



جمهورية العراق
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة كربلاء
كلية الإدارة والاقتصاد
قسم الإحصاء

تقدير المعولية لتوزيع دالة القوى الموسع باستعمال
(NLTE – X Family) مع تطبيق عملي

رسالة مقدمة الى مجلس كلية الإدارة والاقتصاد /جامعة كربلاء
وهي جزء من متطلبات نيل درجة الماجستير في علوم الإحصاء

كتبت بواسطة

فلاح حسن جبار عبدالحسن

بإشراف

أ. م. د. د. ايناس عبدالحافظ محمد

2022 م

1444 هـ

كربلاء المقدسة

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

هُوَ الَّذِي جَعَلَ الشَّمْسَ ضِيَاءً وَالْقَمَرَ نُورًا وَقَدَّرَهُ
مَنَازِلَ لِتَعْلَمُوا عَدَدَ السِّنِينَ وَالْحِسَابَ مَا خَلَقَ اللَّهُ
ذَلِكَ إِلَّا بِالْحَقِّ يُفَصِّلُ الْآيَاتِ لِقَوْمٍ يَعْلَمُونَ ﴿٥﴾

صَدَقَ اللَّهُ الْعَظِيمُ [يونس: 5]

إقرار المشرف

أشيد بأن إعداد هذه الرسالة الموسومة (تقدير المعولية لتوزيع دالة القوى الموسع باستعمال NLTE-X Family مع تطبيق عملي) والتي تقدم بها الطالب " فلاح حسن جبار " قد جرى بإشرافي في قسم الاحصاء - كلية الادارة والاقتصاد - جامعة كربلاء، وهي جزء من متطلبات نيل درجة ماجستير علوم في الاحصاء.



أ.م.د. ايناس عبدالحافظ محمد

التاريخ: 2022/9/1

توصية رئيس قسم الاحصاء

بناءً على توصية الاستاذ المشرف، أرشح الرسالة للمناقشة.



رئيس قسم الاحصاء

التاريخ: 2022/9/1

إقرار الخبير اللغوي

أشيد بأن الرسالة الموسومة (تقدير المعولية لتوزيع دالة القوى الموسع باستعمال NLTE-X Family مع تطبيق عملي) قد جرى مراجعتها من الناحية اللغوية تحت اشرافي اذ أصبحت خالية من الاخطاء اللغوية ولأجله وقعت.



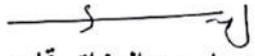
الخبير اللغوي

أ.م.د. علياء نصرت حسن

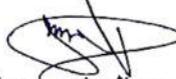
جامعة كربلاء – كلية التربية للعلوم الانسانية

إقرار لجنة المناقشة

نشهد نحن أعضاء لجنة المناقشة بأننا قد اطلعنا على الرسالة الموسومة (تقدير المعولية لتوزيع دالة القوى الموسع باستعمال NLTE-X Family مع تطبيق عملي) والمقدمة من قبل الطالب "فلاح حسن جبار" وناقشنا الطالب في محتوياتها وفيما له علاقة بها، ووجدنا بأنها جديرة بنيل درجة ماجستير علوم في الإحصاء بتقدير () .


أ.م.د بهاء عبدالرزاق قاسم
عضواً

2022 / 9 / 11


أ.د. فاضل عبدالعباس عبدالحسين
رئيساً

2022 / 9 / 11


أ.م. د ايناس عبدالحافظ محمد
عضواً ومشرفاً

2022 / 9 / 11


أ.م.د صدى فياض محمد
عضواً

2022 / 9 / 11

إقرار رئيس لجنة الدراسات العليا

بناء على اقرار المشرف العلمي والخبير اللغوي على رسالة الماجستير للطالب
" فلاح حسن جبار " الموسومة بـ (تقدير المعولية لتوزيع دالة القوى
الموسع باستعمال NLTE-X Family مع تطبيق عملي) ارشح هذه
الرسالة للمناقشة.



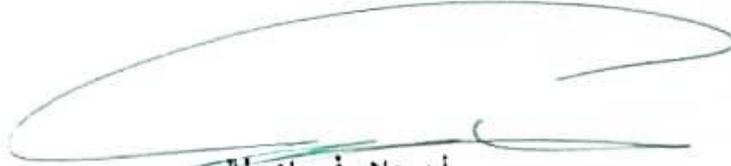
أ.د محمد حسين كاظم الجبوري

رئيس لجنة الدراسات العليا

معاون العميد للشؤون العلمية والدراسات العليا

مصادقة مجلس الكلية

صادق مجلس كلية الادارة والاقتصاد/ جامعة كربلاء على قرار لجنة المناقشة.



أ.د. علاء فرحان طالب

عميد كلية الادارة والاقتصاد- جامعة كربلاء

2022 / 9 / 11

الإهداء

إلى من تربيته في أحضانهِ وارتويتُ من أنهارهِ ... وطني

إلى مَنْ علّمني السّمو والشّموخ والدي العزيز

إلى مَنْ أغمرتني بالمحبة والحنان والدتي العزيزة

إلى رفاق مسيرتي الآمي وافراحي ... أخوتي وأخواتي

إلى سندي ونور عيني ... زوجتي وأولادي (رضا ومصطفى وطيبة)

إلى القناديل المضيئة في سماء العلم والمعرفة... أساتذتي الأفاضل

أهدي ثمرة جهدي المتواضع هذا

شكر وتقدير

الحمد لله حق حمده والصلاة والسلام على خير خلقه محمد (صلى الله عليه وآله وسلم)
وعلى آله الطيبين الطاهرين أفضل الصلاة والسلام، اول الشكر وآخره لله (سبحانه وتعالى)
على ما وفقني واعانني به لإنجاز هذه الرسالة وتحمل صعباتها.
يطيب لي وقد انتهيت من اعداد هذه الرسالة ان أتقدم بخالص شكري وعظيم احترامي الى
مشرفتي الأستاذ المساعد الدكتورة (ايناس عبد الحافظ محمد) على تفضلها بالأشراف على
رسالتي وعلى جهودها التي بذلتها معي عبر توجيهاتها وارشاداتها السديدة التي كان لها الأثر
الكبير في انجاز هذه الرسالة.

واتوجه بالشكر الجزيل إلى السادة رئيس لجنة المناقشة وأعضائهم لتفضلهم بقبول مناقشة
هذه الرسالة متمنياً أن تنال استحسانهم ورضاهم.

كما أتقدم بالشكر والعرفان والامتنان الى جميع أساتذتي في قسم الإحصاء -كلية الإدارة
والاقتصاد - جامعة كربلاء لما أفاضوا عليّ من علمهم الغزير وكرمهم الواسع طوال مدة
الدراسة.

وأقدم الشكر والتقدير الى جميع العاملين في العتبتين المقدستين الحسينية والعباسية
وخصوصا العاملين في المكتبتين التابعة للعتبتين، ومكتبة كلية الإدارة والاقتصاد في جامعة
كربلاء، لما أبدوه من مساعدة وطيب المعاملة.

كما اشكر جميع زملائي في الدراسات العليا وأخص بالذكر الأستاذ علي عبدالزهرة والأستاذ
علي محمد جواد والأستاذ عبدالامير طعمة والأستاذ احمد تركي وجميع الاخوة والاخوات
من زملائي في الدفعة متمنيا لهم التوفيق والنجاح الدائم.

ويطيب لي ان اشكر الأخ العزيز الأستاذ (منتظر جمعة مهدي) في رئاسة جامعة البصرة لما ابداه من مساعدة في انجاز البرنامج الخاص في البحث. وأخيرا أتوجه بالشكر الخاص لجميع افراد عائلتي واطح بالذكر والدي العزيزة ووالدي الحبيب اللذين لم ينفكا من دعائهم لي وزوجتي العزيزة التي كانت السند والمعين طيلة فترة الدراسة.

وختاما أتقدم بالشكر والتقدير الى كل الذين أبدوا المساعدة والعون واعتذر لمن فاتني ذكره بالشكر، اسال الله ان لا يضيع لهم اجراً.

والله ولي التوفيق

الباحث

المحتويات

الصفحة	الموضوع
أ	الآية
ب	الاهداء
ج - د	شكر وتقدير
هـ - و - ز	قائمة المحتويات
ط - ك	قائمة الجداول
ل	قائمة الاشكال
م - ن	قائمة الرموز
س	المستخلص
10-2	الفصل الأول : منهجية الرسالة
2	1-1 المقدمة
3	2-1 مشكلة الرسالة
3	3-1 اهداف الرسالة
4	4-1 الاستعراض المرجعي
4	1-4-1 الدراسات المتعلقة بتركيب التوزيعات
7	1-4-1 الدراسات المتعلقة بتوزيع دالة القوى
50-12	الفصل الثاني : الجانب النظري
12	1-2 تمهيد
12	2-2 اساسيات ومفاهيم عامة
12	1-2-2 دالة المعولية
13	2-2-2 دالة المخاطرة
14	3-2-2 دالة المخاطرة التجميعية
14	4-2-2 تركيب التوزيعات
14	5-2-2 توزيع دالة القوى
17	6-2-2 العائلة الاسية الجديدة
18	3-2 الانموذج الاحتمالي المقترح
18	1-3-2 توزيع دالة القوى الموسع (NLTE-PF)
23	2-3-2 دالة المعولية للأنموذج الاحتمالي الجديد (NLTE-PF)
24	3-3-2 دالة المخاطرة ودالة المخاطرة التجميعية لتوزيع (NLTE-PF)

27	الدالة الكمية لتوزيع (NLTE-PF)	4-3-2
28	الخصائص الهيكلية لتوزيع (NLTE-PF)	5-3-2
28	العزم اللامركزي الرائي	1-5-3-2
31	العزم المركزي الرائي	2-5-3-2
36	معامل الالتواء	3-5-3-2
36	معامل التفرطح	4-5-3-2
37	معامل الاختلاف	5-5-3-2
38	الدالة المولدة للعزوم	6-5-3-2
40	الدالة المميزة	7-5-3-2
42	طرائق التقدير	6-3-2
42	طريقة الإمكان الأعظم	1-6-3-2
44	طريقة المربعات الصغرى	2-6-3-2
45	طريقة المقدرات التجزئية	3-6-3-2
46	طريقة الحد الأقصى الناتج لمقدرات التباعد	4-6-3-2
48	معايير مقارنة طرائق التقدير	4-2
49	معايير اختيار افضل توزيع	5-2
50	معيار معلومات اكاكي	1-5-2
50	معيار معلومات اكاكي المصحح	2-5-2
50	معيار المعلومات البيزي	3-5-2
70-52	الفصل الثالث : الجانب التجريبي والتطبيقي	
52	تمهيد	1-3
52	المبحث الأول / الجانب التجريبي	2-3
52	مفهوم المحاكاة	1-2-3
53	مراحل تجربة المحاكاة	2-2-3
55	نتائج المحاكاة	3-2-3
61	المبحث الثاني / الجانب التطبيقي	3-3
62	نبذة عامة عن جهاز السيباب	1-3-3
63	بيانات البحث الحقيقية	2-3-3
64	اختبار حسن المطابقة	1-2-3-3
64	معايير اختيار افضل توزيع	2-2-3-3
67	تقدير دالة المعولية للبيانات الحقيقية	3-2-3-3

73-72	الفصل الرابع : الاستنتاجات والتوصيات	
72	الاستنتاجات	1-4
72	التوصيات	2-4
83-75	المصادر والمراجع	
75	المراجع	
75	المصادر العربية	
75	المصادر الاجنبية	
129-85	الملاحق	
87	جداول مقدرات المعلمات ومقدرات دالة المعولية والاشكال الخاصة بمقدرات دالة المعولية	A
121	برنامج محاكاة الجانب التجريبي	B
128	برنامج الجانب التطبيقي	C
B -A	Abstract	

قائمة الجداول

رقم الصفحة	عنوان الجدول	رقم الجدول
17	ابرز الخصائص الإحصائية لتوزيع دالة القوى (PF)	(1-2)
53	القيم الافتراضية الأولية للمعلمات والنماذج المقترحة	(1-3)
56	يمثل الرتب الكلية لمتوسط مربعات الخطأ (MSE) لطرائق التقدير كافة ولجميع قيم المعلمات الافتراضية ولجميع النماذج	(2-3)
57	يمثل الرتب الكلية لمتوسط مربعات الخطأ (MSE) لطرائق التقدير كافة ولجميع قيم المعلمات الافتراضية وحسب حجم العينة	(3-3)
59	يمثل الرتب لمتوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) لمقدر دالة المعولية لطرائق واحجام العينات والنماذج كافة	(4-3)
60	يمثل مجموع الرتب الكلية لمتوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) لطرائق تقدير دالة المعولية حسب حجم العينة	(5-3)
63	يمثل أوقات اشتغال جهاز CPAP لحين العطل مقاسة بالأشهر مرتبة تصاعدياً	(6-3)
63	قيم المؤشرات الاحصائية للبيانات الحقيقية	(7-3)
64	يبين قيم المعايير المستخدمة للمقارنة بين توزيع (NLTE-PF) وتوزيع دالة القوى (PF)	(8-3)
67	يبين قيم مقدر دالة المعولية ومقدر الدالة التراكمية (CDF) للبيانات الحقيقية	(9-3)
87	يوضح متوسط القيم التقديرية للمعلمات ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) والرتب الجزئية لطرائق التقدير كافة ولكافة احجام العينات للأنموذج الأول ($\lambda = 0.05$ ، $\beta = 1$ ، $\alpha = 2$)	(1)
88	يوضح متوسط القيم التقديرية للمعلمات ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) والرتب الجزئية لطرائق التقدير كافة ولكافة احجام العينات للأنموذج الثاني ($\lambda = 1.5$ ، $\beta = 1$ ، $\alpha = 2$)	(2)
89	يوضح متوسط القيم التقديرية للمعلمات ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) والرتب الجزئية لطرائق التقدير كافة ولكافة احجام العينات للأنموذج الثالث ($\lambda = 0.05$ ، $\beta = 2.5$ ، $\alpha = 2$)	(3)
90	يوضح متوسط القيم التقديرية للمعلمات ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) والرتب الجزئية لطرائق التقدير كافة ولكافة احجام العينات للأنموذج الرابع ($\lambda = 1.5$ ، $\beta = 2.5$ ، $\alpha = 2$)	(4)
92	يوضح متوسط القيم التقديرية للمعلمات ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) والرتب الجزئية لطرائق التقدير كافة ولكافة احجام العينات للأنموذج الخامس ($\lambda = 0.05$ ، $\beta = 1$ ، $\alpha = 4$)	(5)

93	يوضح متوسط القيم التقديرية للمعلمات ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) والرتب الجزئية لطرائق التقدير كافة ولكافة احجام العينات للأنموذج السادس ($\lambda=1, \beta=1.5, \alpha=1$)	(6)
94	يوضح متوسط القيم التقديرية للمعلمات ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) والرتب الجزئية لطرائق التقدير كافة ولكافة احجام العينات للأنموذج السابع ($\lambda=0.5, \beta=3, \alpha=3$)	(7)
95	يوضح متوسط القيم التقديرية للمعلمات ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) والرتب الجزئية لطرائق التقدير كافة ولكافة احجام العينات للأنموذج الثامن ($\lambda=0.5, \beta=1, \alpha=4$)	(8)
97	يبين القيم الحقيقية لدالة المعولية ومقدراتها ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) والرتب الجزئية لمتوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) طرائق التقدير كافة للأنموذج الأول وحسب حجوم العينات	(9)
100	يبين القيم الحقيقية لدالة المعولية ومقدراتها ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) والرتب الجزئية لمتوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) طرائق التقدير كافة للأنموذج الثاني وحسب حجوم العينات	(10)
103	يبين القيم الحقيقية لدالة المعولية ومقدراتها ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) والرتب الجزئية لمتوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) طرائق التقدير كافة للأنموذج الثالث وحسب حجوم العينات	(11)
106	يبين القيم الحقيقية لدالة المعولية ومقدراتها ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) والرتب الجزئية لمتوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) طرائق التقدير كافة للأنموذج الرابع وحسب حجوم العينات	(12)
109	يبين القيم الحقيقية لدالة المعولية ومقدراتها ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) والرتب الجزئية لمتوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) طرائق التقدير كافة للأنموذج الخامس وحسب حجوم العينات	(13)
112	يبين القيم الحقيقية لدالة المعولية ومقدراتها ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) والرتب الجزئية لمتوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) طرائق التقدير كافة للأنموذج السادس وحسب حجوم العينات	(14)
115	يبين القيم الحقيقية لدالة المعولية ومقدراتها ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) والرتب الجزئية لمتوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) طرائق التقدير كافة للأنموذج السابع وحسب حجوم العينات	(15)
118	يبين القيم الحقيقية لدالة المعولية ومقدراتها ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) والرتب الجزئية لمتوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) طرائق التقدير كافة للأنموذج الثامن وحسب حجوم العينات	(16)

قائمة الأشكال

رقم الصفحة	رقم الشكل	عنوان الشكل
15	(1-2)	دالة الكثافة الاحتمالية (pdf) لتوزيع دالة القوى ولقيم مختلفة لمعلمة الشكل (β)
16	(2-2)	الدالة التراكمية (CDF) لتوزيع دالة القوى ولقيم مختلفة لمعلمة الشكل (β)
16	(3-2)	دالة المخاطرة (HF) لتوزيع دالة القوى (PF)
21	(4-2)	دالة الكثافة الاحتمالية (pdf) لتوزيع دالة القوى الموسع (NLTE-PF) ولقيم مختلفة لمعلمتي الشكل (β, λ)
22	(5-2)	الدالة التراكمية (CDF) لتوزيع دالة القوى الموسع (NLTE-PF) ولقيم مختلفة لمعلمتي الشكل (β, λ)
24	(6-2)	دالة المعولية لتوزيع دالة القوى الموسع (NLTE-PF) ولقيم مختلفة لمعلمتي الشكل (β, λ)
25	(7-2)	دالة المخاطرة لتوزيع دالة القوى الموسع (NLTE-PF) ولقيم مختلفة لمعلمتي الشكل (β, λ)
26	(8-2)	دالة المخاطرة للتوزيع الاسي (EXP)
65	(1-3)	يوضح ملائمة توزيع (NLTE-PF) في تمثيل البيانات الحقيقية بشكل أفضل وأدق مقارنة بتوزيع دالة القوى (PF)
66	(2-3)	يوضح الدالة التراكمية (CDF) لتوزيع (NLTE-PF) مقارنة مع الدالة التراكمية (CDF) للتوزيع التجريبي للبيانات الحقيقية
66	(3-3)	يوضح دالة المعولية لتوزيع (NLTE-PF) مقارنة مع دالة المعولية للتوزيع التجريبي للبيانات الحقيقية
99	(1)	يبين دالة المعولية الحقيقية والمقدرة لطرائق التقدير كافة ولجميع احجام العينات للأنموذج الاول
102	(2)	يبين دالة المعولية الحقيقية والمقدرة لطرائق التقدير كافة ولجميع احجام العينات للأنموذج الثاني
105	(3)	يبين دالة المعولية الحقيقية والمقدرة لطرائق التقدير كافة ولجميع احجام العينات للأنموذج الثالث
108	(4)	يبين دالة المعولية الحقيقية والمقدرة لطرائق التقدير كافة ولجميع احجام العينات للأنموذج الرابع
111	(5)	يبين دالة المعولية الحقيقية والمقدرة لطرائق التقدير كافة ولجميع احجام العينات للأنموذج الخامس
114	(6)	يبين دالة المعولية الحقيقية والمقدرة لطرائق التقدير كافة ولجميع احجام العينات للأنموذج السادس

117	يبين دالة المعولية الحقيقية والمقدرة لطرائق التقدير كافة ولجميع احجام العينات للأنموذج السابع	(7)
120	يبين دالة المعولية الحقيقية والمقدرة لطرائق التقدير كافة ولجميع احجام العينات للأنموذج الثامن	(8)

قائمة الرموز

Mean	المعنى	الرمز
Probability density function	دالة الكثافة الاحتمالية	$g(.)$
Cumulative density function	دالة الكثافة التجميعية	$G(.)$
Reliability function	دالة المعولية	$R(.)$
Hazard rate function	دالة المخاطرة	$h(.)$
Cumulative hazard function	دالة المخاطرة التجميعية	$H(.)$
The probability density function of the new lifetime exponential-X (NLTE-X) family	دالة الكثافة الاحتمالية للعائلة الاسية الجديدة	$g(x; \lambda, \xi)$
The Cumulative density function of the new lifetime exponential-X (NLTE-X) family	دالة الكثافة التجميعية للعائلة الاسية الجديدة	$G(x; \lambda, \xi)$
The new lifetime exponential- Power function distribution	الانموذج الاحتمالي المقترح الجديد (توزيع دالة القوى الموسع الجديد)	(NLTE-PF)
The probability density function of the new proposed model	دالة الكثافة الاحتمالي للأنموذج المقترح الجديد	$g_{nlte-pf}(\cdot)$
The Cumulative density function of the new proposed model	دالة الكثافة التجميعية للأنموذج المقترح الجديد	$G_{nlte-pf}(\cdot)$
Quantile function	الدالة الكمية	$x(\cdot)$
Lambert W function	دالة لامبرت	$W(\cdot)$
Likelihood function	دالة الإمكان الاعظم	$L(\cdot)$
Gamma function	دالة غاما	$\Gamma(\cdot)$
Upper incomplete Gamma function	دالة غاما غير تامة العليا	$\Gamma(\cdot, \cdot)$

Lower incomplete Gamma function	دالة غاما غير تامة الدنيا	$\gamma(\dots)$
Non-central r^{th} moment	العزم اللامركزي الرائي	μ'_r
Central r^{th} momen	العزم المركزي الرائي	μ_r
Maximum likelihood estimation	طريقة الإمكان الاعظم	MLE
Least square Method	طريقة المربعات الصغرى	LS
Method of Percentiles Estimators	طريقة المقدرات التجزئية	P.C
Maximum product of spacing estimation method	طريقة الحد الأقصى الناتج لمقدرات التباعد	MPS
Mean Square Error	متوسط مربعات الخطأ	MSE
Integrative Mean Square Error	متوسط مربعات الخطأ التكاملية	IMSE
Chi-square statistic	إحصاءه كاي سكوير	χ^2
Akaike Information Criteria	معيار معلومات اكاكي	AIC
Akaike Information Correct	معيار معلومات اكاكي المصحح	AIC _c
Bayesian Information Criterion	معيار المعلومات البيزي	BIC

المستخلص

تعد عملية التركيب للتوزيعات الاحتمالية من العمليات المهمة التي زادت أهميتها بشكل كبير عبر العقود القليلة الماضية ، ويرجع ذلك الى زيادة قدرة التوزيعات الكلاسيكية في تمثيل البيانات الحقيقية بشكل أوسع وادق ، وان عملية تركيب التوزيعات باستعمال عوائل وفئات مشتقة تعدّ احد الطرق المستخدمة حديثا في توسعة التوزيعات ، وفي هذه الرسالة تم استعمال العائلة الاسية الجديدة (NLTE-X Family) في بناء انموذج احتمالي جديد يدعى (The new lifetime exponential- Power function distribution) (NLTE-PF) والانموذج المقترح هو توسعة لتوزيع دالة القوى ، و الهدف من استخدام هذه العائلة في التركيب هي زيادة مرونة التوزيع الأساس (توزيع دالة القوى) والحصول على دالة مخاطرة على شكل حوض الاستحمام وهذا ينعكس إيجابا على نمذجة البيانات بشكل أوسع ، إذ تم دراسة بعض خصائصه الإحصائية ، وتم تقدير معالم و دالة المعولية للانموذج الاحتمالي الجديد بأربعة طرائق تقدير (طريقة الإمكان الأعظم ، طريقة المربعات الصغرى ، طريقة المقدرات التجزئية ، طريقة الحد الأقصى الناتج لمقدرات التباعد) ، وقد تم اجراء دراسة محاكاة موجزة باستعمال أسلوب (مونت-كارلو) لتقييم أداء مقدرات المعالم ومقدرات دالة المعولية للانموذج الجديد بالطرائق الأربعة ، إذ تم استعمال برنامج كتب بلغة (Wolfram Mathematica 12.2) ، وتم اجراء عدة تجارب بأحجام عينات صغيرة ومتوسطة وكبيرة (25،50،75،100) ، واستعمل المعيار الاحصائي متوسط مربعات الخطأ (MSE) للمقارنة بين طرائق التقدير الأربعة لمقدرات المعالم ومتوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) للمقارنة بين طرائق التقدير الأربعة لمقدرات دالة المعولية.

وطبق الانموذج الاحتمالي الجديد (NLTE-PF) على بيانات حقيقية بواقع (96) مشاهدة تمثل أوقات الاشتغال لجهاز السيباب (CPAP) لحين العطل، تم المقارنة بين توزيع (NLTE-PF) و توزيع دالة القوى (PF) ، اعطى الانموذج الجديد مزيدا من المرونة والكفاءة في تمثيل البيانات الحقيقية واثبت أفضليته عن توزيع دالة القوى (PF) ، وقدرت دالة المعولية لتوزيع (NLTE-PF) بطريقة الإمكان الأعظم التي تفوقت على الطرائق الاخرى في تقدير دالة المعولية لإحجام العينات المتوسطة والكبيرة .



الفصل الأول
منهجية الرسالة

1-1 المقدمة (Introduction) :

يتم استخدام التوزيعات الإحصائية بشكل اوسع في دراسة الظواهر الطبيعية ، وعلى مر السنين تم تحديد العديد من التوزيعات ودراستها ومع ذلك فان لديها نطاقا محدودا من القدرات وعلية لا يمكن استخدامها في جميع المواقف وهذا يرجع الى حقيقة ان خصائص الظاهرة تتغير بمرور الوقت ، ونتيجة لذلك طور الباحثون توزيعات جديدة تمتاز بالمرونة والدقة في تحليل بيانات الظاهرة عن طريق تركيب التوزيعات بطرق متعددة التي تمكننا من انشاء انموذج توزيع احتمالي جديد بناءً على توزيع موجود، لذلك من الممكن انتاج مجموعه محدثة من التوزيعات الاحتمالية .

ظهرت التوزيعات الاحتمالية المعممة نتيجة للتوافر الواسع لمعلمت إضافية حيث تؤدي إضافة معلمة خاصة الى الدوال الاحتمالية لزيادة دقة ملائمة البيانات التي تم الحصول عليها من الظواهر الطبيعية فضلاً عن دقة وصف أنموذج التوزيع ، وفي السنوات الأخيرة تم اجراء العديد من الاعمال البحثية لإنشاء توزيعات جديدة عن طريق انشاء عائلات وفئات جديدة عن طريق تعديل توزيع خط الأساس وذلك من خلال إضافة معلمت شكل إضافية وهذا ما يجعل التوزيع الناتج من العائلات والفئات الجديدة اكثر دقة ومرونة في الحصول على افضل تمثيل للبيانات مع اقل عدد من الأخطاء ، وهنا تكمن أهمية الدراسة للتوزيعات الناتجة من هذه العائلات والفئات .

وفي عام (2020)[44] قدم الباحث (Huo et al) عائلة توزيعات جديدة متفوقة تعرف بالعائلة الاسية الجديدة (NLTE-X Family) (The New Lifetime Exponential-X Family)، والتي تعد أحد الطرق المستخدمة لتوليد التوزيعات الجديدة، وسيكون محور هذه الرسالة، هو بناء أنموذج توزيع احتمالي جديد وذلك عن طريق استعمال العائلة الاسية الجديدة، واستخدام توزيع دالة القوى (Power function distribution) كتوزيع أساسي، ويدعى الانموذج الاحتمالي المقترح (NLTE-PF) (The new lifetime exponential- Power function distribution) ليكون عضوا جديدا ينتمي الى العائلة الاسية الجديدة (NLTE-X Family).

ولتحقيق هدف الدراسة ، قسمه على اربعة فصول ، الفصل الأول يتضمن هيكلية ومشكلته وهدف البحث والاستعراض المرجعي لبعض الدراسات ذات العلاقة ، في حين خصص الفصل الثاني للجانب النظري الذي يشمل المفاهيم الاساسية المتعلقة بالبحث وكذلك بناء الانموذج الاحتمالي الجديد باستعمال العائلة الاسية الجديدة (NLTE-X Family) ،ومن ثم اشتقاق بعض الخصائص الإحصائية وعرض الطرائق المستخدمة في تقدير المعلمت ودالة المعولية والتي كانت على النحو الاتي (طريقة الأماكن الأعظم "MLE"، طريقة المربعات الصغرى "LS"، طريقة المقدرات التجزئية "P.C"، طريقة الحد الأقصى الناتج لمقدرات التباعد "MPS") ، وقد خصص الفصل الثالث للجانب التجريبي و التطبيقية الذي تناول مفهوم المحاكاة واجراء تجربة محاكاة ومناقشة نتائجها وكذلك المقارنة بين طرائق التقدير التي تم التطرق

اليها في الفصل الثاني وبيان ايهما افضل للتقدير ، اما الجانب التطبيقي فقد تضمن تطبيق التجارب السابقة التي استخدمت في الجانب التجريبي على بيانات حقيقية من تقدير معلمات و دالة المعولية للأنموذج الموسع الجديد بأفضل طريقة للتقدير تم التوصل اليها في الجانب التجريبي وكذلك اجراء حسن المطابقة للبيانات و مناقشة النتائج ، والفصل الرابع قد خصص للاستنتاجات والتوصيات التي تم التوصل اليها .

2-1 مشكلة الرسالة (Problem of thesis):

تعد نمذجة احداث الحياة الواقعية والعمليات الطبيعية باستخدام التوزيعات الاحتمالية من اهم العمليات ، حيث تتميز هذه العمليات بالتعقيد والمخاطر لهذه الأسباب عمل الباحثون على تطوير التوزيعات الاحتمالية حيث تستمر التوزيعات الاحتمالية المؤكدة الكلاسيكية في التقصير في وصف دقيق للبيانات التي تم الحصول عليها من الاحداث الطبيعية نتيجةً للتطور الحاصل ، وهنا تكمن مشكلة عدم تمثيل البيانات بالشكل الصحيح والمطلوب ، لذا اقتضت الحاجة لزيادة مرونة ودقة التوزيعات المستخدمة في وصف البيانات وذلك عن طريق استخدام العديد من العوائل والفئات المشتقة حديثا لتوليد التوزيعات الموسعة ، ومنها عائلة التوزيعات الاسية الجديدة (NLTE-X Family) التي تزيد من مرونة التوزيعات وذلك من خلال إضافة معلمة للتوزيع الناتج التي تجعله اكثر مرونة وملاءمة في تحليل البيانات والحصول على دالة مخاطرة على شكل حوض الاستحمام .

3-1 اهداف الرسالة (Aim of thesis):

تتلخص اهداف البحث بالنقاط الآتية:

- 1- تقديم أنموذج توزيع احتمالي جديد يدعى (The new lifetime exponential- Power function distribution) وذلك من خلال استعمال العائلة الاسية الجديدة (NLTE-X Family).
- 2- اشتقاق الخصائص الإحصائية للأنموذج الاحتمالي الجديد واستعمال أربعة طرائق لتقدير معلمات ودالة المعولية للأنموذج الجديد وهي (طريقة الأماكن الأعظم "MLE"، طريقة المربعات الصغرى "LS"، طريقة المقدرات التجزئية "P.C"، طريقة الحد الأقصى الناتج لمقدرات التباعد "MPS").
- 3- المقارنة بين طرائق التقدير واختيار أفضل طريقة لتقدير معلمات ودالة المعولية للأنموذج الاحتمالي المقترح.
- 4- تطبيق الانموذج الاحتمالي الجديد على بيانات حقيقية وتقدير دالة المعولية بأفضل طريقة تقدير من بين طرائق التقدير الأخرى.

1-4-1 الاستعراض المرجعي (Review of Literature):

تمثل الأبحاث السابقة أثراً مهماً في البحث العلمي، وتمثل مصدراً مهماً للمعلومات الوفيرة للباحثين، وهي من الركائز الأساسية في بناء الانموذج الفكري عن طريق الاطلاع على تجارب الآخرين والاستفادة منها، ولما لها من أثر مهم في البحث العلمي سيتم تقسيم الاستعراض المرجعي الى قسمين، القسم الأول سيتضمن الأبحاث السابقة الخاصة بتركيب التوزيعات الاحتمالية، اما القسم الثاني سيتضمن الأبحاث السابقة التي أجريت على توزيع دالة القوى.

1-4-1 الدراسات المتعلقة بتركيب التوزيعات (Installing distributions):

❖ في عام (2009) قدم الباحث (Jose) وآخرون^[47] توزيعاً مركباً يدعى توزيع بيتا الموسع الجديد (MOBeta) الذي ينتمي الى عائلة مارشل اوكلين (The Marshall-Olkin family) التي استعملت في التركيب، وتم اشتقاق خصائص التوزيع الموسع الجديد وقدرت معالمته بطريقة الإمكان الأعظم، حيث اعطى مرونة ودقة في تمثيل البيانات التي طبقت عليه وكانت على مجموعتين.

❖ وفي عام (2010) قدم الباحثان (Lemonte and Cordeiro)^[52] انموذج احتمالي مركب وهو توزيع لوماكس الموسع الجديد (McLomax distribution) وتم التركيب باستعمال (The McDonald-G)، وتم اشتقاق بعض خصائصه الإحصائية وقدرت معالمه بطريقة الإمكان الأعظم، وبعد ذلك تمت مقارنته مع نماذجه الفرعية حيث اثبت فاعليته في نمذجة البيانات الواقعية التي طبقت عليه.

❖ في عام (2011) قدم الباحث (Bakouch) وآخرون^[23] توزيع Lindley الموسع الجديد الذي يدعى (The EL distribution) وهو توزيع مركب، حيث تم إيجاد بعض خصائصه وتقدير معالمته باستعمال طريقة الإمكان الأعظم، واثبت فاعليته ومرونة في تمثيل بيانات الحياة التي تم تطبيقها بعد مقارنته بمجموعة من التوزيعات.

❖ وفي العام نفسه اقترح الباحث (Barriga) وآخرون^[24] توزيع القوى الاسي الموسع الجديد (CEP) ذو الثلاثة معالم وهو توزيع مركب لتوزيع القوى الاسي الذي اقترحه Smith and Bain عام 1975، واشتقت بعض خصائصه وقدر معالمه باستعمال طريقة الإمكان الأعظم، وتم تطبيقه على ثلاثة مجاميع من البيانات الصغيرة والمتوسطة حيث اعطى كفاءة عالية ومرونة في تمثيلها من بين التوزيعات التي تمت مقارنته بها.

- ❖ في عام (2013) قدم الباحث (Lemonte) وآخرون [53] انموذجين مركبين احتماليين جديدين أحدهما توزيع كوماروسوامي المعمم (EK) ذو الثلاثة معلمات، وتوزيع كوماروسوامي المعمم اللوغارتمي (log-EK) ذو الأربعة معلمات، وتم اشتقاق بعض خصائصهما وقدر معلماتهما بطريقة (MLE)، وقد اثبت ان النموذجين الجديدين يكونان أفضل من بعض النماذج المعروفة في حال تطبيقهما بشكل فعال في تحليل بيانات العمر.
- ❖ في عام (2014) اقترح الباحث (Mead) [54] توزيعا مركبا وهو توزيع باريتو بيتا المعمم الاسي (GBEP) ذي الخمس معلمات ، تم الحصول على نماذج فرعية خاصة (, GBP, KEP, BEP, KP, BP, EP, P) عندما فرض معلماته مساوية لأعداد مختلفة في سبعة حالات ، وتم اشتقاق بعض خصائصه الهيكلية المختلفة ، قدر معالم الانموذج الجديد بطريقة الإمكان الأعظم ، وأثبت أهمية التوزيع الجديد في نمذجة البيانات الحقيقية التي تم تطبيقها .
- ❖ وفي عام (2015) اقترح الباحث (Bassiouny) وآخرون [34] توزيع لوماكس المركب وهو توسعة جديدة لتوزيع لوماكس يسمى توزيع لوماكس الاسي (ELomax)، وتم اشتقاق الخصائص الاحصائية للنموذج الجديد وقدر معالمه بطريقة الإمكان الأعظم، وطبقت عليه مجموعة من البيانات الحقيقية حيث تمت المقارنة بامتدادات توزيع لوماكس الأخرى واثبت الانموذج الجديد كفاءة ودقة عالية من بين النماذج الأخرى.
- ❖ وفي العام نفسه اقترح الباحث (Silva) وآخرون [30] انموذج احتمالي مركب جديد يدعى توزيع كاما الموسع العام (EGG) وتم اشتقاق الخصائص الإحصائية للنموذج الجديد وقدر معالمه الخمسة بطريقة الإمكان الأعظم، وطبقت عليه بيانات حقيقية لتوضيح إمكانيات الانموذج الجديد في تحليلها.
- ❖ في عام (2016) اقترح الباحث (Mustafa) وآخرون [57] توزيع مركب وهو توزيع الاسي الموسع الجديد (WGED) ذو الثلاثة معلمات باستعمال عائلة ويبل (Weibull-G family) في التركيب، وتم إيجاد بعض خصائص الانموذج الجديد وقدر معالمه بطريقة الإمكان الأعظم وبطريقة حدود الثقة المقاربة، وقد اعطى أداء أفضل في نمذجة البيانات الحقيقية مقارنة بالتوسعات الأخرى للتوزيع الاسي.
- ❖ وفي العام نفسه قدم الباحث (MirMostafae) وآخرون [56] توزيع رايلي الموسع الجديد (MOEGR) حيث استعمل عائلة مارشل - اولكين (MOE) في التركيب، وتم إيجاد بعض الخصائص للنموذج الجديد وقدر معالمه بطريقة الإمكان الأعظم وطريقة المربعات الصغرى الموزونة، وطبقت عليه بيانات حقيقية حيث اعطى مرونة ودقة في نمذجتها .

