	0.07918	2.2246	0.03392	1.13663	0.04903	
0.5	NSB	5.42145	0.23442	2.65478	0.21262	1.30127	0.11328	NRFES
	NRFES	5.21222	0.11281	2.31238	0.06348	1.21474	0.13264	
	INSB	5.33021	0.12374	2.32352	0.11033	1.23532	0.05957	INRFSB
	INRFSB	5.15636	0.07923	2.22134	0.03114	1.13634	0.04345	
0.7	NSB	5.30919	0.19011	2.45773	0.11381	1.29018	0.08983	NRFES
	NRFES	5.169029	0.01981	2.12682	0.04901	1.19303	0.04097	
	INSB	5.22091	0.11991	2.23436	0.10355	1.21364	0.06878	INRFSB
	INRFSB	5.11107	0.04567	2.16841	0.02111	1.11365	0.02988	
0.9	NSB	5.21463	0.11142	2.2183	0.11054	1.24786	0.06934	NRFES
	NRFES	5.11246	0.01217	2.11352	0.03902	1.13346	0.03033	
	INSB	5.22091	0.11981	2.20911	0.08911	1.2197	0.05231	INRFSB
	INRFSB	5.10193	0.02396	2.12021	0.01021	1.1075	0.01937	

جدول (3-7) تقدير المعلمات ومتوسط مربعات الخطأ MSE عند الطرائق البيزية التقليدية والمقترحة عند معاملات القطع $\alpha - \text{cut} = 0.2, 0.4, 0.5, 0.7, 0.9$ وعند القيمة الإفتراضية لمعلمة التوزيع الأسي $\lambda = 8$ ومعلمات توزيع وبيبل $\theta = 2.5, p = 3.5$ ومعلمات توزيع كوماراسوامي القياسي $\theta = 5, \beta = 2.5$ لملوثة واحدة

Distribution		Exponential		Weibull		Kumaraswamy		Best
cut	Method	Estimation	MSE	Estimation	MSE	Estimation	MSE	
0.2	NSB	8.87355	0.69911	3.44673	1.24663	5.78933	3.32965	NRFES
	NRFES	8.45703	0.32987	2.873343	0.57944	5.47594	2.21695	
	INSB	8.67848	0.43668	3.12954	1.12855	5.45965	1.43954	INRFSB
	INRFSB	8.32455	0.07983	2.65633	0.33113	5.34267	0.89054	
0.4	NSB	8.66744	0.44869	3.10444	1.07944	5.57422	1.40653	NRFES
	NRFES	8.34266	0.23965	2.45733	0.27459	5.20910	1.16635	
	INSB	8.45755	0.34955	2.98995	0.98932	5.36855	0.64136	INRFSB
	INRFSB	8.30544	0.06891	2.53953	0.21768	5.32588	0.51955	
0.5	NSB	8.65496	0.43257	3.10218	1.03284	5.51463	0.03453	NRFES
	NRFES	8.32366	0.23228	2.65438	0.24333	5.52566	0.04844	
	INSB	8.45278	0.32953	2.84475	0.93832	5.51366	0.02574	INRFSB
	INRFSB	8.30341	0.06232	2.53321	0.11733	5.51166	0.013214	
0.7	NSB	8.48332	0.23904	2.89585	0.04274	5.51231	0.02117	NRFES
	NRFES	8.32593	0.14905	2.554321	0.13314	5.50695	0.00111	
	INSB	8.42355	0.23887	2.54422	0.14532	5.51133	0.00234	INRFSB
	INRFSB	8.22371	0.04211	2.521964	0.10243	5.50123	0.00111	

0.9	NSB	8.23965	0.11462	2.67994	0.03892	5.51114	0.00473	NRFES
	NRFES	8.22144	0.11456	2.51255	0.12178	5.50157	0.00051	
	INSB	8.23976	0.01566	2.53145	0.11334	5.51121	0.00113	INRFSB
	INRFSB	8.21244	0.00784	2.51123	0.01122	5.50110	0.00001	

ثانياً: عند احتواء البيانات على قيمتين شاذتين:

جدول (3-8) تقدير المعلمات ومتوسط مربعات الخطا MSE عند الطرائق البيزية التقليدية والمقترحة عند معاملات القطع $\alpha - \text{cut} = 0.2, 0.4, 0.5, 0.7, 0.9$ وعند القيمة الإفتراضية لمعلمة التوزيع الأسّي $\lambda = 1$ ومعلمات توزيع ويبيل $\theta = 3, p = 2$ ومعلمات توزيع كوماراسوامي القياسي $\theta = 3, \beta = 3$ لمولوثتين

Distribution		Exponential		Weibull		Kumaraswamy		Best
cut	Method	Estimation	MSE	Estimation	MSE	Estimation	MSE	
0.2	NSB	1.98662	1.55876	3.89588	1.45896	3.78333	1.67833	NRFES
	NRFES	1.31745	0.09537	3.23089	0.22357	3.21895	0.12246	
	INSB	1.56789	0.78955	3.56789	0.34794	3.55983	0.98643	INRFSB
	INRFSB	1.29754	0.06744	3.32168	0.12386	3.21643	0.07574	
0.4	NSB	1.76866	1.21667	3.47822	0.89403	3.56687	1.12755	NRFES
	NRFES	1.21675	0.07686	3.11789	0.05345	3.20622	0.02146	
	INSB	1.52783	0.66869	3.42119	0.45973	3.43885	0.58549	INRFSB
	INRFSB	1.22891	0.04458	3.11326	0.04315	3.17973	0.02114	
0.5	NSB	1.76568	1.21546	3.45612	0.84358	3.32455	0.75557	NRFES
	NRFES	1.21218	0.07346	3.11327	0.05221	3.10435	0.01134	
	INSB	1.51574	0.63459	3.41113	0.42318	3.32153	0.28437	INRFSB

	INRFSB	1.21256	0.04125	3.11129	0.04213	3.11464	0.01101	
0.7	NSB	1.54644	0.67094	3.44216	0.74324	3.22127	0.65092	NRFES
	NRFES	1.20433	0.03739	3.10546	0.04378	3.07843	0.01204	
	INSB	1.43902	0.44578	3.32256	0.32153	3.12421	0.18324	INRFSB
	INRFSB	1.1134	0.00348	3.11110	0.02155	3.10565	0.01001	
0.9	NSB	1.44289	0.43192	3.31273	0.45787	3.10965	0.56435	NRFES
	NRFES	1.1894	0.00345	3.10019	0.02157	3.01456	0.01200	
	INSB	1.41345	0.22346	3.21574	0.12137	3.10549	0.111078	INRFSB
	INRFSB	1.10128	0.00129	3.1002	0.00178	3.00454	0.00100	

جدول (9-3) تقدير المعلمات ومتوسط مربعات الخطأ MSE عند الطرائق البيزية التقليدية والمقترحة عند معاملات القطع $\alpha - \text{cut} = 0.2, 0.4, 0.5, 0.7, 0.9$ وعند القيمة الافتراضية لمعلمة التوزيع الأسّي $\lambda = 1.5$ ومعلمات توزيع وبيبل $\theta = 2, p = 2.5$ ومعلمات توزيع كوماراسوامي القياسي $\theta = 1, \beta = 2$ لمولتتين

Distribution		Exponential		Weibull		Kumaraswamy		Best
cut	Method	Estimation	MSE	Estimation	MSE	Estimation	MSE	
0.2	NSB	2.76355	2.55673	3.44533	2.56799	1.90333	2.33463	NRFES
	NRFES	1.65234	0.26854	2.89543	0.12435	1.45142	0.44577	
	INSB	1.95643	0.76855	2.99784	1.48883	1.76444	1.56997	INRFSB
	INRFSB	1.57989	0.19954	2.78533	0.12233	1.41355	0.32775	
0.4	NSB	2.13866	1.36843	2.88766	1.43965	1.56773	1.43663	NRFES
	NRFES	1.54532	0.21675	2.56633	0.01773	1.31663	0.13297	
	INSB	1.67095	0.55678	2.59788	0.86643	1.51445	1.22145	INRFSB

	INRFSB	1.54312	0.14674	2.52244	0.00756	1.20112	0.32775	
0.5	NSB	2.13342	1.31324	2.83488	1.42145	1.52713	1.41127	NRFES
	NRFES	1.52188	0.21143	2.562231	0.01623	1.31324	0.12188	
	INSB	1.63326	0.53332	2.593127	0.82155	1.51143	1.21146	INRFSB
	INRFSB	1.54217	0.13346	2.52115	0.00761	1.20110	0.31241	
0.7	NSB	1.99864	0.57844	2.77321	1.06954	1.55235	1.13632	NRFES
	NRFES	1.51433	0.09553	2.53497	0.00456	1.21111	0.07955	
	INSB	1.59644	0.32997	2.57588	0.68781	1.34566	0.15778	INRFSB
	INRFSB	1.51228	0.01255	2.51223	0.00184	1.18955	0.00567	
0.9	NSB	1.7633	0.39818	2.66532	0.96922	1.41205	0.11245	NRFES
	NRFES	1.51121	0.02221	2.51844	0.00328	1.16444	0.00654	
	INSB	1.53641	0.21911	2.54581	0.21771	1.31344	0.11564	INRFSB
	INRFSB	1.51065	0.00213	2.51064	0.00114	1.11054	0.00131	

جدول (10-3) تقدير المعلمات ومتوسط مربعات الخطأ MSE عند الطرائق البيزية التقليدية والمقترحة عند معاملات القطع $\alpha - \text{cut} = 0.2, 0.4, 0.5, 0.7, 0.9$ وعند القيمة الافتراضية لمعلمة التوزيع الأسّي $\lambda = 4$ ومعلمات توزيع ويبل $\theta = 3, p = 4$ ومعلمات توزيع كوماراسوامي القياسي $\theta = 4, \beta = 1$ لمولوثتين

Distribution		Exponential		Weibull		Kumaraswamy		Best
cut	Method	Estimation	MSE	Estimation	MSE	Estimation	MSE	
0.2	NSB	5.34922	2.45896	3.67444	1.27865	5.69775	2.78665	NRFES
	NRFES	4.56224	0.12398	3.56324	0.10937	4.64863	0.32676	
	INSB	4.89866	1.89888	3.63575	1.12475	4.76855	1.94695	INRFSB

	INRFSB	4.45542	0.05855	3.45266	0.05466	4.52454	0.23178	
0.4	NSB	4.67444	1.34907	3.56744	1.11553	4.89655	1.43588	NRFES
	NRFES	4.52189	0.09864	3.32197	0.07977	4.53357	0.21976	
	INSB	4.56974	0.78443	3.53222	1.11104	4.65555	0.99678	INRFSB
	INRFSB	4.52465	0.04976	3.210755	0.03455	4.32091	0.09891	
0.5	NSB	4.64574	1.21008	3.34211	0.32975	4.83179	1.37955	NRFES
	NRFES	4.51097	0.06678	3.214452	0.04537	4.51865	0.21328	
	INSB	4.53400	0.55996	3.25775	0.21566	4.61743	0.93774	INRFSB
	INRFSB	4.51954	0.03290	3.15075	0.01943	4.32022	0.09213	
0.7	NSB	4.47964	0.82189	3.2673	0.14645	4.47884	0.45745	NRFES
	NRFES	4.51006	0.03446	3.14668	0.02186	4.21344	0.11444	
	INSB	4.52065	0.40093	3.21076	0.11363	4.41378	0.56477	INRFSB
	INRFSB	4.51043	0.02210	3.11345	0.01784	4.21664	0.04533	
0.9	NSB	4.31255	0.67554	3.21646	0.11355	4.312	0.12454	NRFES
	NRFES	4.51001	0.03211	3.12190	0.01896	4.202233	0.00541	
	INSB	4.51674	0.32076	3.20346	0.11153	4.37744	0.32796	INRFSB
	INRFSB	4.51011	0.02111	3.10274	0.00135	4.10065	0.00033	

جدول (3-11) تقدير المعلمات ومتوسط مربعات الخطأ MSE عند الطرائق البيزية التقليدية والمقترحة عند معاملات القطع $\alpha - \text{cut} = 0.2, 0.4, 0.5, 0.7, 0.9$ وعند القيمة الإفتراضية لمعلمة التوزيع الأسي $\lambda = 5$ ومعلمات توزيع ويبيل $\theta = 2, p = 5$ ومعلمات توزيع كوماراسوامي القياسي $\theta = 1, \beta = 5$ لمولتتين

Distribution		Exponential		Weibull		Kumaraswamy		Best
cut	Method	Estimation	MSE	Estimation	MSE	Estimation	MSE	
0.2	NSB	7.56733	3.44575	3.78655	3.57577	1.97866	2.89664	NRFES
	NRFES	5.84633	0.18568	2.33632	0.08965	1.36341	0.12353	
	INSB	6.55643	3.11453	2.45764	0.146643	1.65744	1.24555	INRFSB
	INRFSB	5.54554	0.11446	2.23255	0.00434	1.27567	0.10654	
0.4	NSB	6.44574	2.44362	2.87898	1.34556	1.56466	1.06663	NRFES
	NRFES	5.34444	0.07947	2.21355	0.06756	1.31077	0.90656	
	INSB	5.98277	1.21895	2.67766	0.78788	1.47575	0.65744	INRFSB
	INRFSB	5.32553	0.05363	2.20865	0.04565	1.21464	0.21111	
0.5	NSB	5.42111	2.21766	2.83245	1.34178	1.514366	1.03221	NRFES
	NRFES	5.217855	0.08966	2.21175	0.05674	1.31011	0.90132	
	INSB	5.56444	1.11224	2.63434	0.75466	1.41262	0.63257	INRFSB
	INRFSB	5.215555	0.03355	2.20567	0.04786	1.21134	0.21036	
0.7	NSB	5.12455	0.05478	2.20689	0.03467	1.21795	0.14674	NRFES
	NRFES	5.43255	0.43666	2.45777	0.21688	1.34332	0.02145	
	INSB	5.11685	0.02366	2.12434	0.03457	1.13553	0.06844	INRFSB
	INRFSB	5.34677	0.80775	2.35755	0.75466	1.32145	0.01636	

0.9	NSB	5.11564	0.00467	2.10897	0.02108	1.20654	0.11134	NRFES
	NRFES	5.39755	0.24315	2.32134	0.11678	1.31784	0.01433	
	INSB	5.23535	0.09785	2.20986	0.56765	1.29038	0.01134	INRFSB
	INRFSB	5.11058	0.00023	2.11467	0.00456	1.11068	0.00456	

جدول (12-3) تقدير المعلمات ومتوسط مربعات الخطا MSE عند الطرائق البيزية التقليدية والمقترحة عند معاملات القطع $\alpha - cut = 0.2, 0.4, 0.5, 0.7, 0.9$ وعند القيمة الإفتراضية لمعلمة التوزيع الأسّي $\lambda = 8$ ومعلمات توزيع وبيبل $\theta = 2.5, p = 3.5$ ومعلمات توزيع كوماراسوامي القياسي $\theta = 5, \beta = 2.5$ لملوثتين

Distribution		Exponential		Weibull		Kumaraswamy		Best
cut	Method	Estimation	MSE	Estimation	MSE	Estimation	MSE	
0.2	NSB	10.1253	2.78442	4.33433	3.66553	6.82944	4.78661	NRFES
	NRFES	8.64333	0.06786	2.75775	0.32333	5.63223	1.11454	
	INSB	9.34769	1.32422	3.04754	2.10555	5.89646	2.65443	INRFSB
	INRFSB	8.51464	0.056477	2.65746	0.22145	5.54225	0.69654	
0.4	NSB	9.46464	1.89544	2.99894	1.32445	5.9964	2.67436	NRFES
	NRFES	8.44436	0.05243	2.62133	0.21786	5.54243	0.33422	
	INSB	8.9866	0.56755	2.78654	1.33222	5.74633	1.33342	INRFSB
	INRFSB	8.32577	0.02892	2.59756	0.11866	5.32453	0.14788	
0.5	NSB	9.43334	1.83464	2.91133	1.31233	5.56333	2.32960	NRFES
	NRFES	8.41433	0.05114	2.62021	0.21114	5.44353	0.219075	
	INSB	8.9833	0.51353	2.78217	1.33113	5.51347	0.21990	INRFSB
	INRFSB	8.32155	0.02115	2.59126	0.11572	5.21675	0.11452	

0.7	NSB	8.56433	0.34666	2.56355	0.09865	5.43532	1.11242	NRFES
	NRFES	8.23177	0.02533	2.513533	0.05343	5.21453	0.05875	
	INSB	8.33453	0.22112	2.543644	0.06665	5.32111	0.11466	INRFSB
	INRFSB	8.1124	0.00795	2.51906	0.04561	5.113562	0.00353	
0.9	NSB	8.3343	0.12574	2.53522	0.06744	5.33264	0.21655	NRFES
	NRFES	8.113345	0.00675	2.51007	0.00452	5.20901	0.04365	
	INSB	8.2145	0.11113	2.51145	0.03453	5.20910	0.01335	INRFSB
	INRFSB	8.1107	0.00324	2.51001	0.04111	5.104755	0.00124	

ثالثاً: عند احتواء البيانات على ثلاثة قيم شاذة:

جدول (13-3) تقدير المعلمات ومتوسط مربعات الخطأ MSE عند الطرائق البيزية التقليدية والمقترحة عند معاملات القطع $\alpha - \text{cut} = 0.2, 0.4, 0.5, 0.7, 0.9$ وعند القيمة الإفتراضية لمعلمة التوزيع الأسي $\lambda = 1$ ومعلمات توزيع ويبيل $\theta = 3, p = 2$ ومعلمات توزيع كوماراسوامي القياسي $\theta = 3, \beta = 3$ لثلاث ملوثات

Distribution		Exponential		Weibull		Kumaraswamy		Best
cut	Method	Estimation	MSE	Estimation	MSE	Estimation	MSE	
0.2	NSB	5.6466	4.48655	5.56447	2.39783	5.43665	3.45755	NRFES
	NRFES	1.32444	0.00434	3.41322	0.08988	3.34443	0.08378	
	INSB	4.89544	3.98666	3.90656	1.89555	4.65855	2.45866	INRFSB
	INRFSB	1.12159	0.00219	3.21795	0.05673	3.20574	0.00675	
0.4	NSB	5.11224	4.23144	4.11342	0.98888	4.87855	2.42466	NRFES
	NRFES	1.21535	0.00316	3.21785	0.03483	3.31244	0.06896	
	INSB	4.08911	3.12455	3.42635	0.44687	3.88977	0.89655	INRFSB

	INRFSB	1.11094	0.00116	3.12354	0.04368	3.186955	0.00567	
0.5	NSB	1.14354	0.00296	3.21223	0.03180	3.31202	0.06348	NRFES
	NRFES	2.18941	1.42555	4.11079	0.98327	4.871328	2.43245	
	INSB	2.11136	1.21111	3.42231	0.42311	3.83458	0.81343	INRFSB
	INRFSB	1.102241	0.00031	3.14311	0.04134	3.13422	0.00544	
0.7	NSB	1.66854	0.21854	3.67855	0.16844	4.54733	1.56333	NRFES
	NRFES	1.12311	0.00136	3.14676	0.00644	3.21065	0.04657	
	INSB	1.89544	0.38943	3.31333	0.22214	3.57554	0.45443	INRFSB
	INRFSB	1.10019	0.00017	3.13133	0.00533	3.12465	0.00443	
0.9	NSB	1.34133	0.08918	3.31222	0.16444	4.32445	1.14673	NRFES
	NRFES	1.11076	0.00136	3.03044	0.00118	3.11353	0.03644	
	INSB	1.21675	0.09554	3.23177	0.11685	3.12144	0.21466	INRFSB
	INRFSB	1.09010	0.00011	3.10555	0.00111	3.11006	0.00214	

جدول (14-3) تقدير المعلمات ومتوسط مربعات الخطأ MSE عند الطرائق البيزية التقليدية والمقترحة عند معاملات القطع $\alpha - \text{cut} = 0.2, 0.4, 0.5, 0.7, 0.9$ وعند القيمة الافتراضية لمعلمة التوزيع الأسّي $\lambda = 1.5$ ومعلمات توزيع ويبل $\theta = 2, p = 2.5$ ومعلمات توزيع كوماراسوامي القياسي $\theta = 1, \beta = 2$ لثلاث ملوثات

Distribution		Exponential		Weibull		Kumaraswamy		Best
cut	Method	Estimation	MSE	Estimation	MSE	Estimation	MSE	
0.2	NSB	3.32455	4.45632	5.89555	6.32464	3.56333	4.7965	NRFES
	NRFES	1.59533	0.16322	2.67855	0.11464	1.32522	0.22754	
	INSB	2.99464	0.65788	4.54664	3.43633	2.68783	1.33221	INRFSB

	INRFSB	1.54644	0.11573	2.54344	0.11167	1.28055	0.11755	
0.4	NSB	2.12686	2.12253	5.43442	3.33332	1.51674	1.33532	NRFES
	NRFES	1.55462	0.11347	2.45344	0.04774	1.22175	0.04755	
	INSB	2.05853	0.97866	3.32335	1.78543	1.34538	0.54843	INRFSB
	INRFSB	1.53966	0.11047	2.25143	0.01056	1.1147	0.10744	
0.5	NSB	2.12121	2.11197	3.21266	1.32963	1.51218	1.32462	NRFES
	NRFES	1.55227	0.10463	2.31463	0.03476	1.21564	0.04113	
	INSB	2.05544	0.97336	2.78977	0.43564	1.34244	0.52484	INRFSB
	INRFSB	1.53334	0.11005	2.13533	0.00345	1.11432	0.10441	
0.7	NSB	2.11057	2.10875	3.20544	1.22112	1.24757	0.43555	NRFES
	NRFES	1.54352	0.09081	2.10919	0.02355	1.10876	0.03167	
	INSB	2.12422	0.05322	2.45722	0.23222	1.22156	0.33806	INRFSB
	INRFSB	1.51075	0.00467	2.03666	0.00068	1.11087	0.05862	
0.9	NSB	1.78576	1.44633	2.6785	0.53553	1.20644	0.3572	NRFES
	NRFES	1.52243	0.04767	2.09564	0.00436	1.10068	0.0064	
	INSB	1.59533	0.11343	2.3214	0.11164	1.12194	0.243	INRFSB
	INRFSB	1.50866	0.00244	2.0085	0.00046	1.10061	0.0046	

جدول (3-15) تقدير المعلمات ومتوسط مربعات الخطأ MSE عند الطرائق البيزية التقليدية والمقترحة عند معاملات القطع $\alpha - \text{cut} = 0.2, 0.4, 0.5, 0.7, 0.9$ وعند القيمة الإفتراضية لمعلمة التوزيع الأسي $\lambda = 4$ ومعلمات توزيع ويبيل $\theta = 3, p = 4$ ومعلمات توزيع كوماراسوامي القياسي $\theta = 4, \beta = 1$ لثلاث ملوثات

Distribution		Exponential		Weibull		Kumaraswamy		Best
cut	Method	Estimation	MSE	Estimation	MSE	Estimation	MSE	
0.2	NSB	7.5844	4.79446	9.33289	4.68954	6.80972	3.73408	NRFES
	NRFES	4.67333	0.04543	3.44539	0.02352	4.53733	0.22196	
	INSB	4.53224	2.67354	3.63575	1.12475	5.60923	3.64433	INRFSB
	INRFSB	4.35222	0.04365	3.31366	0.03325	4.32234	0.11905	
0.4	NSB	5.79544	3.53744	7.85633	2.59373	4.53666	1.63933	NRFES
	NRFES	4.43768	0.03122	3.32844	0.01875	4.42224	0.11952	
	INSB	4.45111	1.03456	3.46855	1.11685	4.45774	2.53453	INRFSB
	INRFSB	4.21455	0.02186	3.21442	0.00567	4.31212	0.04533	
0.5	NSB	4.56366	1.45881	5.43555	1.57054	4.51894	1.33563	NRFES
	NRFES	4.24359	0.03111	3.31355	0.01111	4.22166	0.00446	
	INSB	4.43602	1.01354	3.42534	1.11347	4.34256	1.44367	INRFSB
	INRFSB	4.21217	0.02111	3.21154	0.00435	4.220791	0.00333	
0.7	NSB	4.41128	1.11046	4.52663	0.78443	4.34424	0.68333	NRFES
	NRFES	4.11464	0.00456	3.31321	0.00295	4.11795	0.00217	
	INSB	4.33213	1.00342	3.31564	1.10564	4.29055	0.46333	INRFSB
	INRFSB	4.11356	0.00236	3.119044	0.00221	4.10688	0.00117	

0.9	NSB	4.35663	1.00463	3.89664	0.45583	4.22141	0.32567	NRFES
	NRFES	4.03533	0.00045	3.22145	0.001467	4.10544	0.00148	
	INSB	4.22132	1.00113	3.27933	1.10251	4.20464	0.22111	INRFSB
	INRFSB	4.10068	0.00023	3.10201	0.00028	4.09843	0.00012	

جدول (16-3) تقدير المعلمات ومتوسط مربعات الخطأ MSE عند الطرائق البيزية التقليدية والمقترحة عند معاملات القطع $\alpha - cut = 0.2, 0.4, 0.5, 0.7, 0.9$ وعند القيمة الافتراضية لمعلمة التوزيع الأسّي $\lambda = 5$ ومعلمات توزيع ويبيل $\theta = 2, p = 5$ ومعلمات توزيع كوماراسوامي القياسي $\theta = 1, \beta = 5$ لثلاث ملوثات