- ❖ في عام (2017) اقترح الباحث (Okasha , واخرون)^[59] توزيعا مركبا يدعى توزيع ويبيل العكسي الموسع (MOEIW) عن طريق استعمال (Marshall-Olkin method) في التركيب ، ومن مميزات الانموذج الجديد هي المرونة والدقة في نمذجة البيانات ، إذ تم اشتقاق بعض الخصائص الإحصائية وقدرة معالمة بطريقة الإمكان الأعظم ، اثبت كفاءة الانموذج الجديد مقارنة بالنماذج الأخرى عبر البيانات التي تم تطبيقها والحصول على نتائج دقيقة.
- ❖ وفي العام نفسة اقترح الباحثان (Zayed, Shafique)^[68] أنموذج احتمالي مركب جديد من توزيع فرجت الموسع يدعى (BXEF) باستعمال عائلة (the Burr-X generator) في التركيب ، وتم إيجاد الخصائص الإحصائية للأنموذج الجديد وقدرة معالمة بطريقة الإمكان الأعظم ، تمت مقارنة الانموذج الجديد أيضا بامتدادات أخرى لتوزيع فريجت على بيانات حقيقية وكان الأفضل من بين الامتدادات الأخرى .
- ❖ وفي عام (2018) قدم الباحث (Marzouki)^[14] انموذج مركب جديد يسمى توزيع لوماكس القوة الاسي (EPL) وهو تعميم لتوزيع لوماكس القوة (PL)، وتم إيجاد بعض خصائص الانموذج الجديد وقدر معالمة الأربعة بطريقة الإمكان الأعظم ، واثبت كفاءة في نمذجة البيانات بعد مقارنته بتوزيعات أخرى من خلال تطبيق مجموعتين من البيانات الحقيقية .
- ❖ في عام (2019) قدم الباحث (Ibrahim) وآخرون^[45] انموذج احتمالي مركب وهو تعميم لتوزيع لندي (TLGLi)، وتم إيجاد بعض خصائصه الإحصائية وقدر معالمة بطرائق مختلفة (MLE,LS,WLS, CVM, Bayesian) واستخدم أسلوب محاكاة مونت-كالو لاختبار أداء طرق التقدير، واثبت أداء الانموذج الجديد في التحليل عن طريق مجموعتين من البيانات.
- ❖ وفي العام (2020) اقترح الباحث (Babtain)^[13] انموذجا احتمالي مركب وهو تعميم لتوزيع رايلي باستعمال (logistic – G family) في التركيب التي إضافة معلمة للتوزيع الأساس، تمت دراسة الخصائص الإحصائية للأنموذج الجديد وتم تقدير معالمة بطريقة (MLEs) ، واعطى مرونة ودقة في نمذجة البيانات الحقيقية عندما طبقت عليه .
- ❖ وفي العام نفسه قدم الباحث (Xiaoyan Huo) وآخرون^[44] نماذج احتمالية فرعية من التوزيعات المركبة وهي (توزيع وايبيل الموسع الجديد، توزيع رايلي الموسع الجديد، توزيع الاسي الموسع الجديد) باستعمال العائلة الاسية الجديدة (NLTE-X Family) في التركيب والمشتقة في نفس البحث، التي سيتم استعمالها في هذه الرسالة، وتمت دراسة توزيع وايبيل الموسع الجديد بالتفصيل واشتقت بعض خصائصه وقدر معالمة

الثلاثة بطريقة (MLE)، تبين أن التوزيع الجديد مرّن للغاية عن طريق تطبيقه على بيانات حقيقة.

❖ في عام (2021) اقترح الباحث (Alzeley , et al)^[20] توزيعاً مركباً يدعى توزيع فريجت الموسع الجديد وذلك عن طريق استعمال العائلة الأسية الجديدة (NLTE-X Family) في التركيب ، وتم اشتقاق بعض خصائصه الهيكلية وقدر معالمه الثلاثة بثلاثة طرائق (طريقة الإمكان الأعظم ، طريقة أقصى حد للتباعد ، وتقدير بيز) واستخدم التقدير بفترة لتقدير المعالم الثلاثة أيضاً، وأعطى التوزيع الجديد مرونة أكثر وادق في التعامل مع البيانات التي طبقت عليه .

❖ وفي العام نفسه اقترح الباحث (Almongy) وآخرون^[17] انموذج احتمالي مركب جديد لتوزيع رايلي الموسع باستعمال (EOW-G family) ويتمتع الانموذج الجديد بمرونة كبيرة تمكنه من الاستخدام في النمذجة المنحرفة للبيانات، تم دراسة بعض خصائصه الإحصائية وقدرت معالمه الثلاثة طرائق (Bayes estimators , MPS,MLE) وأجريت تجربة محاكاة بأسلوب مونتي كارلو للمقارنة بين الطرائق الثلاثة وبيان أفضلها باستخدام متوسط مربعات الخطأ ، وكان الهدف من الانموذج الجديد هو نمذجة معدلات وفيات COVID-19 في إيطاليا والمكسيك وهولندا .

❖ في عام (2022) اقترح الباحث (Alshanbari) وآخرون^[18] انموذجاً احتمالي مركب وهو تعميم لتوزيع فرجت الموسع (NAPF) وذلك باستعمال عائلة تحويل قوة الفا الجديدة (NAP)، واشتقت بعض خصائصه وقدر معالمه بستة طرائق تقدير (MLEs, ADEs, CVMES, LSEs, WLSEs,) وتمت المقارنة فيما بينها، وتم تطبيقه على مجموعات من البيانات الحقيقية المختلفة لأثبت كفاءته من بين التوزيعات الأخرى المقارنة به حيث اعطى كفاءة عالية في نمذجة البيانات.

2-4-1 الدراسات المتعلقة بتوزيع دالة القوى (Power function distribution):

❖ في عام (2013) قدر الباحث (ZARRIN) وآخرون^[67] معالمات توزيع دالة القوى بطريقة الإمكان الأعظم وطريقة بيز وذلك لتقدير دالة المعولية، إذ استخدم توزيع دالة القوى لتقييم معوليه النظام لكونه يمتاز بمعدل خطر غير ثابت، لذلك اقترحوا أن يتم أخذ هذا التوزيع بالحسبان عند تحليل بيانات الفشل الإلكتروني.

❖ في عام (2014) قدر الباحثان (Zaka , Akhter)^[65] معالمات توزيع دالة القوى بطرائق متعددة وهي (طريقة الإمكان الأعظم وتعديلاتها الثلاثة ، طريقة المقدر المثوي وتعديلاتها الثلاثة ، طريقة

العزوم وتعديلاتها الأربعة) ، واستخدم أسلوب محاكاة مونت كالمو للمقارنة بين طرائق التقدير وتعديلاتها ، إذ أوصى الباحثان باستخدام طريقة الإمكان الأعظم الغير معدلة والتعديل الأول لطريقة المقدر المثوي عندما يكون حجم العينة صغير ، وطريقة الإمكان الأعظم فقط عندما يكون حجم العينة كبير ، أما طريقة العزوم وتعديلاتها فقد اظهرت نتائج غير موثوقة .

❖ في عام (2015) قدر الباحث (Hanif) وآخرون [41] معلمات توزيع دالة القوى بالتقدير البايزي باستعمال توزيع ويبيل وتوزيع كاما المعمم ، وتم اجراء المقارنة باستخدام محاكاة مونت- كالمو باستعمال (MSE) كمعيار للمقارنة ، إذ اثبت مقدر بيز مع توزيع ويبيل السابق أفضليته في التقدير لأحجام العينات الصغيرة في حين يكون أداء مقدر بيز مع توزيع كاما السابق أفضل من المقدرات الأخرى لأحجام العينات الكبيرة .

❖ وفي نفس العام قدم الباحث (HAQ) وآخرون [26] توزيع دالة القوى المحول (TPF) ذو الثلاثة معلمات ، تم اشتقاق خصائصه الهيكلية وقدر معالمه بطريقة الإمكان الأعظم ، كما تم مقارنته بتوزيعات أخرى ولإثبات كفاءته ومرونته فقد طبقت مجموعتان من البيانات الحقيقية لإثبات ذلك .

❖ وفي العام (2016) اقترح الباحث (Tahir) وآخرون [63] انموذج جديد يدعى توزيع ويبيل – دالة القوى (WPF) باستعمال الفئة المولدة للتوزيعات (Weibull-G) ، وتمت دراسة بعض خصائصه الهيكلية وقدر معالمه الأربعة بطريقة الإمكان الأعظم ، وطبقت عليه مجموعتين من البيانات الحقيقية وأعطى مرونة ودقة في نمذجتها كما تفوق على منافسيه من النماذج الأخرى بعد المقارنة فيما بينهم .

❖ وفي العام (2017) اقترح الباحثان (Bursa, Ozel) [25] توزيع دالة القوى الموسع الجيد (ExpKw-PF) باستعمال امتداد توزيع كومار سوامي الاسي (The ExpKw-G) ، وتم إيجاد بعض الخصائص الإحصائية للنموذج الجديد وقدر معالمه بطريقة الإمكان الأعظم ، وتم تطبيقه على مجموعة بيانات حقيقية وبعد مقارنته مع بعض التوزيعات المعروفة حيث اثبت كفاءته في تمثيل البيانات بشكل افضل واوسع .

❖ وفي عام (2018) قدر الباحث (Alya) [11] معالم الشكل لتوزيع دالة القوى المعمم (GPDF) بالتقدير البايزي عند دالة الخسارة الاسية الخطية (LINEX) ، ولإثبات دقة هذه الطريقة في التقدير فقد تم مقارنتها بمقدرات طريقة الإمكان الأعظم .

❖ وفي العام نفسه قدم الباحث (HASSAN) وآخرون [43] انموذج احتمالي جديد مكون من أربعة معالم يسمى توزيع دالة القوى الاسي المعمم الفردي (OGEPF) والذي يعد حالة خاصة من العائلة الاسية الفردية (OGE-G family) ، واشتقت بعض خصائصه الإحصائية وقدرت معالمه بطريقة

الإمكان الأعظم وطريقة النسب المئوية، وتم استخدام أسلوب المحاكاة للمقارنة بين طرائق التقدير، كما طبقت على الانموذج الجديد بيانات حقيقية حيث اعطى مزيدا من المرونة في نمذجتها، واثبتت أفضليته من بعض التوزيعات الأخرى المعروفة.

❖ وفي عام (2019) قدم الباحثان (Amal S, Salwa M)^[42] فئة جديدة من التوزيعات تدعى توزيعات سلسلة الطاقة ويعبر عنها بالرمز (PFPS) وتم الحصول عليها عن طريق تركيب توزيع دالة القوى، وتمت دراسة خصائصها الهيكلية وقدرت معالمها باستعمال طريقة الإمكان الأعظم، كما تم تقديم انموذجيين فرعيين من الفئة الجديدة وهما (PFG و PFP) حيث تم تطبيقهما على مجموعتين من البيانات الحقيقية وأعطوا مزيدا من المرونة في نمذجتها .

❖ وفي العام نفسه قدم الباحث (ANSARI) وآخرون^[22] انموذج جديد يسمى توزيع دالة القوى المحول التكعيبي (CTPFD) والذي يعتبر كتعميم لتوزيع دالة القوى المحول، وتم اشتقاق خصائصه الإحصائية وقدر معالمه بطريقتين (طريقة الإمكان الأعظم، طريقة العزوم)، تمت مقارنته بنماذج من التوزيعات الأخرى حيث كان الأفضل من بينها في تمثيل البيانات الحقيقية.

❖ وفي عام (2020) اقترح الباحث (Zaka) وآخرون^[66] انموذج جديد يدعى توزيع دالة القوى الموسع الاسي (EGPFD)، وتم دراسة خصائص الانموذج الجديد وقدر معالمه بطريقة الامكان الأعظم، وطبقت عليه ثلاثة مجاميع من البيانات المختلفة وبعد تحليل البيانات استنتج ان الانموذج الجديد اعطى كفاءة أفضل من النماذج المنافسة المختلفة عند مقارنته بها.

❖ وفي عام (2021) اقترح الباحث (Ekum) وآخرون^[33] توزيع دالة القوى الموسع (NPLD) وهو مشتق من عائلة (T-Power function) ويحتوي على أربعة معالم اثنان من التوزيع الطبيعي والاثنان الاخران من توزيع دالة القوى، وتم اشتقاق بعض خصائص الانموذج الجديد وقدر معالمه بطريقة الإمكان الأعظم، واستخدمت بيانات بأطوال قياس 10 مم وتمت المقارنة بتوزيعات أخرى تتبع التوزيع الطبيعي، حث اثبت ان الانموذج الجديد مفيد جدا في مجالات الهندسة والطب وجميع مجالات الحياة.

❖ وفي عام 2022 قدم الباحث (AIMutairi) وآخرون^[12] انموذج احتمالي جديد يدعى توزيع دالة القوى الاسي الجديد (EPF) عن طريق استعمال فئة التوزيعات الاسية الجديدة (The New Exponentiated-G)، وتمت دراسة بعض خصائصه الإحصائية وقدرت معالمه بستة طرائق تقدير (RTADEs، ADEs، CVMes، PCEs، MPSEs، MLEs)، تم تطبيقه على بيانات واقعية حيث اثبت اداءه بشكل افضل من بقية التوزيعات الأخرى التي تمت مقارنته بها.

نلاحظ من الاستعراض المرجعي، ان الدراسات التي شملت على بناء نموذج توزيع احتمالي جديد من خلال توسعة التوزيعات الاساسية بطرائق مختلفة أهمها استعمال العائلات المولدة للتوزيعات اكتسبت أهمية بالغة في الآونة الأخيرة، لما تميزت به هذه النماذج الناتجة من دقة ومرونة كبيرة في نمذجة البيانات الحقيقية، واتباعا لما نهجه الباحثون السابقون فقد تم اثراء معرفة الباحث بطرائق توسعة التوزيعات الاحتمالية وخاصة فيما يتعلق بتوسعة التوزيعات باستعمال العوائل المولدة لها والتي اكتسبت أهمية وشهره عبر السنوات الأخيرة ، تم اقتراح نموذج احتمالي جديد في هذه الدراسة باستعمال العائلة الاسية الجديدة (NLTE-X Family) والذي يدعى (The new lifetime exponential- Power function distribution) ويعبر عنه بالرمز (NLTE-PF) ذو الثلاثة معلمات (α, β, λ) وقدرت معاملة ودالة المعولية بأربع طرائق تقدير وهي (طريقة الإمكان الأعظم ، طريقة المربعات الصغرى ، طريقة المقدرات التجزئية ، طريقة الحد الأقصى الناتج لمقدرات التباعد) .

الفصل الثاني

الجانب النظري

1-2 تمهيد:

تطرقنا في هذا الفصل الى بعض المفاهيم الاساسية ذات العلاقة بمفهوم المعولية وكذلك نبذة مختصرة عن العائلة الاسية الجديدة (NLTE-X Family) وكيفية استخدام هذه العائلة لبناء انموذج توزيع دالة القوى الموسع ذو الثلاثة معلمات (The new lifetime exponential- Power function distribution) ، تم ايجاد دالة الكثافة الاحتمالية والتجميعية للتوزيع الموسع الجديد وبعض الدوال الخاصة كدالة المخاطرة والمعولية والكمية كما تم اشتقاق بعض الخصائص الإحصائية وقد تم تقدير معلمات التوزيع الجديد (NLTE-PF) وكذلك تقدير دالة المعولية باستخدام اربعة طرائق تقدير (طريقة الإمكان الأعظم ، طريقة المربعات الصغرى ، طريقة المقدرات التجزيئية ، طريقة الحد الأقصى الناتج لمقدرات التباعد).

2-2 اساسيات ومفاهيم عامه:

1-2-2 دالة المعولية (Reliability function): [32] [61]

ان مفهوم المعولية له معانٍ عديدة ولعل المعنى الواسع لها هي مقياس للأداء، أو بمعنى اخر هي احتمال أداء الجهاز للمهمة المطلوبة منه لمدة زمنية محددة في ظل ظروف التشغيل الاعتيادية، يتطلب أي عنصر وظيفي معايير او متطلبات أداء دقيقة عند اكمال المهمة المتوقعة منه او الاستمرار في تنفيذها، أي ان هذا العنصر يعول عليه (يعتمد عليه) في أداء المهمة عبر مدة زمنية محدد، فمثلاً أراد شخص ما ان يشتري جهاز معين (سيارة، كومبيوتر، جهاز التلفاز) في اللحظة (t=0) من الزمن ،فما هو احتمال ان يعمل هذا الجهاز في المستقبل عبر مدة زمنية (t > 0) كان تكون الفترة (يوم، أسبوع، شهر، سنة) ومن هنا تكمن أهمية دراسة المعولية للأجهزة ، وان عالم الرياضيات السويسري دانييل برنولي اول من درس المعولية ، ويرمز لها بالرمز R(t)، ويمكن التعبير عنها بالمعادلتين:

$$R(t) = \text{pr}(T > t) \quad \dots (1)$$

$$R(t) = 1 - G(t) = \bar{G}(t) \quad \dots (2)$$

T : متغير عشوائي موجب يمثل الزمن المتراكم لإداء الجهاز عبر المدة الزمنية (0, t).

G(t) : تمثل دالة التوزيع التجميعية (Cumulative Distribution Function) وتدعى أيضا بدالة اللامعولية.

R(t) : تمثل دالة المعولية (Reliability Function).

أي انها احتمال أداء جهاز معين وعدم فشلة في المهمة الموكلة الية ضمن مدة زمنية معينة (0,t) وفي مجتمع الكائنات الحية تسمى بدالة البقاء (Survival Function) أي مدة بقاء الكائن الحي (في الدراسات الطبية والحياتية).

$$R(t) = \int_t^{\max(t)} g(x) dx \quad \dots \quad (3)$$

والمعادلة (3) تمثل دالة المعولية في حالة التوزيعات المستمرة.

ان من اهم خصائص دالة المعولية هي مستمرة ومتناقصة لقيم (t) ، وان قيمتها تكون ضمن الفترة [0 , 1] أي انها دالة موجبة (0 ≤ R(t) ≤ 1) ، فاذا كانت (R(t) = 1) يدل ذلك على ان الجهاز مستمر في أداء عملة اما اذا كانت (R(t) = 0) دل ذلك على ان الجهاز لا يعمل او فشل في أداء عملة .

ويمكن التعبير عن العلاقة بين دالة المعولية R(t) ودالة الكثافة الاحتمالية للفشل g(t) والدالة التجميعية للفشل G(t) رياضيا على النحو الاتي :

$$g(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\text{pr}(t < T < t + \Delta t)}{\Delta t} \quad , t \geq 0 , \Delta t_i = t_i - t_{i-1} \quad \dots \quad (4)$$

Δt_i : يمثل مقدار التغير في المتغير العشوائي للزمن المتراكم (T)

أي ان:

$$g(t) = -\frac{dR(t)}{dt} = -\frac{d}{dt} (1 - G(t)) \quad \dots \quad (5)$$

2-2-2 دالة المخاطرة (hazard Function): [51][3]

تعرف دلة المخاطرة على انها الاحتمال الشرطي لتوقف الجهاز عبر المدة (t < T < t + Δt) بشرط ان الجهاز يعمل بنجاح في الفترة الزمنية (t)، ويطلق على دالة المخاطرة بنسبة المخاطرة او معدل الفشل ويرمز لها h(t)، ويتم التعبير عنها حسب الصيغ الاتية:

$$\begin{aligned} h(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\text{pr}(t < T < t + \Delta t / T > t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\text{pr}(t < T < t + \Delta t)}{\Delta t \cdot \text{pr}(T > t)} \\ &= \frac{1}{R(t)} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{G_T(t + \Delta t) - G_T(t)}{\Delta t} \\ \therefore h(t) &= \frac{g(t)}{R(t)} \quad \dots \quad (6) \end{aligned}$$

3-2-2 دالة المخاطرة التجميعية (Cumulative Hazard Function): [2]

ويرمز لها $H(t)$ ويمكن الحصول عليها عن طريق دالة المخاطرة او نسبة المخاطرة، ويعبر عنها رياضيا بالصيغة الاتية:

$$H(t) = \int_0^t h(m) dm \quad \dots (7)$$

$h(m)$: تمثل دالة المخاطرة او معدل الفشل.

وعند التعويض عن دالة المخاطرة بما يساويها في المعادلة (7) ينتج:

$$\begin{aligned} H(t) &= \int_0^t \frac{g(m)}{R(m)} dm = \int_0^t \frac{g(m)}{(1 - G(m))} dm \\ &= [-\ln(1 - G(m))]_0^t = -\ln(R(t)) \end{aligned}$$

$$\therefore H(t) = -\ln(R(t)) \quad \dots (8)$$

4-2-2 تركيب التوزيعات (Installing distributions): [62][39][38]

في مجال الإحصاء التطبيقي يعد تركيب التوزيعات امرا بالغ الأهمية ، ونتيجة لعملية التركيب، تعطي التوزيعات الجديدة مزيدا من المرونة في نمذجة البيانات عن طريق إضافة معلمات جديدة للنموذج الأساسي ، وفي هذه الرسالة تم استعمال العائلة الاسية الجديدة (NLTE-X Family) لعمل تركيب والتي تتلخص بتعويض دالة الكثافة الاحتمالية (p.d.f) والدالة التجميعية (C.D.F) للتوزيع الأساس في قاعدة العائلة الاسية الجديدة التي تضيف معلمة شكل للنموذج الجديد ليصبح احد أعضاء هذه العائلة مما يكسبه الكثير من المرونة والدقة في نمذجة البيانات والحصول على دالة مخاطرة على شكل حوض الاستحمام .

5-2-2 توزيع دالة القوى (Power function distribution)(PF): [55][35][10][6]

في عام (1973) قدم الباحث (Ahsanullah) توصيفا لتوزيع دالة القوى، يمثل توزيع دالة القوى من التوزيعات المهمة والواسعة الاستخدام في نمذجة البيانات المتعلقة لأوقات الفشل والبقاء للأجهزة والمعدات الكهربائية وكذلك في تمثيل بيانات الحياة او الموت التابعة للكائنات الحية، ويوفر معلومات أكثر ملائمة حول المعولية ومعدلات المخاطر، كما يعد من الحالات الخاصة لتوزيع باريتو.

ليكن (X) متغير عشوائي يتبع توزيع دالة القوى فان دالة الكثافة الاحتمالية (p.d.f) تكون بالشكل الاتي:

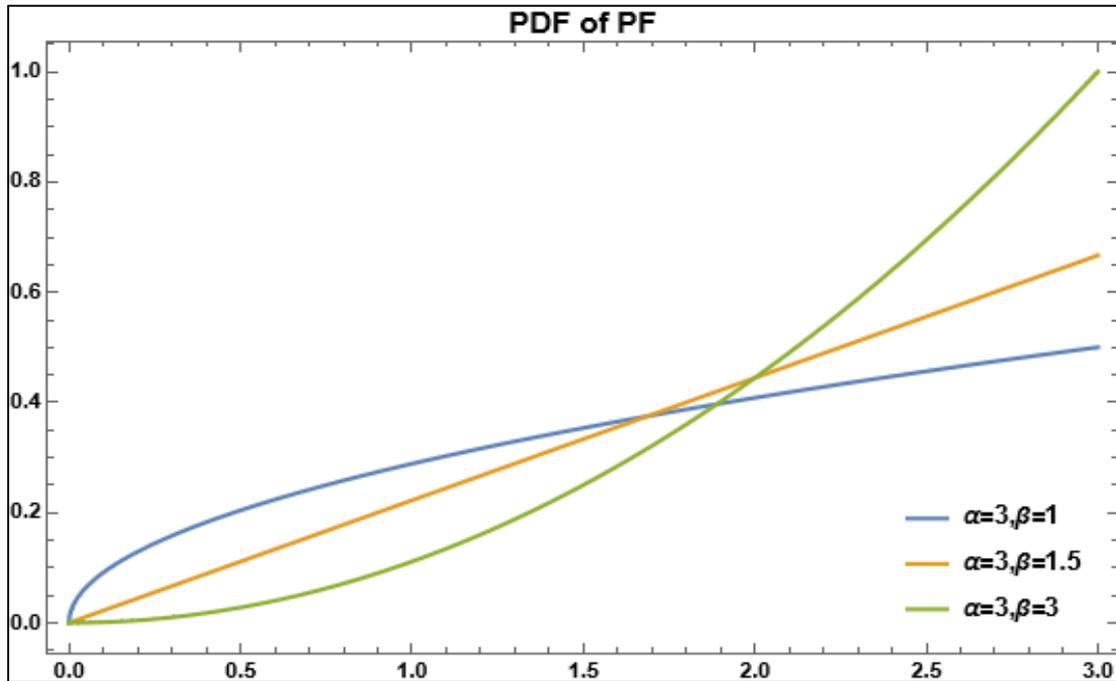
$$g(x) = \begin{cases} \frac{\beta x^{\beta-1}}{\alpha^\beta} & ; 0 < x < \alpha , \alpha, \beta > 0 \\ 0 & O.W \end{cases} \dots (9)$$

β تمثل معلمة الشكل (shape parameter)، α تمثل معلمة القياس (scale parameter) او ما يطلق عليها في بعض الأحيان معلمة المدى.

وان الدالة التجميعية للتوزيع (C.D.F) تكون بالشكل الاتي:

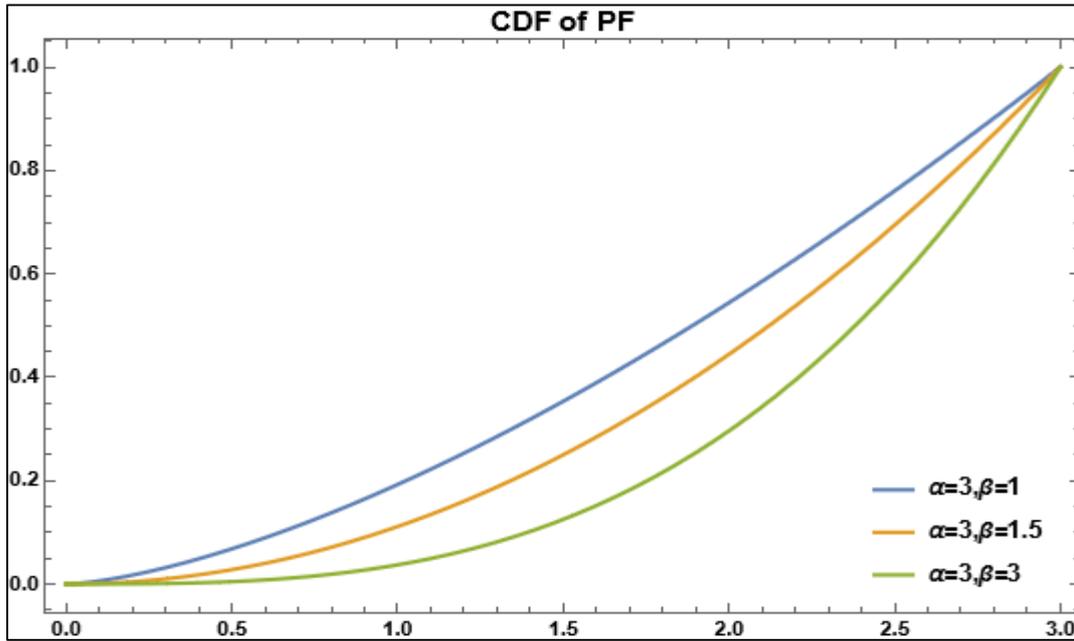
$$G(x) = \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta \dots (10)$$

والاشكال الاتية توضح رسم دالة الكثافة الاحتمالية والدالة التجميعية ودالة المخاطرة لتوزيع دالة القوى.



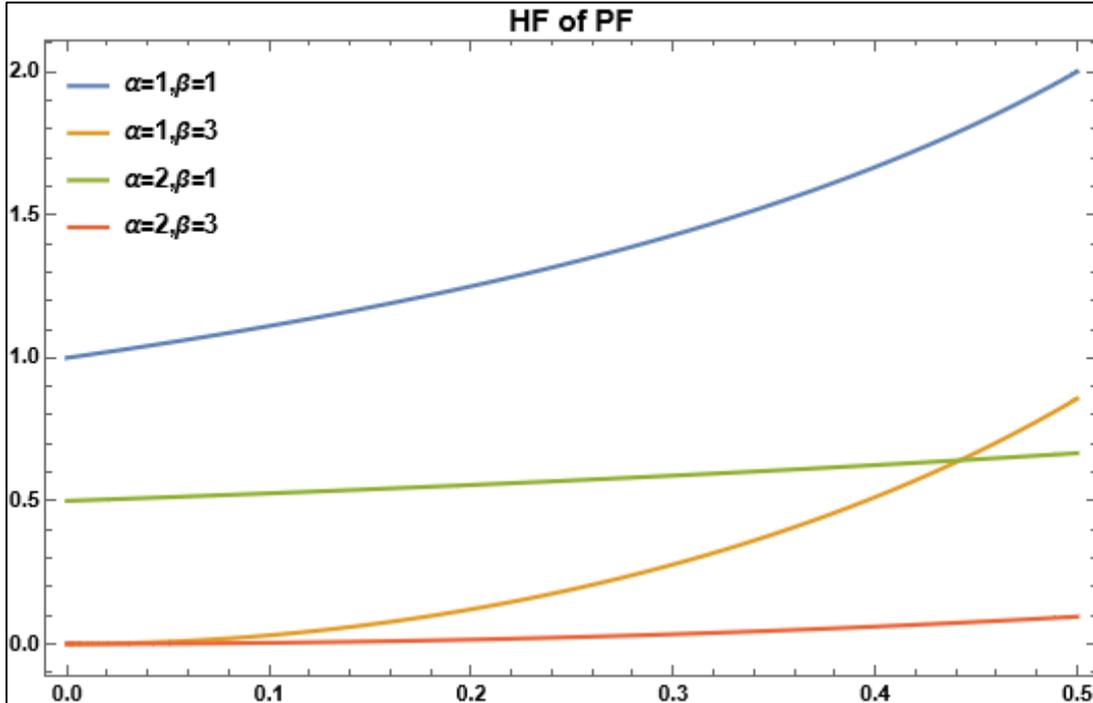
شكل (1-2) دالة الكثافة الاحتمالية (p.d.f) لتوزيع دالة القوى (PF) ولقيم مختلفة لمعلمة الشكل بثبات قيمة معلمة القياس او معلمة المدى (α).

المصدر: اعداد الباحث



شكل (2-2) الدالة التراكمية (C.D.F) لتوزيع دالة القوى (PF) ولقيم مختلفة لمعلمة الشكل (β) بثبات قيمة معلمة القياس او معلمة المدى (α).

المصدر: اعداد الباحث



شكل (3-2) دالة المخاطرة (HF) لتوزيع دالة القوى (PF) ولقيم مختلفة لمعلمات التوزيع

المصدر: اعداد الباحث

وان أبرز الخصائص الإحصائية لتوزيع دالة القوى (PF) مبينة في الجدول الآتي:
جدول (1-2) يبين الخصائص الإحصائية لتوزيع دالة القوى (PF)

العزم الرائي	$\frac{\alpha^r \cdot \beta}{(\beta + r)}$
الوسط	$\frac{\alpha \cdot \beta}{(\beta + 1)}$
التباين	$\frac{\alpha^2 \cdot \beta}{[(\beta + 2) \cdot (\beta + 1)^2]}$
المنوال	$\begin{cases} \alpha & \beta > 1 \\ 0 & \beta < 1 \end{cases}$
الوسيط	$\alpha / 2^{\frac{1}{\beta}}$
معامل الالتواء	$2(1 - \beta) \cdot (2 + \beta)^{1/2} / ((3 + \beta) \cdot \beta^{1/2})$
معامل التفلطح	$3(\beta + 2)[2(\beta + 1)^2 + \beta \cdot (\beta + 5)] / [\beta(\beta + 3) \cdot (\beta + 4)]$
معامل الاختلاف	$[\beta \cdot (\beta + 2)]^{-1/2}$
دالة المخاطرة	$\frac{\beta \cdot x^{\beta-1}}{(\alpha^\beta - x^\beta)}$
دالة المخاطرة التجميعية	$-\log[1 - (x/\alpha)^\beta]$
دالة المعولية	$1 - \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta$

6-2-2 العائلة الاسية الجديدة (NLTE-X Family): [8][9][19][44][46]

(The New Lifetime Exponential-X Family)

قدم الباحث (Xiaoyan Huo) وآخرون في عام (2020) طريقة جديدة لتوسعة التوزيعات تسمى العائلة الاسية الجديدة (The New Lifetime Exponential-X Family) والتي تعتبر احد العائلات التي تم توليدها بواسطة طريقة محول المتحول (T-X family) التي قدمها الباحث (Alzaatreh) في عام (2013)، وان العائلة الاسية الجديدة (NLTE-X Family) تجعل التوزيعات اكثر مرونة في تمثيل البيانات وجعل دالة المخاطرة على شكل حوض الاستحمام، مما يكسب التوزيعات الناتجة منها أهمية بالغة في نمذجة البيانات.

تعرف الدالة التراكمية (C.D.F) للعائلة الاسية الجديدة (The New Lifetime Exponential-X Family) بالصيغة الآتية:

$$G(x_i; \lambda, \xi) = 1 - \frac{1 - F(x_i; \xi)}{e^{\lambda F(x_i; \xi)}} \quad , \lambda > 0, x \in R \quad \dots (11)$$

وتعرف دالة الكثافة الاحتمالية (p.d.f) على النحو الآتي:

$$g(x_i; \lambda, \xi) = \frac{f(x_i; \xi)}{e^{\lambda F(x_i; \xi)}} \cdot [1 + \lambda(1 - F(x_i; \xi))] \quad , x \in R \quad \dots (12)$$

$f(x_i; \xi)$: تمثل دالة الكثافة الاحتمالية (p.d.f) للتوزيع الأساس.

$F(x_i; \xi)$: تمثل دالة التجميعية (C.D.F) للتوزيع الأساس.

ξ : يمثل متجه المعالم للتوزيع الأساس.

R : يمثل مجموعة الاعداد الحقيقية.

والمعادلتين أعلاه (11) (12) سيتم استخدامهما لتوسعة توزيع دالة القوى في هذه الرسالة.