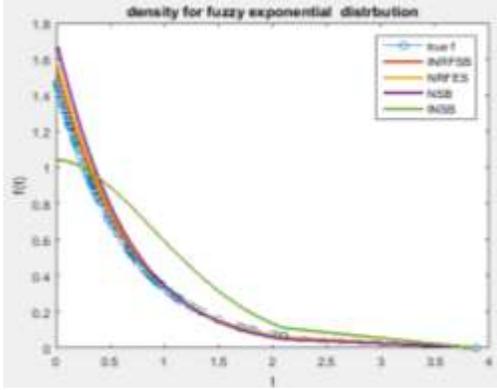
Distribution		Exponential		Weibull		Kumaraswamy		Best
cut	Method	Estimation	MSE	Estimation	MSE	Estimation	MSE	
0.2	NSB	8.4552	3.78944	4.85326	2.22312	2.67744	3.65532	NRFES
	NRFES	5.64688	0.06955	2.23564	0.07564	1.23455	0.04664	
	INSB	6.55622	1.24553	2.33564	0.11554	1.90555	2.32558	INRFSB
	INRFSB	5.52166	0.01466	2.21633	0.00366	1.26466	0.08977	
0.4	NSB	6.38965	1.56733	4.67433	1.56743	2.56377	2.55377	NRFES
	NRFES	5.55362	0.05683	2.21795	0.06354	1.21664	0.03566	
	INSB	5.65465	0.56744	2.53563	0.00778	1.56477	1.33522	INRFSB
	INRFSB	5.510574	0.00473	2.21235	0.00215	1.20863	0.06755	
0.5	NSB	6.38216	1.56112	4.44572	0.85755	2.51133	2.54322	NRFES
	NRFES	5.53132	0.05233	2.207855	0.0146	1.21621	0.03311	
	INSB	5.65111	0.51256	2.41393	0.00643	1.56425	1.33522	INRFSB
	INRFSB	5.51033	0.00413	2.20235	0.00144	1.20183	0.06334	

0.7	NSB	5.67844	0.67744	4.32343	0.44566	1.510574	0.45643	NRFES
	NRFES	5.52133	0.04467	2.20114	0.01252	1.12455	0.00456	
	INSB	5.56365	0.08973	2.31565	0.00543	1.52667	1.21453	INRFSB
	INRFSB	5.50666	0.00054	2.20045	0.00023	1.18665	0.04337	
0.9	NSB	5.66876	0.55744	4.31992	0.33583	1.45784	0.32644	NRFES
	NRFES	5.51076	0.00233	2.201124	0.01123	1.10056	0.00046	
	INSB	5.51353	0.0786	2.23566	0.00345	1.4321	0.13683	INRFSB
	INRFSB	5.50045	0.00021	2.20012	0.00011	1.01011	0.00014	

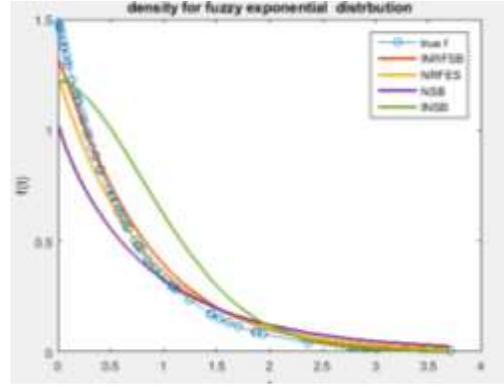
جدول (17-3) تقدير المعلمات ومتوسط مربعات الخطأ MSE عند الطرائق البيزية التقليدية والمقترحة عند معاملات القطع $\alpha - \text{cut} = 0.2, 0.4, 0.5, 0.7, 0.9$ وعند القيمة الافتراضية لمعلمة التوزيع الأسّي $\lambda = 8$ ومعلمات توزيع ويبيل $\theta = 2.5, p = 3.5$ ومعلمات توزيع كوماراسوامي القياسي $\theta = 5, \beta = 2.5$ لثلاث ملوثات

Distribution		Exponential		Weibull		Kumaraswamy		Best
cut	Method	Estimation	MSE	Estimation	MSE	Estimation	MSE	
0.2	NSB	11.31474	4.45734	5.56922	4.89444	7.84946	3.54632	NRFES
	NRFES	8.54633	0.03712	2.68377	0.13478	5.56378	1.01155	
	INSB	10.46788	3.16428	4.436955	3.32566	6.32355	1.43532	INRFSB
	INRFSB	8.41795	0.02175	2.69577	0.03466	5.52211	0.89655	
0.4	NSB	10.44756	3.43965	5.11356	4.43754	6.54478	1.64744	NRFES
	NRFES	8.51333	0.02369	2.56899	0.02644	5.54644	0.09754	
	INSB	9.53896	2.21573	4.12452	3.21444	5.53222	0.54778	INRFSB
	INRFSB	8.33246	0.02354	2.54684	0.00347	5.51251	0.79631	

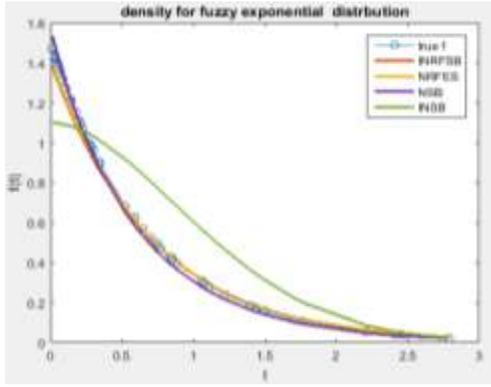
0.5	NSB	10.41144	2.77954	5.11221	4.23222	6.54125	1.64115	NRFES
	NRFES	8.42245	0.01244	2.51244	0.02115	5.54141	0.09326	
	INSB	9.52135	2.21111	4.12622	3.11138	5.53101	0.54116	INRFSB
	INRFSB	8.31173	0.02114	2.51254	0.00311	5.51291	0.79328	
0.7	NSB	8.78553	0.64446	3.21784	1.45681	5.78544	0.79544	NRFES
	NRFES	8.33155	0.01174	2.51006	0.00462	5.51129	0.08573	
	INSB	8.65333	0.55785	3.205663	0.45222	5.52178	0.43113	INRFSB
	INRFSB	8.21955	0.01155	2.50557	0.00218	5.59523	0.03224	
0.9	NSB	8.56893	0.43785	3.21057	0.33246	5.55782	0.13114	NRFES
	NRFES	8.22167	0.00355	2.50986	0.00235	5.504663	0.00786	
	INSB	8.54633	0.43885	3.201135	0.34572	5.51122	0.11355	INRFSB
	INRFSB	8.11369	0.00574	2.50125	0.00157	5.50114	0.00411	



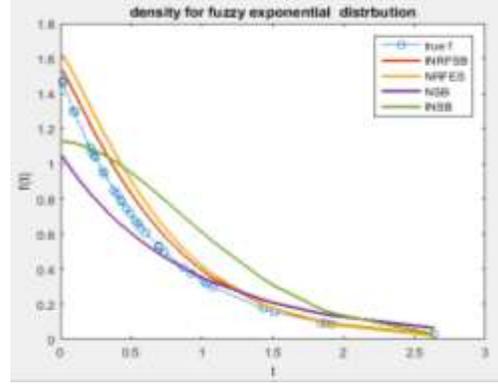
شكل (3-2) منحنى دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الاسي عند طراق التقدير البيزية التقليدية والمقترحة عند القطع 0.9



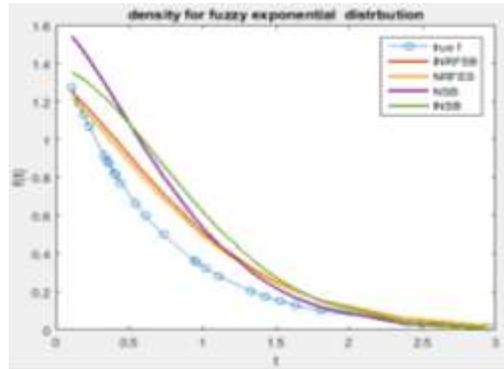
شكل (3-3) منحنى دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الاسي عند طراق التقدير البيزية التقليدية والمقترحة عند القطع 0.7



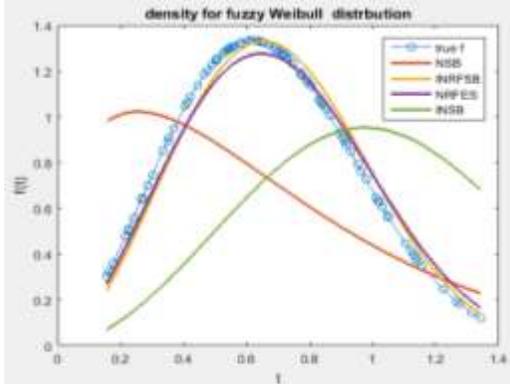
شكل (3-4) منحنى دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الاسي عند طراق التقدير البيزية التقليدية والمقترحة عند القطع 0.5



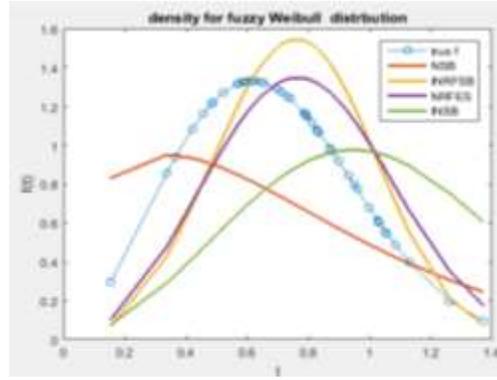
شكل (3-5) منحنى دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الاسي عند طراق التقدير البيزية التقليدية والمقترحة عند القطع 0.4



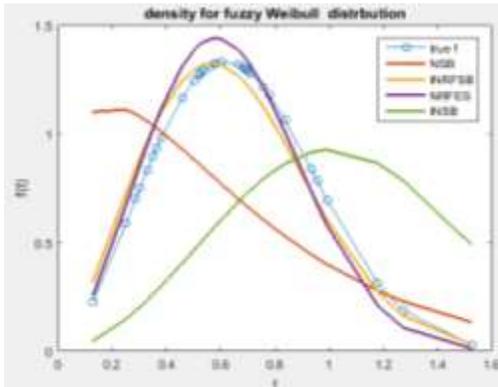
شكل (3-6) منحنى دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الاسي عند طراق التقدير البيزية التقليدية والمقترحة عند القطع 0.2



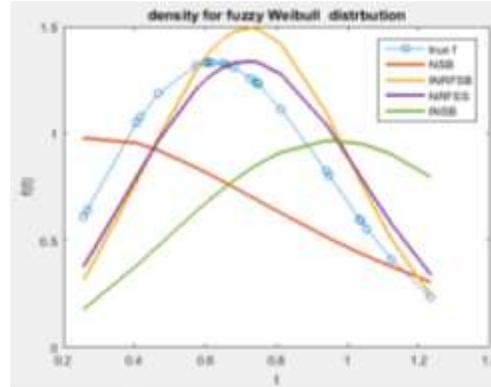
شكل (3-7) منحى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ويبيل عند طراق التقدير البيزية التقليدية والمقترحة عند القطع 0.9



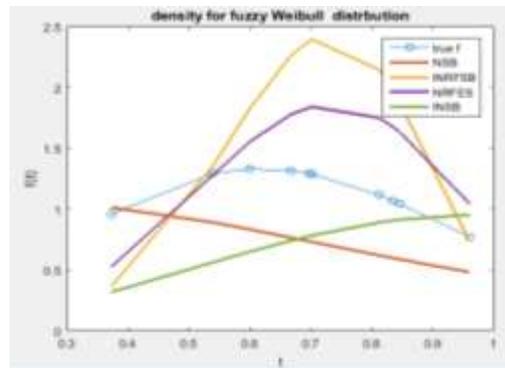
شكل (3-8) منحى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ويبيل عند طراق التقدير البيزية التقليدية والمقترحة عند القطع 0.7



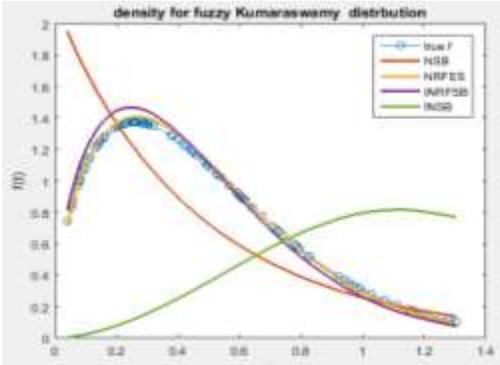
شكل (3-9) منحى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ويبيل عند طراق التقدير البيزية التقليدية والمقترحة عند القطع 0.5



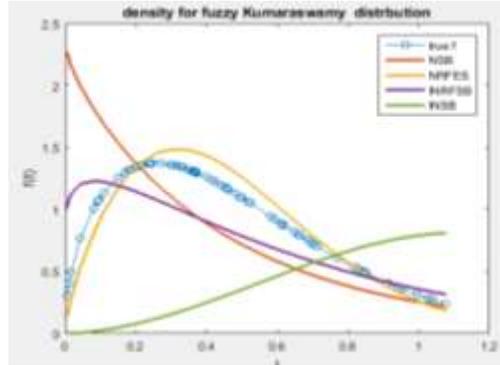
شكل (3-10) منحى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ويبيل عند طراق التقدير البيزية التقليدية والمقترحة عند القطع 0.4



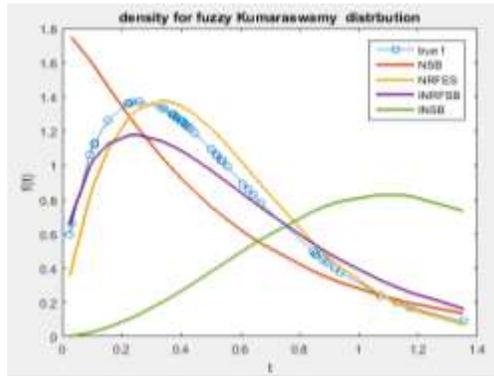
شكل (3-11) منحى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ويبيل عند طراق التقدير البيزية التقليدية والمقترحة عند القطع 0.2



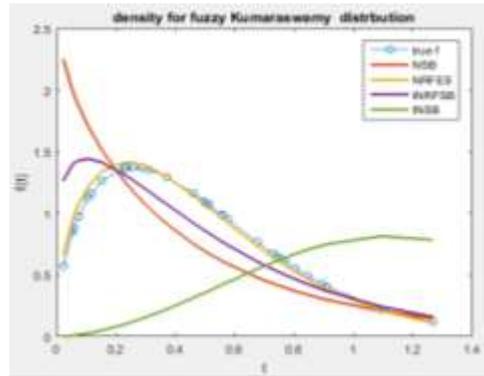
شكل (3-12) منحى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع KUM عند طراق التقدير البيزية التقليدية والمقترحة عند القطع 0.9



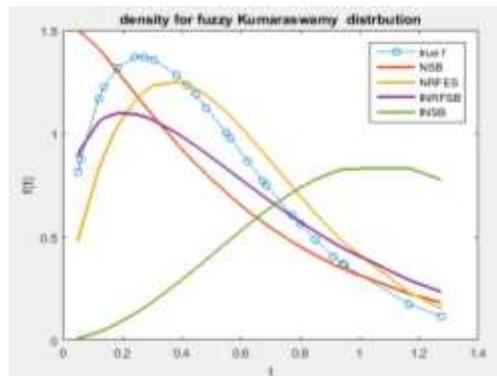
شكل (3-13) منحى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع KUM عند طراق التقدير البيزية التقليدية والمقترحة عند القطع 0.7



شكل (3-14) منحى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع KUM عند طراق التقدير البيزية التقليدية والمقترحة عند القطع 0.5



شكل (3-15) منحى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع KUM عند طراق التقدير البيزية التقليدية والمقترحة عند القطع 0.4



شكل (3-16) منحى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع KUM عند طراق التقدير البيزية التقليدية والمقترحة عند القطع 0.2

يتضح من الجداول (3-3) الى (3-17) والأشكال (3-2) الى (3-16) ما يأتي:

1. ان طريقة بيز الضبابية الحصينة المقترحة عند التوزيع الأولي غير المعلوماتي وفقاً لقاعدة جفري والتوزيع الأولي المعلوماتي وعند جميع معاملات القطع افضل من طريقة بيز التقليدية وللتوزيعات (الأسّي- وييل- كوماراسامي القياسي) وذلك لأنها حققت اقل متوسط مربعات خطأ في جميع تجارب المحاكاة.
2. تفوق تقدير طريقة بيز التقليدية القياسية وفق التوزيع الأولي المعلوماتي على طريقة بيز التقليدية القياسية غير المعلوماتية ولتجارب المحاكاة كافة.
3. تفوق طريقة بيز الضبابية الحصينة المقترحة المستندة الى توزيع اولي معلوماتي على طريقة بيز الضبابية الحصينة المستندة الى توزيع اولي غير المعلوماتي ولتجارب المحاكاة كافة.
4. كلما زاد القطع α قل متوسط مربعات الخطأ وبالتالي زيادة دقة التقديرات المستخرجة وفق الطريقة البيزية الضبابية الحصينة ولتجارب المحاكاة كافة .
5. طريقة بيز الضبابية الحصينة المقترحة المعلوماتية كانت هي الافضل للتوزيع الأسّي الضبابي المقترح.
6. تقل قيمة متوسط مربعات الخطأ عند الطريقة البيزية الضبابية الحصينة المقترحة للتوزيع الاولي المعلوماتي وغير المعلوماتي كما زاد التلوث في البيانات وهذا يدل على دقة الطريقة المقترحة.
7. كلما زاد القطع تقل عدد العناصر التي تنتمي للمجموعة الضبابية وبالتالي يقل متوسط مربعات الخطأ وبالتالي الحصول على تقديرات اكثر دقة.
8. نلاحظ من الأشكال (3-2) الى (3-16) ان منحنى دالة الكثافة الاحتمالية الضبابية يقترب من منحنى دالة الكثافة الاحتمالية الضبابية عند الطريقة المقترحة وللتوزيع الاوليين المعلوماتي وغير المعلوماتي. ونلاحظ ان منحنى دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الاسي الضبابي اكثر ملائمة واكثر تمهيد عند الطريقة البيزية المقترحة . وان المنحنى باللون الاخضر الذي يمثل منحنى دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الاسي عند طريقة بيز التقليدية المعلوماتية والمنحنى باللون البنفسجي الذي يمثل منحنى دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الاسي الضبابي عند طريقة بيز القياسية الغير معلوماتية في الاشكال (2-3) الى (2-6) يبتعد عن باقي المنحنيات التي تمثل منحنى دالة الكثافة الاحتمالية عند الطريقة المقترحة وللتوزيعين الاوليين المعلماتي والغير معلوماتي. وكذلك نفس الكلام عند توزيع وييل في الاشكال (2-7) و (2-11) وتوزيع كوماراسوامي في الاشكال (2-8) و (2-16) .

الفصل الرابع

الجانب التطبيقي

4.1 التمهيد : (Preface)

تتضمن القسطرة القلبية توجيه أنبوب رفيع ومرن (شبكة داعمة) عبر أحد الأوعية الدموية وصولاً إلى القلب لتشخيص أو علاج أمراض قلبية محددة، مثل انسداد الشرايين أو عدم انتظام ضربات القلب. وتقدم القسطرة القلبية للأطباء معلومات مهمة عن عضلة القلب وصماماته وأوعيته الدموية. وهذا الأنبوب لذي يتم بواسطته قسطرة القلب عبارة عن شبكة تعمل على جعل الشرايين في وضع مفتوح ويمكن لهذه الشبكة ان تخفق في اداء مهمتها حسب طبيعية المريض ونوع العلاج الذي يتناوله. لذلك فان دراسة اوقات الفشل لهذه الشكبات(الدعامات القلبية) من الامور المهمة الذي يجب ان تأخذ بعين الاعتبار لمعرفة اوقات الفشل المستقبلية لهذه الدعامات.

2.4 الدعامة القلبية: (Heart Stent)

الدعامة عبارة عن أنبوب صغير يمكن أن يلعب دورًا كبيرًا في علاج أمراض القلب. يساعد في الحفاظ على الشرايين - الأوعية الدموية التي تنقل الدم من قلبك إلى أجزاء أخرى من الجسم ، بما في ذلك عضلة القلب نفسها - مفتوحة.

وهي عبارة عن أنابيب شبكة سلكية صغيرة تُستخدم لدعم الشرايين المسدودة ، مفيدة في علاج النوبات القلبية وآلام الصدر التي تحدث مع النشاط البدني. يتم وضعها أثناء عملية رأب الأوعية التاجية وإجراء الدعامة ، والتي تتضمن عادةً أنبوب رفيع (ثعباني الشكل) عبر وعاء في أعلى الفخذ أو من المعصم إلى القلب. بعد أكثر من عقدين من الاستعمال ، أصبحت الدعامات الحالية أكثر أمانًا وفعالية. لكن لا يزال من الممكن ظهور المشكلات ، لكنها غير شائعة ويمكن علاجها.

بمجرد وضع الدعامة ، ستبدأ الأنسجة في تغطية الدعامة مثل طبقة من الجلد. سَتُبطن الدعامة بالكامل بالمناديل خلال 3 إلى 12 شهرًا ، اعتمادًا على ما إذا كانت الدعامة مغطاة بطبقة طبية أم لا. قد توصف لك أدوية تسمى مضادات الصفائح لتقليل "التصاق" الصفائح الدموية. الصفائح الدموية عبارة عن خلايا دم خاصة تتجمع معًا لوقف النزيف. يمكن للدواء أيضًا أن يمنع تكون جلطات الدم داخل الدعامة. يتم تغليف معظم الدعامات بالأدوية لمنع تشكل ندب داخل الدعامة. تسمى هذه الدعامات الدعامات المملوءة بالأدوية (DES) يطلق الدواء داخل الأوعية الدموية الذي يببطئ فرط نمو الأنسجة داخل الدعامة. هذا يساعد على منع الأوعية الدموية من الضيق مرة أخرى.

بعض الدعامات لا تحتوي على هذا الطلاء الطبي وتسمى الدعامات المعدنية العارية. (BMS) قد يكون لديهم معدلات تضيق أعلى ، لكنهم لا يحتاجون إلى استعمال طويل الأمد للأدوية المضادة للصفيحات. قد تكون هذه هي الدعامة المفضلة لدى الأشخاص المعرضين بشدة لخطر النزيف. ونظرًا لإمكانية انسداد الدعامات ، فمن المهم التحدث مع فريق الرعاية الصحية الخاص بك حول ما عليك القيام به إذا كنت تعاني من ألم في الصدر بعد وضع الدعامة.

4.3 البيانات التطبيقية (Applied data)

تم جمع بيانات تخص أوقات الفشل للدعامة القلبية (دعامة القسطرة القلبية) التي تمثل الوقت بالشهر من بداية تركيب الدعامة القلبية ولغاية توقف الدعامة عن العمل (فشلها) لـ (100) مريض تم اجراء قسطرة قلبية لهم والتي تم الحصول عليها من مركز شهيد المحراب لجراحة وقسطرة القلب التابع لمستشفى مرجان التعليمي العام - دائرة صحة بابل خلال سنة (2021) وكما موضحة في جدول (4-1)

جدول (1- 4) أوقات الفشل للدعامة القلبية

i	t_i												
1	1.28	16	2.17	31	2.02	46	2.08	61	2.12	76	3.92	91	0.21
2	1.18	17	5.11	32	20.24	47	1.12	62	4.12	77	1.33	92	3.03
3	4.17	18	1.27	33	4.13	48	5.25	63	1.19	78	3.81	93	1.15
4	3.28	19	4.16	34	4.16	49	3.01	64	12.14	79	1.29	94	0.29
5	2.22	20	1.12	35	2.19	50	2.22	65	1.21	80	1.27	95	3.13
6	2.13	21	1.17	36	2.03	51	2.12	66	1.14	81	1.15	96	4.23
7	4.16	22	1.05	37	2.21	52	0.24	67	3.28	82	1.18	97	2.14
8	2.24	23	1.26	38	2.14	53	1.17	68	3.91	83	4.22	98	5.16
9	3.08	24	3.17	39	3.22	54	1.29	69	3.12	84	2.11	99	5.17
10	4.27	25	3.11	40	5.04	55	2.18	70	3.17	85	3.16	100	0.21
11	2.12	26	2.24	41	3.28	56	4.16	71	4.13	86	1.25		
12	2.17	27	1.15	42	3.05	57	1.47	72	4.19	87	1.22		
13	2.29	28	4.27	43	2.03	58	1.21	73	4.21	88	3.08		

14	1.25	29	2.11	44	2.24	59	2.13	74	1.26	89	1.25		
15	1.12	30	4.06	45	3.03	60	2.88	75	2.07	90	4.15		

والجدول (4-2) يوضح قيم إحصاءات العينة الحقيقية وكما يأتي:
جدول (4-2) احصاءات العينة الحقيقية

Statistic	value
Mean	2.7934
Std. Error of Mean	0.23739
Median	2.2000
Mode	4.16000
Std. Deviation	2.37391
Variance	5.63500
Range	20.0300
Minimum	0.21000
Maximum	20.2400

4.4 اختبار البيانات (Data test)

4.4.1 اختبار ملائمة البيانات (Data Fitting)