3-2- الانموذج الاحتمالي المقترح (The proposed probabilistic model):

سيتم بناء الانموذج الاحتمالي الجديد (The new lifetime exponential- Power function distribution) وذلك عن طريق استعمال العائلة الاسية الجديدة (NLTE-X Family) وعلى النحو الآتي:

1-3-2 توزيع دالة القوى الموسع (NLTE-PF):

(The new lifetime exponential- Power function distribution)

تم اقتراح انموذج جديد في هذه الرسالة وذلك باستعمال توزيع دالة القوى كتوزيع أساسي واستخدام العائلة الاسية الجديدة (NLTE-X Family) في التوسعة ليعطي انموذج احتمالي جديد يدعى توزيع دالة القوى الموسع والذي يرمز له (NLTE-PF)، ليكون أحد أعضاء هذه العائلة والذي اعطى مزيداً من المرونة والدقة في نمذجة البيانات وتم اثبات ذلك فيما بعد، وهو توزيع احتمالي موسع مستمر (continuous) ويتكون من ثلاثة معالم، وللحصول على توزيع (NLTE-PF) يتم من خلال الخطوات الآتية:

1- تعويض المعادلة (9) وهي دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع دالة القوى وكذلك المعادلة (10) وهي

الدالة التجميعية لتوزيع دالة القوى في المعادلة (12) التي تمثل دالة الكثافة الاحتمالية للعائلة

الاسية الجديدة لنحصل على دالة الكثافة الاحتمالية لأنموذج المقترح الجديد لتوزيع دالة القوى

الموسع (NLTE-PF).

2- تعويض المعادلة (10) في المعادلة (11) نحصل على الدالة التجميعية للأنموذج المقترح الجديد (NLTE-PF).

كما مبين بالمعادلتين الآتيتين:

$$g_{nlte-pf}(x_i; \alpha, \beta, \lambda) = \begin{cases} \frac{\beta x^{\beta-1} \left[1 + \lambda \left(1 - \left(\frac{x}{\alpha} \right)^\beta \right) \right]}{\alpha^\beta e^{\lambda \left(\frac{x}{\alpha} \right)^\beta}} & ; 0 < x < \alpha ; \alpha, \beta, \lambda > 0 \\ 0 & O.W \end{cases} \quad \dots (13)$$

$$G_{nlte-pf}(x_i; \alpha, \beta, \lambda) = 1 - \frac{\left(1 - \left(\frac{x}{\alpha} \right)^\beta \right)}{e^{\lambda \left(\frac{x}{\alpha} \right)^\beta}} \quad \dots (14)$$

$g_{nlte-pf}(x_i; \alpha, \beta, \lambda)$: تمثل دالة الكثافة الاحتمالية (p.d.f) للأنموذج المقترح الجديد (NLTE-PF).

$G_{nlte-pf}(x_i; \alpha, \beta, \lambda)$: تمثل الدالة التجميعية (C.D.F) للأنموذج المقترح الجديد (NLTE-PF).

ولغرض التحقق من الدالة في المعادلة (13) دالة احتمالية لا بد من تحقق الشرطين الآتيين:

$$1 - g_{nlte-pf}(x) \geq 0 \quad ; \text{for all } x$$

يتحقق الشرط الأول من خلال الرسم حيث نلاحظ دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع (NLTE-PF) دالة موجبة لكون فترة المتغير العشوائي (X) محدودة بالفترة من صفر الى المعلمة (α) التي تكون موجبة دائما.

$$2 - \int_0^\alpha g_{nlte-pf}(x_i, \alpha, \beta, \lambda) dx = 1$$

وسيتم اتباع الخطوات الآتية لغرض التحقق:

$$\int_0^\alpha g_{nlte-pf}(x_i, \alpha, \beta, \lambda) dx = \int_0^\alpha \frac{\beta x^{\beta-1} \left[1 + \lambda \left(1 - \left(\frac{x}{\alpha} \right)^\beta \right) \right]}{\alpha^\beta e^{\lambda \left(\frac{x}{\alpha} \right)^\beta}} dx$$

$$\int_0^\alpha g_{nlte-pf}(x_i, \alpha, \beta, \lambda) dx = \left\{ \begin{array}{l} \int_0^\alpha \frac{\beta x^{\beta-1} e^{-\lambda \left(\frac{x}{\alpha} \right)^\beta}}{\alpha^\beta} dx + \int_0^\alpha \frac{\beta \lambda x^{\beta-1} e^{-\lambda \left(\frac{x}{\alpha} \right)^\beta}}{\alpha^\beta} dx \\ - \int_0^\alpha \frac{\beta \lambda x^{\beta-1} \left(\frac{x}{\alpha} \right)^\beta e^{-\lambda \left(\frac{x}{\alpha} \right)^\beta}}{\alpha^\beta} dx \end{array} \right\}$$

$$(1 -) \int_0^{\alpha} \frac{\beta x^{\beta-1} e^{-\lambda(\frac{x}{\alpha})^{\beta}}}{\alpha^{\beta}} dx = \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda(\frac{x}{\alpha})^{\beta}} \right]_0^{\alpha} = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda}$$

$$(2 -) \int_0^{\alpha} \frac{\beta \lambda x^{\beta-1} e^{-\lambda(\frac{x}{\alpha})^{\beta}}}{\alpha^{\beta}} dx = \left[-e^{-\lambda(\frac{x}{\alpha})^{\beta}} \right]_0^{\alpha} = 1 - e^{-\lambda}$$

$$(3 -) \int_0^{\alpha} \frac{\beta \lambda x^{\beta-1} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta} e^{-\lambda(\frac{x}{\alpha})^{\beta}}}{\alpha^{\beta}} dx$$

$$\text{let: } u = x^{\beta} \quad dv = \frac{\beta \lambda x^{\beta-1} e^{-\lambda(\frac{x}{\alpha})^{\beta}}}{\alpha^{2\beta}}$$

$$du = \beta x^{\beta-1} dx \quad v = \frac{-e^{-\lambda(\frac{x}{\alpha})^{\beta}}}{\alpha^{\beta}}$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

وباستخدام قاعدة تكامل التجزئة

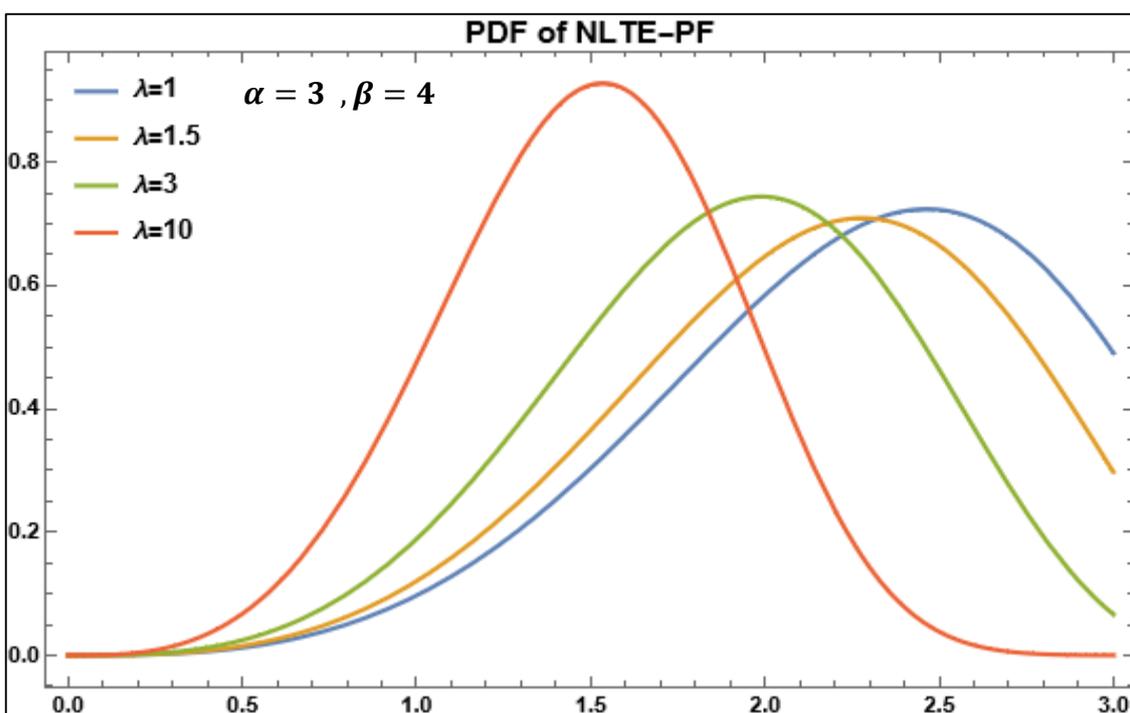
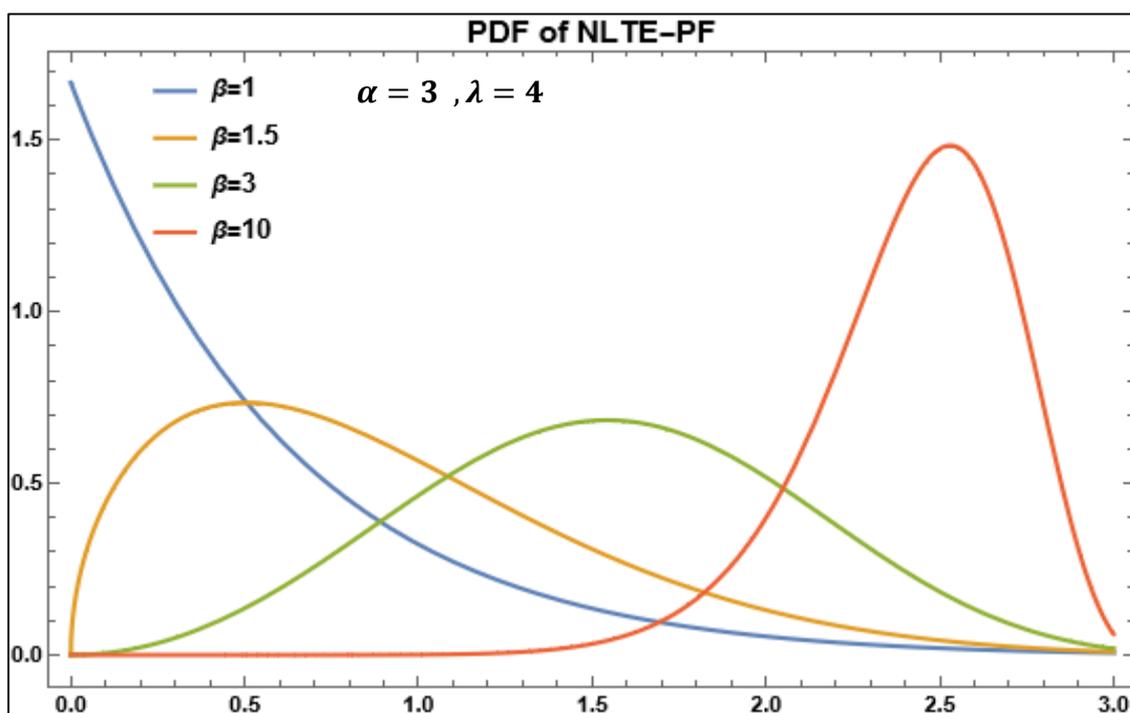
$$= \left[\frac{-x^{\beta} e^{-\lambda(\frac{x}{\alpha})^{\beta}}}{\alpha^{\beta}} \right]_0^{\alpha} + \int_0^{\alpha} \frac{\beta x^{\beta-1} e^{-\lambda(\frac{x}{\alpha})^{\beta}}}{\alpha^{\beta}} dx$$

$$\therefore \int_0^{\alpha} \frac{\beta x^{\beta-1} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta} e^{-\lambda(\frac{x}{\alpha})^{\beta}}}{\alpha^{\beta}} dx = -e^{-\lambda} + \left[-\frac{e^{-\lambda(\frac{x}{\alpha})^{\beta}}}{\lambda} \right]_0^{\alpha} = -e^{-\lambda} - \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}$$

$$\therefore \int_0^{\alpha} g_{nlte-pf}(x_i, \alpha, \beta, \lambda) dx = \frac{1}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} + 1 - e^{-\lambda} + e^{-\lambda} + \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} = 1$$

$$\therefore \int_0^{\alpha} g_{nlte-pf}(x_i, \alpha, \beta, \lambda) dx = 1$$

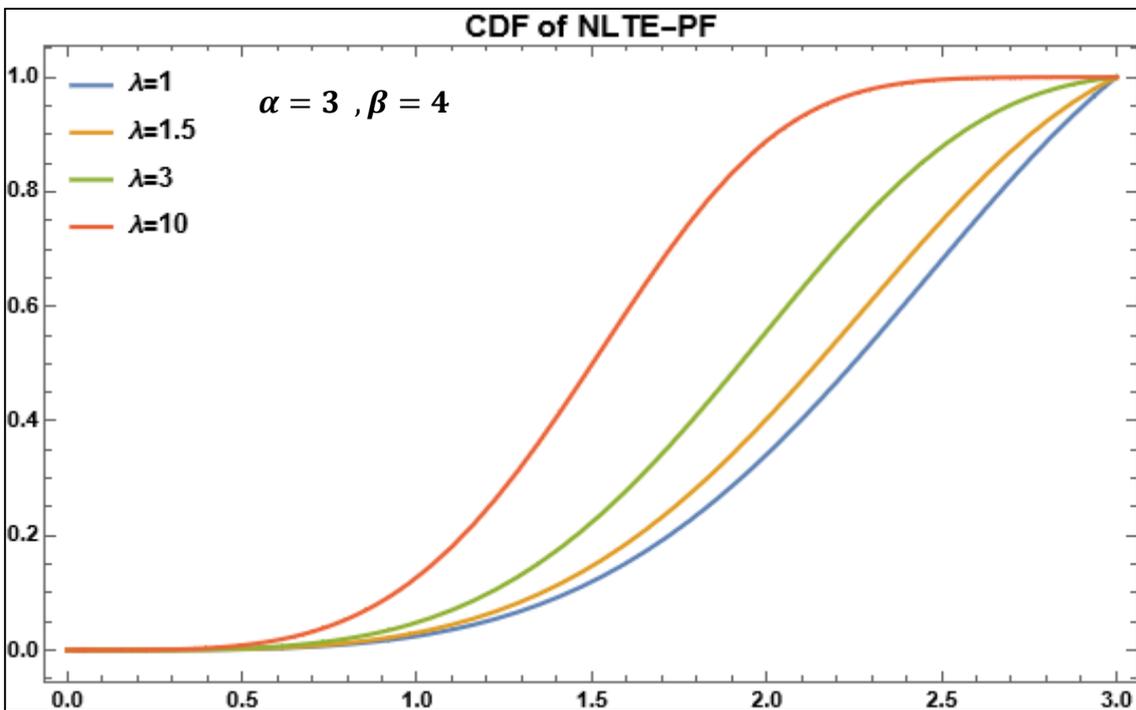
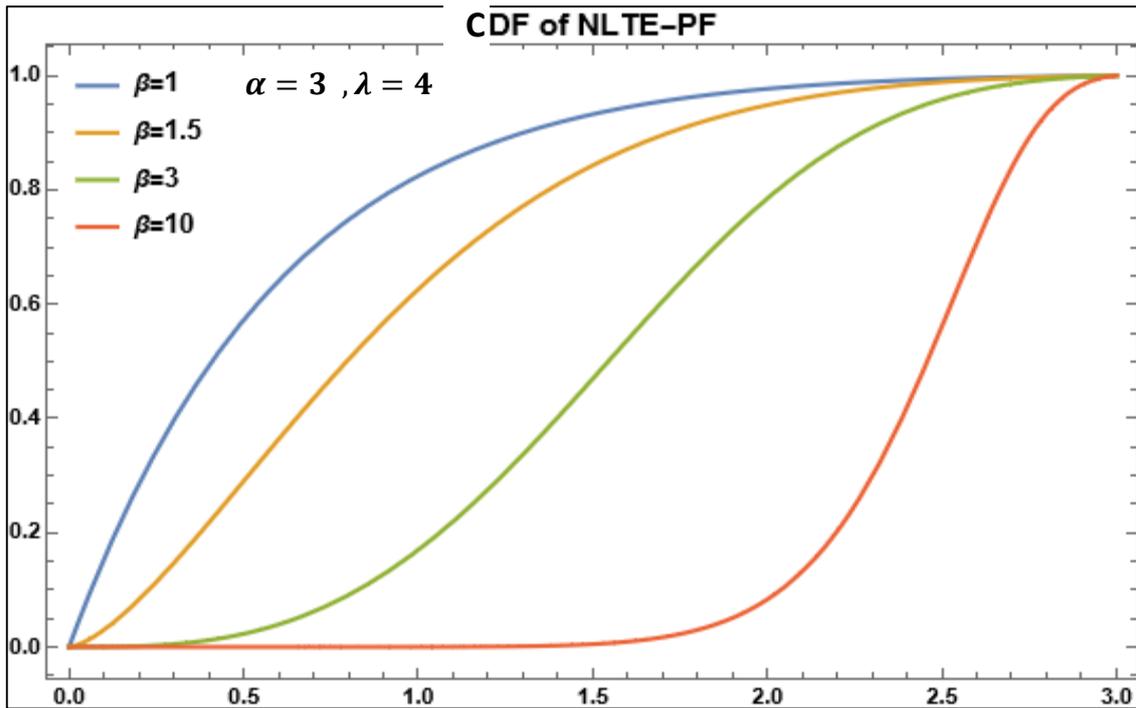
وبذلك يتحقق شرط كون دالة الانموذج الجديد (NLTE-PF) دالة احتمالية موجبة لجميع قيم المتغير العشوائي (x_i) ، والاشكال الاتية توضح رسم دالة الكثافة الاحتمالية (p.d.f) و الدالة التجميعية (C.D.F) للانموذج الجديد بحالات مختلفة.



شكل (4-2) دالة الكثافة الاحتمالية (p.d.f) لتوزيع دالة القوى الموسع الجديد (NLTE-PF) ولقيم

مختلفة لمعلمتي الشكل (β ، λ) بثبات قيمة معلمة المدى (α).

المصدر: اعداد الباحث



شكل (5-2) الدالة التجميعية (C.D.F) لتوزيع دالة القوى الموسع الجديد (NLTE-PF) ولقيم مختلفة لمعلمتي الشكل (β, λ) بثبات قيمة معلمة المدى (α).

المصدر: اعداد الباحث

2-3-2 دالة المعولية للأنموذج الاحتمالي المقترح الجديد (NLTE-PF):

وهي مقياس للنظام للعمل في وقت محدد بالاعتماد على توزيع معين، حيث تعرف دالة المعولية لتوزيع (NLTE-PF) على النحو الآتي:

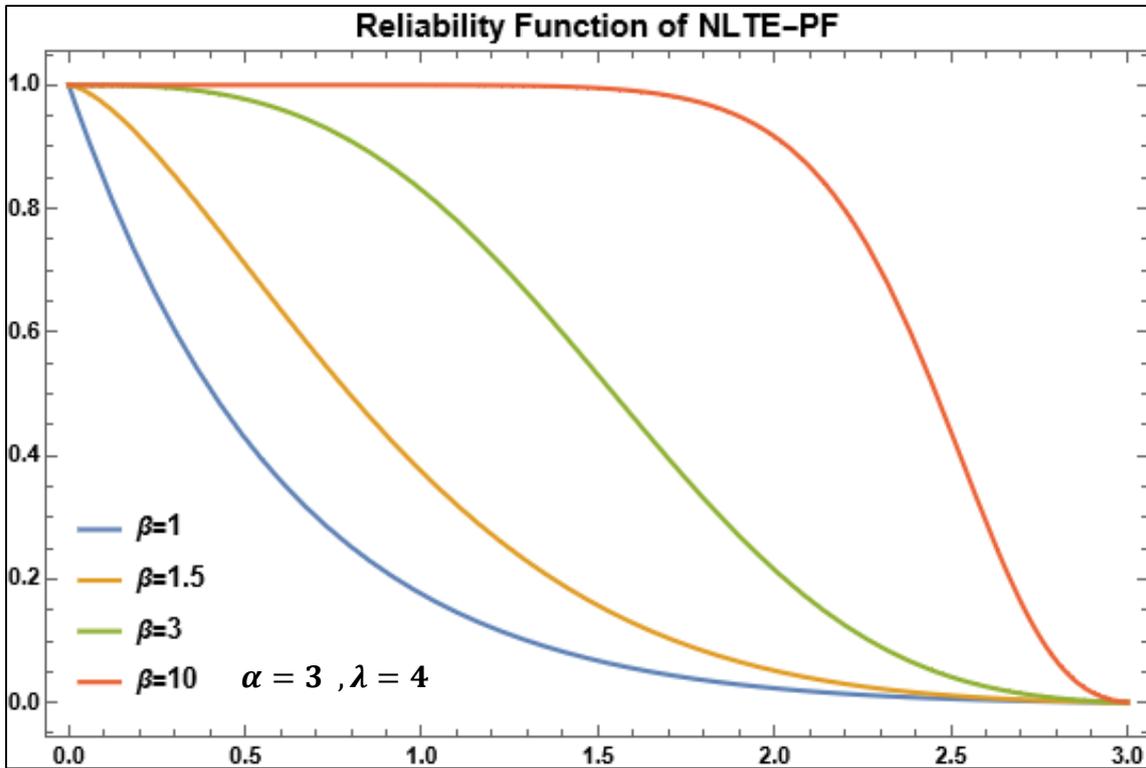
$$R(t) = \text{pr}(T > t) = \int_t^{\infty} g(x)dx = 1 - \int_0^t g(x)dx = 1 - G(t)$$

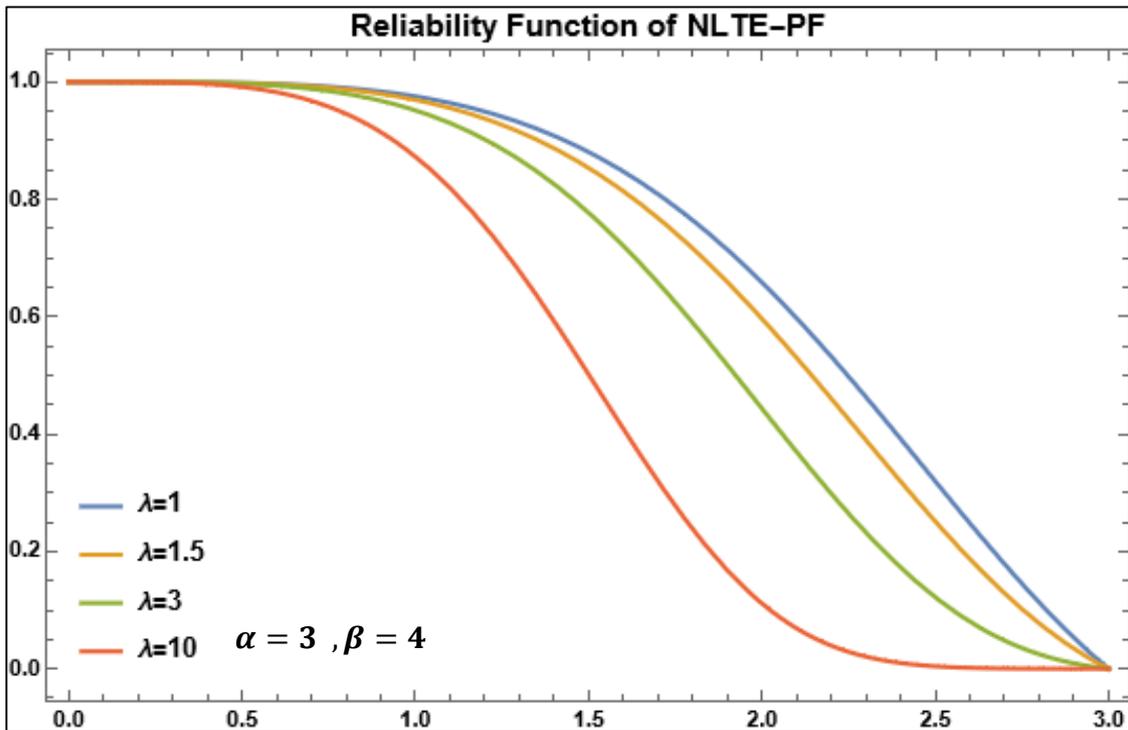
T : يمثل متغير عشوائي للزمن المتراكم لإداء جهاز معين خلال الفترة (0,t)

$$R(t) = 1 - G(t; \alpha, \beta, \lambda) = 1 - 1 + \frac{(1 - (\frac{t}{\alpha})^\beta)}{e^{\lambda(\frac{t}{\alpha})^\beta}}$$

$$\therefore R(t) = e^{-\lambda(\frac{t}{\alpha})^\beta} \left(1 - \left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta \right) \quad \dots (15)$$

والشكل (6-2) الآتي يوضح رسم دالة المعولية للأنموذج الجديد (NLTE-PF) بحالات مختلفة.





الشكل (6-2) دالة المعولية لتوزيع دالة القوى الموسع الجديد (NLTE-PF) ولقيم مختلفة لمعلمتي

الشكل (λ ، β) بثبات قيمة معلمة المدى (α).

المصدر: اعداد الباحث

3-3-2 دالة المخاطرة ودالة المخاطرة التجميعية لتوزيع (NLTE-PF):

تعرف دالة المخاطرة على انها مقياس تكرار الفشل في وقت محدد، وتعرف بالصيغة الآتية:

$$h(t) = \frac{g(t)}{R(t)} = \frac{\beta t^{\beta-1} \left\{ 1 + \lambda \left(1 - \left(\frac{t}{\alpha} \right)^\beta \right) \right\}}{\alpha^\beta e^{\lambda \left(\frac{t}{\alpha} \right)^\beta} \left(1 - \left(\frac{t}{\alpha} \right)^\beta \right)}$$

$$h(t) = \frac{\beta t^{\beta-1} \left\{ 1 + \lambda \left(1 - \left(\frac{t}{\alpha} \right)^\beta \right) \right\}}{\alpha^\beta \left(1 - \left(\frac{t}{\alpha} \right)^\beta \right)}$$

$$\therefore h(t) = \frac{\beta t^{\beta-1} \left\{ 1 + \lambda \left(1 - \left(\frac{t}{\alpha} \right)^\beta \right) \right\}}{\left(\alpha^\beta - t^\beta \right)} \quad \dots \quad (16)$$

وان دالة المخاطرة التجميعية H(t) للأنموذج الجديد تكون بالصيغة الآتية:

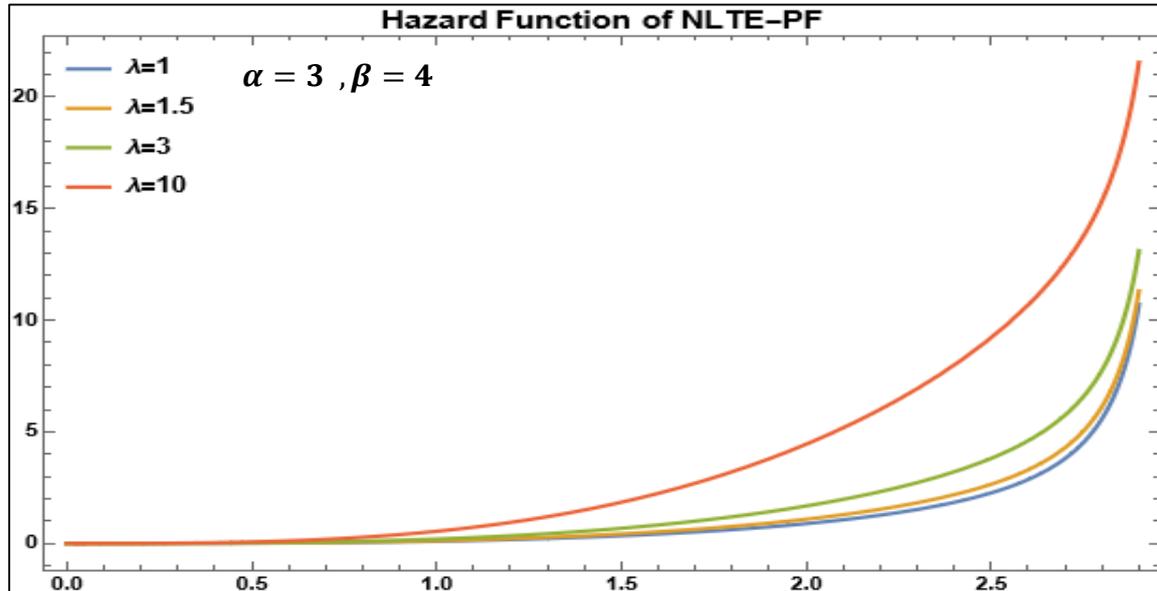
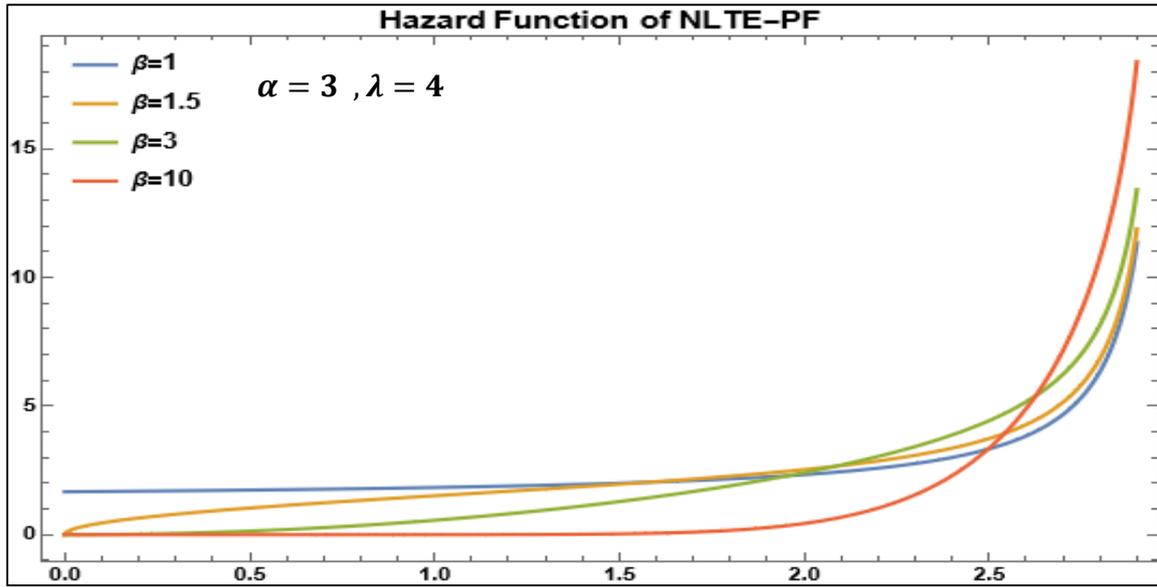
$$H(t) = -\ln(R(t))$$

$$\therefore H(t) = -\ln\left(e^{-\lambda\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta} \left(1 - \left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right)\right) \quad \dots (17)$$

ويمكن كتابة المعادلة (17) بصيغة أخرى

$$H(t) = \lambda\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta - \ln\left(1 - \left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right) \quad \dots (18)$$

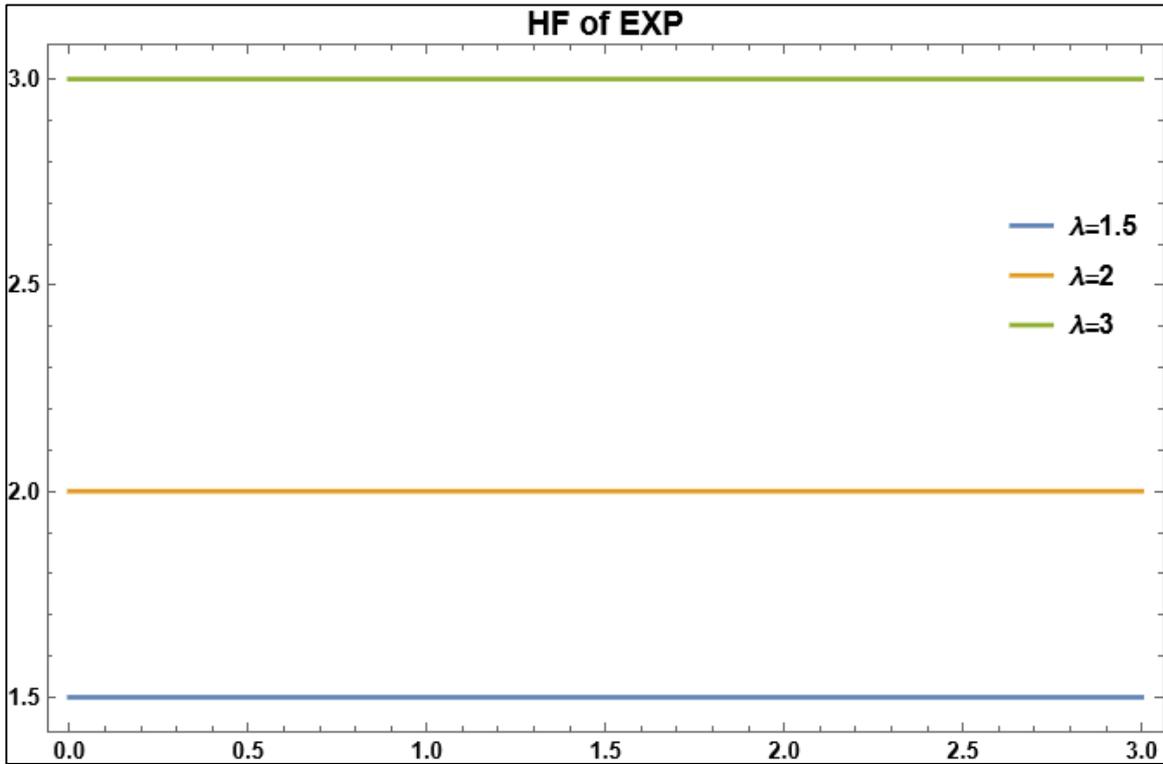
والشكل الاتي يوضح رسم دالة المخاطرة للأنموذج المقترح الجديد بحالات مختلفة.



الشكل (7-2) دالة المخاطرة لتوزيع دالة القوى الموسع الجديد (NLTE-PF) ولقيم مختلفة لمعلمتي

الشكل (β, λ) بثبات قيمة معلمة المدى (α).

المصدر: اعداد الباحث



الشكل (8-2) يوضح دالة المخاطرة للتوزيع الاسي.

المصدر: اعداد الباحث

من خلال المقارنة بين الشكل (3-2) الخاص بدالة المخاطرة لتوزيع دالة القوى والشكل (7-2) الخاص بدالة المخاطرة لتوزيع (NLTE-PF) والشكل (8-2) الخاص بدالة المخاطرة لتوزيع الاسي (EXP). نلاحظ بان توزيع دالة القوى يمتلك دالة مخاطرة مستمرة وغير ثابتة الا انها تكون محدودة التطبيق، في حين التوزيع الاسي يمتلك دالة مخاطرة مستمرة ومقيدة وثابتة مع الزمن لكونها محدودة بالمعلمة (λ)، لذا يكون قابلية تطبيقه محدودة الى حد ما، كما نلاحظ مدى المرونة والقابلية للنمذجة لتوزيع (NLTE-PF) لكونه يمتلك دالة مخاطرة غير مقيدة وغير ثابتة مع الزمن (تتناسب طرديا مع الزمن) التي كان شكلها مثل حوض الاستحمام وهذه الميزة التي اضافتها العائلة الاسية للتوزيع الأساس (دالة القوى).

4-3-2 الدالة الكمية لتوزيع (NLTE-PF):

The quantile function of the new proposed model

تعرف الدالة الكمية او العكسية للنموذج المقترح الجديد (NLTE-PF) بالصيغة الاتية:

$$q = 1 - \left(1 + \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta\right) e^{-\lambda \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta}$$

$$\left(1 + \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta\right) e^{-\lambda \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta} = 1 - q$$

وعندما نأخذ اللوغاريتم للطرفين :

$$\ln \left[\left(1 + \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta\right) e^{-\lambda \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta} = 1 - q \right]$$

$$-\lambda \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta + \ln \left[1 + \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta\right] = \ln[1 - q]$$

$$\frac{-\lambda x^\beta + \alpha^\beta \ln \left[1 + \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta\right]}{\alpha^\beta} = \ln[1 - q]$$

$$-\lambda x^\beta + \alpha^\beta \ln \left[1 + \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta\right] = \alpha^\beta \ln[1 - q] \quad \dots (19)$$

وبحل المعادلة (19) بالنسبة الى المتغير العشوائي (x_i) فأنا نحصل على الدالة الكمية لتوزيع (NLTE-) PF

(PF) حيث استخدم برنامج (Maple 18) لحلها وكانت النتيجة على النحو الاتي:

$$x = e^{\frac{\ln \left(-\frac{\text{Lambert W} \left(\frac{\lambda (q-1)}{e^\lambda} \right) + \lambda}{\lambda} \right) + \beta \ln(\alpha)}{\beta}} \quad \dots (20)$$

Lambert W function):^[29] Lambert W تمثل الدالة العكسية للقيمة $\left(\frac{\lambda (q-1)}{e^\lambda}\right)$ ويمكن

تعريفها بالصيغة الاتية :

$$W \left(\frac{\lambda (q-1)}{e^\lambda} \right) = \text{product} \ln \left(\frac{\lambda (q-1)}{e^\lambda} \right)$$

5-3-2 الخصائص الهيكلية لتوزيع (NLTE-PF): [7]

1-5-3-2 العزم اللامركزي الرائي (Non-central rth moment):

نفرض بان (x_i) متغير عشوائي يتبع توزيع (NLTE-PF) فان العزم اللامركزي الرائي يعرف بالصيغة الاتية:

$$\mu'_r = E(X^r) = \int_0^\alpha x^r g_{nlte-pf}(x_i; \alpha, \beta, \lambda) dx \quad \dots (21)$$

عند التعويض عن دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع (NLTE-PF) بما يقابلها في المعادلة (21) ينتج:

$$\mu'_r = E(X^r) = \int_0^\alpha \frac{\beta x^{r+\beta-1} \left[1 + \lambda \left(1 - \left(\frac{x}{\alpha} \right)^\beta \right) \right]}{\alpha^\beta e^{\lambda \left(\frac{x}{\alpha} \right)^\beta}} dx$$

$$\mu'_r = E(X^r) = \left\{ \begin{array}{l} \int_0^\alpha \frac{\beta x^{r+\beta-1} e^{-\lambda \left(\frac{x}{\alpha} \right)^\beta}}{\alpha^\beta} dx + \int_0^\alpha \frac{\lambda \beta x^{r+\beta-1} e^{-\lambda \left(\frac{x}{\alpha} \right)^\beta}}{\alpha^\beta} dx \\ - \int_0^\alpha \frac{\lambda \beta x^{r+2\beta-1} e^{-\lambda \left(\frac{x}{\alpha} \right)^\beta}}{\alpha^{2\beta}} dx \end{array} \right\}$$

(1 -) $\int_0^\alpha \frac{\beta x^{r+\beta-1} e^{-\lambda \left(\frac{x}{\alpha} \right)^\beta}}{\alpha^\beta} dx$ الحد الاول :

$$\text{Let } y = \lambda \left(\frac{x}{\alpha} \right)^\beta \Rightarrow x^\beta = \frac{\alpha^\beta y}{\lambda} \Rightarrow x = \frac{\alpha y^{\frac{1}{\beta}}}{\lambda^{\frac{1}{\beta}}} \Rightarrow dx = \frac{\alpha y^{\frac{1}{\beta}-1}}{\beta \lambda^{\frac{1}{\beta}}} dy$$

ولغرض معرفة حدود المتغير (y_i) نعوض عن حدود المتغير (x_i) عما يقابله وفق الجدول ادناه:

x	$y = \lambda \left(\frac{x}{\alpha} \right)^\beta$
α	λ
0	0

وبذلك تكون حدود المتغير (y_i) بالشكل الاتي: $0 < y < \lambda$

$$\int_0^\lambda \frac{\beta \alpha^{r+\beta-1} \left(y^{\frac{1}{\beta}}\right)^{r+\beta-1} e^{-y} \alpha y^{\frac{1}{\beta}-1}}{\alpha^\beta \lambda^{\frac{r+\beta-1}{\beta}} \beta \lambda^{\frac{1}{\beta}}} dy = \left\{ \frac{\alpha^r}{\lambda^{\frac{r+\beta}{\beta}}} \int_0^\lambda y^{\frac{r}{\beta}} e^{-y} dy \right\}$$

وحسب دالة غاما التامة وغير التامة والتي تكون بالأشكال الآتية:

$$(1 -) \Gamma(a) = \int_0^\infty m^{a-1} e^{-m} dm \quad \text{دالة غاما التامة} \quad \dots (22)$$

$$(2 -) \Gamma(a, t) = \int_t^\infty m^{a-1} e^{-m} dm \quad \text{دالة غاما الغير تامة العليا} \quad \dots (23)$$

$$(3 -) \gamma(a, t) = \int_0^t m^{a-1} e^{-m} dm \quad \text{دالة غاما الغير تامة الدنيا} \quad \dots (24)$$

$$\therefore \Gamma(a) = \Gamma(a, t) + \gamma(a, t) \quad \dots (25)$$

$$\therefore \gamma(a, t) = \Gamma(a) - \Gamma(a, t) \quad \dots (26)$$

وبالتالي فان نتيجة تكامل الحد الأول تكون بالشكل الآتي:

$$a - 1 = \frac{r}{\beta} \Rightarrow a = \frac{r + \beta}{\beta}, \quad t = \lambda$$

$$\therefore \left\{ \frac{\alpha^r}{\lambda^{\frac{r+\beta}{\beta}}} \int_0^\lambda y^{\frac{r}{\beta}} e^{-y} dy \right\} = \frac{\alpha^r \gamma\left(\frac{r+\beta}{\beta}, \lambda\right)}{\lambda^{\frac{r+\beta}{\beta}}} = \frac{\alpha^r \left(\Gamma\left(\frac{r+\beta}{\beta}\right) - \Gamma\left(\frac{r+\beta}{\beta}, \lambda\right) \right)}{\lambda^{\frac{r+\beta}{\beta}}}$$

$$(2 -) \int_0^\alpha \frac{\lambda \beta x^{r+\beta-1} e^{-\lambda\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta}}{\alpha^\beta} dx \quad \text{الحد الثاني :}$$

بأجراء التكامل بنفس طريقة الحد الأول لذا تكون نتيجة الحد الثاني بالشكل الآتي:

$$\therefore \int_0^\alpha \frac{\lambda \beta x^{r+\beta-1} e^{-\lambda\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta}}{\alpha^\beta} dx = \frac{\alpha^r \gamma\left(\frac{r+\beta}{\beta}, \lambda\right)}{\lambda^{\frac{r}{\beta}}} = \frac{\alpha^r \left(\Gamma\left(\frac{r+\beta}{\beta}\right) - \Gamma\left(\frac{r+\beta}{\beta}, \lambda\right) \right)}{\lambda^{\frac{r}{\beta}}}$$

$$(3 -) \int_0^{\alpha} \frac{\lambda \beta x^{r+2\beta-1} e^{-\lambda(\frac{x}{\alpha})^{\beta}}}{\alpha^{2\beta}} dx \quad \text{الحد الثالث :}$$

بأجراء التكامل بنفس طريقة الحد الأول لذا تكون نتيجة الحد الثالث بالشكل الاتي:

$$\therefore \int_0^{\alpha} \frac{\lambda \beta x^{r+2\beta-1} e^{-\lambda(\frac{x}{\alpha})^{\beta}}}{\alpha^{2\beta}} dx = \frac{\alpha^r \gamma\left(\frac{r+2\beta}{\beta}, \lambda\right)}{\lambda \frac{r+\beta}{\beta}} = \frac{\alpha^r \left(\Gamma\left(\frac{r+2\beta}{\beta}\right) - \Gamma\left(\frac{r+2\beta}{\beta}, \lambda\right) \right)}{\lambda \frac{r+\beta}{\beta}}$$

اذن العزم اللامركزي الرائي لتوزيع (NLTE-PF) يكون بالشكل الاتي:

$$\begin{aligned} \therefore \mu'_r = E(x^r) &= \frac{\alpha^r \gamma\left(\frac{r+\beta}{\beta}, \lambda\right)}{\lambda \frac{r+\beta}{\beta}} + \frac{\alpha^r \gamma\left(\frac{r+\beta}{\beta}, \lambda\right)}{\lambda^{\frac{r}{\beta}}} - \frac{\alpha^r \gamma\left(\frac{r+2\beta}{\beta}, \lambda\right)}{\lambda \frac{r+\beta}{\beta}} \\ &= \frac{\alpha^r}{\lambda^{\frac{r}{\beta}}} \left(\frac{\gamma\left(\frac{r+\beta}{\beta}, \lambda\right) - \gamma\left(\frac{r+2\beta}{\beta}, \lambda\right)}{\lambda} + \gamma\left(\frac{r+\beta}{\beta}, \lambda\right) \right) \end{aligned}$$

ويمكن كتابته بصورة مبسطة أخرى:

$$\mu'_r = E(x^r) = \frac{\alpha^r}{\lambda^{\frac{r}{\beta}}} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{r+\beta}{\beta}\right) - \Gamma\left(\frac{r+\beta}{\beta}, \lambda\right) - \Gamma\left(\frac{r+2\beta}{\beta}\right) + \Gamma\left(\frac{r+2\beta}{\beta}, \lambda\right)}{\lambda} + \Gamma\left(\frac{r+\beta}{\beta}\right) - \Gamma\left(\frac{r+\beta}{\beta}, \lambda\right) \right) \dots (27)$$

المعادلة (27) تمثل العزم اللامركزي الرائي لتوزيع (NLTE-PF).

عندما يكون (r=1) نحصل على العزم اللامركزي الاول او المتوسط لتوزيع (NLTE-PF) ويكون بالشكل الاتي:

$$\mu'_1 = E(x) = \frac{\alpha}{\lambda^{\frac{1}{\beta}}} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{1+\beta}{\beta}\right) - \Gamma\left(\frac{1+\beta}{\beta}, \lambda\right) - \Gamma\left(\frac{1+2\beta}{\beta}\right) + \Gamma\left(\frac{1+2\beta}{\beta}, \lambda\right)}{\lambda} + \Gamma\left(\frac{1+\beta}{\beta}\right) - \Gamma\left(\frac{1+\beta}{\beta}, \lambda\right) \right) \dots (28)$$

عندما يكون (r=2) نحصل على العزم اللامركزي الثاني لتوزيع (NLTE-PF) ويكون بالشكل الاتي:

$$\mu'_2 = E(x^2) = \frac{\alpha^2}{\lambda^{\frac{2}{\beta}}} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{2+\beta}{\beta}\right) - \Gamma\left(\frac{2+\beta}{\beta}, \lambda\right) - \Gamma\left(\frac{2+2\beta}{\beta}\right) + \Gamma\left(\frac{2+2\beta}{\beta}, \lambda\right)}{\lambda} + \Gamma\left(\frac{2+\beta}{\beta}\right) - \Gamma\left(\frac{2+\beta}{\beta}, \lambda\right) \right) \dots (29)$$

عندما يكون (r=3) نحصل على العزم اللامركزي الثالث لتوزيع (NLTE-PF) ويكون بالشكل الاتي:

$$\mu'_3 = E(x^3) = \frac{\alpha^3}{\lambda^{\frac{3}{\beta}}} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{3+\beta}{\beta}\right) - \Gamma\left(\frac{3+\beta}{\beta}, \lambda\right) - \Gamma\left(\frac{3+2\beta}{\beta}\right) + \Gamma\left(\frac{3+2\beta}{\beta}, \lambda\right)}{\lambda} + \Gamma\left(\frac{3+\beta}{\beta}\right) - \Gamma\left(\frac{3+\beta}{\beta}, \lambda\right) \right) \dots (30)$$

عندما يكون (r=4) نحصل على العزم اللامركزي الرابع لتوزيع (NLTE-PF) ويكون بالشكل الاتي:

$$\mu'_4 = E(x^4) = \frac{\alpha^4}{\lambda^{\frac{4}{\beta}}} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{4+\beta}{\beta}\right) - \Gamma\left(\frac{4+\beta}{\beta}, \lambda\right) - \Gamma\left(\frac{4+2\beta}{\beta}\right) + \Gamma\left(\frac{4+2\beta}{\beta}, \lambda\right)}{\lambda} + \Gamma\left(\frac{4+\beta}{\beta}\right) - \Gamma\left(\frac{4+\beta}{\beta}, \lambda\right) \right) \dots (31)$$

ولإيجاد تباين توزيع (NLTE-PF) باستخدام العزوم اللامركزية نطبق الصيغة الاتية:

$$V(x) = E(x^2) - (E(x))^2 = \mu'_2 - \mu_1^2$$

2-5-3-2 العزم المركزي الرائي (Central Moments rth):

نفرض بان (x_i) متغير عشوائي يتبع توزيع (NLTE-PF) فان العزم المركزي الرائي يعرف بالصيغة الاتية:

$$\begin{aligned} \mu_r &= E(x - \mu)^r = \int_0^{\alpha} (x - \mu)^r g_{nlte-pf}(x, \alpha, \beta, \lambda) dx \quad \dots (32) \\ &= \int_0^{\alpha} (x - \mu)^r \frac{\beta x^{\beta-1} \left\{ 1 + \lambda \left(1 - \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta} \right) \right\}}{\alpha^{\beta} e^{\lambda \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}}} dx \end{aligned}$$

$$\therefore (x - \mu)^r = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} x^k (-\mu)^{r-k} \quad \text{حسب نظرية ثنائي الحدين}$$

$$\mu_r = E(x - \mu)^r = \int_0^\alpha \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-\mu)^{r-k} \frac{\beta x^{k+\beta-1} \left\{ 1 + \lambda \left(1 - \left(\frac{x}{\alpha} \right)^\beta \right) \right\}}{\alpha^\beta e^{\lambda \left(\frac{x}{\alpha} \right)^\beta}} dx$$

$$\mu_r = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-\mu)^{r-k} \left\{ \int_0^\alpha \frac{\beta x^{k+\beta-1} e^{-\lambda \left(\frac{x}{\alpha} \right)^\beta}}{\alpha^\beta} dx + \int_0^\alpha \frac{\beta \lambda x^{k+\beta-1} e^{-\lambda \left(\frac{x}{\alpha} \right)^\beta}}{\alpha^\beta} dx - \int_0^\alpha \frac{\beta \lambda x^{k+\beta-1} \left(\frac{x}{\alpha} \right)^\beta e^{-\lambda \left(\frac{x}{\alpha} \right)^\beta}}{\alpha^\beta} dx \right\}$$

$$(1 -) \int_0^\alpha \frac{\beta x^{k+\beta-1} e^{-\lambda \left(\frac{x}{\alpha} \right)^\beta}}{\alpha^\beta} dx \quad \text{الحد الاول :}$$

$$\text{Let } y = \lambda \left(\frac{x}{\alpha} \right)^\beta \Rightarrow x^\beta = \frac{\alpha^\beta y}{\lambda} \Rightarrow x = \frac{\alpha y^{\frac{1}{\beta}}}{\lambda^{\frac{1}{\beta}}} \Rightarrow dx = \frac{\alpha y^{\frac{1}{\beta}-1}}{\beta \lambda^{\frac{1}{\beta}}} dy$$

x	$y = \lambda \left(\frac{x}{\alpha} \right)^\beta$
α	λ
0	0

وبذلك تكون حدود المتغير (y_i) بالشكل الاتي: $0 < y < \lambda$

$$\int_0^\lambda \frac{\beta \alpha^{k+\beta-1} \left(\frac{1}{y^{\frac{1}{\beta}}} \right)^{k+\beta-1} e^{-y} \cdot \frac{\alpha y^{\frac{1}{\beta}-1}}{\beta \lambda^{\frac{1}{\beta}}}}{\alpha^\beta \lambda^{\frac{k+\beta-1}{\beta}}} dy = \left\{ \frac{\alpha^k}{\lambda^{\frac{k+\beta}{\beta}}} \int_0^\lambda \frac{k}{y^{\frac{k}{\beta}}} e^{-y} dy \right\}$$

وبأجراء التكامل وحسب دالة غاما الغير تامة الدنيا (24) تكون نتيجة التكامل بالشكل الاتي:

$$a - 1 = \frac{k}{\beta} \Rightarrow a = \frac{k + \beta}{\beta}, \quad t = \lambda$$

$$\therefore \frac{\alpha^k}{\lambda^{\frac{k+\beta}{\beta}}} \int_0^\lambda y^{\frac{k}{\beta}} e^{-y} dy = \left\{ \frac{\alpha^k \gamma\left(\frac{k+\beta}{\beta}, \lambda\right)}{\lambda^{\frac{k+\beta}{\beta}}} \right\}$$

يمكن كتابة النتيجة أعلاه بصورة أخرى وذلك عن طريق التعويض عن دالة غاما الغير تامة الدنيا بما يساويها (26)

$$\frac{\alpha^k}{\lambda^{\frac{k+\beta}{\beta}}} \int_0^\lambda y^{\frac{k}{\beta}} e^{-y} dy = \left\{ \frac{\alpha^k \left(\Gamma\left(\frac{k+\beta}{\beta}\right) - \Gamma\left(\frac{k+\beta}{\beta}, \lambda\right) \right)}{\lambda^{\frac{k+\beta}{\beta}}} \right\}$$

$$(2 -) \int_0^\alpha \frac{\beta \lambda x^{k+\beta-1} e^{-\lambda\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta}}{\alpha^\beta} dx \quad \text{الحد الثاني :}$$

بأجراء التكامل وبالخطوات نفسها تكامل الحد الأول أي تكون نتيجة التكامل بالشكل الاتي:

$$\int_0^\alpha \frac{\beta \lambda x^{k+\beta-1} e^{-\lambda\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta}}{\alpha^\beta} dx = \left\{ \frac{\alpha^k \gamma\left(\frac{k+\beta}{\beta}, \lambda\right)}{\lambda^{\frac{k}{\beta}}} \right\}$$

$$\therefore \int_0^\alpha \frac{\beta \lambda x^{k+\beta-1} e^{-\lambda\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta}}{\alpha^\beta} dx = \left\{ \frac{\alpha^k \left(\Gamma\left(\frac{k+\beta}{\beta}\right) - \Gamma\left(\frac{k+\beta}{\beta}, \lambda\right) \right)}{\lambda^{\frac{k}{\beta}}} \right\}$$

$$(3 -) \int_0^\alpha \frac{\beta \lambda x^{k+\beta-1} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta e^{-\lambda\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta}}{\alpha^\beta} dx = \int_0^\alpha \frac{\beta \lambda x^{k+2\beta-1} e^{-\lambda\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta}}{\alpha^{2\beta}} dx \quad \text{الحد الثالث :}$$

وبأجراء التكامل وبنفس الخطوات السابقة وبالتالي تكون النتيجة كالآتي:

$$\int_0^\alpha \frac{\beta \lambda x^{k+2\beta-1} e^{-\lambda\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta}}{\alpha^{2\beta}} dx = \left\{ \frac{\alpha^k \gamma\left(\frac{k+2\beta}{\beta}, \lambda\right)}{\lambda^{\frac{k+\beta}{\beta}}} \right\}$$

$$\therefore \int_0^{\alpha} \frac{\beta \lambda x^{k+2\beta-1} e^{-\lambda \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}}}{\alpha^{2\beta}} dx = \left\{ \frac{\alpha^k \left(\Gamma\left(\frac{k+2\beta}{\beta}\right) - \Gamma\left(\frac{k+2\beta}{\beta}, \lambda\right) \right)}{\lambda^{\frac{k+\beta}{\beta}}} \right\}$$

لذا يكون العزم المركزي الرائي لتوزيع (NLTE-PF) بالشكل الآتي:

$$\mu_r = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-\mu)^{r-k} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\alpha^k \gamma\left(\frac{k+\beta}{\beta}, \lambda\right)}{\lambda^{\frac{k+\beta}{\beta}}} + \frac{\alpha^k \gamma\left(\frac{k+\beta}{\beta}, \lambda\right)}{\lambda^{\frac{k}{\beta}}} \\ - \frac{\alpha^k \gamma\left(\frac{k+2\beta}{\beta}, \lambda\right)}{\lambda^{\frac{k+\beta}{\beta}}} \end{array} \right\}$$

يمكن كتابة العزم المركزي الرائي بصيغة أخرى من خلال تبسيط الصيغة أعلاه:

$$\therefore \mu_r = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-\mu)^{r-k} \frac{\alpha^k}{\lambda^{\frac{k}{\beta}}} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\gamma\left(\frac{k+\beta}{\beta}, \lambda\right) - \gamma\left(\frac{k+2\beta}{\beta}, \lambda\right)}{\lambda} \\ + \gamma\left(\frac{k+\beta}{\beta}, \lambda\right) \end{array} \right\} \dots (33)$$

عندما (r=1) نحصل على العزم المركزي الأول والذي يساوي صفر أي ان:

$$\mu_1 = E(x - \mu)^1 = \mu - \mu = \text{zero} \dots (34)$$

عندما (r=2) نحصل على العزم المركزي الثاني والذي يساوي التباين أي ان:

$$\mu_2 = E(x - \mu)^2 = \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} (-\mu)^{2-k} \frac{\alpha^k}{\lambda^{\frac{k}{\beta}}} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\gamma\left(\frac{k+\beta}{\beta}, \lambda\right) - \gamma\left(\frac{k+2\beta}{\beta}, \lambda\right)}{\lambda} \\ + \gamma\left(\frac{k+\beta}{\beta}, \lambda\right) \end{array} \right\}$$

وعند فتح المجموع ينتج:

$$\begin{aligned}
 &= \binom{2}{0} (-\mu)^2 \frac{\alpha^0}{\lambda^{\frac{0}{\beta}}} \left\{ \frac{\gamma\left(\frac{0+\beta}{\beta}, \lambda\right) - \gamma\left(\frac{0+2\beta}{\beta}, \lambda\right)}{\lambda} + \gamma\left(\frac{0+\beta}{\beta}, \lambda\right) \right\} \\
 &+ \binom{2}{1} (-\mu)^1 \frac{\alpha^1}{\lambda^{\frac{1}{\beta}}} \left\{ \frac{\gamma\left(\frac{1+\beta}{\beta}, \lambda\right) - \gamma\left(\frac{1+2\beta}{\beta}, \lambda\right)}{\lambda} + \gamma\left(\frac{1+\beta}{\beta}, \lambda\right) \right\} \\
 &+ \binom{2}{2} (-\mu)^0 \frac{\alpha^2}{\lambda^{\frac{2}{\beta}}} \left\{ \frac{\gamma\left(\frac{2+\beta}{\beta}, \lambda\right) - \gamma\left(\frac{2+2\beta}{\beta}, \lambda\right)}{\lambda} + \gamma\left(\frac{2+\beta}{\beta}, \lambda\right) \right\}
 \end{aligned}$$

بعد اجراء العمليات الحسابية في الصيغة أعلاه نحصل على الصيغة النهائية لتباين توزيع (NLTE-PF)

$$\therefore V(x) = \left[\begin{aligned} &\mu^2 \left\{ \frac{\gamma(1, \lambda) - \gamma(2, \lambda)}{\lambda} + \gamma(1, \lambda) \right\} - 2\mu \frac{\alpha}{\lambda^{\frac{1}{\beta}}} \left\{ \frac{\gamma\left(\frac{1+\beta}{\beta}, \lambda\right) - \gamma\left(\frac{1+2\beta}{\beta}, \lambda\right)}{\lambda} + \gamma\left(\frac{1+\beta}{\beta}, \lambda\right) \right\} \\ &+ \frac{\alpha^2}{\lambda^{\frac{2}{\beta}}} \left\{ \frac{\gamma\left(\frac{2+\beta}{\beta}, \lambda\right) - \gamma\left(\frac{2+2\beta}{\beta}, \lambda\right)}{\lambda} + \gamma\left(\frac{2+\beta}{\beta}, \lambda\right) \right\} \end{aligned} \right] \dots (35)$$

عندما (r=3) نحصل على العزم المركزي الثالث لتوزيع (NLTE-PF) أي ان:

$$\mu_3 = \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} (-\mu)^{3-k} \frac{\alpha^k}{\lambda^{\frac{k}{\beta}}} \left\{ \frac{\gamma\left(\frac{k+\beta}{\beta}, \lambda\right) - \gamma\left(\frac{k+2\beta}{\beta}, \lambda\right)}{\lambda} + \gamma\left(\frac{k+\beta}{\beta}, \lambda\right) \right\} \dots (36)$$

عندما (r=4) نحصل على العزم المركزي الرابع لتوزيع (NLTE-PF) أي ان:

$$\mu_4 = \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} (-\mu)^{4-k} \frac{\alpha^k}{\lambda^{\frac{k}{\beta}}} \left\{ \frac{\gamma\left(\frac{k+\beta}{\beta}, \lambda\right) - \gamma\left(\frac{k+2\beta}{\beta}, \lambda\right)}{\lambda} + \gamma\left(\frac{k+\beta}{\beta}, \lambda\right) \right\} \dots (37)$$

2-3-5-3 معامل الالتواء (Coefficient of Skewness):

ويمكن الحصول عليه من خلال القانون الآتي:

$$C.S = \frac{\mu_3}{\sqrt{(\mu_2)^3}} \quad \dots (38)$$

وان (μ_3, μ_2) تمثل العزم المركزي الثاني (التباين) والعزم المركزي الثالث .
وبتعويض المعادلتين (35) و(36) في المعادلة (38) نحصل على قيمة معامل الالتواء وعلى النحو الآتي:

$$C.S = \frac{\sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} (-\mu)^{3-k} \frac{\alpha^k}{\lambda^{\frac{k}{\beta}}} \left\{ \frac{\gamma\left(\frac{k+\beta}{\beta}, \lambda\right) - \gamma\left(\frac{k+2\beta}{\beta}, \lambda\right)}{\lambda} + \gamma\left(\frac{k+\beta}{\beta}, \lambda\right) \right\}}{\left(\sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} (-\mu)^{2-k} \frac{\alpha^k}{\lambda^{\frac{k}{\beta}}} \left\{ \frac{\gamma\left(\frac{k+\beta}{\beta}, \lambda\right) - \gamma\left(\frac{k+2\beta}{\beta}, \lambda\right)}{\lambda} + \gamma\left(\frac{k+\beta}{\beta}, \lambda\right) \right\} \right)^{\frac{3}{2}}} \quad \dots (39)$$

والمعادلة (39) تمثل الصيغة النهائية لمعامل الالتواء لتوزيع (NLTE-PF)، ومن الجدير بالذكر انه
يمكن الحصول على قيمة معامل الالتواء بدلالة العزوم اللامركزية وفق الصيغة الآتية:

$$C.S = \frac{E(x - \hat{\mu}_1)^3}{\sqrt{(E(x - \hat{\mu}_1)^2)^3}} = \frac{\hat{\mu}_3 - 3 \hat{\mu}_1 \hat{\mu}_2 + 2\hat{\mu}_1^3}{\sqrt{(\hat{\mu}_2 - \hat{\mu}_1^2)^3}}$$

2-3-5-4 معامل التفطح (Coefficient of Kurtosis):

ويمكن الحصول عليه من خلال القانون الآتي:

$$C.k = \frac{\mu_4}{(\mu_2)^2} \quad \dots (40)$$

وان (μ_4, μ_2) تمثل العزم المركزي الثاني والعزم المركزي الرابع .
وبتعويض المعادلتين (35) و(37) في المعادلة رقم (40) نحصل على قيمة معامل التفطح وعلى النحو
الآتي:

$$C. k = \frac{\sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} (-\mu)^{4-k} \frac{\alpha^k}{\lambda^{\frac{k}{\beta}}} \left\{ \frac{\gamma\left(\frac{k+\beta}{\beta}, \lambda\right) - \gamma\left(\frac{k+2\beta}{\beta}, \lambda\right)}{\lambda} + \gamma\left(\frac{k+\beta}{\beta}, \lambda\right) \right\}}{\left\{ \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} (-\mu)^{2-k} \frac{\alpha^k}{\lambda^{\frac{k}{\beta}}} \left\{ \frac{\gamma\left(\frac{k+\beta}{\beta}, \lambda\right) - \gamma\left(\frac{k+2\beta}{\beta}, \lambda\right)}{\lambda} + \gamma\left(\frac{k+\beta}{\beta}, \lambda\right) \right\} \right\}^2} \dots (41)$$

والمعادلة (41) تمثل الصيغة النهائية لمعامل التفرطح لتوزيع (NLTE-PF)، كذلك يمكن أيضا إيجاد قيمة معامل التفرطح بدلالة العزوم اللامركزية وفق الصيغة الآتية:

$$C. k = \frac{E(x - \mu_1)^4}{(E(x - \mu_1)^2)^2} = \frac{\mu_4 - 4 \mu_1 \mu_3 + 6 \mu_1^2 \mu_2 - 3 \mu_1^4}{(\mu_2 - \mu_1^2)^2}$$

2-3-5-5 معامل الاختلاف (Coefficients of Variation):

وهو مقياس لمدى تشتت البيانات، ويستخدم للمقارنة بين التوزيعات لبيان ايها يحتوي على تباين أكثر تجانس ويمثل نسبة الانحراف المعياري الى الوسط الحسابي ويحسب وفق الصيغة الآتية:

$$C. V = \frac{\sqrt{\mu_2}}{\mu_1} * 100 \dots (42)$$

وان (μ_2) يمثل العزم المركزي الثاني (التباين) و (μ_1') والعزم اللامركزي الأول (الوسط الحسابي) ، وبتعويض المعادلتين (28) و(35) في المعادلة (42) نحصل على قيمة معامل الاختلاف وعلى النحو الآتي:

$$C. V = \frac{\left\{ \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} (-\mu)^{2-k} \frac{\alpha^k}{\lambda^{\frac{k}{\beta}}} \left\{ \frac{\gamma\left(\frac{k+\beta}{\beta}, \lambda\right) - \gamma\left(\frac{k+2\beta}{\beta}, \lambda\right)}{\lambda} + \gamma\left(\frac{k+\beta}{\beta}, \lambda\right) \right\} \right\}^{\frac{1}{2}}}{\frac{\alpha}{\lambda^{\frac{1}{\beta}}} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{1+\beta}{\beta}\right) - \Gamma\left(\frac{1+\beta}{\beta}, \lambda\right) - \Gamma\left(\frac{1+2\beta}{\beta}\right) + \Gamma\left(\frac{1+2\beta}{\beta}, \lambda\right)}{\lambda} + \Gamma\left(\frac{1+\beta}{\beta}\right) - \Gamma\left(\frac{1+\beta}{\beta}, \lambda\right) \right)} * 100 \dots (43)$$

المعادلة (43) تمثل الصيغة النهائية لمعامل الاختلاف لتوزيع (NLTE-PF).

6-5-3-2 الدالة المولدة للعزوم (Moment generating function):

تعرف الدالة المولدة للعزوم وفق الصيغة الآتية:

$$M_x^{(t)} = E(e^{tx}) = \int_0^\alpha e^{tx} g_{nlte-pf}(x; \alpha, \beta, \lambda) dx \quad \dots (44)$$

بعد التعويض عن دالة الكثافة الاحتمالية ($p.d.f$) لتوزيع (NLTE-PF) عما يقابلها في المعادلة (44) ينتج:

$$M_x^{(t)} = \int_0^\alpha e^{tx} \frac{\beta x^{\beta-1} \left\{ 1 + \lambda \left(1 - \left(\frac{x}{\alpha} \right)^\beta \right) \right\}}{\alpha^\beta e^{\lambda \left(\frac{x}{\alpha} \right)^\beta}} dx$$

$$= \left\{ \int_0^\alpha \frac{\beta x^{\beta-1} e^{tx - \lambda \left(\frac{x}{\alpha} \right)^\beta}}{\alpha^\beta} dx + \int_0^\alpha \frac{\lambda \beta x^{\beta-1} e^{tx - \lambda \left(\frac{x}{\alpha} \right)^\beta}}{\alpha^\beta} dx \right. \\ \left. - \int_0^\alpha \frac{\lambda \beta x^{2\beta-1} e^{tx - \lambda \left(\frac{x}{\alpha} \right)^\beta}}{\alpha^{2\beta}} dx \right\}$$

$$\therefore e^{tx} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tx)^k}{k!} \quad \text{حسب متسلسلة ماكلورين}$$

$$\therefore M_x^{(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t)^k}{k!} \left\{ \int_0^\alpha \frac{\beta x^{k+\beta-1} e^{-\lambda \left(\frac{x}{\alpha} \right)^\beta}}{\alpha^\beta} dx + \int_0^\alpha \frac{\beta \lambda x^{k+\beta-1} e^{-\lambda \left(\frac{x}{\alpha} \right)^\beta}}{\alpha^\beta} dx \right. \\ \left. - \int_0^\alpha \frac{\beta \lambda x^{k+2\beta-1} e^{-\lambda \left(\frac{x}{\alpha} \right)^\beta}}{\alpha^{2\beta}} dx \right\}$$

وبعد اجراء التكاملات للحدود الثلاثة أعلاه وبنفس طريقة تكامل العزوم اللامركزية الرائية فان نتائج التكامل تكون بالشكل الآتي:

$$(1-) \int_0^{\alpha} \frac{\beta x^{k+\beta-1} e^{-\lambda \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}}}{\alpha^{\beta}} dx = \left\{ \frac{\alpha^k \gamma \left(\frac{k+\beta}{\beta}, \lambda\right)}{\lambda^{\frac{k+\beta}{\beta}}} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{\alpha^k \left(\Gamma \left(\frac{k+\beta}{\beta}\right) - \Gamma \left(\frac{k+\beta}{\beta}, \lambda\right) \right)}{\lambda^{\frac{k+\beta}{\beta}}} \right\}$$

$$(2-) \int_0^{\alpha} \frac{\beta \lambda x^{k+\beta-1} e^{-\lambda \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}}}{\alpha^{\beta}} dx = \left\{ \frac{\alpha^k \gamma \left(\frac{k+\beta}{\beta}, \lambda\right)}{\lambda^{\frac{k}{\beta}}} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{\alpha^k \left(\Gamma \left(\frac{k+\beta}{\beta}\right) - \Gamma \left(\frac{k+\beta}{\beta}, \lambda\right) \right)}{\lambda^{\frac{k}{\beta}}} \right\}$$

$$(3-) \int_0^{\alpha} \frac{\beta \lambda x^{k+2\beta-1} e^{-\lambda \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}}}{\alpha^{2\beta}} dx = \left\{ \frac{\alpha^k \gamma \left(\frac{k+2\beta}{\beta}, \lambda\right)}{\lambda^{\frac{k+\beta}{\beta}}} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{\alpha^k \left(\Gamma \left(\frac{k+2\beta}{\beta}\right) - \Gamma \left(\frac{k+2\beta}{\beta}, \lambda\right) \right)}{\lambda^{\frac{k+\beta}{\beta}}} \right\}$$

بعد التعويض عن نتائج التكامل للحدود الثلاثة اعلاه فان الدالة المولدة للعزوم (m.g.f) لتوزيع (NLTE-) (PF) تكون بالشكل الاتي:

$$M_x^{(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t)^k \alpha^k}{k!} \left\{ \frac{\gamma \left(\frac{k+\beta}{\beta}, \lambda\right)}{\lambda^{\frac{k+\beta}{\beta}}} + \frac{\gamma \left(\frac{k+\beta}{\beta}, \lambda\right)}{\lambda^{\frac{k}{\beta}}} - \frac{\gamma \left(\frac{k+2\beta}{\beta}, \lambda\right)}{\lambda^{\frac{k+\beta}{\beta}}} \right\}$$

بعد التبسيط نحصل على الصيغة النهائية للدالة المولدة للعزوم لتوزيع (NLTE-PF).

$$\therefore M_x^{(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t)^k \alpha^k}{k! \lambda^{\frac{k}{\beta}}} \left\{ \frac{\gamma \left(\frac{k+\beta}{\beta}, \lambda\right) - \gamma \left(\frac{k+2\beta}{\beta}, \lambda\right)}{\lambda} + \gamma \left(\frac{k+\beta}{\beta}, \lambda\right) \right\}$$

... (45)

7-5-3-2 الدالة المميزة $\phi(t)$ (Characteristic function):

تعتبر الدالة المميزة $\phi(t)$ او الدالة الوصفية من اهم الدوال لتوليد العزوم لما تتميز به من خصائص تطبيقية حيث تعرف بالشكل الاتي:

$$\phi(t) = E(e^{itx}) = \int_0^{\alpha} e^{itx} g_{nlte-pf}(x, \alpha, \beta, \lambda) dx \quad \dots \quad (46)$$