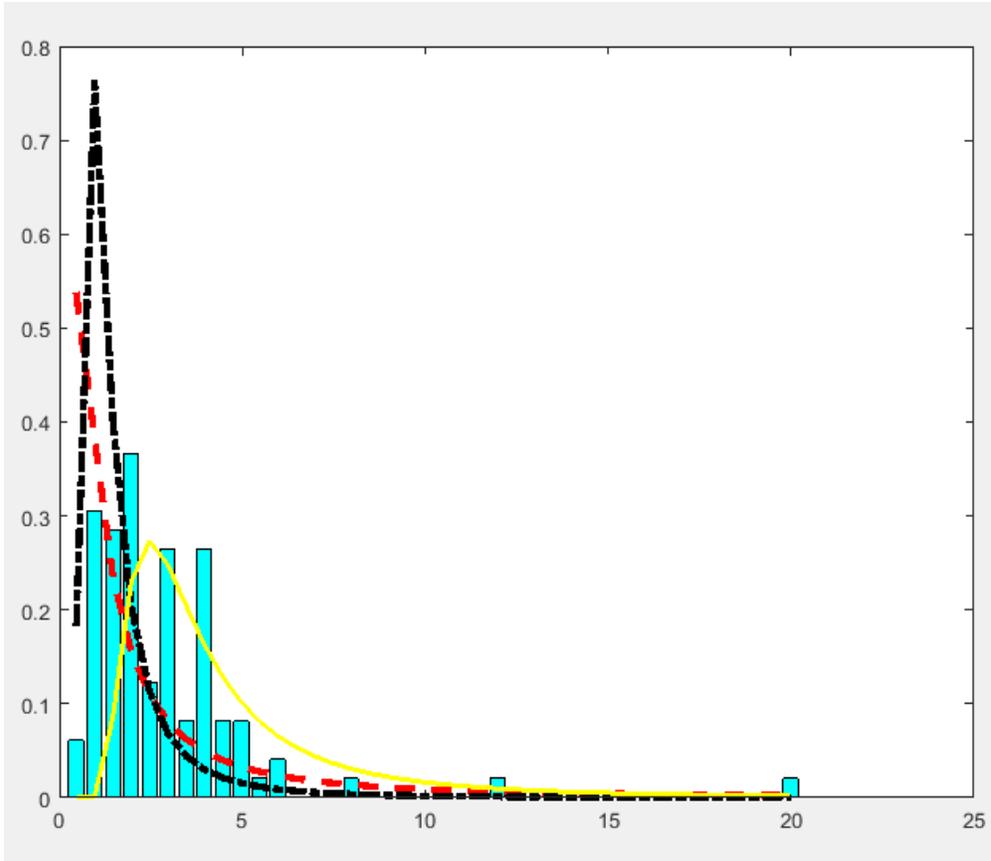
لغرض معرفة توزيع البيانات الحقيقية التي تمثل أوقات الفشل للدعامة القلبية تم استعمال برنامج (Easy Fit) وكانت نتائج البرنامج أن البيانات لها توزيع وييل بالإستناد الى الاختبارات (Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling, Chi-Squared) إذ كانت احصاءة الإختبار والقيمة الاحتمالية لكل اختبار كما مبين في جدول (4-3)

جدول (3-4) إختبارات ملائمة البيانات

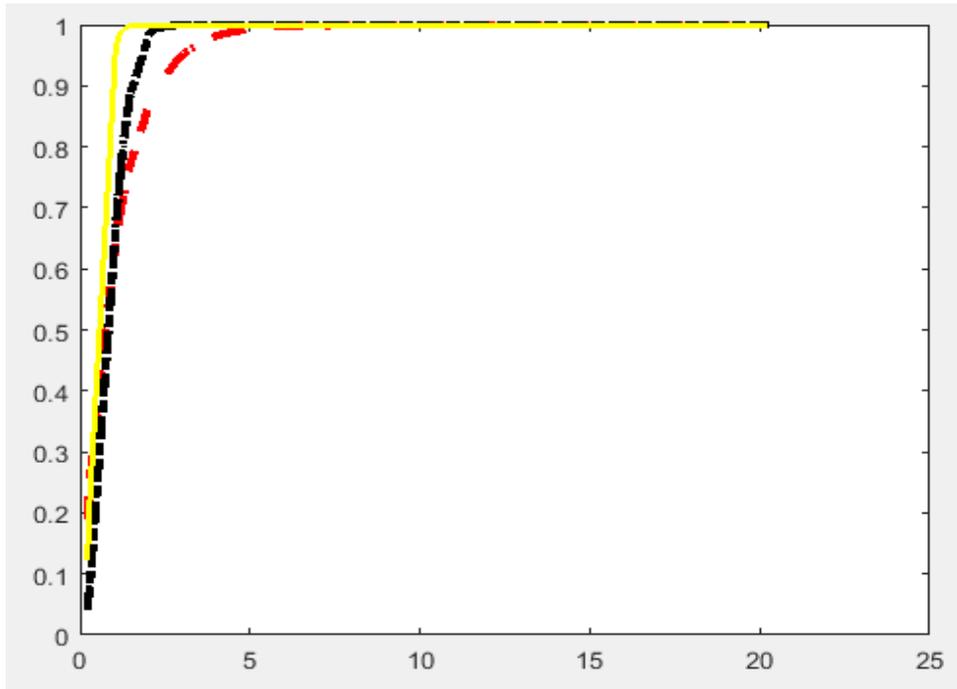
Test	Kolmogorov-Smirnov		Anderson-Darling		Chi-Squared		Rank
	Statistic	P-value	Statistic	P-value	Statistic	P-value	
Weibull	0.11792	0.11426	2.0336	3.9074	6.3535	0.17426	1
	p	1.7936		θ	2.9877		
Exponential	0.13772	0.11865	2.2224	3.1324	5.3344	0.2169	2
	λ	1.5321					
Kumaraswamy	β	3.3211		θ	3.2362		3
	0.0953	0.1106	2.1356	3.2422	5.2233	0.12821	

نلاحظ من جدول (3-4) ان القيمة الاحتمالية لكل إختبار أكبر من مستوى المعنوية (1%) ونلاحظ ان توزيع ويبيل قد جاء بالمرتبة الاولى مقارنة بالتوزيع الاسي وتوزيع كوماراسوامي لذلك سيتم اختبار توزيع ويبيل للبيانات وتطبيق طرائق التقدير عليه . وبناء على ذلك نستدل على عدم رفض فرضية العدم التي تنص على ان البيانات لها توزيع ويبيل ورفض الفرض البديل الذي ينص على ان البيانات ليس لها توزيع ويبيل.

والشكل (1-4) و (2-4) يمثلان منحنى دالة الكثافة الاحتمالية ودالة الاحتمال التراكمية للبيانات الحقيقية.



شكل (4-1) منحنى دالة الكثافة الاحتمالية للبيانات الحقيقية عند قيم مختلفة لمعاملات توزيع ويبيل



شكل (4-2) منحنى دالة الكثافة الاحتمالية التراكمية للبيانات الحقيقية عند قيم مختلفة لمعاملات توزيع ويبيل

4.4.2 اختبار القيم الشاذة (Outlier test)

لاختبار البيانات من حيث احتوائها على قيم شاذة ام لا تم استعمال اختبار الانحراف المطلق للوسيط (Median Absolute Deviation) (MAD) وهو من الاختبارات الحصينة التي تستخدم لاكتشاف القيم الشاذة للبيانات التي لها توزيع غير التوزيع الطبيعي باستبدال الانحراف المعياري بالانحراف الوسيط (Median Deviation) والمتوسط بالوسيط , وخطوات هذا الإختبار كالاتي:

1. نجد وسيط المجتمع (Median population) والذي بلغ $M = 2.200$

2. نحسب الانحراف عن الوسيط ، باستعمال القيمة المطلقة للانحرافات,

$$Deviation = |x - median(population)|$$

3. نجد وسيط الانحرافات المطلقة والذي يدعى عامل التحجيم (Scaling factor):

$$median = |Deviation| = 0.9700$$

4. نضيف عامل التحجيم الى وسيط المجتمع لنحصل على الحد الاعلى:

$$Upper = 3.1700$$

5. نطرح عامل التحجيم من وسيط المجتمع لنحصل على الحد الادنى:

$$Lower = 1.230$$

6. اي انحراف مطلق لاي قيمة مشاهدة خارج الحد الأعلى والحد الأدنى تعتبر قيمة شاذة (Outlier).

(Leys, C., et al., 2013, 764-766)

والجدول (4-4) يبين نتائج إختبار القيم الشاذة

جدول (4-4) نتائج إختبار القيم الشاذة

i	t _i	Deviation	Outlier
1	1.28	0.92	false
2	1.18	1.02	false
3	4.17	1.97	false
4	3.28	1.08	false
5	2.22	0.02	false
6	2.13	0.07	false
7	4.16	1.96	false
8	2.24	0.04	false
9	3.08	0.88	false
10	4.27	2.07	false

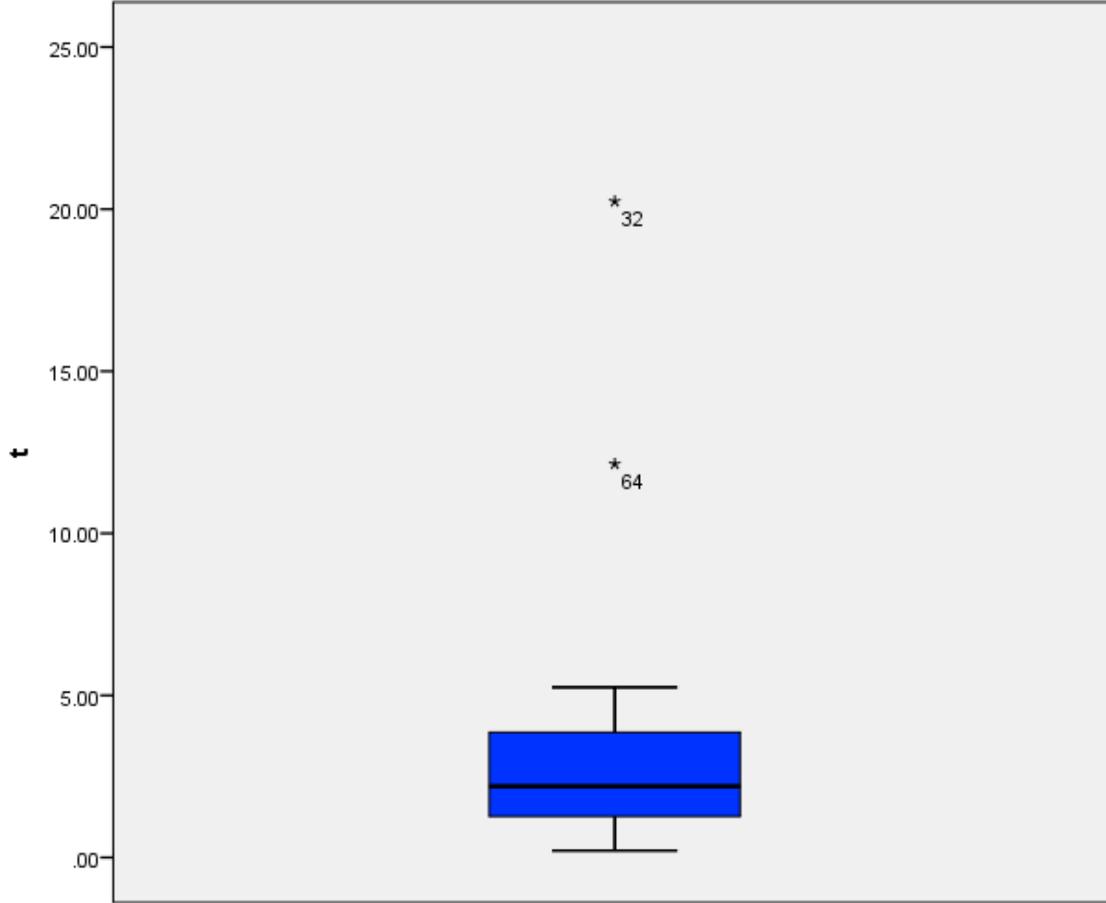
11	2.12	0.08	false
12	2.17	0.03	false
13	2.29	0.09	false
14	1.25	0.95	false
15	1.12	1.08	false
16	2.17	0.03	false
17	5.11	2.91	false
18	1.27	0.93	false
19	4.16	1.96	false
20	1.12	1.08	false
21	1.17	1.03	false
22	1.05	1.15	false
23	1.26	0.94	false
24	3.17	0.97	false
25	3.11	0.91	false
26	2.24	0.04	false
27	1.15	1.05	false
28	4.27	2.07	false
29	2.11	0.09	false
30	4.06	1.86	false
31	2.02	0.18	false
32	20.24	18.04	true
33	4.13	1.93	false
34	4.16	1.96	false
35	2.19	0.01	false
36	2.03	0.17	false
37	2.21	0.01	false
38	2.14	0.06	false
39	3.22	1.02	false
40	5.04	2.84	false
41	3.28	1.08	false
42	3.05	0.85	false
43	2.03	0.17	false
44	2.24	0.04	false

45	3.03	0.83	false
46	2.08	0.12	false
47	1.12	1.08	false
48	5.25	3.05	false
49	3.01	0.81	false
50	2.22	0.02	false
51	2.12	0.08	false
52	0.24	1.96	false
53	1.17	1.03	false
54	1.29	0.91	false
55	2.18	0.02	false
56	4.16	1.96	false
57	1.47	0.73	false
58	1.21	0.99	false
59	2.13	0.07	false
60	2.88	0.68	false
61	2.12	0.08	false
62	4.12	1.92	false
63	1.19	1.01	false
64	12.14	9.94	true
65	1.21	0.99	false
66	1.14	1.06	false
67	3.28	1.08	false
68	3.91	1.71	false
69	3.12	0.92	false
70	3.17	0.97	false
71	4.13	1.93	false
72	4.19	1.99	false
73	4.21	2.01	false
74	1.26	0.94	false
75	2.07	0.13	false
76	3.92	1.72	false
77	1.33	0.87	false
78	3.81	1.61	false

79	1.29	0.91	false
80	1.27	0.93	false
81	1.15	1.05	false
82	1.18	1.02	false
83	4.22	2.02	false
84	2.11	0.09	false
85	3.16	0.96	false
86	1.25	0.95	false
87	1.22	0.98	false
88	3.08	0.88	false
89	1.25	0.95	false
90	4.15	1.95	false
91	1.26	0.94	false
92	0.21	1.99	false
93	3.03	0.83	false
94	1.15	1.05	false
95	0.29	1.91	false
96	3.13	0.93	false
97	4.23	2.03	false
98	2.14	0.06	false
99	5.16	2.96	false
100	5.17	2.97	false

من جدول (4-4) تشير **false** الى فشل الاختبار في ايجاد قيمة شاذة و **true** تشير الى نجاح الاختبار في اكتشاف قيمة شاذة , اذ نلاحظ ان الاختبار اشار الى وجود قيمتين متطرفتين في البيانات الحقيقية وهما المشاهدة (32) والمشاهدة (64) .