وان $i = \sqrt{-1}$ ، وبعد التعويض عن دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع (NLTE-PF) عما يقابلها في المعادلة (46) ينتج :

$$\phi(t) = \int_0^{\alpha} e^{itx} \frac{\beta x^{\beta-1} \left\{ 1 + \lambda \left(1 - \left(\frac{x}{\alpha} \right)^{\beta} \right) \right\}}{\alpha^{\beta} e^{\lambda \left(\frac{x}{\alpha} \right)^{\beta}}} dx$$

$$= \left\{ \int_0^{\alpha} \frac{\beta x^{\beta-1} e^{itx - \lambda \left(\frac{x}{\alpha} \right)^{\beta}}}{\alpha^{\beta}} dx + \int_0^{\alpha} \frac{\lambda \beta x^{\beta-1} e^{itx - \lambda \left(\frac{x}{\alpha} \right)^{\beta}}}{\alpha^{\beta}} dx \right.$$

$$\left. - \int_0^{\alpha} \frac{\lambda \beta x^{2\beta-1} e^{itx - \lambda \left(\frac{x}{\alpha} \right)^{\beta}}}{\alpha^{2\beta}} dx \right\}$$

$$\therefore e^{itx} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(itx)^k}{k!} \quad \text{حسب متسلسلة ماكلورين}$$

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} \left\{ \int_0^{\alpha} \frac{\beta x^{k+\beta-1} e^{-\lambda \left(\frac{x}{\alpha} \right)^{\beta}}}{\alpha^{\beta}} dx + \int_0^{\alpha} \frac{\beta \lambda x^{k+\beta-1} e^{-\lambda \left(\frac{x}{\alpha} \right)^{\beta}}}{\alpha^{\beta}} dx \right.$$

$$\left. - \int_0^{\alpha} \frac{\beta \lambda x^{k+2\beta-1} e^{-\lambda \left(\frac{x}{\alpha} \right)^{\beta}}}{\alpha^{2\beta}} dx \right\}$$

بعد اجراء التكاملات للحدود الثلاثة اعلاه وبنفس طرق التكامل المستخدمة سابقا فان نتائج الحدود الثلاثة اعلاه تكون بالشكل الاتي:

$$(1-) \int_0^{\alpha} \frac{\beta x^{k+\beta-1} e^{-\lambda(\frac{x}{\alpha})^{\beta}}}{\alpha^{\beta}} dx = \left\{ \frac{\alpha^k \gamma\left(\frac{k+\beta}{\beta}, \lambda\right)}{\lambda^{\frac{k+\beta}{\beta}}} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{\alpha^k \left(\Gamma\left(\frac{k+\beta}{\beta}\right) - \Gamma\left(\frac{k+\beta}{\beta}, \lambda\right) \right)}{\lambda^{\frac{k+\beta}{\beta}}} \right\}$$

$$(2-) \int_0^{\alpha} \frac{\beta \lambda x^{k+\beta-1} e^{-\lambda(\frac{x}{\alpha})^{\beta}}}{\alpha^{\beta}} dx = \left\{ \frac{\alpha^k \gamma\left(\frac{k+\beta}{\beta}, \lambda\right)}{\lambda^{\frac{k}{\beta}}} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{\alpha^k \left(\Gamma\left(\frac{k+\beta}{\beta}\right) - \Gamma\left(\frac{k+\beta}{\beta}, \lambda\right) \right)}{\lambda^{\frac{k}{\beta}}} \right\}$$

$$(3-) \int_0^{\alpha} \frac{\beta \lambda x^{k+2\beta-1} e^{-\lambda(\frac{x}{\alpha})^{\beta}}}{\alpha^{2\beta}} dx = \left\{ \frac{\alpha^k \gamma\left(\frac{k+2\beta}{\beta}, \lambda\right)}{\lambda^{\frac{k+\beta}{\beta}}} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{\alpha^k \left(\Gamma\left(\frac{k+2\beta}{\beta}\right) - \Gamma\left(\frac{k+2\beta}{\beta}, \lambda\right) \right)}{\lambda^{\frac{k+\beta}{\beta}}} \right\}$$

لذا فان الدالة المميزة لتوزيع (NLTE-PF) تكون وفق الصيغة الاتية:

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k \alpha^k}{k!} \left\{ \frac{\gamma\left(\frac{k+\beta}{\beta}, \lambda\right)}{\lambda^{\frac{k+\beta}{\beta}}} + \frac{\gamma\left(\frac{k+\beta}{\beta}, \lambda\right)}{\lambda^{\frac{k}{\beta}}} - \frac{\gamma\left(\frac{k+2\beta}{\beta}, \lambda\right)}{\lambda^{\frac{k+\beta}{\beta}}} \right\}$$

بتبسيط الصيغة أعلاه نحصل على الصيغة النهائية للدالة المميزة لتوزيع (NLTE-PF).

$$\therefore \phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k \alpha^k}{k! \lambda^{\frac{k}{\beta}}} \left\{ \frac{\gamma\left(\frac{k+\beta}{\beta}, \lambda\right) - \gamma\left(\frac{k+2\beta}{\beta}, \lambda\right)}{\lambda} + \gamma\left(\frac{k+\beta}{\beta}, \lambda\right) \right\}$$

... (47)

2-3-6 طرائق التقدير (Methods of Estimation):

يعد التقدير أساساً مهماً للاستدلال الاحصائي، وتكمن أهميته في تقدير معلمات نموذج المجتمع المنسق بناء على الاحصائيات الناتجة عن العينات المأخوذة منه، وهنا سيتم التطرق على أربع طرائق لتقدير معلمات ودالة المعولية للنموذج الجديد (NLTE-PF) والمقارنة فيما بينها وتحديد أفضل طريقة للتقدير من بين الطرائق الأخرى ليتم استخدامها في الجانب التطبيقي من الدراسة.

2-3-6-1 طريقة الإمكان الأعظم (MLE): [27][64]

(Maximum Likelihood Estimators)

في عام (1920) اقترح Fisher هذه الطريقة وتعد من أهم طرائق التقدير والشائعة الاستخدام لما لها من مميزات وخصائص متعددة أهمها خاصية الاتساق والكفاية، وتتميز بالدقة في التقدير مقارنة بالطرائق الأخرى وخصوصاً عندما يزداد حجم العينة، ويرمز لها بالرمز (L)، وان أساس عمل طريقة الإمكان الأعظم هو التكرار للعمليات الحسابية حتى يتم الوصول الى أفضل تقديرات للمعالم، ولكون هذه الطريقة تتطلب عمليات حسابية معقدة لذا لم تستعمل بشكل واسع الا بعد ظهور البرامج الاحصائية، وان هذه الطريقة تفترض قيم أولية للمعلمات بعد ذلك تبدأ بتكرار العمليات الحسابية حتى نصل الى الفرق بين عمليتين حسابيتين يساوي صفر او قريب للصفر وعند هذه النقطة يتم التوقف عن تكرار العمليات الحسابية.

إذا كان (x_i) متغير عشوائي يتبع توزيع (NLTE-PF) فان دالة الإمكان الأعظم تمثل الدالة المشتركة للمتغيرات العشوائية المستقلة $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ وكالاتي:

$$L(x_1, \dots, x_n; \alpha, \beta, \lambda) = g(x_1; \alpha, \beta, \lambda) \cdot g(x_2; \alpha, \beta, \lambda) \dots \dots \dots g(x_n; \alpha, \beta, \lambda)$$

$$\therefore L(x_i; \alpha, \beta, \lambda) = \prod_{i=1}^n g(x_i; \alpha, \beta, \lambda)$$

وبتعويض دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع دالة القوى الموسع (NLTE-PF) في الصيغة أعلاه:

$$L(x_i; \alpha, \beta, \lambda) = \prod_{i=1}^n \left[\frac{\beta x_i^{\beta-1} \left[1 + \lambda \left(1 - \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^\beta \right) \right]}{\alpha^\beta e^{\lambda \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^\beta}} \right]$$

$$L(x_i; \alpha, \beta, \lambda) = \frac{\beta^n}{\alpha^n \beta} e^{-\frac{\lambda}{\alpha^\beta} \sum_{i=1}^n (x_i)^\beta} \prod_{i=1}^n x_i^{\beta-1} \left[1 + \lambda \left(1 - \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^\beta \right) \right]$$

وبأخذ اللوغاريتم الطبيعي (ln) للطرفين

$$\ln L = n \ln(\beta) - n \beta \ln(\alpha) - \frac{\lambda}{\alpha^\beta} \sum_{i=1}^n (x_i)^\beta + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \ln(x_i) + \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \lambda \left(1 - \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^\beta \right) \right) \quad \dots (48)$$

ولحساب النهايات العظمى لدالة الإمكان الأعظم اعلاه نأخذ المشتقة الجزئية للمعادلة (48) بالنسبة للمعلمات (α, β, λ)

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \hat{\alpha}} = \left\{ -\frac{n \beta}{\hat{\alpha}} + \frac{\lambda \beta \sum_{i=1}^n (x_i)^\beta}{\hat{\alpha}^{\beta+1}} + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda \beta x_i^\beta}{\left(1 + \lambda \left(1 - \left(\frac{x_i}{\hat{\alpha}} \right)^\beta \right) \right) \hat{\alpha}^{\beta+1}} \right\} \quad \dots (49)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \hat{\beta}} = \left\{ \frac{n}{\hat{\beta}} - n \ln(\alpha) + \sum_{i=1}^n \ln x_i + \lambda \alpha^{-\hat{\beta}} \ln(\alpha) \sum_{i=1}^n (x_i)^{\hat{\beta}} - \lambda \alpha^{-\hat{\beta}} \sum_{i=1}^n \ln x_i \cdot (x_i)^{\hat{\beta}} - \sum_{i=1}^n \frac{\lambda \ln \left(\frac{x_i}{\alpha} \right) \cdot \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^{\hat{\beta}}}{\left(1 + \lambda \left(1 - \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^{\hat{\beta}} \right) \right)} \right\} \quad \dots (50)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \hat{\lambda}} = \left\{ -\frac{1}{\alpha^\beta} \sum_{i=1}^n (x_i)^\beta + \sum_{i=1}^n \frac{\left(1 - \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^\beta \right)}{\left(1 + \hat{\lambda} \left(1 - \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^{\hat{\beta}} \right) \right)} \right\} \quad \dots (51)$$

وبعد مساواة المعادلات الثلاثة (49)(50)(51) بالصفر، ولكونها معادلات غير خطية لذلك لا يمكن حلها بالطرق التحليلية الاعتيادية ، وانما تحل بإحدى الطرق الرياضية العددية ، وقد استخدمت طريقة (نيوتن- رافسون) لحل المعادلات والحصول على مقدر المعلمات بطريقة الإمكان الأعظم $(\hat{\alpha}_{MLE}, \hat{\beta}_{MLE}, \hat{\lambda}_{MLE})$ ، وبعد ذلك تعوض هذه المقدرات في المعادلة (15) للحصول على مقدر الإمكان الأعظم لدالة معولية توزيع (NLTE-PF) .

$$\hat{R}_{MLE}(t) = e^{-\hat{\lambda}_{MLE} \left(\frac{t}{\hat{\alpha}_{MLE}} \right)^{\hat{\beta}_{MLE}}} \left(1 - \left(\frac{t}{\hat{\alpha}_{MLE}} \right)^{\hat{\beta}_{MLE}} \right) \quad \dots (52)$$

2-6-3-2 طريقة المربعات الصغرى (LS) (Least square Method): [1][31][40]

تعتبر طريقة المربعات الصغرى من اهم طرق التقدير وأكثرها استخداماً، وهذه الطريقة تستند على جعل مجموع مربعات الخطأ اقل ما يمكن ويتم من خلالها اختيار التوزيع الملائم للبيانات وتمتاز بخاصية عدم التحيز والاتساق للمقدرات الناتجة عنها، ويمكن صياغتها على النحو الاتي:

$$S = \sum_{i=1}^n \left(G(x_i) - \frac{i}{n+1} \right)^2 \quad \dots (53)$$

$G(x_i)$: تمثل دالة التوزيع التراكمي لتوزيع دالة القوى الموسع الجديد (NLTE-PF)

$\frac{i}{n+1}$: مقدار لامعلمي ، والذي يقابل المقدار الغير متحيز لدالة التوزيع التجميعي (C. D. F)

وبإجراء الاشتقاق الجزئي للمعادلة (53) بالنسبة لمعاملات التوزيع الثلاثة (α, β, λ) لنحصل على ثلاثة معادلات بعد مساواتها بالصفر

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = 2 \sum_{i=1}^n \left[G(x_i; \alpha, \beta, \lambda) - \frac{i}{n+1} \right] \cdot \left[\frac{\partial G(x_i; \alpha, \beta, \lambda)}{\partial \alpha} \right] = 0 \quad \dots (54)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} = 2 \sum_{i=1}^n \left[G(x_i; \alpha, \beta, \lambda) - \frac{i}{n+1} \right] \cdot \left[\frac{\partial G(x_i; \alpha, \beta, \lambda)}{\partial \beta} \right] = 0 \quad \dots (55)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} = 2 \sum_{i=1}^n \left[G(x_i; \alpha, \beta, \lambda) - \frac{i}{n+1} \right] \cdot \left[\frac{\partial G(x_i; \alpha, \beta, \lambda)}{\partial \lambda} \right] = 0 \quad \dots (56)$$

نستخرج المشتقات $\left(\left[\frac{\partial G(x_i; \alpha, \beta, \lambda)}{\partial \alpha} \right], \left[\frac{\partial G(x_i; \alpha, \beta, \lambda)}{\partial \beta} \right], \left[\frac{\partial G(x_i; \alpha, \beta, \lambda)}{\partial \lambda} \right] \right)$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial G(x_i; \alpha, \beta, \lambda)}{\partial \alpha} \right] &= - \frac{e^{-\lambda \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta} x \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{-1+\beta} \beta}{\alpha^2} - \frac{e^{-\lambda \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta} x \left(1 - \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta\right) \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{-1+\beta} \beta \lambda}{\alpha^2} \\ &= - \frac{e^{-\lambda \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta} x^\beta \beta}{\alpha^{\beta+1}} - \frac{e^{-\lambda \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta} x^\beta \beta \lambda \left(1 - \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta\right)}{\alpha^{\beta+1}} \end{aligned}$$

$$\therefore \left[\frac{\partial G(x_i; \alpha, \beta, \lambda)}{\partial \alpha} \right] = \frac{e^{-\lambda \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta} x^\beta \beta}{\hat{\alpha}^{\beta+1}} \left(-1 - \lambda + \lambda \left(\frac{x}{\hat{\alpha}}\right)^\beta \right) \quad \dots (57)$$

$$\left[\frac{\partial G(x_i; \alpha, \beta, \lambda)}{\partial \beta} \right] = e^{-\lambda \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta \ln \left(\frac{x}{\alpha}\right) + e^{-\lambda \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta} \left(1 - \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta\right) \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta \lambda \ln \left(\frac{x}{\alpha}\right)$$

بعد التبسيط

$$\therefore \left[\frac{\partial G(x_i; \alpha, \beta, \lambda)}{\partial \beta} \right] = e^{-\lambda \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta \ln \left(\frac{x}{\alpha}\right) \left(1 + \lambda - \lambda \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta\right) \quad \dots (58)$$

$$\left[\frac{\partial G(x_i; \alpha, \beta, \lambda)}{\partial \lambda} \right] = e^{-\hat{\lambda} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta} \left(1 - \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta\right) \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta \quad \dots (59)$$

بعد تعويض قيم المشتقات الثلاثة (57)،(58)،(59) ودالة التوزيع التراكمي للنموذج الجديد (NLTE-PF) في المعادلات (54)،(55)،(56) وحل المعادلات بالطرق العددية لكونها غير خطية ، لذا تم استخدام طريقة (نيوتن- رافسون) للحصول على القيم التقديرية $(\hat{\alpha}_{LS}, \hat{\beta}_{LS}, \hat{\lambda}_{LS})$ للمعاملات المجهولة (α, β, λ) ، ومن ثم تعوض المقدرات $(\hat{\alpha}_{LS}, \hat{\beta}_{LS}, \hat{\lambda}_{LS})$ في المعادلة (15) للحصول على مقدر دالة المعولية لتوزيع (NLTE-PF) بطريقة المربعات الصغرى .

$$\hat{R}_{LS}(t) = e^{-\hat{\lambda}_{LS} \left(\frac{t}{\hat{\alpha}_{LS}}\right)^{\hat{\beta}_{LS}}} \left(1 - \left(\frac{t}{\hat{\alpha}_{LS}}\right)^{\hat{\beta}_{LS}}\right) \quad \dots (60)$$

3-6-3-2 طريقة المقدرات التجزئية (P.C): [48][49]

(Method of Percentiles Estimators)

تعد من طرائق التقدير المهمة التي اقترحت من قبل العالم (Kao) ، بافتراض ان (q_i) يمثل تقدير لدالة التوزيع التجميعية $G_{nlte-pf}(x_i; \alpha, \beta, \lambda)$.

$$\therefore G_{nlte-pf}(x_i; \alpha, \beta, \lambda) = 1 - \frac{\left(1 - \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta\right)}{e^{\lambda \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta}}$$

q_i : يمثل مقدار لا معلمي يأخذ الصيغة الآتية:

$$q_i = \frac{i-0.3}{n+0.25}$$

فان مقدر المعلمات $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\lambda})$ نحصل عليه عن طريق اجراء الاشتقاق الجزئي للصيغة ادناه بالنسبة للمعاملات (α, β, λ) .

$$Q = \sum_{i=1}^n \left(q_i - G_{nlte-pf}(x_i; \alpha, \beta, \lambda) \right)^2 \quad \dots (61)$$

نأخذ المشتقة الجزئية للمعادلة (61) بالنسبة للمعاملات (α, β, λ) لتكون بالشكل الآتي :

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n \left(q_i - G_{nlte-pf}(x_i; \alpha, \beta, \lambda) \right) \left(\frac{\partial G_{nlte-pf}(x_i; \alpha, \beta, \lambda)}{\partial \alpha} \right) = 0 \quad \dots (62)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^n \left(q_i - G_{nlte-pf}(x_i; \alpha, \beta, \lambda) \right) \left(\frac{\partial G_{nlte-pf}(x_i; \alpha, \beta, \lambda)}{\partial \beta} \right) = 0 \quad \dots (63)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^n \left(q_i - G_{nlte-pf}(x_i; \alpha, \beta, \lambda) \right) \left(\frac{\partial G_{nlte-pf}(x_i; \alpha, \beta, \lambda)}{\partial \lambda} \right) = 0 \quad \dots (64)$$

وبعد مساوات المعادلات الثلاثة أعلاه بالصفر والتعويض عن قيمة (q_i) وكذلك عن قيمة الدالة التراكمية (14) ، وحل المعادلات الناتجة بعد التعويض بطريقة (نيوتن- رافسون) نحصل على قيمة مقدر المعلمات $(\hat{\alpha}_{P.C}, \hat{\beta}_{P.C}, \hat{\lambda}_{P.C})$ بطريقة المقدرات التجزئية للانموذج الجديد (NLTE-PF) ، ومن ثم تعويض هذه المقدرات في المعادلة (15) لنحصل على مقدر دالة المعولية لتوزيع (NLTE-PF) بطريقة المقدرات التجزئية.

$$\hat{R}_{P.C}(t) = e^{-\hat{\lambda}_{P.C} \left(\frac{t}{\hat{\alpha}_{P.C}} \right)^{\hat{\beta}_{P.C}}} \left(1 - \left(\frac{t}{\hat{\alpha}_{P.C}} \right)^{\hat{\beta}_{P.C}} \right) \quad \dots (65)$$

2-3-6-4 طريقة الحد الأقصى الناتج لمقدرات التباعد (MPS): [15][16][28][60]

(Maximum product of spacing estimation method)

في عام (1983) قدم الباحثان (Cheng and Amin) هذه الطريقة، وتعتبر بديلا قويا لطريقة (MLE) لتقدير المعلمات الغير معروفة للتوزيعات أحادية المتغير المستمرة، وتمتاز بعدة خصائص منها الثبات والكفاءة واتساق الحد الأقصى لناتج المقدرات المتباعدة، ولغرض إيجاد مقدرات المعلمات للانموذج الجديد (NLTE-PF) في هذه الطريقة (MPS) نتبع الخطوات الآتية:

إذا كانت لدينا عينة عشوائية مرتبة $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ ومتباعدة بشكل منتظم بين مفرداتها ومأخوذة من مجتمع يتبع التوزيع الاحتمالي لدالة القوى الموسع الجديد (NLTE-PF) الذي يمتلك دالة كثافة احتمالية (p.d.f) ودالة تراكمية (C.D.F) ، فان اقصى ناتج لمقدر التباعد يتم الحصول عليه من خلال تعظيم المتوسط الهندسي للمسافات ، وكما موضح على النحو الآتي:

$$H(\alpha, \beta, \lambda) = \left(\prod_{i=1}^{n+1} D_i(\alpha, \beta, \lambda) \right)^{\frac{1}{n+1}} \quad \dots (66)$$

إذ إن:

$$D_i(\alpha, \beta, \lambda) = G_{nlte-pf}(x_i; \alpha, \beta, \lambda) - G_{nlte-pf}(x_{i-1}; \alpha, \beta, \lambda)$$

وان:

$$\sum_{i=1}^{n+1} D_i(\alpha, \beta, \lambda) = 1 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n + 1$$

$$D_i(\alpha, \beta, \lambda) = \begin{cases} G(x_1) & \text{if } i = 1 \\ G(x_i) - G(x_{i-1}) & \text{if } i = 2, \dots, n \\ 1 - G(x_n) & \text{if } i = n + 1 \end{cases}$$

وعندما نأخذ اللوغاريتم للمعادلة (66) ينتج:

$$\ln H(\alpha, \beta, \lambda) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \ln D_i(\alpha, \beta, \lambda)$$

$$\ln H(\alpha, \beta, \lambda) = \frac{1}{n+1} \left(\ln D_1(\alpha, \beta, \lambda) + \sum_{i=2}^n \ln D_i(\alpha, \beta, \lambda) + \ln D_{n+1}(\alpha, \beta, \lambda) \right)$$

$$\ln H(\alpha, \beta, \lambda) = \frac{1}{n+1} \left(\ln G(x_1) + \sum_{i=2}^n \ln(G(x_i) - G(x_{i-1})) + \ln(1 - G(x_n)) \right) \quad \dots (67)$$

وعند التعويض عن دالة التوزيع التراكمية (14) في المعادلة (67) ينتج:

$$\ln H(\alpha, \beta, \lambda) = \frac{1}{n+1} * \left\{ \ln \left(1 - \frac{(1 - (\frac{x_1}{\alpha})^\beta)}{e^{\lambda(\frac{x_1}{\alpha})^\beta}} \right) + \sum_{i=2}^n \ln \left[\left(1 - \frac{(1 - (\frac{x_i}{\alpha})^\beta)}{e^{\lambda(\frac{x_i}{\alpha})^\beta}} \right) - \left(1 - \frac{(1 - (\frac{x_{i-1}}{\alpha})^\beta)}{e^{\lambda(\frac{x_{i-1}}{\alpha})^\beta}} \right) \right] + \ln \left[1 - \left(1 - \frac{(1 - (\frac{x_n}{\alpha})^\beta)}{e^{\lambda(\frac{x_n}{\alpha})^\beta}} \right) \right] \right\}$$

$$\ln H(\alpha, \beta, \lambda) = \frac{1}{n+1} * \left\{ \ln \left(1 - \frac{\left(1 - \left(\frac{x_1}{\alpha}\right)^\beta\right)}{e^{\lambda \left(\frac{x_1}{\alpha}\right)^\beta}} \right) + \sum_{i=2}^n \ln \left[\frac{\left(1 - \left(\frac{x_{i-1}}{\alpha}\right)^\beta\right)}{e^{\lambda \left(\frac{x_{i-1}}{\alpha}\right)^\beta}} - \frac{\left(1 - \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta\right)}{e^{\lambda \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta}} \right] \right\}$$

$$+ \ln \left[\frac{\left(1 - \left(\frac{x_n}{\alpha}\right)^\beta\right)}{e^{\lambda \left(\frac{x_n}{\alpha}\right)^\beta}} \right]$$

بعد التبسيط

$$\therefore \ln H(\alpha, \beta, \lambda) =$$

$$\frac{1}{n+1} * \left\{ \ln \left[e^{\lambda \left(\frac{x_1}{\alpha}\right)^\beta} - 1 + \left(\frac{x_1}{\alpha}\right)^\beta \right] - \lambda \left(\frac{x_1}{\alpha}\right)^\beta + \ln \left[1 - \left(\frac{x_n}{\alpha}\right)^\beta \right] - \lambda \left(\frac{x_n}{\alpha}\right)^\beta + \right. \\ \left. \sum_{i=2}^n \ln \left[e^{\lambda \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta} \cdot \left(1 - \left(\frac{x_{i-1}}{\alpha}\right)^\beta\right) - e^{\lambda \left(\frac{x_{i-1}}{\alpha}\right)^\beta} \cdot \left(1 - \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta\right) \right] - \lambda \left(\frac{x_{i-1}}{\alpha}\right)^\beta - \lambda \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta \right\}$$

... (68)

نأخذ المشتقة الجزئية للمعادلة (68) بالنسبة للمعلمات (α, β, λ) وكما مبيته نتائجها في المعادلات الثلاثة $(1-A)(2-A)(3-A)$ الموجودة في الملحق (A) وبعد مساواتها بالصفر ، تحل بطريقة (نيوتن-رافسون) لكونها غير خطية ، نحصل على مقدر المعلمات بطريقة الحد الأقصى لنتائج التباعد $(\hat{\alpha}_{MPS}, \hat{\beta}_{MPS}, \hat{\lambda}_{MPS})$ للأنموذج الجديد (NLTE-PF)، ومن ثم تعويض هذه المقدرات في المعادلة (15) لنحصل على مقدر دالة المعولية بطريقة الحد الأقصى لنتائج التباعد .

$$\hat{R}_{MPS}(t) = e^{-\hat{\lambda}_{MPS} \left(\frac{t}{\hat{\alpha}_{MPS}}\right)^{\hat{\beta}_{MPS}}} \left(1 - \left(\frac{t}{\hat{\alpha}_{MPS}}\right)^{\hat{\beta}_{MPS}} \right) \quad \dots (69)$$

4-2 معايير مقارنة طرائق التقدير:

(Criteria for comparing estimation methods)

1- متوسط مربعات الخطأ (MSE) بالنسبة الى معالم الانموذج الاحتمالي الجديد (NLTE-PF):

$$MSE(\Omega) = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R (\hat{\Omega}_i - \Omega)^2 \quad \dots (70)$$

Ω : تمثل القيم الافتراضية لمعالم الانموذج أي ان $\Omega = (\alpha, \beta, \lambda)$.

$\hat{\Omega}_i$: تمثل القيم المقدره لمعالم الانموذج وحسب طريقة التقدير المستعملة.

R : يمثل عدد تكرار التجربة .

2- متوسط مربعات الخطأ (MSE) بالنسبة الى دالة المعولية للأنموذج الجديد (NLTE-PF):

$$MSE(\hat{R}(t_j)) = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R (\hat{R}_i(t_j) - R_i(t_j))^2 \quad , j = 1, 2, \dots, k \quad \dots (71)$$

$R_i(t_j)$: تمثل قيم دالة المعولية الحقيقية.

$\hat{R}_i(t_j)$: تمثل قيم دالة المعولية المقدره حسب طريقة التقدير المستعملة.

R: يمثل عدد تكرار التجربة.

K: يمثل عدد مشاهدات التجربة.

3- ولتقدير دالة المعولية بأفضل مقدر تم الوصول اليه، ولكون متوسط مربعات الخطأ يحسب لكل

قيم (t_j) من الزمن، يتم المقارنة بين طرائق التقدير المستعملة بواسطة متوسط مربعات

الخطأ التكاملي (IMSE) الذي يمثل تكامل المساحة الكلية لقيم (t_j) وجعلها قيمة واحدة تعبر

عن الزمن الكلي وحسب الصيغة الاتية:

$$IMSE(\hat{R}(t_j)) = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K \left(\frac{1}{R} \sum_{i=1}^R (\hat{R}_i(t_j) - R_i(t_j))^2 \right)$$

أي ان:

$$IMSE(\hat{R}(t_j)) = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K (MSE(\hat{R}(t_j))) \quad \dots (72)$$

2-5 معايير اختيار أفضل توزيع: [21][36]

(Criteria for selection of the best)

يعد اختيار أفضل انموذج توزيع احتمالي من العمليات المهمة في التحليل الإحصائي حيث يتباين تمثيل البيانات ونمذجتها من توزيع لآخر لذا يتم المفاضلة بين التوزيعات الاحتمالية واختيار أفضلها كفاءة ودقة في النمذجة، ويتم ذلك وفق معايير معينة، حيث تم استعمال ثلاثة معايير لبيان افضلية الانموذج الجديد (NLTE-PF) مقارن بتوزيع دالة القوى (PF).

1-5-2 معيار معلومات اكاكي (AIC) (Akaike Information Criteria):

ويستخدم هذا المعيار للمقارنة بين التوزيعات الاحتمالية بناءً على عينة من البيانات تطبق عليها حيث تحسب قيمة المعيار والتوزيع الذي يمتلك اقل قيمة يعتبر الأفضل في تمثيل هذه العينة من البيانات، وان قيمة معيار اكاكي تحسب بالصيغة الآتية:

$$AIC = -2 * \log(L) + 2 * k \quad \dots (73)$$

L : تمثل قيمة دالة الإمكان الأعظم (MLE).

K : تمثل عدد معالم الانموذج.

2-5-2 معيار معلومات اكاكي المصحح (AIC_c) (Akaike Information Correct):

ويفضل استعمال هذا المعيار عندما تكون النسبة بين حجم العينة وعدد المعالم المقدرة للأنموذج صغيرة، حيث يتم اختيار افضل توزيع من بين مجموعة من التوزيعات بناءً على اقل قيمة لهذا المعيار (AIC_c)، ويتم حسابة وفق الصيغة الآتية:

$$AIC_c = AIC + \frac{2k(k+1)}{n-k-1} \quad \dots (74)$$

اذ ان:

AIC : يمثل معيار اكاكي.

K : يمثل عدد معالم الانموذج.

n : تمثل حجم العينة .

3-5-2 معيار المعلومات البيزي (BIC) (Bayesian Information Criterion):

اقترح هذا المعيار عام 1978 من قبل (Schwarz)، إذ تضمن يتناول كيفية اختيار انموذج معين من بين عدة نماذج، وذلك عن طريق إيجاد الحل البيزي له (Bayes Solution) وقد استعملت نظرية بيز في توسعة الحل البيزي وحسب الصيغة الآتية:

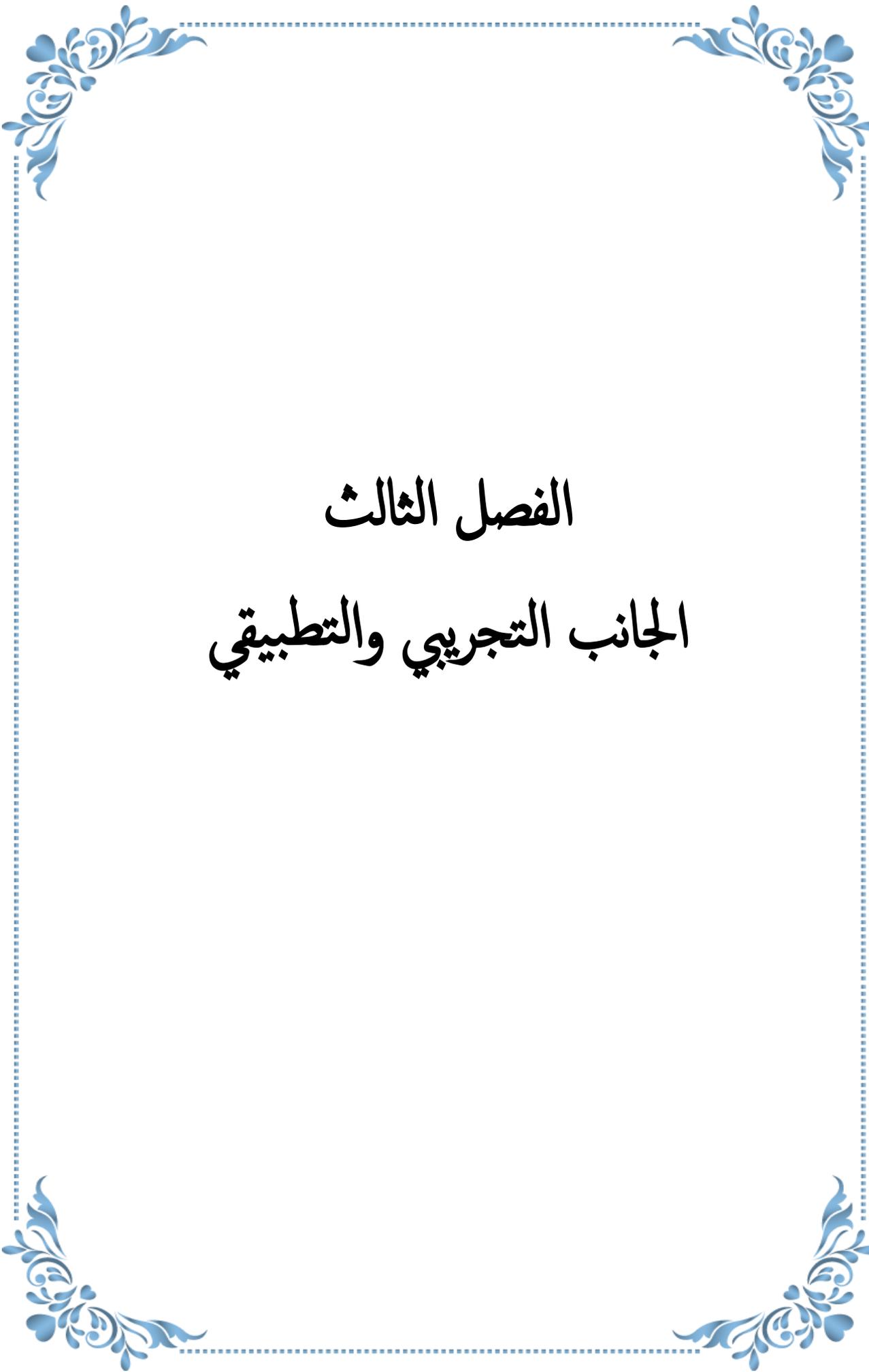
$$BIC = -2 \log L(\hat{\theta}) + k \log(n) \quad \dots (75)$$

اذ ان:

$\log L(\hat{\theta})$: يمثل لوغار يتم الإمكان الأعظم.

K : تمثل عدد معالم الانموذج المقدرة .

n : تمثل حجم العينة.



الفصل الثالث
الجانب التجريبي والتطبيقي

1-3 تمهيد (preamble):

يتضمن هذا الفصل مبحثين أساسيين، المبحث الأول ويمثل الجانب التجريبي الذي استخدم أسلوب محاكاة مونت-كالو (Monte-Carlo) في توليد البيانات، وقد تم تقدير معلمات ودالة المعولية للأنموذج الجديد (NLTE-PF) بطرائق التقدير التي تم التطرق إليها في الفصل الثاني-الجانب النظري، وأجريت مقارنة بين هذه الطرائق باستخدام متوسط مربعات الخطأ (MSE) في ما يخص مقدرات معلمات الانموذج ومتوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) في ما يخص مقدرات دالة المعولية ، للحصول على أفضل طريقة تقدير من بين الطرائق الأربعة.

في حين تضمن المبحث الثاني الجانب التطبيقي استخدام بيانات حقيقية وتطبيقها على الانموذج الموسع الجيد، واخذت البيانات الحقيقية من مستشفى الفيحاء التعليمي التابع الى دائرة صحة البصرة، تم استعمال برنامج (Wolfram Mathematica 12.2) في اجراء تجربة المحاكاة واستخلاص جميع نتائج المبحثين.

2-3 المبحث الأول / الجانب التجريبي:

في هذا القسم سيتم تطبيق توزيع (NLTE-PF) على بيانات افتراضية ومناقشة نتائج أسلوب المحاكاة، الذي سيقارن بين طرائق التقدير المستعملة لتقدير معلمات ودالة المعولية للأنموذج الجديد (NLTE-PF)، وأجريت الدراسة على احجام عينات مختلفة (صغيرة، متوسطة، كبيرة) وقيم افتراضية مختلفة محددة مسبقا لمعلمات الانموذج الموسع الجديد، واستعمل المعيارين الاحصائيين (MSE) و (IMSE) كأساس للمقارنة وذلك لتحديد افضلية احدى طرائق التقدير.

1-2-3 مفهوم المحاكاة (The Simulation Concept): [4][5]

تعرف المحاكاة بانها طريقة رياضية لحل المشاكل المعقدة، أي انها أسلوب رياضي يمتاز بالمرونة والقدرة على التجريب والاختبار لمرات عديدة واختصار الوقت والكلفة ، ويستخدم أسلوب المحاكاة لتحديد التغيرات التي طرأت على المشكلة عند تنفيذها، أي تمثيل او تقليد للواقع الحقيقي حيث تعطي معلومات وصورة واضحة تكون مفيدة للواقع الذي تمثله ، وكذلك تكرار التجربة الذي يعطي وصفا شاملا للأجراء الرياضي المستخدم ، وغالبا ما نجد ان هناك عمليات معقدة لفهمها في الواقع الحقيقي خاصة في ما يتعلق بمشاكل او نظريات إحصائية وهندسية محددة التي يصعب تحليلها باستخدام البراهين الرياضية الامر الذي يؤدي الى ترجمة هذه النظريات الى مجتمعات فعلية ، ومن ثم اخذ عددا من العينات العشوائية لتحديد افضل الحلول لهذه المشاكل ولتحقيق ذلك من الأفضل مقارنة هذه العمليات بالصور الواقعية

باستخدام نماذج محددة ، لذا تسمح لنا محاكاة النموذج باكتساب فهم أفضل للعملية الاصلية او الوضع في العالم الحقيقي ، وقد تم صياغة انموذج المحاكاة لمقارنة طرائق التقدير المدروسة في الجانب النظري من اجل تحديد اكثر الطرائق فاعلية وافضلها في تقدير معلمات و دالة المعولية للأنموذج الجديد.

2-2-3 مراحل تجربة المحاكاة (Stages of a simulation experience):

تم استعمال حزم برنامج [MATHEMATICA-12.2] في كتابة برنامج المحاكاة كما موضح في الملحق (B)، وتضمن برنامج المحاكاة متضمناً مراحل متعددة مبينة على النحو الاتي:

المرحلة الأولى:

تعد من المراحل المهمة والتمهيدية للمراحل اللاحقة وتتخلص في الخطوات الاتية:

- 1- اختيار قيم افتراضية لمعالم الانموذج الجديد (NLTE-PF) وحسب ما مبين في الجدول (1-3) أدناه:

جدول (1-3)

القيم الافتراضية الأوليّة للمعلمات والنماذج المقترحة

Models	α	β	λ
(1)	2	1	0.05
(2)	2	1	1.5
(3)	2	2.5	0.05
(4)	2	2.5	1.5
(5)	4	1	0.05
(6)	1	1.5	1
(7)	3	3	0.5
(8)	4	1	0.5

- 2- اختيار حجم العينة حيث تم اختيار اربعة احجام وهي (100،75،50،25) من اجل تحديد تأثير حجم العينة على نتائج التقدير.

- 3- تكرار التجربة لمرات عديدة لغرض الحصول على أفضل نتائج تقدير متجانسة.

المرحلة الثانية:

تتضمن هذه المرحلة توليد بيانات عشوائية تلائم الأنموذج المقترح الجديد (NLTE-PF) بطريقة التحويل المعكوس وحسب الخطوات الآتية:

1- يتم توليد ارقام عشوائية q_i تتبع التوزيع المنتظم ضمن الفترة $\{0,1\}$

$$q_i \sim \text{UniformDistribution}(0,1) \quad , \quad i = 1,2, \dots, n$$

وان q_i يمثل متغير عشوائي يتبع التوزيع المنتظم

2- تحويل الأرقام (البيانات) المولدة في الخطوة الأولى الى بيانات تتبع التوزيع (NLTE-PF)

بإستخدام طريقة التحويل المعكوس وحسب المعادلة (20) التي تمثل

الدالة الكمية للأنموذج الاحتمالي الموسع الجديد وكما مبين في الفصل الثاني/الجانب النظري،

أي ان :

$$x_i = e^{\frac{\ln\left(-\frac{\text{Lambert W}\left(\frac{\lambda(q_i-1)}{e^\lambda}\right) + \lambda}{\lambda}\right) + \beta \ln(\alpha)}{\beta}}$$

المرحلة الثالثة:

يتم تقدير معالم ودالة المعولية لتوزيع (NLTE-PF) في هذه المرحلة ولكافة الطرائق التي تم التطرق اليها في الجانب النظري من الفصل الثاني وهي:

1- طريقة الإمكان الأعظم (MLE).

2- طريقة المربعات الصغرى (LS).

3- طريقة المقدرات التجزيئية (P.C).

4- طريقة الحد الأقصى الناتج لمقدرات التباعد (MPS).

المرحلة الرابعة:

تكرر هذه العملية (1000) مرة وفق البرنامج المذكور في الملحق (B).

المرحلة الخامسة:

تتم المقارنة في هذه المرحلة بين المقدرات التي تم الحصول عليها لمعلمت توزيع (NLTE-PF) وذلك

باستعمال متوسط مربعات الخطأ (MSE) كمعيار احصائي للمقارنة وفق الصيغة (70) من الفصل

الثاني، والمعيار الإحصائي متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) للمقارنة بين مقدرات دالة المعولية لتوزيع (NLTE-PF) وفق الصيغة (72) من الفصل الثاني.

3-2-3 نتائج المحاكاة (Simulation results):

بعد اجراء تجربة المحاكاة من خلال تنفيذ البرنامج في الحاسبة الالكترونية، تم الحصول على نتائج مقدرات المعلمات ودالة المعولية للأنموذج المقترح الجديد (NLTE-PF) بطرائق التقدير الأربعة المبينة في الفصل الثاني ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) ومتوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) ، حيث تم تبويب نتائج التقديرات بالجداول والرسوم البيانية في الملحق (A)، ومن اجل الوصول الى أفضل تقدير تمت المقارنة بين طرائق التقدير المدروسة، وقد استعمل أسلوب الرتب (Ranks) كأساس للمفاضلة بين طرائق التقدير الأربعة، ومن ثم المقارنة بين مقدرات المعلمات ودالة المعولية باستعمال المعايير الإحصائية (MSE ,IMSE) ، تم تقسيم نتائج التقدير على قسمين هما .

القسم الأول/ مقدرات معلمات توزيع (NLTE-PF):

يتم اجراء المقارنة بين نتائج مقدرات المعلمات لطرائق التقدير كافة وفق النقاط الاتية:

- 1- يتم ترتيب مقدرات متوسط مربعات الخطأ ولطرائق التقدير كافة ولكل حجم عينة.
- 2- تعطى رتبة لكل قيمه من قيم متوسط مربعات الخطأ ولكافة الطرائق، بمعنى تعطى الرتبة الاولى لقيمة $[MSE(\Omega)]$ الأصغر من بين قيم $[MSE(\Omega)]$ في الطرائق الأربعة وهكذا نستمر حتى الوصول الى أكبر قيمة لمتوسط مربعات الخطأ حيث يتم إعطائها الرتبة الرابعة، وتطبق هذه العملية بالنسبة للنماذج الأخرى، وتسمى الرتب في هذه الحالة بالرتب الجزئية (Partial Rank).

- 3- يتم جمع الرتب الجزئية الناتجة من النقطة الثانية لكل طريقة تقدير وحسب احجام العينات وإعطاء رتب جديدة لمجاميع الرتب الجزئية بنفس الطريقة التي تم ذكرها أعلاه، وتسمى الرتب الجديدة بالرتب الكلية والتي تعد الأساس في المقارنة بين طرائق التقدير الأربعة وكما مبين في الجداول (2-3) (3-3) ادناه.

جدول (2-3)

يمثل الرتب الكلية لمتوسط مربعات الخطأ (MSE) لطرائق التقدير كافة ولجميع قيم المعلمات الافتراضية ولجميع النماذج.

Models	n	MLE	LS	P.C	MPS
(1)	25	4	2	1	3
	50	2	3	4	1
	75	1	3	4	2
	100	1	3	4	2
(2)	25	1	2.5	2.5	4
	50	1	4	2	3
	75	1	3	2	4
	100	1	4	2.5	2.5
(3)	25	1	2	4	3
	50	1	3	4	2
	75	1	3	4	2
	100	2	3	4	1
(4)	25	1	3	2	4
	50	1	4	2.5	2.5
	75	1	3	2	4
	100	1	3	2	4
(5)	25	1	3	4	2
	50	1.5	3	4	1.5
	75	1	4	3	2
	100	1	4	3	2
(6)	25	4	3	1	2
	50	4	2	1	3
	75	4	2	1	3
	100	4	2	1	3
(7)	25	1	2.5	4	2.5
	50	1	3	4	2
	75	1	3	4	2
	100	1	3.5	3.5	2
(8)	25	1	3	4	2
	50	1	3	4	2
	75	1	3	4	2
	100	1	2	3	4
\sum Rank		49.5	94.5	95	81
Overall Ranks		1	3	4	2

جدول (3-3)

يمثل الرتب الكلية لمتوسط مربعات الخطأ (MSE) لطرائق التقدير كافة ولجميع قيم المعلمات الافتراضية وحسب حجم العينة.

n	Sum of Ranks	MLE	LS	P.C	MPS
25	\sum Rank	14	21	22.5	22.5
	Overall Ranks	1	2	3.5	3.5
50	\sum Rank	12.5	25	25.5	17
	Overall Ranks	1	3	4	2
75	\sum Rank	11	24	24	21
	Overall Ranks	1	3.5	3.5	2
100	\sum Rank	12	24.5	23	20.5
	Overall Ranks	1	4	3	2

من الجدولين (2-3) و(3-3) أعلاه يتضح ما يلي:

- 1- افضلية طريقة الإمكان الأعظم (MLE) في تقدير معلمات توزيع (NLTE-PF) وذلك لكونها اخذت الرتبة الأولى في التقدير من بين طرائق التقدير كافة أي انها تناسب في تقدير معالم التوزيع لكافة احجام العينات.
- 2- طريقة الحد الأقصى الناتج لمقدرات التباعد (MPS) احتلت المرتبة الثانية في تقدير معالم توزيع (NLTE-PF) عند حجوم عينات (50، 75، 100) في حين احتلت المرتبة الثالثة والنصف عند حجم العينة (25) أي انها لا تناسب في تقديرات احجام العينات الصغيرة، وقد اخذت الرتبة الثانية من بين طرائق التقدير بصورة عامة.
- 3- طريقة المربعات الصغرى (LS) احتلت المرتبة الثانية عند حجم العينة (25) أي انها تناسب في تقديرات حجوم العينات الصغيرة ومن ثم المرتبة الثالثة عند حجم العينة (50) والمرتبة الثالثة والنصف عند حجم العينة (75) والمرتبة الرابعة عند حجم العينة (100) أي انها لا تناسب في تقديرات احجام العينات المتوسطة والكبيرة، وقد اخذت المرتبة الثالثة من بين طرائق التقدير كافة وبصورة عامة.

- 4- طريقة المقدرات التجزئية (P.C) احتلت المرتبة الثالثة والنصف عند حجم العينة (25) والمرتبة الرابعة عند حجم العينة (50) والمرتبة الثالثة والنصف عند حجم العينة (75) والمرتبة الثالثة عند حجم العينة (100) وقد اخذت المرتبة الرابعة من بين طرائق التقدير بصورة عامة.
- 5- من خلال الجداول الخاصة بتقدير معلمات توزيع (NLTE-PF) الموجودة في الملحق (A) نلاحظ افضلية الانموذج الثامن من بين النماذج الأخرى في تقدير المعلمات الافتراضية حيث كانت المقدرات مقارنة للقيم الافتراضية الخاصة بالنموذج الثامن وكذلك يمتلك اقل قيم من متوسط مربعات الخطأ (MSE).

القسم الثاني/ مقدرات دالة المعولية لتوزيع (NLTE-PF):

تم احتساب نتائج مقدرات دالة المعولية ومتوسط مربعات الخطأ ومتوسط مربعات الخطأ التكاملية، والتي بوبت نتائجها في الجداول من (A-9) الى (A-16) والرسوم البيانية لكل نموذج الواردة جميعها في الملحق (A) ، وللوصول الى مقدر افضل لتقدير دالة المعولية ، وحيث ان متوسط مربعات الخطأ يحسب لكل قيم (t_j) من الزمن، فقد تمت المقارنة بين طرائق التقدير الأربعة باستعمال المعيار متوسط مربعات الخطأ التكاملية (IMSE) الذي يمثل تكامل المساحة الكلية لقيم (t_j) وجعلها قيمة واحدة تعبر عن الزمن الكلي وحسب الصيغة (72) من الفصل الثاني ، ليتم بعد ذلك استخدام أسلوب الرتب (Ranks) وبنفس الأسلوب الذي استخدم أعلاه للمقارنة بين مقدرات المعلمات وحسب ما موضح في النقاط الآتية :

- 1- يتم ترتيب مقدرات متوسط مربعات الخطأ التكاملية ولطرائق التقدير كافة ولكل حجم عينة.
- 2- تعطى رتبة لكل قيمة من قيم متوسط مربعات الخطأ التكاملية ولكافة الطرائق، بمعنى تعطى الرتبة الاولى لقيمة ($IMSE(\hat{R}(t_j))$) الأصغر من بين قيم ($IMSE(\hat{R}(t_j))$) في الطرائق الأربعة وهكذا نستمر حتى الوصول الى أكبر قيمة لمتوسط مربعات الخطأ التكاملية حيث يتم إعطائها الرتبة الرابعة، وتطبق هذه العملية بالنسبة للنماذج الأخرى، وتسمى الرتب في هذه الحالة بالرتب الجزئية (Partial Rank).
- 3- يتم جمع الرتب الجزئية الناتجة من النقطة الثانية لكل طريقة تقدير وحسب احجام العينات وإعطاء رتب جديدة لمجاميع الرتب الجزئية بنفس الطريقة التي تم ذكرها أعلاه، وتسمى الرتب الجديدة بالرتب الكلية والتي تعد الأساس في المقارنة بين طرائق التقدير الأربعة وكما مبين في الجداول (4-3) (5-3) أدناه.

جدول (4-3)

يمثل الرتب لمتوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) لمقدر دالة المعولية لطرائق واحجام العينات والنماذج كافة.

Models	n	MLE	LS	P.C	MPS
(1)	25	3	1	2	4
	50	3	1	2	4
	75	2	1	3	4
	100	1	3	4	2
(2)	25	1	2	3	4
	50	1	3	2	4
	75	1	2	3	4
	100	1	3	2	4
(3)	25	1	2	3	4
	50	1	2	3	4
	75	1	2	3	4
	100	1	3	4	2
(4)	25	1	2	3	4
	50	1	2	3	4
	75	1	3	4	2
	100	3	1	2	4
(5)	25	4	1	2	3
	50	4	2	3	1
	75	3	2	1	4
	100	1	3	2	4
(6)	25	4	1	2	3
	50	4	1	2	3

	75	4	2	1	3
	100	4	1	2	3
(7)	25	1	2	3	4
	50	2	1	3	4
	75	1	3	4	2
	100	1	3	4	2
(8)	25	1	3	2	4
	50	1	3	2	4
	75	1	3	2	4
	100	1	2	3	4
$\sum Ranks$		60	66	84	110
Rank of methods		1	2	3	4

جدول (5-3)

يمثل مجموع الرتب الكلية لمتوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) لطرائق تقدير دالة المعولية حسب حجم العينة.

n	Sum of Rank	Method			
		MLE	LS	P.C	MPS
25	$\sum Ranks$	16	14	20	30
	Overall Ranks	2	1	3	4
50	$\sum Ranks$	17	15	20	28
	Overall Ranks	2	1	3	4
75	$\sum Ranks$	14	18	21	27
	Overall Ranks	1	2	3	4

100	$\sum Ranks$	13	19	23	25
	Overall Ranks	1	2	3	4

نلاحظ من الجدول (3-4) والجدول (3-5) أعلاه ما يلي:

- 1- تكون الأفضلية لطريقة الإمكان الأعظم (MLE) في تقدير دالة المعولية للأنموذج الاحتمالي الجديد (NLTE-PF) حيث اخذت الرتبة الجزئية الأولى عند حجوم العينات (100، 75) واثبتت كفاءتها في التقدير عند حجوم العينات المتوسطة والكبيرة واخذت الرتبة الجزئية الثانية عند حجوم العينات (25، 50) والتي ستستخدم في تقدير دالة المعولية في الجانب التطبيقي.
- 2- تكون الأفضلية لطريقة المربعات الصغرى (LS) لتقدير معولية الانموذج الاحتمالي (NLTE-PF) عندما تكون حجوم العينات (25، 50) حيث اخذت الرتبة الجزئية الثانية.
- 3- ان طريقة المقدرات التجزئية (P.C) اخذت الرتبة الجزئية الثالثة لتقدير معولية الانموذج لجميع حجوم العينات الكبيرة والمتوسطة والصغيرة.
- 4- وان طريقة الحد الأقصى الناتج لمقدرات التباعد (MPS) اخذت الرتبة الجزئية الرابعة لتقدير معولية الانموذج ولجميع حجوم العينات.
- 5- من خلال الرسوم البيانية لكل نموذج نلاحظ ان طريقة الإمكان الأعظم تكون تقديراتها متقاربة جدا من القيم الحقيقية (الافتراضية) عندما يكون حجم العينة (75، 100) في حين تبتعد تقديراتها عن القيم الحقيقية عندما يكون حجم العينة (25، 50).
- 6- من خلال الجداول الخاصة بتقدير دالة المعولية للنماذج كافة نلاحظ افضلية النموذج الثالث عن بقية النماذج الأخرى وذلك لكونه يمتلك اقل قيم من متوسط مربعات الخطأ (MSE) من خلال المقارنة بين مقدرات دالة المعولية الحقيقية والمقدرة بطرائق التقدير المستخدمة.

3-3 المبحث الثاني / الجانب التطبيقي:

في هذا المبحث يتم تطبيق توزيع (NLTE-PF) عمليا على بيانات حقيقية ، حيث تم الحصول عليها من وزارة الصحة العراقية /دائرة صحة البصرة/مستشفى الفيحاء التعليمي ومن سجلات وحدة الصيانة الخاصة بالأجهزة الطبية في المستشفى، التي بوبت فيها بيانات التوقف (العطل) لجهاز السيباب (CPAP) وان هذه البيانات تمثل أوقات العمل لحين الفشل(العطل) ممثلة بالشهور، وذلك بهدف تطبيقها على التوزيع المقترح الجديد (NLTE-PF) ومن ثم تقدير دالة المعولية للأنموذج المقترح الجديد باستعمال

طريقة الإمكان الأعظم (MLE) والتي اثبتت تجربة المحاكاة افضليتها عن بقية الطرائق الأخرى، اذ تم استعمال برنامج كتب بلغة [MATHEMATICA-12.2] والمبين في الملحق (C).

3-3-1 نبذة عامة عن جهاز السيباب (CPAP):

يعدُّ جهاز السيباب (CPAP) او ما يعرف بجهاز ضغط الهواء الإيجابي المستمر (Continuous Positive Airway Pressure) أحد اهم أجهزة التنفس الصناعي، حيث يستخدم لعلاج المرضى الذين يعانون من مشاكل في التنفس مثل توقف التنفس اثناء النوم وكذلك لعلاج الأطفال الخدج الذين لم تتطور رئتهم بشكل كامل بعد وبعض امراض الرئوية الحادة لدى كبار السن ، وفي السنوات الأخيرة وخصوصا في عام 2019 وبداية انتشار فايروس كورونا ازدادت أهمية استخدام هذا الجهاز في المستشفيات لكونه يعالج الحالات الحرجة من مرضى فايروس كورونا وتخفيف شدتها ، وغالبا ما يعاني مرضى فايروس كورونا (COVID-19) من إصابات تنفسية حادة بسبب نقص الاوكسجين في الدم لذا كان هناك سبب منطقي وضروري لاستخدام جهاز (CPAP) ، حيث تم تقديم الكثير من الدراسات حول استخدام هذا الجهاز في علاج بعض حالات مرضى فايروس كورونا ومثال على ذلك الدراسة التي قدمها الباحث (Linette Marie Kofod) وآخرون [50]، كذلك الدراسة التي قدمها الباحث (Noeman-Ahmed) وآخرون [58] والكثير من الدراسات الأخرى .

وان الية عمل جهاز السيباب هي ضغط الهواء بشكل مستمر حيث يتم تحديد درجة الضغط حسب حجم ووزن المريض الذي يعاني من نقص حاد في الاوكسجين بالدم ، وان درجات الضغط في الجهاز تتراوح بين (1-16) وفي بعض الأجهزة تصل الى 18 درجة ، وهناك نوعان مختلفان لهذا الجهاز وحسب طبيعة الاستخدام ، النوع الأول ويستخدم لمعالجة حالات انقطاع التنفس اثناء النوم وهنا لا يتم ربط الجهاز بمنظومة الاوكسجين فيقتصر عمله في ضغط هواء الغرفة بعد مروره بصندوق الترطيب وتصفيته من الشوائب عن طريق فلتر خاص به وضخه بدرجة ضغط محددة الى انف المريض عن طريق الماسك المخصص لذلك وهذا النوع من الجهاز يصلح للاستخدام المنزلي ، أما النوع الثاني فيتم ربط الجهاز بمنظومة الاوكسجين الخاصة بالمستشفى وتحديد درجة الضغط لضخه للمرضى الذين يعانون من حالات انقطاع التنفس الحاد وخصوصا ازداد استخدامه لمعالجة الحالات الحرجة لمرضى فايروس كورونا الذين يعانون من نوبات مفاجئة لانقطاع التنفس ويضخ الاوكسجين بشكل مستمر لحين وصول درجة اوكسجين المريض في الدم الى 90 درجة ويكون في هذه الحالة المريض قادراً على التنفس بشكل طبيعي ، وعلى الرغم من أهميته البالغة في استخدامه لإنقاذ حياة المرضى الى انه ينصح باستخدامه في اوقات محددة لكونه يضر في خلايا الدماغ حيث يعطل عمليات الاكسدة وهي عملية اندماج خلايا الدم مع الاوكسجين بالإضافة الى ان هناك عدة أسباب تجبر القائمين على تشغيله بأوقات محددة فقط ولعل من أهمها جفاف

الفم واحتقان الانف وصعوبة النوم ، ومن الجدير بالذكر يوجد جهاز اخر يدعى جهاز ضغط الهواء الإيجابي المستمر من المستوى الثاني او ما يعرف بمصطلح (BiPAP) والذي يستخدم للحالات الحرجة جدا وخصوصا للمرضى الذين يعانون من انسداد رئوي حاد.

2-3-3 بيانات البحث الحقيقية:

البيانات الحقيقية تمثل أوقات اشتغال جهاز (CPAP) لحين العطل، والتي تم الحصول عليها من سجلات وحدة الصيانة الخاصة بالأجهزة الطبية في مستشفى الفيحاء التعليمي التابع الى دائرة صحة البصرة، وكانت حجم العينة (n=96) مشاهدة، وان مشاهدات العينة تمثل اوقات اشتغال الجهاز لحين العطل بالأشهر، وحددت المدة الزمنية لجمع البيانات من 2020/1/1 الى 2020/12/1 وكما موضحة في الجدول (6-3).

الجدول (6-3)

يمثل أوقات اشتغال جهاز CPAP لحين العطل مقاسة بالأشهر مرتبة تصاعدياً.

1.067	2.233	2.833	3.167	3.333	3.533	3.667	3.833	4.100	4.600
1.167	2.233	2.833	3.167	3.333	3.567	3.667	3.833	4.100	4.667
1.600	2.433	2.867	3.200	3.367	3.567	3.700	3.867	4.133	4.667
1.700	2.500	2.900	3.200	3.400	3.600	3.733	3.867	4.200	4.700
1.733	2.600	2.900	3.233	3.433	3.600	3.733	3.900	4.233	4.800
1.833	2.667	2.933	3.267	3.433	3.600	3.733	3.900	4.333	4.833
1.867	2.700	2.933	3.267	3.467	3.633	3.767	3.933	4.367	
2.067	2.700	3.033	3.300	3.467	3.633	3.767	4.000	4.367	
2.100	2.733	3.167	3.300	3.500	3.667	3.800	4.000	4.433	
2.167	2.800	3.167	3.333	3.500	3.667	3.833	4.067	4.533	

وان اهم المؤشرات الإحصائية للبيانات الحقيقية أعلاه مبين في الجدول (7-3) ادناه:

الجدول (7-3)

قيم المؤشرات الاحصائية للبيانات الحقيقية

Coefficients	Value	Coefficients	Value
mean	3.36319	median	3.46667
Variance	0.641053	Standard Deviation	0.800658
skuness	-0.63475	Max	4.833
kurtosis	3.2761	Min	1.067

1-2-3-3 اختبار حسن المطابقة (Goodness of fit): [37]

في ضوء استخدام هذا الاختبار نستنتج ما إذا كانت البيانات الواردة في الجدول (6-3) تتبع توزيع (NLTE-PF) الذي تمت دراسته ام لا، وتم استعمال اختبار (Chi Square test)، واستخدم برنامج (Mathematica) لإجراء الاختبار.

وان الصيغة الرياضية لإحصاء اختبار مربع كاي (Chi Square test) هي:

$$x^2 = \sum_{j=1}^n \frac{(O_j - E_j)^2}{E_j} \quad \dots (3 - 1)$$

اذ ان:

O_j : تمثل تكرار المشاهدة .

E_j : تمثل التكرار المتوقع .

وتم صياغة الفرضية على النحو الاتي:

H_0 : The data have (NLTE-PF)distribution.

H_1 : The data do not have (NLTE-PF) distribution.

تم اجراء الاختبار وكانت قيمة (P-Value = 0.6958) وهذه القيمة أكبر من مستوى المعنوية (0.05)، لذا يكون القرار لا نرفض فرضية العدم أي ان البيانات تتبع توزيع (NLTE-PF).

2-2-3-3 معايير اختيار أفضل توزيع:

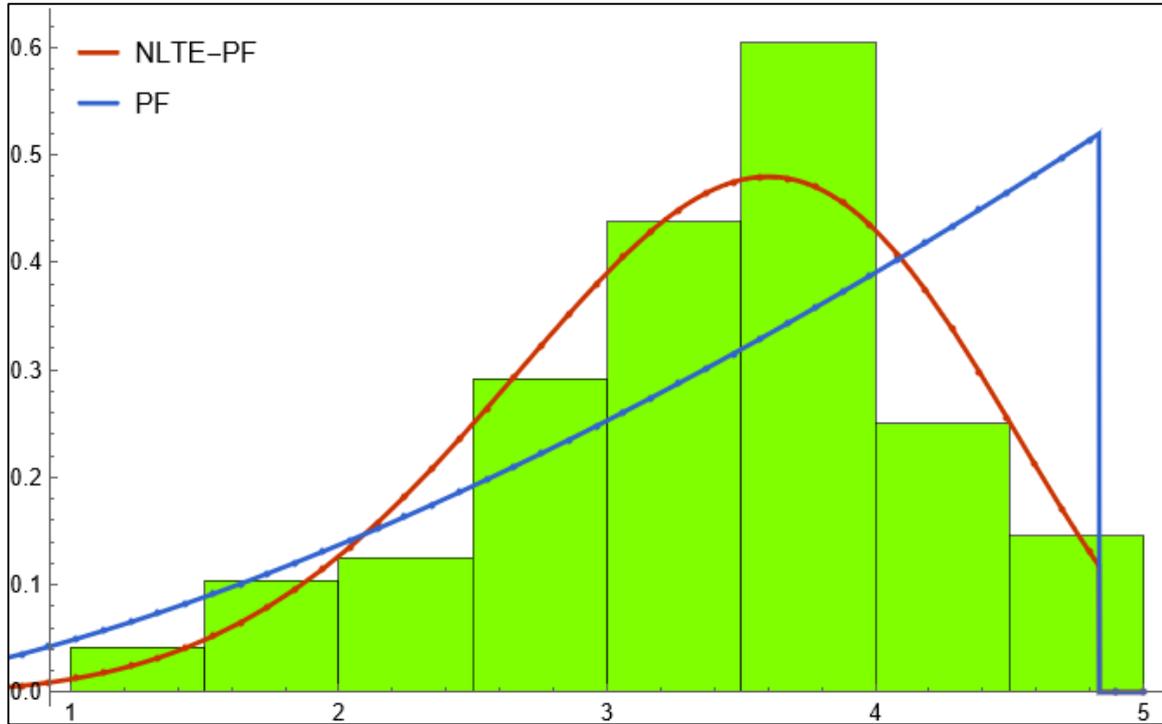
يتم اختيار أفضل توزيع لتمثيل البيانات في الجدول (6-3) من خلال المعايير التي تم التطرق اليها في الجانب النظري من الفصل الثاني، وتم الحصول على نتائج المقارنة في الجدول (8-3).

الجدول (8-3)

يبين قيم المعايير المستخدمة للمقارنة بين توزيع (NLTE-PF) وتوزيع دالة القوى (PF)

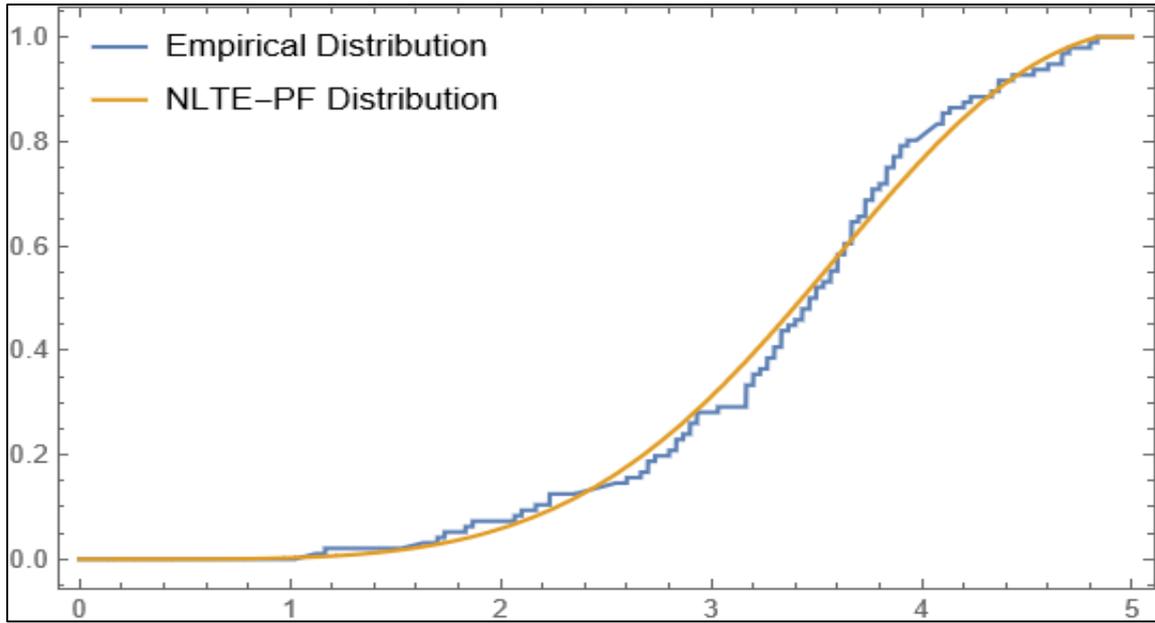
dist	Parameter estimation			AIC	AICc	BIC
	α	β	λ			
NLTE-PF	4.8338	4.4592	2.0621	226.125	226.386	233.818
PF	0.206897	2.51116	-	245.261	245.39	250.39

نلاحظ من الجدول أعلاه بان توزيع (NLTE-PF) يمتلك اقل قيمة بالنسبة لمعايير الاختبار الثلاث وبذلك يعد توزيع (NLTE-PF) الأفضل في تمثيل البيانات الحقيقية. والشكل (1-3) يوضح مدى ملائمة توزيع (NLTE-PF) لبيانات قيد الدراسة الحقيقية مقارنةً بتوزيع دالة القوى (PF).

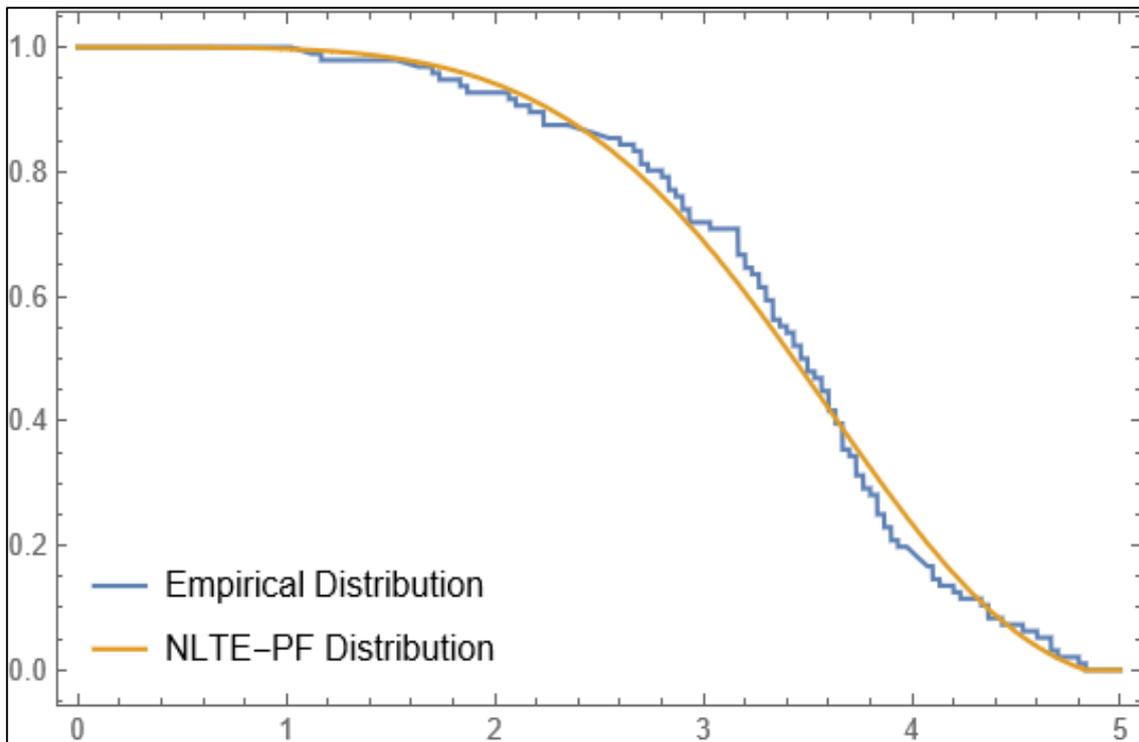


شكل (1-3) يوضح ملائمة توزيع (NLTE-PF) في تمثيل البيانات الحقيقية بشكل أفضل وأدق مقارنةً بتوزيع دالة القوى (PF).

المصدر: اعداد الباحث



شكل (2-3) يوضح الدالة التراكمية (CDF) لتوزيع (NLTE-PF) مقارنتاً مع الدالة التراكمية (CDF) للتوزيع التجريبي (التوزيع الخام) للبيانات الحقيقية.
المصدر: اعداد الباحث



شكل (3-3) يوضح دالة المعولية لتوزيع (NLTE-PF) مقارنتاً مع دالة المعولية للتوزيع التجريبي (التوزيع الخام) للبيانات الحقيقية.
المصدر: اعداد الباحث

3-2-3-3 تقدير دالة المعولية للبيانات الحقيقية:

عن طريق ما توصلنا اليه في الجانب التجريبي وبيان افضلية طريقة الإمكان الأعظم (MLE) في تقدير دالة المعولية لتوزيع (NLTE-PF) من بين طرائق التقدير الاخرى، فقد تم استعمالها لتقدير دالة المعولية بالنسبة للبيانات الحقيقية وباستعمال برنامج (Wolfram Mathematica)، والجدول (9-3) يوضح قيم مقدرات دالة المعولية للبيانات الحقيقية و مقدرات الدالة التراكمية (C.D.F).