والشكل (4-3) يمثل الرسم الصندوقي (**Box Plot**) للبيانات الحقيقية الذي يبين وجود القيم الشاذة.



شكل (4-3) الرسم الصندوقي للبيانات الحقيقية

4.5 تضبيب البيانات (Data Fuzziness)

يتم تحويل متجه العينة الحقيقي التقليدي $\underline{t}_{\text{Outlier}} = (t_1, t_2, \dots, t_n)'$ الى الضبابية وذلك بايجاد درجة الانتماء المقابلة لكل مشاهدة من مشاهدات متجه العينة التقليدي الحقيقي الملوث باستعمال دالة إنتماء شبه منحرفة وكما يأتي:

$$\mu_A(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t < a \\ \frac{t-a}{b-a} & \text{if } a \leq t \leq b \\ 1 & \text{if } t > b \end{cases} \quad \dots (3-5)$$

إذ أن $a=0.2100$ تمثل أقل قيمة من قيم مشاهدات العينة التقليدي و $b=20.2400$ تمثل اكبر قيمة من قيم مشاهدات متجه العينة التقليدي والذي ينتج لدينا متجه عينة ضبابي $\tilde{t} = \tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \dots, \tilde{t}_n$ يتضمن كل مشاهدة ودرجة انتماءها المقابلة كالاتي:

جدول (4-5) المشاهدات الحقيقية ودرجة انتماء كل مشاهدة

i	t_i	Degree of Membership
1	1.28	0.05
2	1.18	0.05
3	4.17	0.20
4	3.28	0.15
5	2.22	0.10
6	2.13	0.10
7	4.16	0.20
8	2.24	0.10
9	3.08	0.14
10	4.27	0.20
11	2.12	0.10
12	2.17	0.10
13	2.29	0.10
14	1.25	0.05
15	1.12	0.05
16	2.17	0.10
17	5.11	0.24
18	1.27	0.05
19	4.16	0.20
20	1.12	0.05
21	1.17	0.05
22	1.05	0.04
23	1.26	0.05
24	3.17	0.15
25	3.11	0.14
26	2.24	0.10
27	1.15	0.05
28	4.27	0.20
29	2.11	0.09
30	4.06	0.19
31	2.02	0.09
32	20.24	1.00

33	4.13	0.20
34	4.16	0.20
35	2.19	0.10
36	2.03	0.09
37	2.21	0.10
38	2.14	0.10
39	3.22	0.15
40	5.04	0.24
41	3.28	0.15
42	3.05	0.14
43	2.03	0.09
44	2.24	0.10
45	3.03	0.14
46	2.08	0.09
47	1.12	0.05
48	5.25	0.25
49	3.01	0.14
50	2.22	0.10
51	2.12	0.10
52	0.24	0.00
53	1.17	0.05
54	1.29	0.05
55	2.18	0.10
56	4.16	0.20
57	1.47	0.06
58	1.21	0.05
59	2.13	0.10
60	2.88	0.13
61	2.12	0.10
62	4.12	0.20
63	1.19	0.05
64	12.14	0.60
65	1.21	0.05
66	1.14	0.05

67	3.28	0.15
68	3.91	0.18
69	3.12	0.15
70	3.17	0.15
71	4.13	0.20
72	4.19	0.20
73	4.21	0.20
74	1.26	0.05
75	2.07	0.09
76	3.92	0.19
77	1.33	0.06
78	3.81	0.18
79	1.29	0.05
80	1.27	0.05
81	1.15	0.05
82	1.18	0.05
83	4.22	0.20
84	2.11	0.09
85	3.16	0.15
86	1.25	0.05
87	1.22	0.05
88	3.08	0.14
89	1.25	0.05
90	4.15	0.20
91	1.26	0.05
92	0.21	0.00
93	3.03	0.14
94	1.15	0.05
95	0.29	0.00
96	3.13	0.15
97	4.23	0.20
98	2.14	0.10
99	5.16	0.25
100	5.17	0.25

بعد ذلك يتم الحصول على المجموعة الضبابية عند معاملات القطع $\alpha=0.1,0.2$ $\tilde{A}_\alpha = \{\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \dots, \tilde{t}_n\}$ بإختيار العناصر في المجموعة الضبابية التي لها درجة إنتماء اكبر او تساوي القطع , α أي أن:

جدول (4-6) المشاهدات الحقيقية ودرجة انتماء كل مشاهدة عند كل مستوى قطع

i	$\tilde{t}_{0.1}$	$\tilde{t}_{0.2}$
1	4.17	4.27
2	3.28	5.11
3	2.22	4.27
4	4.16	20.24
5	2.24	5.04
6	3.08	5.25
7	4.27	12.14
8	2.29	4.22
9	5.11	4.23
10	4.16	5.16
11	3.17	5.17
12	3.11	
13	2.24	
14	4.27	
15	4.06	
16	20.24	
17	4.13	
18	4.16	
19	3.22	
20	5.04	
21	3.28	
22	3.05	
23	2.24	
24	3.03	
25	5.25	
26	3.01	
27	2.22	

28	4.16	
29	2.88	
30	4.12	
31	12.14	
32	3.28	
33	3.91	
34	3.12	
35	3.17	
36	4.13	
37	4.19	
38	4.21	
39	3.92	
40	3.81	
41	4.22	
42	3.16	
43	3.08	
44	4.15	
45	3.03	
46	3.13	
47	4.23	
48	5.16	
49	5.17	

4.6 تحليل البيانات (Data analyzing)

لتحليل عينة البيانات الحقيقية في تقدير معلمة توزيع ويبل بالطريقة المقترحة وتطبيقها على بيانات التجربة الحقيقية لأوقات الفشل للدعامات القلبية، والجدول (4-7) يوضح تقديرات معلمة توزيع ويبل باستعمال البيانات الحقيقية.

جدول (4-7) يبين نتائج تحليل البيانات الحقيقية عند طرائق التقدير الاعتيادية والمقترحة

Cut	Method	$\hat{\theta}$	MSE
0.1	NSB	2.3488	0.4082
	NRFES	2.8571	0.0171
	INSB	2.5214	0.2174
	INRFSB	2.9133	0.0055
0.2	NSB	2.1411	0.7167
	NRFES	2.8995	0.0078
	INSB	2.6225	0.1333
	INRFSB	2.9783	0.00009

يظهر الجدول (4-7) النتائج التي تم الحصول عليها من البيانات الحقيقية ونلاحظ منه ما يأتي :

1. ان طريقة بيز الضبابية الحصية الغير المعلوماتية افضل من طريقة بيز القياسية الغير معلوماتية وفق قاعدة جفري باقل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.0171) . عند مستوى القطع 0.1.
2. ان طريقة بيز الضبابية الحصينة المعلوماتية أفضل من طريقة بيز القياسية المعلوماتية لانها حققت اقل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.0055) عند مستوى القطع 0.1.
3. ان طريقة بيز الضبابية الحصية الغير المعلوماتية افضل من طريقة بيز القياسية الغير معلوماتية وفق قاعدة جفري باقل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.0078) . عند مستوى القطع 0.2.
4. ان طريقة بيز الضبابية الحصينة المعلوماتية أفضل من طريقة بيز القياسية المعلوماتية لانها حققت اقل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.00009) عند مستوى القطع 0.2.
5. بزيادة القطع في المجموعة الضبابية تزداد دقة التقديرات وفقاً للطريقة الضبابية البيزية المقترحة وتقل دقة التقديرات بطريقة بيز القياسية الاعتيادية.

الفصل الخامس

الاستنتاجات والتوصيات

5.1 الإستنتاجات (Conclusions)

من خلال ماتم التوصل اليه من نتائج في الجانبين التجريبي والتطبيقي تم التوصل الى الاستنتاجات الآتية:

1. لاي توزيع احتمالي تقليدي فان التوزيع الاحتمالي الضبابي له هو نفس الصيغة الدالية للتوزيع التقليدي ولكن بمشاهدات تمثل مجموعة القطع A^α .
2. ان تعيين توزيع اولي لكل معلمة من كل مشاهدة من مشاهدات العينة حقق الحصانة في التقدير كون ان لكل مشاهدة اصبح لها احتمال مستقل عن المشاهدة الأخرى .
3. حققت الطريقة البيزية الضبابية الحصينة المقترحة تقديرات افضل من الطريقة البيزية التقليدية.
4. لاتعطي طريقة بيز القياسية تقديرات دقيقة عندما يحتوي متجه بيانات العينة على قيم شاذة (Outliers) .
5. ساعدت الضبابية في زيادة دقة التقديرات المستحصل عليها وخصوصاً تقديرات بيز الضبابية الحصينة المقترحة. بحيث انه كلما زادت الضبابية (زاد اليقين) توصلنا الى تقديرات دقيقة لمعلمات التوزيع الاحتمالي الضبابي.
6. تعطي طرائق بيز الضبابية عندما يكون التوزيع الاولي معلوماتي تقديرات افضل من تلك التي تقدر باستعمال توزيعات اولية غير معلوماتية.
7. كلما زاد القطع α قل متوسط مربعات الخطأ وزادت دقة التقديرات المستخرجة وفق الطريقة البيزية الضبابية الحصينة ولتجارب المحاكاة كافة
8. ملائمة طريقة بيز الضبابية الحصينة المقترحة للبيانات الحقيقية التي تمثل اوقات الفشل للداعمة القلبية.

5.2 التوصيات (Recommendations)

من خلال ماتم التوصل اليه من استنتاجات نوصي بالآتي:

1. توسعة الطريقة المقترحة في تحويل اي توزيع احتمالي الى توزيع احتمالي ضبابي للتوزيعات المتقطعة مثل توزيع بواسون وتوزيع ثنائي الحدين ... الخ .
2. استعمال طرائق التقدير التقليدية مثل طريقة الامكان الاعظم وطريقة العزوم ... الخ لتقدير معلمات التوزيعات الاحتمالية وفق الطريقة المقترحة لتحويل التوزيع الاحتمالي الى ضبابي .
3. تطبيق الطريقة البيزية الضبابية الحصينة المقترحة على التوزيعات المتقطعة.
4. استعمال طرائق بيزية اخرى مثل طريقة توقع بيز , بيز الهرمي في تطبيق الطريقة البيزية الضبابية الحصينة المقترحة .
5. استعمال دوال خسارة اخرى غير دالة الخسارة التربيعية مثل دالة الانتروبي العامة ودالة LINEX ... الخ في ايجاد مقدر بيز وفق الطريقة البيزية الضبابية الحصينة المقترحة.
6. تطبيق الطريقة البيزية الضبابية الحصينة المقترحة على التوزيعات المركبة والتوزيعات المختلطة والتي بها اكثر من معلمتين .

المصادر

أولاً: المراجع:

*القرآن الكريم

ثانياً: المصادر العربية:

1. أوجي , زينة ياوز عبد القادر , (2015) , " تقدير المعولية لاوقات الفشل الضبابية ذات التوزيع الحر واستعماله في تقدير المعلوية الضبابية لسد الموصل" , مجلة العلوم الاقتصادية والادارية , المجلد : (21) , العدد: (81) , ص : (348-362) .
2. أوجي , زينة ياوز عبد القادر , (2009) , " مقدرات بيز لدالة المعولية الضبابية للتوزيع الأسي باستعمال المحاكاة مع تطبيقها على الشركة العامة للصناعات الكهربائية " , اطروحة دكتوراه , قسم الاحصاء , كلية الإدارة والاقتصاد , جامعة بغداد.
3. الصراف, مصطفى نزار , الراوي , اسماء غالب, اسماعيل, عرفان كمال , **التقدير الاحصائي** , مكتب الجزيرة للطباعة والنشر , بغداد, رقم الايداع في دار الكتب والوثائق ببغداد(1588) لسنة 2016, الطبعة الأولى.
4. الغنام, محمد طه و الصباغ , هبة علي , "دراسة في المتغيرات المضببة والأنحدار المتعدد المضبب" , (٢٠٠٩) , جامعة تكريت - كلية الإدارة والاقتصاد , مجلة تكريت للعلوم الإدارية والاقتصادية / المجلد - ٥ / العدد - ١٤ , الصفحات 166-180
5. المشهداني, عذراء كامل, (2015), " استعمال أسلوب Bayes وتحويلات Mellin لتقدير دالتي المعولية و الإتاحية في حالة وجود بيانات ضبابية مع تطبيق عملي" , رسالة ماجستير , قسم الاحصاء , كلية الإدارة والاقتصاد , جامعة بغداد.
6. النعيمي, ليث فاضل, (2015) " مقارنة بعض طرائق تقدير دالة المعولية الضبابية" , رسالة ماجستير , قسم الاحصاء , كلية الإدارة والاقتصاد , جامعة بغداد.
7. الياسري , تهاني مهدي عباس , (2007) , " مقارنة مقدرات بيز الحصين مع مقدرات أخرى لتقدير دالة المعولية التقريبية لتوزيع وبيبل" , اطروحة دكتوراه , كلية الادارة والاقتصاد- جامعة بغداد .