الجدول (9-3)

يبين قيم مقدر دالة المعولية ومقدر الدالة التراكمية (CDF) للبيانات الحقيقية

i	t _i	G(t)	R(t)
1	1.067	0.003622	0.996378
2	1.167	0.005396	0.994604
3	1.600	0.021905	0.978095
4	1.700	0.028617	0.971383
5	1.733	0.031169	0.968831
6	1.833	0.039867	0.960133
7	1.867	0.043137	0.956863
8	2.067	0.067157	0.932843
9	2.100	0.07196	0.92804
10	2.167	0.082315	0.917685
11	2.233	0.093712	0.906288
12	2.233	0.093712	0.906288
13	2.433	0.134637	0.865363
14	2.500	0.150663	0.849337
15	2.600	0.177044	0.822956
16	2.667	0.196221	0.803779
17	2.700	0.20629	0.79371
18	2.700	0.20629	0.79371
19	2.733	0.21668	0.78332
20	2.800	0.238418	0.761582
21	2.833	0.249762	0.750238
22	2.833	0.249762	0.750238
23	2.867	0.261419	0.738581
24	2.900	0.273385	0.726615
25	2.900	0.273385	0.726615
26	2.933	0.285656	0.714344

27	2.933	0.285656	0.714344
28	3.033	0.324235	0.675765
29	3.167	0.379499	0.620501
30	3.167	0.379499	0.620501
31	3.167	0.379499	0.620501
32	3.167	0.379499	0.620501
33	3.200	0.39393	0.60607
34	3.200	0.39393	0.60607
35	3.233	0.408583	0.591417
36	3.267	0.423443	0.576557
37	3.267	0.423443	0.576557
38	3.300	0.438497	0.561503
39	3.300	0.438497	0.561503
40	3.333	0.453728	0.546272
41	3.333	0.453728	0.546272
42	3.333	0.453728	0.546272
43	3.367	0.469119	0.530881
44	3.400	0.484654	0.515346
45	3.433	0.500313	0.499687
46	3.433	0.500313	0.499687
47	3.467	0.516078	0.483922
48	3.467	0.516078	0.483922
49	3.500	0.53193	0.46807
50	3.500	0.53193	0.46807
51	3.533	0.547846	0.452154
52	3.567	0.563808	0.436192
53	3.567	0.563808	0.436192
54	3.600	0.579792	0.420208
55	3.600	0.579792	0.420208
56	3.600	0.579792	0.420208
57	3.633	0.595776	0.404224
58	3.633	0.595776	0.404224
59	3.667	0.611738	0.388262
60	3.667	0.611738	0.388262
61	3.667	0.611738	0.388262
62	3.667	0.611738	0.388262
63	3.700	0.627655	0.372345

64	3.733	0.643503	0.356497
65	3.733	0.643503	0.356497
66	3.733	0.643503	0.356497
67	3.767	0.659259	0.340741
68	3.767	0.659259	0.340741
69	3.800	0.6749	0.3251
70	3.833	0.690401	0.309599
71	3.833	0.690401	0.309599
72	3.833	0.690401	0.309599
73	3.867	0.70574	0.29426
74	3.867	0.70574	0.29426
75	3.900	0.720893	0.279107
76	3.900	0.720893	0.279107
77	3.933	0.735836	0.264164
78	4.000	0.765005	0.234995
79	4.000	0.765005	0.234995
80	4.067	0.793071	0.206929
81	4.100	0.80664	0.19336
82	4.100	0.80664	0.19336
83	4.133	0.819873	0.180127
84	4.200	0.845259	0.154741
85	4.233	0.857379	0.142621
86	4.333	0.891279	0.108721
87	4.367	0.901719	0.098281
88	4.367	0.901719	0.098281
89	4.433	0.921253	0.078747
90	4.533	0.947104	0.052896
91	4.600	0.96201	0.03799
92	4.667	0.975066	0.024934
93	4.667	0.975066	0.024934
94	4.700	0.980912	0.019088
95	4.800	0.995812	0.004188
96	4.833	1	0
sum	322.867	48.33803	47.66197
mean	3.363195	0.503521	0.496479

نلاحظ من الجدول (9-3) ما يأتي:

- 1- إن العلاقة بين دالة المعولية $R(t)$ والزمن علاقة عكسية أي كلما زاد الزمن قلت قيمة دالة المعولية وهذا ما نلاحظه بصورة واضحة في العمود الذي يمثل دالة المعولية $R(t)$ ، ان هذا السلوك يطابق سلوك دالة المعولية لكونها متناقصة مع الزمن ، وإن متوسط قيمتها يبلغ (0.496479) أي بنسبة (50%) تقريبا يعول على الأجهزة لكل ثلاثة اشهر وأحد عشر يوماً تقريباً .
- 2- إن قيم دالة الكثافة التجميعية (CDF) للفشل (اللامعولية) تكون متزايدة مع الزمن أي ان العلاقة بينهما تكون طردية هذا ما نلاحظه في العمود الثالث $G(t)$ ، وان متوسط قيمتها يبلغ (0.503521) أي بنسبة (50%) تقريبا لا يعول على الأجهزة لكل ثلاثة أشهر وأحد عشر يوماً تقريباً.
- 3- إن مجموع متوسط قيمة دالة المعولية ومتوسط قيمة دالة الكثافة التجميعية (اللامعولية) مساويا للواحد اي انهما مكمل أحدهما للآخر.
- 4- إن متوسط أوقات الاشتغال لحين العطل يبلغ (3.363195) الذي يساوي (101) يوم أي ما يعادل ثلاثة أشهر و إحدى عشر يوم يعتمد على الجهاز في أداء عمله من دون عطل.



الفصل الرابع
الاستنتاجات والتوصيات

1-4 الاستنتاجات:

- 1- أظهرت نتائج المحاكاة بان طريقة الإمكان الأعظم (MLE) الأفضل في تقدير دالة المعولية لتوزيع (NLTE-PF) لكونها حققت اقل قيمة لمتوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) عند حجوم العينات المتوسطة والكبيرة (100،75) واخذت المرتبة الثانية من حيث الأفضلية عند حجوم العينات (50،25) ولمختلف النماذج الافتراضية.
- 2- أظهرت طريقة المربعات الصغرى (LS) الكفاءة في تقدير دالة المعولية لتوزيع (NLTE-PF) للأحجام العينات (50،25) أي انها اخذت المرتبة الثانية من حيث الأفضلية في التقدير.
- 3- ان طريقة المقدرات التجزئية (P.C) تعد ثالث أكفاً طريقة في تقدير دالة المعولية لتوزيع (NLTE-PF) ولجميع حجوم العينات أي انها احتلت المرتبة الثالثة من حيث الأفضلية، وان طريقة الحد الأقصى لنتائج لمقدرات التباعد (MPS) اخذت المرتبة الرابعة من حيث الأفضلية.
- 4- من خلال الجداول الخاصة في الجانب التجريبي لمقدرات المعلمات ومقدرات دالة المعولية ، نلاحظ افضلية الانموذج الثامن عن بقية النماذج حيث كانت القيم المقدره مقارنة للقيم الافتراضية للمعلمات الخاصة في هذا النموذج ، وفضلية الانموذج الثالث الخاص بمقدرات دالة المعولية عن بقية النماذج حيث كانت القيم المقدره مقارنة للقيم الحقيقية لدالة المعولية.
- 5- من جداول مقدرات المعلمات وجداول مقدرات دالة المعولية لتوزيع (NLTE-PF) نلاحظ تناقص قيم المعيارين الاحصائيين متوسط مربعات الخطأ (MSE) ومتوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) كلما زاد حجم العينة وهذا ينسجم مع النظرية الإحصائية.
- 6- من خلال الجانب التطبيقي تبين ان تقديرات دالة المعولية لتوزيع (NLTE-PF) للبيانات الحقيقية كانت متقاربة مع القيم الحقيقية لدالة المعولية في الجانب التجريبي.
- 7- ان توزيع (NLTE-PF) يكون أكثر كفاءة ودقة في تمثيل ووصف البيانات الحقيقية أفضل من توزيع دالة القوى (PF)، وهذا يوضح أهمية التوزيع الاحتمالي الموسع الجديد مقارنة بالتوزيع الاحتمالي الأصلي، هذا ما تم استنتاجه من خلال التطبيق العملي.

2-4 التوصيات:

- 1- استعمال طريقة الإمكان الأعظم (MLE) في تقدير معلمات ودالة المعولية لتوزيع دالة القوى الموسع الجديد (NLTE-PF).
- 2- تطبيق توزيع (NLTE-PF) في دراسات تتعلق في تقدير دالة البقاء ودالة المخاطرة، لكون هذا التوزيع يعد أكثر مرونة ودقة في وصف البيانات من التوزيعات الشائعة.

- 3- استعمال العائلة الاسية الجديدة (NLTE-X Family) في توليد توزيعات أخرى، لكونها تعطي للتوزيعات الناتجة منها مرونة ودقة أكثر في وصف البيانات.
- 4- بناء توزيع احتمالي باستعمال العائلة الاسية الجديدة (NLTE-X Family) واستخدام توزيع باريتو كتوزيع أساسي ودراسة خصائصه الإحصائية ومقارنته مع توزيع (NLTE-PF) من حيث الكفاءة والدقة في تمثيل البيانات.
- 5- استعمال طرائق أخرى في تقدير معلمات ودالة المعولية لتوزيع (NLTE-PF) وخصوصا الطرائق اللامعلمية والطرائق البيزية ومقارنتها مع طرائق التقدير التي تمت دراستها.
- 6- اجراء الدراسات والبحوث المستقبلية الهادفة الى تقدير دالة المعولية لتوزيع (NLTE-PF) في حالة وجود بيانات خاضعة للرقابة.

المصادر والمراجع

المراجع:

القرآن الكريم

المصادر العربية:

- [1] الحسنوي، أموري هادي كاظم، باسم شلبية مسلم، (2002)، "القياس الاقتصادي المتقدم النظرية والتطبيق". قسم الإحصاء – كلية الإدارة والاقتصاد – جامعة بغداد – المكتبة الوطنية، دار الكتب والوثائق ببغداد.
- [2] الباقر، زينب محمد باقر صادق، (2017)، "تقديرات دالة المعولية لتوزيع بواسون مع تطبيق عملي" رسالة ماجستير علوم في الإحصاء – كلية الإدارة والاقتصاد – جامعة كربلاء.
- [3] حسين، اسيل ناصر، (2007)، " مقارنة بعض طرائق تقدير دالة المعولية لتوزيع ويبل المختلط باستعمال المحاكاة" رسالة ماجستير علوم في بحوث العمليات - كلية الإدارة والاقتصاد- جامعة بغداد.
- [4] الشمري، نجاه عبد الجبار رجب، (2008)، "استخدام المحاكاة في مقارنة مقدرات التفاضل لمعلمة الشكل لتوزيع وايبل لبيانات المراقبة"، أطروحة دكتوراه في علوم الإحصاء، جامعة بغداد – كلية الإدارة والاقتصاد – قسم الإحصاء.
- [5] عبد الأحد، عطا فادور، (2007)، (تقديرات المعولية للتوزيع الاسي بمعلمتين – دراسة مقارنة)، رسالة ماجستير مقدمة الكلية الإدارية والاقتصاد في جامعة بغداد.
- [6] حمود، ليلي مطر ناصر، (2015)، "التقدير البيزي لدالة المعولية لتوزيع دالة القوة تحت دوال خسارة مختلفة"، مجلة كلية بغداد للعلوم الاقتصادية، الإصدار: (46)، الصفحات: (195-210).
- [7] هرمز، أمير حنا، (1990)، "الاحصاء الرياضي"، كتاب منهجي، دار الكتب للطباعة والنشر، جامعة الموصل، العراق.

المصادر الأجنبية:

- [8] Ahmad, Z., Hamedani, G. G., & Butt, N. S. (2019). Recent developments in distribution theory: a brief survey and some new generalized classes of distributions. *Pakistan Journal of Statistics and Operation Research*, 87-110.

- [9] Ahmad, Z., Mahmoudi, E., Dey, S., & Khosa, S. K. (2020). Modeling vehicle insurance loss data using a new member of TX family of distributions. *Journal of Statistical Theory and Applications*, 19(2), 133-147.
- [10] Ahsanullah, M. (1973). A characterization of the power function distribution. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 2(3), 259-262.
- [11] Al Mutairi, A. O. (2018). Bayesian Estimation Using (Linex) for Generalized Power Function Distribution. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 39(3), 297-303.
- [12] Al Mutairi, A., Iqbal, M. Z., Arshad, M. Z., & Afify, A. Z. (2022). A New Class of the Power Function Distribution: Theory and Inference with an Application to Engineering Data. *Journal of Mathematics*, 2022.
- [13] Al-Babtain, A. A. (2020). A new extended Rayleigh distribution. *Journal of King Saud University-Science*, 32(5), 2576-2581.
- [14] Al-Marzouki, S. (2018). A new generalization of power lomax distribution. *rn*, 55, 7.
- [15] Almetwally, E. M., & Almongy, H. M. (2019). Maximum product spacing and Bayesian method for parameter estimation for generalized power Weibull distribution under censoring scheme. *Journal of Data Science*, 17(2), 407-444.
- [16] Almetwally, E. M., Almongy, H. M., Rastogi, M. K., & Ibrahim, M. (2020). Maximum product spacing estimation of Weibull distribution under adaptive type-II progressive censoring schemes. *Annals of Data Science*, 7(2), 257-279.

- [17] Almongy, H. M., Almetwally, E. M., Aljohani, H. M., Alghamdi, A. S., & Hafez, E. H. (2021). A new extended Rayleigh distribution with applications of COVID-19 data. *Results in Physics*, 23, 104012.
- [18] Alshanbari, H. M., Gemeay, A. M., El-Bagoury, A. A. A. H., Khosa, S. K., Hafez, E. H., & Muse, A. H. (2022). A novel extension of Fréchet distribution: Application on real data and simulation. *Alexandria Engineering Journal*.
- [19] Alzaatreh, A., Lee, C., & Famoye, F. (2013). A new method for generating families of continuous distributions. *Metron*, 71(1), 63-79.
- [20] Alzeley, O., Almetwally, E. M., Gemeay, A. M., Alshanbari, H. M., Hafez, E. H., & Abu-Moussa, M. H. (2021). Statistical inference under censored data for the new exponential-X Fréchet distribution: Simulation and application to leukemia data. *Computational Intelligence and Neuroscience*, 2021.
- [21] Anderson, D. R., Burnham, K. P., & White, G. C. (1998). Comparison of Akaike information criterion and consistent Akaike information criterion for model selection and statistical inference from capture-recapture studies. *Journal of Applied Statistics*, 25(2), 263-282.
- [22] ANSARI, S. İ., SAMUH, M., & BAZYARI, A. (2019). Cubic Transmuted Power Function Distribution. *Gazi University Journal of Science*, 32(4), 1322-1337.
- [23] Bakouch, H. S., Al-Zahrani, B. M., Al-Shomrani, A. A., Marchi, V. A., & Louzada, F. (2012). An extended Lindley distribution. *Journal of the Korean Statistical Society*, 41(1), 75-85.

- [24] Barriga, G. D., Louzada-Neto, F., & Cancho, V. G. (2011). The complementary exponential power lifetime model. *Computational statistics & data analysis*, 55(3), 1250-1259.
- [25] Bursa, N., & Gamze, O. Z. E. L. (2017). The exponentiated Kumaraswamy-power function distribution. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 46(2), 277-292.
- [26] Butt, N. S., ul Haq, M. A., Usman, R. M., & Fattah, A. A. (2016). Transmuted power function distribution. *Gazi University Journal of Science*, 29(1), 177-185.
- [27] Chen, D. G., & Lio, Y. (2009). A Note on the Maximum Likelihood Estimation for the Generalized Gamma Distribution Parameters under Progressive Type- II Censoring. *International Journal of Intelligent Technologies and Applied Statistics*, 2(2), 145-152.
- [28] Cheng, R. C. H., & Amin, N. A. K. (1983). Estimating parameters in continuous univariate distributions with a shifted origin. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 45(3), 394-403.
- [29] Corless, R. M., Gonnet, G. H., Hare, D. E., Jeffrey, D. J., & Knuth, D. E. (1993). Lambert's W function in Maple. *Maple Technical Newsletter*, 9(1), 12-22.
- [30] da Silva, R. V., Gomes-Silva, F., Ramos, M. W. A., & Cordeiro, G. M. (2015). A new extended gamma generalized model. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 100(2), 309-335.
- [31] Draper, N. R., & Smith, H. (1998). *Applied regression analysis* (Vol. 326). John Wiley & Sons.
- [32] Ebeling, C. E. (2004). *An introduction to reliability and maintainability engineering*. Tata McGraw-Hill Education.

- [33] Ekum, M. I., Job, O., Taylor, J., Amalare, A., Khaleel, M. A., & Ogunsanya, A. S. (2021). Normal-Power Function Distribution with Logistic Quantile Function: Properties and Application. *American Journal of Applied Mathematics and Statistics*, 9(3), 90-101.
- [34] El-Bassiouny, A. H., Abdo, N. F., & Shahen, H. S. (2015). Exponential lomax distribution. *International Journal of Computer Applications*, 121(13).
- [35] Evans, M., Hastings, N., Peacock, B., & Forbes, C. (2011). *Statistical distributions*. John Wiley & Sons.
- [36] Fabozzi, F. J., Focardi, S. M., Rachev, S. T., & Arshanapalli, B. G. (2014). *The basics of financial econometrics: Tools, concepts, and asset management applications*. John Wiley & Sons.
- [37] Famoye, F. (2000). Goodness-of-fit tests for generalized logarithmic series distribution. *Computational statistics & data analysis*, 33(1), 59-67.
- [38] Gomes-Silva, F., da Silva, R. V., Percontini, A., Ramos, M. W. A., & Cordeiro, G. M. (2017). An extended Dagum distribution: properties and applications. *International Journal of Applied Mathematics & Statistics*, 56(1), 35-53.
- [39] Gupta, R. C., Gupta, P. L., & Gupta, R. D. (1998). Modeling failure time data by Lehman alternatives. *Communications in Statistics-Theory and methods*, 27(4), 887-904.
- [40] Gupta, R. D., & Kundu, D. (2001). Generalized exponential distribution: different method of estimations. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 69(4), 315-337.
- [41] Hanif, S., Al-Ghamdi, S. D., Khan, K., & Shahbaz, M. Q. (2015). Bayesian estimation for parameters of power function distribution under various priors. *Mathematical Theory and Modeling*, 5(13).

- [42] Hassan, A. S., & Assar, S. M. (2021). A new class of power function distribution: Properties and applications. *Annals of Data Science*, 8(2), 205-225.
- [43] Hassan, A., ELSHRPIENY, E., & MOHAMED, R. (2019). Odd generalized exponential power function distribution: properties & applications. *Gazi University Journal of Science*, 32(1), 351-370.
- [44] Huo, X., Khosa, S. K., Ahmad, Z., Almaspoor, Z., Ilyas, M., & Aamir, M. (2020). A new lifetime exponential-X family of distributions with applications to reliability data. *Mathematical Problems in Engineering*, 2020.
- [45] Ibrahim, M., Yadav, A. S., Yousof, H. M., Goual, H., & Hamedani, G. G. (2019). A new extension of Lindley distribution: modified validation test, characterizations and different methods of estimation. *Communications for Statistical Applications and Methods*, 26(5), 473-495.
- [46] Jamal, F., & Nasir, M. (2019, January). Some new members of the TX family of distributions. In *17th International Conference on Statistical Sciences* (Vol. 33).
- [47] Jose, K. K., Joseph, A., & Ristić, M. M. (2009). A Marshall-Olkin beta distribution and its applications. *Journal of Probability and Statistical Science*, 7(2), 173-186.
- [48] Kao, J. H. (1958). Computer methods for estimating Weibull parameters in reliability studies. *IRE Transactions on Reliability and Quality Control*, 15-22.
- [49] Kao, J. H. (1959). A graphical estimation of mixed Weibull parameters in life-testing of electron tubes. *Technometrics*, 1(4), 389-407.

- [50] Kofod, L. M., Nielsen Jeschke, K., Kristensen, M. T., Krogh-Madsen, R., Monefeldt Albek, C., & Hansen, E. F. (2021). COVID-19 and acute respiratory failure treated with CPAP. *European clinical respiratory journal*, 8(1), 1910191.
- [51] Lawless, J. F. (2011). *Statistical models and methods for lifetime data*. John Wiley & Sons.
- [52] Lemonte, A. J., & Cordeiro, G. M. (2013). An extended Lomax distribution. *Statistics*, 47(4), 800-816.
- [53] Lemonte, A. J., Barreto-Souza, W., & Cordeiro, G. M. (2013). The exponentiated Kumaraswamy distribution and its log-transform. *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, 27(1), 31-53.
- [54] Mead, M. (2014). An extended Pareto distribution. *Pakistan Journal of Statistics and Operation Research*, 313-329.
- [55] Meniconi, M., & Barry, D. M. (1996). The power function distribution: A useful and simple distribution to assess electrical component reliability. *Microelectronics Reliability*, 36(9), 1207-1212.
- [56] MirMostafaei, S. M. T. K., Mahdizadeh, M., & Lemonte, A. J. (2017). The Marshall–Olkin extended generalized Rayleigh distribution: Properties and applications. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 46(2), 653-671.
- [57] Mustafa, A., El-Desouky, B. S., & AL-Garash, S. (2016). Weibull generalized exponential distribution. *arXiv preprint arXiv:1606.07378*.
- [58] Noeman-Ahmed, Y., Gokaraju, S., Powrie, D. J., Amran, D. A., El Sayed, I., & Roshdy, A. (2020). Predictors of CPAP outcome in hospitalised COVID-19 patients. *medRxiv*.

- [59] Okasha, H. M., El-Baz, A. H., Tarabia, A. M. K., & Basheer, A. M. (2017). Extended inverse Weibull distribution with reliability application. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, 25(3), 343-349.
- [60] Ranney, B. (1984). The maximum spacing method. An estimation method related to the maximum likelihood method. *Scandinavian Journal of Statistics*, 93-112.
- [61] Rausand, M., & Hoyland, A. (2003). *System reliability theory: models, statistical methods, and applications* (Vol. 396). John Wiley & Sons.
- [62] Shao, Q., Chen, Y. D., & Zhang, L. (2008). An extension of three-parameter Burr III distribution for low-flow frequency analysis. *Computational Statistics & Data Analysis*, 52(3), 1304-1314.
- [63] Tahir, M. H., Alizadeh, M., Mansoor, M., Cordeiro, G. M., & Zubair, M. (2016). The Weibull-power function distribution with applications. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 45(1), 245-265.
- [64] Yadav, A. S., Maiti, S. S., & Saha, M. (2021). The inverse xgamma distribution: statistical properties and different methods of estimation. *Annals of Data Science*, 8(2), 275-293.
- [65] Zaka, A., & Akhter, A. S. (2014). Modified moment, maximum likelihood and percentile estimators for the parameters of the power function distribution. *Pakistan Journal of Statistics and Operation Research*, 369-388.
- [66] Zaka, A., Akhter, A. S., & Jabeen, R. (2020). The exponentiated generalized Power function distribution: Theory and real life applications. *Adv. Appl. Stat*, 61, 33-63.

- [67] Zarrin, S. H. A. Z. I. A., Saxena, S. H. A. S. H. I., Kamal, M. U. S. T. A. F. A., & Islam, A. U. (2013). Reliability computation and Bayesian Analysis of system reliability of Power function distribution. *International Journal of Advance in Engineering, Science and Technology*, 2(4), 76-86.
- [68] Zayed, M., & Butt, N. S. (2017). The extended Fréchet distribution: Properties and applications. *Pakistan Journal of Statistics and Operation Research*, 529-543.

الملاحق

$$\frac{\partial \ln H(\alpha, \beta, \lambda)}{\partial \alpha} =$$

$$\frac{1}{1+n} \left(\frac{\beta \lambda x_1 \left(\frac{x_1}{\alpha}\right)^{-1+\beta}}{\alpha^2} + \frac{-\beta x_1 \left(\frac{x_1}{\alpha}\right)^{-1+\beta}}{\alpha^2} + \frac{e^{-\lambda \left(\frac{x_1}{\alpha}\right)^\beta} \beta \lambda x_1 \left(\frac{x_1}{\alpha}\right)^{-1+\beta}}{\alpha^2} \right. \\ \left. + \frac{\beta \lambda x_{-1+i} \left(\frac{x_{-1+i}}{\alpha}\right)^{-1+\beta}}{\alpha^2} + \frac{\beta \lambda x_i \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{-1+\beta}}{\alpha^2} + \frac{\beta \lambda x_n \left(\frac{x_n}{\alpha}\right)^{-1+\beta}}{\alpha^2} - \frac{\beta x_n \left(\frac{x_n}{\alpha}\right)^{-1+\beta}}{\alpha^2 \left(1 + \left(\frac{x_n}{\alpha}\right)^\beta\right)} \right. \\ \left. + \sum_{i=2}^n \frac{\frac{e^{-\lambda \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta} \beta x_{-1+i} \left(\frac{x_{-1+i}}{\alpha}\right)^{-1+\beta}}{\alpha^2} - \frac{e^{-\lambda \left(\frac{x_{-1+i}}{\alpha}\right)^\beta} \beta x_i \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{-1+\beta}}{\alpha^2} + \frac{e^{-\lambda \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta} \beta \lambda \left(1 - \left(\frac{x_{-1+i}}{\alpha}\right)^\beta\right) x_i \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{-1+\beta}}{\alpha^2} - \frac{e^{-\lambda \left(\frac{x_{-1+i}}{\alpha}\right)^\beta} \beta \lambda x_{-1+i} \left(\frac{x_{-1+i}}{\alpha}\right)^{-1+\beta} \left(1 - \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta\right)}{\alpha^2}}{e^{-\lambda \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta} \left(1 - \left(\frac{x_{-1+i}}{\alpha}\right)^\beta\right) - e^{-\lambda \left(\frac{x_{-1+i}}{\alpha}\right)^\beta} \left(1 - \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta\right)} \right)$$

... (1-A)

$$\frac{\partial \ln H(\alpha, \beta, \lambda)}{\partial \beta} =$$

$$\frac{1}{1+n} \left(-\lambda \text{Ln} \left[\frac{x_1}{\alpha} \right] \left(\frac{x_1}{\alpha}\right)^\beta + \frac{\text{Ln} \left[\frac{x_1}{\alpha} \right] \left(\frac{x_1}{\alpha}\right)^\beta - e^{-\lambda \left(\frac{x_1}{\alpha}\right)^\beta} \lambda \text{Ln} \left[\frac{x_1}{\alpha} \right] \left(\frac{x_1}{\alpha}\right)^\beta}{-1 + e^{-\lambda \left(\frac{x_1}{\alpha}\right)^\beta} + \left(\frac{x_1}{\alpha}\right)^\beta} - \lambda \text{Ln} \left[\frac{x_{-1+i}}{\alpha} \right] \left(\frac{x_{-1+i}}{\alpha}\right)^\beta - \lambda \text{Ln} \left[\frac{x_i}{\alpha} \right] \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta - \lambda \text{Ln} \left[\frac{x_n}{\alpha} \right] \left(\frac{x_n}{\alpha}\right)^\beta + \frac{\text{Ln} \left[\frac{x_n}{\alpha} \right] \left(\frac{x_n}{\alpha}\right)^\beta}{1 + \left(\frac{x_n}{\alpha}\right)^\beta} \right. \\ \left. + \sum_{i=2}^n \left(\frac{\left(-e^{-\lambda \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta} \text{Ln} \left[\frac{x_{-1+i}}{\alpha} \right] \left(\frac{x_{-1+i}}{\alpha}\right)^\beta + e^{-\lambda \left(\frac{x_{-1+i}}{\alpha}\right)^\beta} \text{Ln} \left[\frac{x_i}{\alpha} \right] \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta - e^{-\lambda \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta} \lambda \text{Ln} \left[\frac{x_i}{\alpha} \right] \left(1 - \left(\frac{x_{-1+i}}{\alpha}\right)^\beta\right) \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta + e^{-\lambda \left(\frac{x_{-1+i}}{\alpha}\right)^\beta} \lambda \text{Ln} \left[\frac{x_{-1+i}}{\alpha} \right] \left(\frac{x_{-1+i}}{\alpha}\right)^\beta \left(1 - \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta\right) \right)}{\left(e^{-\lambda \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta} \left(1 - \left(\frac{x_{-1+i}}{\alpha}\right)^\beta\right) - e^{-\lambda \left(\frac{x_{-1+i}}{\alpha}\right)^\beta} \left(1 - \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta\right) \right)} \right)$$

... (2-A)

$$\frac{\partial \ln H(\alpha, \beta, \lambda)}{\partial \lambda} =$$

$$-\left(\frac{x_1}{\alpha}\right)^\beta - \frac{e^{-\lambda\left(\frac{x_1}{\alpha}\right)^\beta} \left(\frac{x_1}{\alpha}\right)^\beta}{-1 + e^{-\lambda\left(\frac{x_1}{\alpha}\right)^\beta} + \left(\frac{x_1}{\alpha}\right)^\beta} - \left(\frac{x_{-1+i}}{\alpha}\right)^\beta - \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta - \left(\frac{x_n}{\alpha}\right)^\beta + \sum_{i=2}^n \frac{-e^{-\lambda\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta} \left(1 - \left(\frac{x_{-1+i}}{\alpha}\right)^\beta\right) \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta + e^{-\lambda\left(\frac{x_{-1+i}}{\alpha}\right)^\beta} \left(\frac{x_{-1+i}}{\alpha}\right)^\beta \left(1 - \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta\right)}{e^{-\lambda\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta} \left(1 - \left(\frac{x_{-1+i}}{\alpha}\right)^\beta\right) - e^{-\lambda\left(\frac{x_{-1+i}}{\alpha}\right)^\beta} \left(1 - \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta\right)}$$

1 + n

... (3-A)

جدول (1)

يوضح متوسط القيم التقديرية للمعلمات ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) والرتب الجزئية لطرائق التقدير كافة ولكافة احجام العينات للأنموذج الأول ($\lambda = 0.05$ ، $\beta = 1$ ، $\alpha = 2$)

n	Est.Par	MLE	LS	P.C	MPS
25	$\hat{\alpha}$	1.93846	2.20256	2.13363	1.87419
	MSE	0.00760996	0.0979472	0.0602576	0.200203
	Rank	1	3	2	4
	$\hat{\beta}$	1.21427	1.10613	1.14981	0.956282
	MSE	0.12158	0.0827033	0.100147	0.0775399
	Rank	4	2	3	1
	$\hat{\lambda}$	0.398721	0.606959	0.607423	0.22173
	MSE	0.280133	0.999849	0.9213	0.209282
	Rank	4	2	1	3
\sum Rank	9 ^[4]	7 ^[2]	6 ^[1]	8 ^[3]	
50	$\hat{\alpha}$	1.95184	2.09052	2.06661	1.9951
	MSE	0.00551962	0.0301054	0.0248156	0.00474332
	Rank	2	4	3	1
	$\hat{\beta}$	1.14731	1.08946	1.11198	1.07866
	MSE	0.0604633	0.0758665	0.0833645	0.0530718
	Rank	2	3	4	1
	$\hat{\lambda}$	0.258452	0.349804	0.362874	0.188299
	MSE	0.103644	0.454106	0.458187	0.10378
	Rank	1	3	4	2
\sum Rank	5 ^[2]	10 ^[3]	11 ^[4]	4 ^[1]	
75	$\hat{\alpha}$	1.97318	2.0548	2.0395	2.00814
	MSE	0.00119858	0.00992935	0.0082117	0.00196928
	Rank	1	4	3	2
	$\hat{\beta}$	1.08684	1.06785	1.08261	1.05058
	MSE	0.0506606	0.0727782	0.0778651	0.0518219
	Rank	1	3	4	2
	$\hat{\lambda}$	0.210614	0.247802	0.257314	0.180452
	MSE	0.0813008	0.186397	0.193209	0.0917851
	Rank	1	3	4	2
\sum Rank	3 ^[1]	10 ^[3]	11 ^[4]	6 ^[2]	
100	$\hat{\alpha}$	1.98221	2.03487	2.02397	2.00049
	MSE	0.000502371	0.00445387	0.00372205	0.00148054
	Rank	1	4	3	2

	$\hat{\beta}$	1.05392	1.06403	1.07465	0.992895
	MSE	0.0172049	0.0344278	0.0368008	0.0220033
	Rank	1	3	4	2
	$\hat{\lambda}$	0.158416	0.197994	0.20452	0.0953371
	MSE	0.0394599	0.131703	0.136026	0.0516945
	Rank	1	3	4	2
	\sum Rank	3 ^[1]	10 ^[3]	11 ^[4]	6 ^[2]

جدول (2)

يوضح متوسط القيم التقديرية للمعاملات ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) والرتب الجزئية لطرائق التقدير كافة ولكافة احجام العينات للأنموذج الثاني ($\lambda=1.5$ ، $\beta=1$ ، $\alpha=2$)

n	Est.Par	MLE	LS	P.C	MPS
25	$\hat{\alpha}$	1.73042	2.14239	1.96127	1.67497
	MSE	0.108342	0.260437	0.132832	0.528255
	Rank	1	3	2	4
	$\hat{\beta}$	1.00869	0.973834	1.00667	0.867913
	MSE	0.0399179	0.0383881	0.0399208	0.0978562
	Rank	2	1	3	4
	$\hat{\lambda}$	1.07809	1.62867	1.50312	1.04075
	MSE	0.470123	0.730796	0.471179	0.785822
	Rank	1	3	2	4
	\sum Rank	4 ^[1]	7 ^[2.5]	7 ^[2.5]	12 ^[4]
50	$\hat{\alpha}$	1.85712	2.07004	1.99691	1.91723
	MSE	0.0313247	0.188243	0.132923	0.114747
	Rank	1	4	3	2
	$\hat{\beta}$	0.949999	0.948446	0.968027	0.888626
	MSE	0.0137039	0.0226176	0.0213941	0.0568687
	Rank	1	3	2	4
	$\hat{\lambda}$	1.08692	1.37146	1.34473	1.18725
	MSE	0.327488	0.603443	0.4933	0.592464
	Rank	1	4	2	3
	\sum Rank	^[1] 3	^[4] 11	^[2] 7	^[3] 9
75	$\hat{\alpha}$	1.88733	2.02065	1.97438	1.93746
	MSE	0.0231909	0.0714295	0.0649663	0.0573799
	Rank	1	4	3	2
	$\hat{\beta}$	1.01761	1.01383	1.02547	0.993441
	MSE	0.0129824	0.0187509	0.0192294	0.0260046

	Rank	1	2	3	4
	$\hat{\lambda}$	1.32039	1.51889	1.49482	1.35456
	MSE	0.309173	0.294463	0.261548	0.319363
	Rank	3	2	1	4
	\sum Rank	5 ^[1]	8 ^[3]	7 ^[2]	10 ^[4]
100	$\hat{\alpha}$	1.92134	1.9959	1.96432	1.9766
	MSE	0.0117614	0.0339255	0.0310489	0.027188
	Rank	1	4	3	2
	$\hat{\beta}$	0.961019	0.958175	0.967138	0.935564
	MSE	0.0115522	0.0158978	0.0152607	0.0182492
	Rank	1	3	2	4
	$\hat{\lambda}$	1.36565	1.38525	1.37571	1.30796
	MSE	0.207791	0.354858	0.332931	0.264965
	Rank	1	4	3	2
	\sum Rank	3 ^[1]	11 ^[4]	8 ^[2.5]	8 ^[2.5]

جدول (3)