8. بشار خالد علي, (2018), " اختيار افضل تقدير للمعولية الضبابية لتوزيع فريجت " , رسالة ماجستير غير منشورة, جامعة كربلاء , كلية الادارة والاقتصاد
9. هبة الله, و ماجد علي شريم, (2005), " دراسة مقارنة لطرق التقدير الحصينة لدالة البقاء مع تطبيق عملي على مرضى سرطان الدم في اليمن " , اطروحة دكتوراه - كلية الادارة والاقتصاد- جامعة بغداد .

ثالثاً: المصادر الأجنبية:

1. A.Hameed , Ibrahim, (2011), " Using Gaussian membership functions for improving the reliability and robustness of students' evaluation systems ", Expert Systems with Applications . Elsevier Ltd.
2. A.Ibrahim, Nathier & A. Mohammed, Hussein, (2017), "Parameters and Reliability Estimation for the Fuzzy Exponential Distribution", American Journal of Mathematics and Statistics, 7(4): 143-151
3. A.Sancho-Royo,1 J. L. Verdegay 2, *, (2019), "Methods for the Construction of Membership Functions" , All content following this page was uploaded by Jose Luis Verdegay on 06 May 2019.1213-1230.
4. Abbas, Kamran & Yincai, Tang, (2012), "Comparison of Estimation Methods for Frechet Distribution with Known Shape", Caspian Journal of Applied Sciences Research, 1(10), pp. 58-64, ISSN: 2251-9114, CJASR
5. Abed AL-Kadim, Kareema, Ashwya, Abdul Hameed, (2012), "Fuzzy Geometric Distribution with Some Properties", Archives Des Sciences, Vol. 65, No. 2, pp.13-19
6. Ali, Sajid, Aslam, Muhammad, Mohsin , Kazmi, Syed Ali , (2013), "A study of the effect of the loss function on Bayes Estimate, posterior risk and hazard function for Lindley distribution", Applied Mathematical Modelling 37 (2013) 6068–6078
7. Al-nasser.Abdul majeed hamza, (2009),"An introduction to statistical reliability", Ithraa publishing and distribution
8. Asmussen, S. R. (2003). "Steady-State Properties of GI/G/1". Applied Probability and Queues. Stochastic Modelling and Applied Probability. 51. pp. 266–301. doi:10.1007/0-387-21525-5_10. ISBN 978-0-387-00211-8.
9. Babuska, Robert, (1998), " Fuzzy Modeling for Control", International Series in Intelligent Technologies book series (ISIT, volume 12)
10. Bagheri, Nayereh; Shahsanaaie, Fateme, (2016), "Estimating the parameter of Exponential distribution under Type-II censoring from fuzzy", Journal of Statistical Theory and Applications, Vol.: 15, No.: 2, 181-195

11. Baloui, Ezzatallah, (2011), "An Evaluation of the Systems Reliability Using Fuzzy Lifetime Distribution", Journal of Applied Mathematics, Islamic Azad University of Lahijan, Vol.8, No.1(28), Spring, pp 73-80
12. Baloui, Ezzatallah, (2012), "Reliability estimation under the fuzzy environments", TJMCS Vol.: 5 No.1,pp. 28-39
13. Baltagia, Badi H.; Bresson, Georges;Anoop Chaturvedi; Guy Lacroix Aouit , (2020), Robust Dynamic Panel Data Models Using ε -Contamination" , IZA – Institute of Labor Economics, ISSN: 2365-9793
14. Banks, Jerry ; S. Carson, John ; L. Nelson, Barry ; M. Nicol, David , (2010), " Discrete-Event System Simulation , 5th ed. Upper Saddle River, NJ : Prentice Hall, ISBN (Print) 0-13-606212-1, P. 1-18
15. Bellman, R., E. & Zadeh, L, A, (1970), "Decision making in a fuzzy environment", Management science, 17(4), pp. 141-164
16. Berger, James; Berlliner , L. Mark, (1986). "Robust Bayes and Emperical Bayes analysis with ε - contaminated Priors" , the annals of statistics Vol.14 No.2. pp498.
17. Biagini , L Francesca; Campanino , Massimo, (2016), " Elements of Probability and Statistics An Introduction to Probability with de Finetti's Approach and to Bayesian Statistics ", Springer, UNITEXT - La Matematica per il 3+2 ISBN 978-3-319-07253-1 ISBN 978-3-319-07254-8 (eBook) DOI 10.1007/978-3-319-07254-8 , Library of Congress Control Number: 2015958841
18. Box , GEORGE E. P., (1980), " Sampling and Bayes' Inference in Scientific Modelling and Robustness ", J. R. Statist. Soc. A, 143, Part 4, pp. 383-430
19. Buckley, James J., (2003), "Fuzzy probabilities: new approach and applications; with 17 tables", Heidelberg; New York: Physica- Verlag, A Springer-Verlag Company, ISBN 978-3-642-86786-6
20. Buckley, James J., (2006), "Fuzzy Probability and Statistics", Springer-Verlag Berlin Heidelberg, pp. 1-49
21. Chen, Guanrong; Tat, Trung, (2000), "Introduction to Fuzzy Sets, Fuzzy Logic, and Fuzzy Control Systems", Boca Raton London New York Washington, D.C.CRC Press
22. Chen, Shyi-Ming, (1997), "Fuzzy system reliability analysis based on vogue set theory", 0-7803-4053-1/97) IEEE,pp 1650-1655.
23. Cheng, Ching-Hsue, (1996), "Fuzzy repairable reliability based on fuzzy gerts", Microelectron. Reliab., Vol. 36, No. 10, pp. 1557-1563
24. Cheng, Ching-Hsue; Mon Don-Lin, , (1993), " Fuzzy system reliability analysis of confidence by interval ", Fuzzy Sets and Systems, 56, pp. 29-35

25. Christian P. Robert; Nicolas Chopin; Judith Rousseau (2009). "Harold Jeffreys's Theory of Probability Revisited". *Statistical Science*. 24 (2). doi:10.1214/09-STS284
26. D. Gary Harlow, (2002), " Applications of the Frechet distribution function" , *Int. J. of Materials & Product Technology*, Vol. 17, Nos 5/6,pp. 482-495.
27. de Barros, Laécio Carvalho, Bassanezi, Rodney Carlos, Lodwick , Weldon Alexander, (2017), "A First Course in Fuzzy Logic, Fuzzy Dynamical Systems, and Biomathematics-Theory and Applications",© Springer-Verlag Berlin Heidelberg, ISSN 1434-9922 ISSN 1860-0808 (electronic), *Studies in Fuzziness and Soft Computing* , ISBN 978-3-662-53322-2 ISBN 978-3-662-53324-6 (eBook), DOI 10.1007/978-3-662-53324-6
28. Deneoux, Thierry, (2011), "Maximum likelihood estimation from fuzzy data using the EM algorithm", *Fuzzy Sets and Systems*, 183, pp. 72–91
29. El-Damcese M. A.; M. & Al-Ramadan Dina, (2015), "Analyzing System Reliability Using Fuzzy Mixture Generalized Linear Failure Rate Distribution", *American Journal of Mathematics and Statistics* p-ISSN: 2162-948X, e-ISSN: 2162-8475, 5(2) pp. 43-51
30. Emad Hazem Abboudi1 , Athraa Kamel Al – Mashhadani2 , Muna Shaker Salman3, (2020), " Estimation of the fuzzy reliability function using two-parameter exponential distribution as prior distribution ", *Periodicals of Engineering and Natural Sciences* ISSN 2303-4521 Vol. 8, No. 2, June 2020, pp.613-625.
31. Entsar Arebe Al-Doori, Ahmed Sadoun Manna, (2020), " Robust Bayesian estimators for binomial distribution under prior data conflict", *Periodicals of Engineering and Natural Sciences*, Vol. 8, No. 1, March 2020, pp.284-297
32. Falih, Zainab, (2010), "Comparing Estimators of Scale and Reliability Function of Frechet two Parameters", *Iraqi journal for administrative sciences*, vol: 11, No.:44,pp 165-178
33. Farcomeni, A.; Greco, L. (2013), *Robust methods for data reduction*, Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC Press, ISBN 978-1-4665-9062-5.
34. FARCOMENI, ALESSIO; GRECO, LUCA, (2015), " ROBUST METHODS for DATA REDUCTION ", CRC Press Taylor & Francis Group 6000 Broken Sound Parkway NW, Suite 300 Boca Raton, FL 33487-2742 © 2015 by Taylor & Francis Group, LLC CRC Press is an imprint of Taylor & Francis Group, an Informa business No claim to original U.S. Government works Version Date: 20150312 International Standard Book Number-13: 978-1-4665-9063-2 (eBook - PDF)

35. Felipe R. S. de Gusmão ; Edwin M. M. Ortega ; Gauss M. Cordeiro, (2011), " The generalized inverse Weibull distribution" , Stat Papers (Springer 2011 52, pp. 591–619
36. Ferreira, Sergio L.C.; Caires , Adriana O. ; da S. Borges, Thaise; M.D.S. Lima Ariana, O.B. Silva, Laiana and N.L. dos Santos Walter ,(2017), " Robustness evaluation in analytical methods optimized using experimental designs", Microchemical Journal 131 (2017) 163–169, <http://dx.doi.org/10.1016/j.microc.2016.12.004> 0026-265X/© 2016 Elsevier B.V. All rights reserved.
37. Gadjeiv, Djavanshir; Kochetkov, Ivan, and Rustanov, Aligadzhi , (2021), " The Convex Fuzzy Sets and Their Properties with Application to the Modeling with Fuzzy Convex Membership Functions", The Editor(s) (if applicable) and The Author(s), under exclusive license to Springer Nature Switzerland AG
38. Garg , Harish , Sharma, S.P. & Rani ,Monica, (2013)," Weibull fuzzy probability distribution for analyzing the behavior of pulping unit in a paper industry" . Int. J. Industrial and Systems Engineering, Vol. 14, No. 4 , pp 395-413
39. Ghelli ,Alessandro; Hagraas, and Dooley Hani James, (2016), "Towards Realising an Intelligent and Energy Efficient Hob by Employing a Fuzzy Logic Based Embedded Agent Approach", All content following this page was uploaded by Hani Hagraas . pp 1-10
40. Grigoryan, Alexander, (2008), " Measure theory and probability" , Lecture Notes, University of Bielefeld, pp. 27-28
41. Grubbs, Frank E. (1950). "Sample criteria for testing outlying observations". Annals of Mathematical Statistics. 21 (1): 27–58. doi:10.1214/aoms/1177729885
42. Guixiang Wang *, Yifeng Xu and Sen Qin, (2019), " Basic Fuzzy Event Space and Probability Distribution of Probability Fuzzy Space " , Mathematics 2019, 7, 542; doi:10.3390/math7060542
43. Hameed, Maisoon, (2016), (Comparing Bayes Estimators With others , for scale parameter and Reliability function of two parameters Frechet distribution", Journal of economic & Administrative sciences, Vol.: 22, No.: 8, pp: 1-15
44. Hawash, Mohammed Kadhim , (2020)," Discussing Fuzzy Reliability Estimators of Function of Mixed Probability Distribution by Simulation", Baghdad Science Journal, P-ISSN: 2078-8665, E-ISSN: 2411-7986, 17(1):141-149, DOI: <http://dx.doi.org/10.21123/bsj.2020.17.1.0141>
45. Held, Leonhard ; Sabanés ; Bové ,Daniel, (2014), " Applied Statistical Inference Likelihood and Bayes " , ISBN 978-3-642-37886-7 ISBN 978-3-

- 642-37887-4 (eBook) DOI 10.1007/978-3-642-37887-4 Springer Heidelberg New York Dordrecht London Library of Congress Control Number: 2013954443 Mathematics Subject Classification: 62-01, 62F10, 62F12, 62F15, 62F25, 62F40, 62P10, 65C05, 65C60 © Springer-Verlag Berlin Heidelberg .
46. Howson, C. and Urbach, P. (2005). Scientific Reasoning: the Bayesian Approach .3rd edition, Open Court Publishing Company. ISBN 978-0-8126-9578-6.
 47. Huang , Hong-Zhong; Zuo Ming J.; and Sun Zhan-Quan, (2006), "Bayesian reliability analysis for fuzzy lifetime data", Fuzzy Sets and Systems 157, 1674 – 1686
 48. Hung, Wen-Liang; Chang, Yen-Chang & Chuang, Shun-Chin, (2008)," Fuzzy classification maximum likelihood algorithms for mixed-Weibull Distributions", Soft Compute, Springer, 12:pp1013–1018.
 49. Hybrid Censoring, Communications in Statistics - Simulation and Computation, DOI: 10.1080/03610918.2016.1183779, pp1:23
 50. KAMALUDEEN USMAN DANYARO 1 , JAFREEZAL JAAFAR 1 , SHAHIR LIEW, (2010), " COMPARABILITY BETWEEN FUZZY SETS AND CRISP SETS: A SEMANTIC WEB APPROACH", SELECTED TOPICS in EDUCATION and EDUCATIONAL TECHNOLOGY, ISSN: 1792-5061, ISBN: 978-960-474-232-5, 240-244.
 51. Kamary , Kaniav. Non-informative priors and modelization by mixtures. Statistics [math.ST]. University Paris sciences et letters, . English. NNT : 2016PSLED022 . tel-01491350
 52. Karpisek, Zdenek ; Stepanek, Petr & Jurak, Petr, (2010), " Weibul fuzzy probability distribution for reliability of concrete structures ", Engineering mechanics, Vol. 17, No. 5/6, pp. 363–372
 53. Klaua, D. (1965) Über einen Ansatz zur mehrwertigen Mengenlehre. Monatsb. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin 7, 859–876. A recent in-depth analysis of this paper has been provided by Gottwald, S. (2010). "An early approach toward graded identity and graded membership in set theory". Fuzzy Sets and Systems 161 (18): 2369–2379.
 54. Kwang H. Lee, (2004) , " First Course on Fuzzy Theory and Applications" , ISSN 16-15-3871, ISBN 3-540-22988-4 Springer ,Berlin Heidelberg NewYork, ppt:1-20
 55. Liu ,Shujie; Zhang, Hongchao; Li ,Chao; Lu,Huitian; Hu,YaWei, (2014), "Fuzzy Reliability Estimation for Cutting Tools", ELSEVIER ,ScienceDirect , Procedia CIRP, 15, 62 – 67
 56. Leys, C., et al., Detecting outliers: Do not use standard deviation around the mean, use absolute deviation around the median, Journal of Experimental Social Psychology, Volume 49, Issue 4, July 2013, pp. 764-766

57. M. Aliev, Isbendiyar; Kara, Zohre, (2004), "Fuzzy system reliability analysis using time dependent fuzzy set", Control and Cybernetics, vol.: 33, No.: 4 , pp. 654-662
58. M. Cooke , Roger; Nieboer, Daan; Misiewicz, (2014), "Fat-tailed Distributions, Data, Diagnostics and Dependence", Volume 1, Mathematical Models and Methods in Reliability Set coordinated by Nikolaos Limnios and Bo Henry Lindqvist, British Library Cataloguing-in-Publication Data A CIP record for this book is available from the British Library ISBN 978-1-84821-792-8.
59. M. SHUAIB KHAN; PASHA G.R; AHMED HESHAM PASHA, (2008), "Theoretical Analysis of Inverse Weibull Distribution", WSEAS TRANSACTIONS on MATHEMATICS, Issue 2, Volume 7, pp. 30-38
60. Mathworks,(2021),<https://www.mathworks.com/help/fuzzy/pimf.html> , friaday, 11.50
61. Obikee Obikee, Adaku C., Ebuh; Godday U., Happiness; Obiora-Ilouno, (2014) , "Comparison of Outlier Techniques Based on Simulated Data", Open Journal of Statistics, 2014, 4, 536-561 Published Online August 2014 in SciRes. <http://www.scirp.org/journal/ojshttp://dx.doi.org/10.4236/ojs.2014.47051>.
62. Pak ,Abbas ; (2016)," Inference for the Shape Parameter of Lognormal Distribution in Presence of Fuzzy Data " Pak.j.stat.oper.res. Vol.XII No.1, pp. 89-99
63. Pak ,Abbas ; (2017)," Statistical inference for the parameter of Lindley distribution based on fuzzy data" Brazilian Journal of Probability and Statistics, Vol. 31, No. 3, 502–515
64. Pak, Abbas; Ali, Gholam & Saraj, Mansour, (2013), "Inference for the Weibull Distribution Based on Fuzzy Data", Int J Syst Assur Eng Manag, vol.: 36, no. 2, pp. 339 – 358
65. Pak, Abbas; Ali, Gholam & Saraj, Mansour, (2013), "Reliability estimation in Rayleigh distribution based on fuzzy lifetime data", Int J Syst Assur Eng Manag, springer , DOI 10.1007/s13198-013-0190-
66. Panwar, M. S.; Tomer ; Sanjeev, K., (2019) , " Robust Bayesian Analysis of Lifetime Data from Maxwell Distribution" , Austrian Journal of statistics January 2019, Volume 48, 38{55. <http://www.ajs.or.at/doi:10.17713/ajs.v47i4.692>
67. Passarin, Katia, (2004), "Robust Bayesian Estimation", Journal of Geodesy, DOI: 10.1007/BF00806343,
68. Peter ter Berg, (2009) , " Unification of Frechet and Weibull Distribution " , DNB Working Paper, No.198/pp. 1-13

69. R. Yager, Ronald , (2008), " Level sets and the extension principle for interval valued fuzzy sets and its application to uncertainty measures" , Information Sciences 178 - 3565–3576.
70. Rusiecki m Andrzej , (2009), " Robust Learning Algorithm with LTS Error Function", Encyclopedia of Artificial Intelligence, DOI: 10.4018/978-1-59904-849-9.ch204
-
71. Rutkowski, Leszek ,(2004), " NEURO-FUZZY SYSTEMS Structures, Learning and Performance Evaluation", KLUWER ACADEMIC PUBLISHERS NEW YORK, BOSTON, DORDRECHT, LONDON, MOSCOW.
72. S. Foss, D. Korshunov, S. Zachary, (2013), "An Introduction to Heavy-Tailed and Subexponential Distributions", Springer Science & Business Media, 21 May 2013, p:1-166
73. S. N. Sivanandam, S. Sumathi & S. N. Deepa, (2007), "Introduction to Fuzzy Logic using MATLAB", "With 304 Figures and 37 Tables", © Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
74. Safdar , Adel Asgari , (2014), " A METHOD FOR DEFUZZIFICATION BASED ON PROBABILITY DENSITY FUNCTION (II)" Indian Journal of Fundamental and Applied Life Sciences ISSN: 2231– 6345 (Online) An Open Access, Online International Journal Available at www.cibtech.org/sp.ed/jls/2014/04/jls.htm 2014 Vol. 4 (S4), pp. 234-240/Safdar.
75. Sengupta, Atanu , Vasant, Pandian , J. Andeeski ,Cvetko, (2008), "Fuzzy Optimization with Robust Logistic Membership Function: A Case Study In For Home Textile Industry', Proceedings of the 17th World Congress , The International Federation of Automatic Control
76. Seo ,Jung In ; Kim ,Yongku (2016): Robust Bayesian Estimation of a Two-Parameter Exponential Distribution Under Generalized Type-I Progressive
77. Shaiq, M., & Viertl, R., (2014), " On parameter estimation for the three parameter Weibull distribution and estimation of the reliability function based on fuzzy life time data", Institut f. Statistik u. Wahrscheinlichkeitstheorie 1040 Wien, Wiedner Hauptstr. 8-10/107,pp. 1-18
78. Shan , Guodong ·Hou, Yiheng · Liu, Baisen, (2020)," Bayesian robust estimation of partially functional linear regression models using heavy-tailed distributions", Computational Statistics , Electronic supplementary material <https://doi.org/10.1007/s00180-020-00975-3>

79. Chaira , Tamalika, (2019), "Fuzzy Set and Its Extension -The Intuitionistic Fuzzy Set", John Wiley & Sons, Inc.
80. Tao ,Terence ,(2011), "An Introduction to Measure Theory", the American Mathematical Society (AMS), pp. 77-89
81. Tofallis, Chris, (2015) ," A better measure of relative prediction accuracy for model selection and model estimation " , Journal of the Operational Research Society 66, pp.1352–1362
82. Torabi, H. & Mirhosseini S. M., (2009), " The Most Powerful Tests for Fuzzy Hypotheses Testing with Vague Data" , Applied Mathematical Sciences, Vol. 3, 2009, no. 33,pp. 1619 – 1633
83. Wang , Shuang; M. Keller, James; Burks , Kathryn;Skubic , Marjorie; Tyrer , Harry , (2006)," Assessing Physical Performance of Elders Using Fuzzy Logic" , International Conference on Fuzzy Systems Sheraton Vancouver Wall Centre Hotel, Vancouver, BC, Canada.
84. Wang ,Chong; Blei , David M, (2018) , "A General Method for Robust Bayesian Modeling" , International Society for Bayesian Analysis 13, Number 4, pp. 1163–1191
85. Wierman, Adam (2014). "Catastrophes, Conspiracies, and Subexponential Distributions (Part III)". Rigor + Relevance blog. RSRG, Caltech.
86. Wu, Hsien-Chung, (2003), "The fuzzy estimators of fuzzy parameters based on fuzzy random variables", European Journal of Operational Research, 146, pp. 101–114
87. Wu, Hsien-Chung, (2004), "Fuzzy reliability estimation using Bayesian approach", Computers & Industrial Engineering, 46, pp. 467–493
88. Zadeh, L. A., (1965), "Fuzzy Sets", Information and control, Department of Electrical Engineering and Electronics Research Laboratory, University of California, Berkeley ,California ,8, 338-353.
89. Zadeh, L. A., (1968), "Fuzzy Algorithms", Information and control, 12, 94-102
90. Zadeh, L., A., (1968), "Probability Measures of Fuzzy Events", Journal of Mathematical analysis and applications 23, 421-428.
91. Zadeh, L., A., (1972),"A Fuzzy-Set-Theoretic Interpretation of Linguistic Hedges" , Journal of Cybernetics, 2:3, 4-34.
92. Zadeh, L., A., (1973), "Outline of a New Approach to the Analysis of Complex Systems and Decision Processes", IEEE TRANSACTIONS ON SYSTEMS, MAN, AND CYBERNETICS, VOL. SMC-3, NO. 1, JANUARY ,pp:28-44.

In many situations of daily life, and upon initiating with operations of statistical analysis, we encounter data that suffers from inaccuracies in its measurement, either due to errors of observation or measurement, or the lack of appropriate conditions for collecting such data, such as failure times of machines, equipment, and electrical devices, medical, engineering and economic data. These data are often accompanied by values that may be far from the original data format and which constitute data with a heavier tail. When estimating these phenomena that suffer from inaccuracy in their measurement (fuzziness) in addition to the presence of outlier values in them using the usual estimation methods, this leads to misleading, inaccurate and unrepresentative estimates of the reality of the phenomenon being studied. Therefore, it is necessary to find appropriate and robust methods of estimation under these circumstances to ensure the accuracy of the obtained estimations. In this thesis, a method is proposed to transform any traditional probability distribution into a fuzzy probability distribution using the α -cut set principle, by finding the fuzzy cumulative distribution function $\tilde{F}(\tilde{t}_{A^{(\alpha)}})$ at any value of the set of segments $\tilde{t}_{A^{(\alpha)}}$ and then derive this fuzzy cumulative to find the fuzzy probability function $\tilde{f}(\tilde{t})$ And then to find a Bayesian method that has robust by proposing that for each of the parameters to be estimated at each item of the sample vector t_i drawn from a probability distribution $\varphi(t_i | \theta_i)$ there is an initial information represented by an initial distribution $\pi(\theta_i | \underline{\vartheta})$ for the parameter θ_i with the meta parameter(s) $\underline{\vartheta}$ by integrating the proposed fuzzy probability distribution with the proposed robust Bayesian method, a new general robust Bayesian fuzzy method was obtained for the probability distributions. By using Monte-Carlo simulation experiments, the proposed method was tested and compared with the normal Bayesian method by generating a crisp sample with a size of (100) observations, and then using five cut-off values (α -cut = 0.2, 0.4, 0.5, 0.7, 0.9), and the data were polluted with an outliers One, two and three values, and then the fuzzy groups that were used to find the estimators of Bayes were obtained. This method was applied to three probability distributions, namely, the Exponential, Weibull, and Standard Kumaraswamy distribution. It was concluded that the proposed method is effective in estimating the parameters of the probability distribution more accurately than the normal Bayesian method when the data contains outliers. The proposed method was also applied to real data representing failure times of the heart stent (heart catheter stent), which represents the time per month from the beginning of the cardiac stent installation until the stent stopped working (failure) for (100) patients for whom cardiac catheterization was performed, which was obtained from Shahid Al-Mihrab Center for Cardiac Catheterization and Surgery affiliated to Marjan General Teaching Hospital - Babylon Health Department during the year (2021) and it was concluded that the method is effective and appropriate in estimating the parameters of the real data distribution.



Republic of Iraq
Ministry of Higher Education
And Scientific Research
University of Karbala
Faculty of Management
And Economics
Department of Statistics
Graduate Studies



A new general robust fuzzy Bayesian method for probability distributions

A thesis

Submitted to the council of the college of Administration
& Economics\ University of Karbala as partial fulfillment of the
requirements for the degree of Philosophy of Statistics Sciences

By

Bashar Khalid Ali

Supervision

Prof. Dr . Mahdi Wahab Nea'ama

A.H. 1443

A.D. 2022