يوضح متوسط القيم التقديرية للمعلمات ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) والرتب الجزئية لطرائق التقدير كافة ولكافة احجام العينات للأنموذج الثالث ($\lambda=0.05$ ، $\beta=2.5$ ، $\alpha=2$)

n	Est.Par	MLE	LS	P.C	MPS
25	$\hat{\alpha}$	1.971	2.06111	2.03947	1.99598
	MSE	0.00173362	0.009098	0.00588737	0.0176223
	Rank	1	3	2	4
	$\hat{\beta}$	3.04566	2.8104	2.93085	2.7213
	MSE	0.90854	0.938246	1.11582	0.999045
	Rank	1	2	4	3
	$\hat{\lambda}$	0.347416	0.49752	0.525673	0.359264
	MSE	0.192661	0.69324	0.719305	0.520328
	Rank	3	2	4	1
	\sum Rank	5 ^[1]	7 ^[2]	10 ^[4]	8 ^[3]
50	$\hat{\alpha}$	1.98672	2.03617	2.0265	1.99343
	MSE	0.000431715	0.0040072	0.00315436	0.00404717
	Rank	1	3	2	4
	$\hat{\beta}$	3.00072	2.91961	2.97573	2.77968
	MSE	0.683499	0.877858	0.963549	0.649854
	Rank	2	3	4	1
	$\hat{\lambda}$	0.277442	0.378033	0.386856	0.218397

	MSE	0.137432	0.507456	0.513523	0.149977
	Rank	1	3	4	2
	\sum Rank	4 ^[1]	9 ^[3]	10 ^[4]	7 ^[2]
75	$\hat{\alpha}$	1.98936	2.00728	2.00184	1.99174
	MSE	0.000242509	0.00133721	0.0012042	0.000579463
	Rank	1	4	3	2
	$\hat{\beta}$	2.82331	2.83274	2.8804	2.25651
	MSE	0.270468	0.402013	0.449239	0.396708
	Rank	1	3	4	2
	$\hat{\lambda}$	0.244861	0.280131	0.295669	0.0707164
	MSE	0.0818515	0.21808	0.226414	0.154599
	Rank	1	3	4	2
\sum Rank	3 ^[1]	10 ^[3]	11 ^[4]	6 ^[2]	
100	$\hat{\alpha}$	1.99399	2.01977	2.0155	2.00376
	MSE	6.87549E-05	0.00126346	0.00126195	9.13347E-05
	Rank	3	2	1	4
	$\hat{\beta}$	2.70151	2.68147	2.7106	2.59521
	MSE	0.180066	0.241565	0.257378	0.173234
	Rank	2	3	4	1
	$\hat{\lambda}$	0.192397	0.224435	0.233036	0.144579
	MSE	0.0560936	0.158889	0.163745	0.050446
	Rank	2	3	4	1
	\sum Rank	7 ^[2]	8 ^[3]	9 ^[4]	6 ^[1]

جدول (4)

يوضح متوسط القيم التقديرية للمعلمات ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) والرتب الجزئية لطرائق التقدير كافة ولكافة احجام العينات للأنموذج الرابع ($\lambda=1.5$ ، $\beta=2.5$ ، $\alpha=2$)

n	Est.Par	MLE	LS	P.C	MPS
25	$\hat{\alpha}$	1.89882	2.00287	1.96296	1.77436
	MSE	0.018961	0.0253649	0.0225134	0.268842
	Rank	1	3	2	4
	$\hat{\beta}$	2.26494	2.07913	2.16269	1.87655
	MSE	0.188749	0.370035	0.324428	0.999915
	Rank	1	3	2	4
	$\hat{\lambda}$	0.851122	0.965624	0.971362	0.808298
	MSE	0.700759	0.834767	0.771386	1.17996
	Rank	1	3	2	4

	\sum Rank	3 ^[1]	9 ^[3]	6 ^[2]	12 ^[4]
50	$\hat{\alpha}$	1.9396	2.03582	2.00962	1.99686
	MSE	0.00767955	0.0174133	0.0144324	0.0110727
	Rank	1	4	3	2
	$\hat{\beta}$	2.35955	2.35737	2.40371	2.27485
	MSE	0.0761727	0.122936	0.116481	0.1703
	Rank	1	3	2	4
	$\hat{\lambda}$	1.15816	1.55261	1.54234	1.32933
	MSE	0.216543	0.37136	0.341407	0.308754
	Rank	1	4	3	2
\sum Rank	3 ^[1]	11 ^[4]	8 ^[2.5]	8 ^[2.5]	
75	$\hat{\alpha}$	1.96133	2.01353	1.99614	2.90218
	MSE	0.00232601	0.00709769	0.00639692	4.47492
	Rank	1	3	2	4
	$\hat{\beta}$	2.53492	2.48789	2.51877	2.46066
	MSE	0.0636049	0.102332	0.10416	0.148506
	Rank	1	2	3	4
	$\hat{\lambda}$	1.42968	1.59617	1.58421	15.4421
	MSE	0.257493	0.286079	0.26566	1130.74
	Rank	1	3	2	4
\sum Rank	3 ^[1]	8 ^[3]	7 ^[2]	12 ^[4]	
100	$\hat{\alpha}$	1.95943	1.99175	1.98019	1.97345
	MSE	0.00201957	0.00532644	0.0052579	0.00693135
	Rank	1	3	2	4
	$\hat{\beta}$	2.54947	2.49879	2.52192	2.48748
	MSE	0.002086	0.091657	0.0930777	0.14806
	Rank	1	2	3	4
	$\hat{\lambda}$	1.35855	1.44972	1.44397	1.39744
	MSE	0.193349	0.287319	0.275328	0.229411
	Rank	1	4	3	2
\sum Rank	3 ^[1]	9 ^[3]	8 ^[2]	10 ^[4]	

جدول (5)

يوضح متوسط القيم التقديرية للمعلمات ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) والرتب الجزئية لطرائق التقدير كافة ولكافة احجام العينات للأنموذج الخامس ($\lambda = 0.05$ ، $\beta = 1$ ، $\alpha = 4$)

n	Est.Par	MLE	LS	P.C	MPS
25	$\hat{\alpha}$	3.78846	4.99261	5.04541	3.84892
	MSE	0.0971992	0.68712	1.97458	0.504499
	Rank	1	3	4	2
	$\hat{\beta}$	1.22053	1.2859	1.30695	1.03733
	MSE	0.0919986	0.180041	0.21499	0.0848488
	Rank	2	3	4	1
	$\hat{\lambda}$	0.39445	0.95137	0.45741	0.299282
	MSE	0.233978	1.12547	1.23456	0.341035
	Rank	1	3	4	2
\sum Rank	4 ^[1]	9 ^[3]	12 ^[4]	5 ^[2]	
50	$\hat{\alpha}$	3.92329	4.22335	4.78394	4.01777
	MSE	0.0139445	0.377838	1.45671	0.0178356
	Rank	1	3	4	2
	$\hat{\beta}$	1.1652	1.09943	1.15592	1.09635
	MSE	0.0509821	0.0477218	0.061235	0.037793
	Rank	3	2	4	1
	$\hat{\lambda}$	0.236869	0.400279	0.47874	0.193437
	MSE	0.0915174	1.08532	1.24574	0.0924693
	Rank	1	3	4	2
\sum Rank	5 ^[1.5]	8 ^[3]	12 ^[4]	5 ^[1.5]	
75	$\hat{\alpha}$	3.9407	4.89186	4.16766	3.98779
	MSE	0.00574271	0.78937	0.331275	0.0320461
	Rank	1	4	3	2
	$\hat{\beta}$	1.07087	1.11833	1.12094	1.01096
	MSE	0.0227372	0.0533586	0.058938	0.0247576
	Rank	1	3	4	2
	$\hat{\lambda}$	0.181055	0.359222	0.399713	0.122435
	MSE	0.0521424	0.73909	0.651146	0.0612823
	Rank	1	4	3	2
\sum Rank	3 ^[1]	11 ^[4]	10 ^[3]	6 ^[2]	
100	$\hat{\alpha}$	3.9552	4.82066	4.06025	3.98202
	MSE	0.00356181	0.9778	0.0222385	0.0123106
	Rank	1	4	3	2

	$\hat{\beta}$	1.07961	1.09475	1.07791	1.00254
	MSE	0.0203347	0.0401279	0.0376109	0.0241202
	Rank	1	4	3	2
	$\hat{\lambda}$	0.24908	0.45733	0.305317	0.154957
	MSE	0.0471859	0.5949	0.228468	0.0820666
	Rank	1	4	3	2
	\sum Rank	3 ^[1]	12 ^[4]	9 ^[3]	6 ^[2]

جدول (6)

يوضح متوسط القيم التقديرية للمعلمات ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) والرتب الجزئية لطرائق التقدير كافة ولكافة احجام العينات للأنموذج السادس ($\lambda = 1$ ، $\beta = 1.5$ ، $\alpha = 1$)

n	Est.Par	MLE	LS	P.C	MPS
25	$\hat{\alpha}$	0.959014	0.997999	0.971829	0.984895
	MSE	0.0428528	0.00425037	0.00436662	0.00466241
	Rank	4	1	2	3
	$\hat{\beta}$	2.06905	1.34287	1.39037	1.3434
	MSE	1.27554	0.136248	0.131005	0.116578
	Rank	4	3	2	1
	$\hat{\lambda}$	0.880342	0.621414	0.623236	0.605528
	MSE	0.457622	0.345711	0.323157	0.323295
	Rank	4	3	1	2
\sum Rank	12 ^[4]	7 ^[3]	5 ^[1]	6 ^[2]	
50	$\hat{\alpha}$	1.03103	1.00713	0.992634	0.969605
	MSE	0.051468	0.00454306	0.00419737	0.00501903
	Rank	4	2	1	3
	$\hat{\beta}$	1.66706	1.33193	1.35388	1.27622
	MSE	0.718481	0.0715819	0.065689	0.118467
	Rank	4	2	1	3
	$\hat{\lambda}$	1.11155	0.764903	0.763901	0.646697
	MSE	0.538368	0.181881	0.176876	0.250628
	Rank	4	2	1	3
\sum Rank	12 ^[4]	6 ^[2]	3 ^[1]	9 ^[3]	
75	$\hat{\alpha}$	0.960477	1.00094	0.992022	0.976129
	MSE	0.0151865	0.0011114	0.00108289	0.00198394
	Rank	4	2	1	3
	$\hat{\beta}$	1.8107	1.3882	1.40589	1.33604
	MSE	0.63036	0.0454386	0.0421915	0.073766

	Rank	4	2	1	3
	$\hat{\lambda}$	0.877061	0.755306	0.759199	0.650293
	MSE	0.209192	0.14059	0.130612	0.198386
	Rank	4	2	1	3
	\sum Rank	12 ^[4]	6 ^[2]	3 ^[1]	9 ^[3]
100	$\hat{\alpha}$	1.00466	0.9864	0.979551	0.97993
	MSE	0.0044773	0.00142622	0.00161655	0.00182104
	Rank	4	1	2	3
	$\hat{\beta}$	1.61322	1.43309	1.44599	1.37255
	MSE	0.163044	0.0439563	0.0427372	0.0504976
	Rank	4	2	1	3
	$\hat{\lambda}$	1.07039	0.805261	0.806243	0.749771
	MSE	0.146899	0.116202	0.112186	0.123546
	Rank	4	2	1	3
	\sum Rank	12 ^[4]	5 ^[2]	4 ^[1]	9 ^[3]

جدول (7)

يوضح متوسط القيم التقديرية للمعلمات ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) والرتب الجزئية لطرائق التقدير كافة ولكافة احجام العينات للأنموذج السابع ($\lambda = 0.5$ ، $\beta = 3$ ، $\alpha = 3$)

n	Est.Par	MLE	LS	P.C	MPS
25	$\hat{\alpha}$	2.94157	3.73006	3.63599	2.77941
	MSE	0.00607279	0.86018	1.44064	0.351185
	Rank	1	3	4	2
	$\hat{\beta}$	3.28468	3.17112	3.28081	2.36322
	MSE	0.932618	0.30504	1.3765	1.28432
	Rank	2	1	4	3
	$\hat{\lambda}$	0.528243	0.4684	0.8786	0.183849
	MSE	0.195225	0.82457	1.231234	0.607814
	Rank	1	3	4	2
	\sum Rank	4 ^[1]	7 ^[2.5]	12 ^[4]	7 ^[2.5]
50	$\hat{\alpha}$	2.96936	3.31879	3.27571	2.98928
	MSE	0.00159704	0.10253	0.939349	0.0178028
	Rank	1	3	4	2
	$\hat{\beta}$	3.18373	3.07759	3.14376	2.87764
	MSE	0.301344	0.480495	0.510274	0.696603
	Rank	1	2	3	4
	$\hat{\lambda}$	0.56252	0.2804	0.7863	0.558994

	MSE	0.164799	0.7645123	0.632478	0.555023
	Rank	1	4	3	2
	\sum Rank	3 ^[1]	9 ^[3]	10 ^[4]	8 ^[2]
75	$\hat{\alpha}$	2.98473	3.04077	3.16175	3.01179
	MSE	0.000426682	0.0077099	0.583256	0.00153684
	Rank	1	3	4	2
	$\hat{\beta}$	3.24267	3.21246	3.26652	3.12095
	MSE	0.240514	0.5167	0.581304	0.385028
	Rank	1	3	4	2
	$\hat{\lambda}$	0.623216	0.818726	0.39663	0.636662
	MSE	0.129473	0.615922	0.464785	0.237896
	Rank	1	4	3	2
\sum Rank	3 ^[1]	10 ^[3]	11 ^[4]	6 ^[2]	
100	$\hat{\alpha}$	2.97983	3.01272	3.00589	2.98943
	MSE	0.00032889	0.00453142	0.00417329	0.00203111
	Rank	1	4	3	2
	$\hat{\beta}$	2.97127	2.90651	2.94175	2.84216
	MSE	0.110551	0.267989	0.268872	0.268546
	Rank	1	2	4	3
	$\hat{\lambda}$	0.43797	0.473897	0.48565	0.398684
	MSE	0.0755627	0.219506	0.216756	0.130902
	Rank	1	4	3	2
\sum Rank	3 ^[1]	10 ^[3.5]	10 ^[3.5]	7 ^[2]	

جدول (8)

يوضح متوسط القيم التقديرية للمعلمات ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) والرتب الجزئية لطرائق التقدير كافة ولكافة احجام العينات للأنموذج الثامن ($\lambda = 0.5$ ، $\beta = 1$ ، $\alpha = 4$)

n	Est.Par	MLE	LS	P.C	MPS
25	$\hat{\alpha}$	3.80004	5.05735	4.90921	4.6466
	MSE	0.0671727	0.9745	0.97458	0.236458
	Rank	1	3	4	2
	$\hat{\beta}$	1.08112	1.02412	1.07703	0.927848
	MSE	0.0683562	0.0839324	0.10196	0.112715
	Rank	1	2	3	4
	$\hat{\lambda}$	0.443763	0.29317	0.7401	0.28947
	MSE	0.212559	0.78456	0.457856	0.21012
	Rank	2	4	3	1

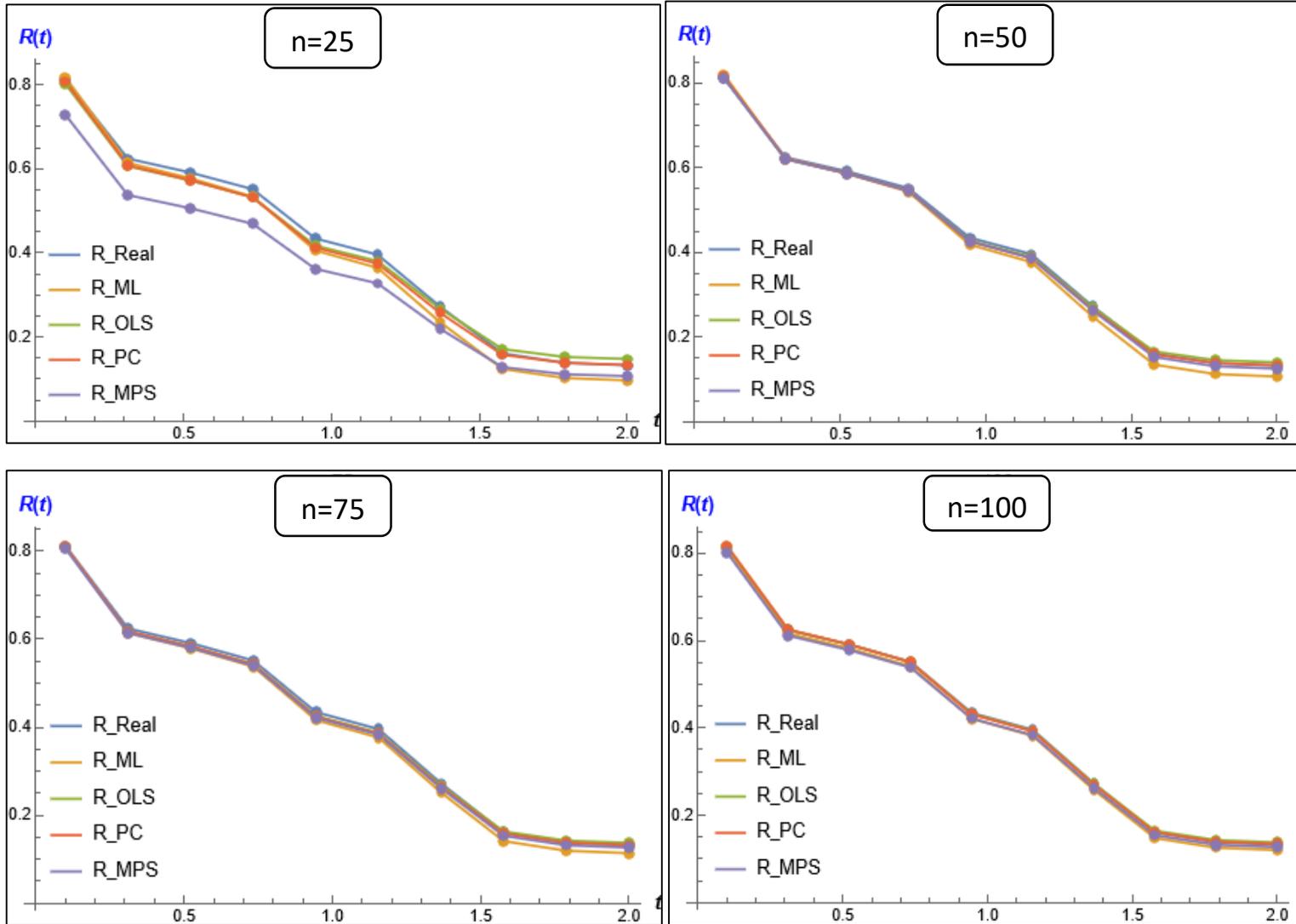
	\sum Rank	4 ^[1]	9 ^[3]	10 ^[4]	7 ^[2]
50	$\hat{\alpha}$	3.90164	4.6402	4.5257	3.93471
	MSE	0.0213696	0.8457	0.154785	0.0913452
	Rank	1	4	3	2
	$\hat{\beta}$	1.02793	1.02068	1.04569	0.914799
	MSE	0.0460083	0.0668252	0.0713388	0.0425256
	Rank	2	3	4	1
	$\hat{\lambda}$	0.431725	0.352	0.8863	0.331673
	MSE	0.101795	0.48753	0.54786	0.135505
	Rank	1	3	4	2
	\sum Rank	4 ^[1]	10 ^[3]	11 ^[4]	5 ^[2]
75	$\hat{\alpha}$	3.93901	4.9601	4.8853	3.99195
	MSE	0.00666155	0.548721	0.1457632	0.0224789
	Rank	1	4	3	2
	$\hat{\beta}$	1.03027	1.03065	1.0478	0.958995
	MSE	0.0201575	0.0324554	0.0346384	0.0283026
	Rank	1	3	4	2
	$\hat{\lambda}$	0.435886	0.706	0.6227	0.354263
	MSE	0.0771348	0.24578	0.7856	0.113836
	Rank	1	3	4	2
	\sum Rank	3 ^[1]	10 ^[3]	11 ^[4]	6 ^[2]
100	$\hat{\alpha}$	3.93428	3.96526	3.94022	3.95004
	MSE	0.00590789	0.0254019	0.027094	0.0225798
	Rank	1	3	4	2
	$\hat{\beta}$	1.00221	0.989191	1.00105	0.918712
	MSE	0.0135845	0.028256	0.0290265	0.0333117
	Rank	1	2	3	4
	$\hat{\lambda}$	0.433924	0.408793	0.420622	0.335876
	MSE	0.0703897	0.147887	0.147229	0.14982
	Rank	1	3	2	4
	\sum Rank	3 ^[1]	8 ^[2]	9 ^[3]	10 ^[4]

الجدول (9)

يبين القيم الحقيقية لدالة المعولية ومقدراتها ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) والرتب الجزئية لمتوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) لكافة طرائق التقدير للأنموذج الأول وحسب حجوم العينات.

n	t _j	R_real	R_MLE	MSE	R_LS	MSE	R_P.C	MSE	R_MPS	MSE
25	0.361325	0.81197	0.81818	0.004307	0.802082	0.004502	0.807704	0.004537	0.728895	0.042576
	0.728456	0.624298	0.613952	0.007348	0.606201	0.00683	0.607968	0.00721	0.537489	0.039822
	0.794027	0.591135	0.577349	0.007504	0.572339	0.00686	0.573069	0.007299	0.506192	0.037218
	0.872652	0.55151	0.533673	0.007554	0.532317	0.006764	0.531739	0.007269	0.469178	0.034102
	1.10687	0.434377	0.405852	0.006958	0.417276	0.00579	0.4126	0.006419	0.362104	0.025081
	1.18494	0.395636	0.36427	0.006565	0.380424	0.005304	0.374385	0.005938	0.327439	0.022237
	1.43531	0.272394	0.235323	0.004898	0.267518	0.00362	0.257343	0.004097	0.219564	0.014036
	1.66488	0.16073	0.123879	0.003183	0.171056	0.002693	0.157597	0.002764	0.12811	0.007088
	1.71136	0.138274	0.102172	0.002861	0.152322	0.002683	0.138269	0.002645	0.111153	0.005691
1.7231	0.132614	0.09674	0.002783	0.147635	0.002693	0.133437	0.002627	0.106894	0.00537	
IMSE				0.005396		0.004774		0.005081		0.023322
Rank				3		1		2		4
n	t _j	R_real	R_MLE	MSE	R_LS	MSE	R_P.C	MSE	R_MPS	MSE
50	0.361325	0.81197	0.820126	0.002205	0.81274	0.002299	0.815602	0.002339	0.811843	0.003048
	0.728456	0.624298	0.62138	0.003233	0.620355	0.002845	0.621408	0.002917	0.62005	0.004476
	0.794027	0.591135	0.585743	0.003287	0.586324	0.002847	0.586873	0.002924	0.586002	0.004543
	0.872652	0.55151	0.543153	0.003316	0.545816	0.002832	0.545722	0.002918	0.545354	0.004559
	1.10687	0.434377	0.417835	0.003202	0.427627	0.002672	0.425489	0.00279	0.425739	0.004232
	1.18494	0.395636	0.376764	0.003102	0.389211	0.002573	0.386382	0.002699	0.386452	0.004011
	1.43531	0.272394	0.248044	0.00259	0.269769	0.002121	0.26481	0.002235	0.262728	0.003027
	1.66488	0.16073	0.134609	0.001954	0.165548	0.001765	0.158854	0.001787	0.152583	0.001971
	1.71136	0.138274	0.112217	0.001826	0.145065	0.001748	0.138053	0.001741	0.13068	0.001772
1.7231	0.132614	0.106597	0.001795	0.139928	0.001749	0.132837	0.001735	0.125174	0.001725	
IMSE				0.002651		0.002345		0.002408		0.003336

Rank				3		1		2		4
n	t _j	R_real	R_MLE	MSE	R_LS	MSE	R_P.C	MSE	R_MPS	MSE
75	0.361325	0.81197	0.810009	0.002126	0.80851	0.002472	0.81039	0.002487	0.806192	0.002557
	0.728456	0.624298	0.614022	0.002945	0.617221	0.002872	0.61789	0.002927	0.614284	0.003276
	0.794027	0.591135	0.579294	0.002934	0.583454	0.002794	0.583786	0.002853	0.580438	0.003234
	0.872652	0.55151	0.537872	0.002876	0.543237	0.00267	0.54314	0.002736	0.540096	0.003136
	1.10687	0.434377	0.416285	0.002482	0.42564	0.002196	0.424169	0.002281	0.421748	0.002613
	1.18494	0.395636	0.376471	0.002293	0.387305	0.002018	0.385366	0.002108	0.382987	0.002382
	1.43531	0.272394	0.251588	0.001569	0.267721	0.001432	0.26433	0.001514	0.261272	0.001545
	1.66488	0.16073	0.141203	0.000864	0.162935	0.001003	0.158352	0.001027	0.153391	0.000802
	1.71136	0.138274	0.119359	0.000735	0.142304	0.000955	0.137502	0.000959	0.131997	0.000677
1.7231	0.132614	0.113874	0.000704	0.137129	0.000946	0.132273	0.000945	0.126621	0.000648	
IMSE				0.001953		0.001936		0.001984		0.002087
Rank				2		1		3		4
n	t _j	R_real	R_MLE	MSE	R_LS	MSE	R_P.C	MSE	R_MPS	MSE
100	0.361325	0.81197	0.810742	0.000843	0.815847	0.000938	0.817278	0.000953	0.802072	0.00117103
	0.728456	0.624298	0.616431	0.001283	0.624758	0.0014	0.62529	0.001421	0.611651	0.00155636
	0.794027	0.591135	0.582144	0.001318	0.590935	0.001457	0.591221	0.001482	0.578277	0.00156835
	0.872652	0.55151	0.541269	0.001342	0.550608	0.001517	0.55058	0.001546	0.538516	0.00156508
	1.10687	0.434377	0.421241	0.001293	0.432302	0.001595	0.431269	0.00164	0.421755	0.00144402
	1.18494	0.395636	0.381868	0.001235	0.393568	0.001575	0.392191	0.001624	0.383405	0.00136689
	1.43531	0.272394	0.257909	0.000918	0.271984	0.001329	0.269519	0.001372	0.262336	0.00101159
	1.66488	0.16073	0.147494	0.000521	0.164227	0.000951	0.160829	0.000955	0.15388	0.00061442
	1.71136	0.138274	0.125523	0.000441	0.142849	0.000879	0.139273	0.000872	0.13221	0.000539334
1.7231	0.132614	0.119999	0.000421	0.137477	0.000862	0.133856	0.000852	0.126756	0.000521219	
IMSE				0.000961		0.00125		0.001272		0.001135829
Rank				1		3		4		2



شكل (1) يبين دالة المعولية الحقيقية والمقدرة لطرائق التقدير كافة ولجميع احجام العينات للنموذج الاول

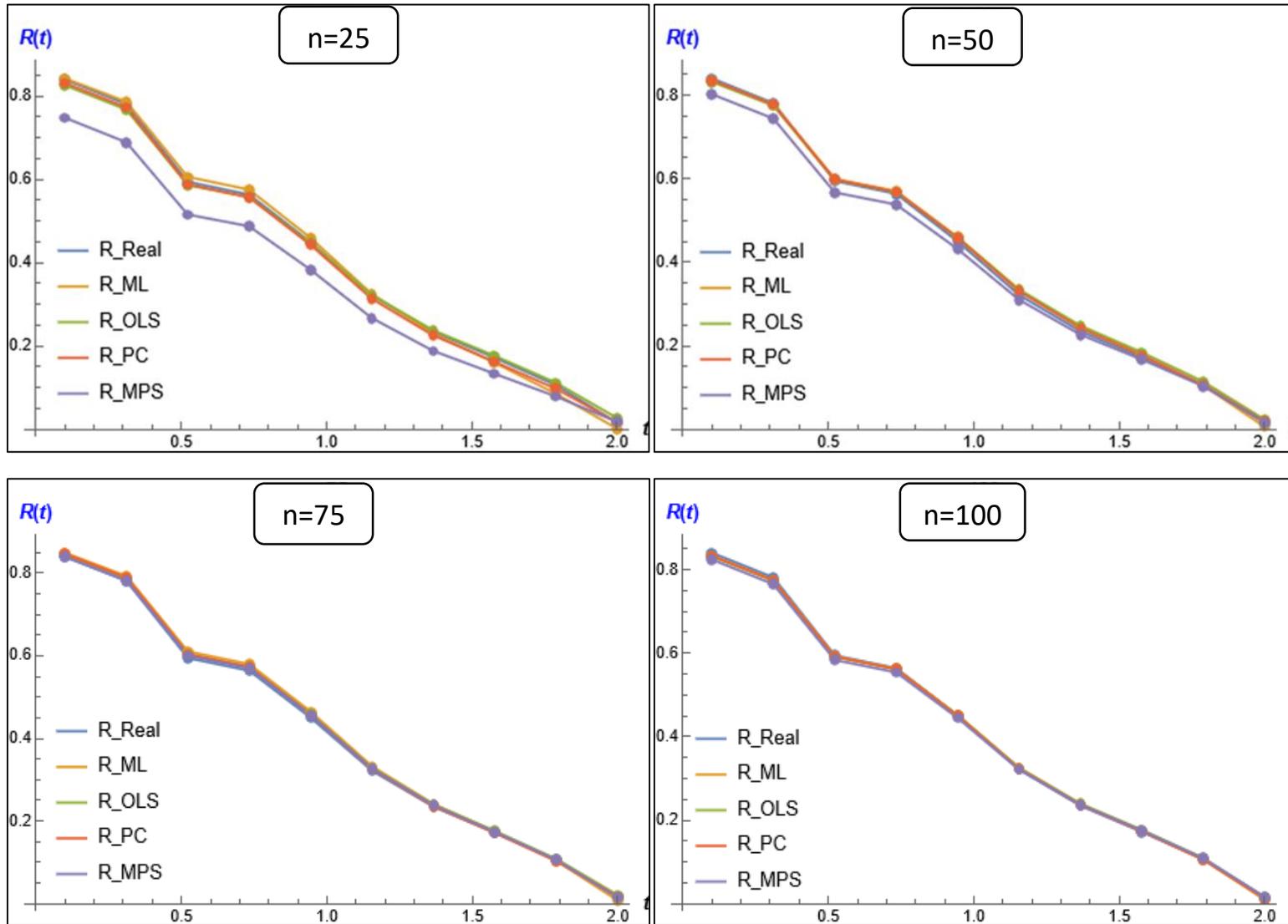
جدول (10)

يبين القيم الحقيقية لدالة المعولية ومقدراتها ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) والرتب الجزئية لمتوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) لكافة طرائق التقدير للأنموذج الثاني وحسب حجوم العينات.

n	t _i	R_real	R_MLE	MSE	R_LS	MSE	R_P.C	MSE	R_MPS	MSE
25	0.137585	0.839909	0.842596	0.00300347	0.826047	0.00354099	0.831647	0.00346072	0.747978	0.051033
	0.193893	0.780833	0.786668	0.00411322	0.767811	0.00454386	0.773056	0.00457791	0.689221	0.050695
	0.397862	0.594399	0.606128	0.00635451	0.586844	0.00617833	0.587989	0.0065589	0.515764	0.038816
	0.436266	0.563679	0.575597	0.00650997	0.557164	0.00624694	0.557329	0.00666254	0.487715	0.036582
	0.594697	0.449816	0.460132	0.0065626	0.447111	0.00611087	0.443175	0.00659141	0.383523	0.029087
	0.814949	0.32156	0.325165	0.00572562	0.322735	0.00535808	0.313738	0.00581805	0.267335	0.020464
	1.00365	0.234678	0.23018	0.00472303	0.237998	0.00451082	0.225732	0.00491725	0.188549	0.01501
	1.17105	0.172212	0.16035	0.00362931	0.176649	0.0036961	0.162388	0.00404108	0.133596	0.010542
	1.39383	0.106552	0.0856382	0.002325	0.112176	0.00246068	0.097718	0.00240434	0.0792362	0.005579
1.87182	0.0157436	0.00191849	0.000210644	0.0270956	0.000614843	0.0171302	0.000290108	0.0180937	0.000592	
IMSE				0.004315737		0.004326151		0.004532231		0.02584
Rank				1		2		3		4
n	t _i	R_real	R_MLE	MSE	R_LS	MSE	R_P.C	MSE	R_MPS	MSE
50	0.137585	0.839909	0.834547	0.0010816	0.831621	0.00150084	0.834995	0.00147049	0.802034	0.0089429
	0.193893	0.780833	0.777585	0.00142466	0.774657	0.00182849	0.777824	0.00183915	0.743851	0.00955014
	0.397862	0.594399	0.599374	0.00223902	0.597225	0.00236845	0.598123	0.00246386	0.56689	0.00906654
	0.436266	0.563679	0.569922	0.00233239	0.568018	0.00241464	0.568387	0.0025099	0.538131	0.00883498
	0.594697	0.449816	0.459851	0.00253422	0.459213	0.00250551	0.457408	0.00256497	0.431532	0.0078841
	0.814949	0.32156	0.333002	0.00235917	0.334652	0.00239403	0.330236	0.00237548	0.310166	0.00676066
	1.00365	0.234678	0.244197	0.00189629	0.248094	0.002121	0.242036	0.00206285	0.226552	0.00568334
	1.17105	0.172212	0.178092	0.001384	0.184051	0.00183478	0.177025	0.0017765	0.166984	0.00399097
	1.39383	0.106552	0.105458	0.000792205	0.114065	0.00159642	0.106417	0.00157857	0.103361	0.00210149
1.87182	0.0157436	0.00575686	0.000164387	0.0231035	0.000630303	0.0184768	0.000471571	0.016481	0.000289902	
IMSE				0.001620794		0.001919446		0.001911334		0.006310502

الملحق A

Rank				1		3		2		4
n	t _i	R_real	R_MLE	MSE	R_LS	MSE	R_P.C	MSE	R_MPS	MSE
75	0.137585	0.839909	0.84883	0.000969023	0.844321	0.00111336	0.846329	0.00113536	0.838818	0.00200319
	0.193893	0.780833	0.792508	0.00122125	0.787018	0.0013447	0.788948	0.00138329	0.781697	0.00228696
	0.397862	0.594399	0.610226	0.00166784	0.603322	0.00169589	0.603883	0.00173996	0.599584	0.00257133
	0.436266	0.563679	0.579561	0.00171807	0.572677	0.00173472	0.572898	0.00177457	0.569237	0.00259073
	0.594697	0.449816	0.46446	0.0018849	0.458323	0.00188241	0.457116	0.00190522	0.455881	0.00268174
	0.814949	0.32156	0.332231	0.0019589	0.328326	0.00199889	0.325362	0.00201453	0.326547	0.00276303
	1.00365	0.234678	0.241116	0.00179637	0.23971	0.00192351	0.235627	0.00194498	0.237891	0.00264486
	1.17105	0.172212	0.174732	0.00149022	0.175739	0.00171546	0.170987	0.00174397	0.173516	0.00235984
	1.39383	0.106552	0.10389	0.000980131	0.108159	0.00133464	0.102952	0.0013703	0.105923	0.00159121
1.87182	0.0157436	0.00761541	0.000121836	0.0205681	0.000433096	0.0172576	0.000351001	0.0149007	0.000230158	
IMSE				0.001380854		0.001517668		0.001536318		0.002172305
Rank				1		2		3		4
n	t _i	R_real	R_MLE	MSE	R_LS	MSE	R_P.C	MSE	R_MPS	MSE
100	0.137585	0.839909	0.832376	0.00081323	0.831423	0.000804101	0.833021	0.000779835	0.823715	0.00116664
	0.193893	0.780833	0.774163	0.000935822	0.773123	0.000921516	0.774609	0.000907682	0.76478	0.00128091
	0.397862	0.594399	0.592288	0.000993318	0.591414	0.00104864	0.591751	0.00106556	0.583416	0.00119703
	0.436266	0.563679	0.562367	0.000984638	0.561592	0.00106103	0.561665	0.00108023	0.553878	0.00116558
	0.594697	0.449816	0.451158	0.000950589	0.45095	0.0011075	0.449946	0.00112648	0.444638	0.00107371
	0.814949	0.32156	0.324705	0.000890947	0.325541	0.00109991	0.323261	0.00110614	0.321249	0.00100948
	1.00365	0.234678	0.237757	0.000782684	0.239546	0.000973314	0.23647	0.000969589	0.236739	0.000927808
	1.17105	0.172212	0.174198	0.00063854	0.176772	0.000782562	0.173226	0.000776121	0.175032	0.000806338
	1.39383	0.106552	0.105897	0.000424071	0.109323	0.000501588	0.105461	0.000503023	0.108662	0.00060337
1.87182	0.0157436	0.00948808	8.65416E-05	0.0145337	0.000166534	0.0120172	0.000150174	0.0159181	0.000160333	
IMSE				0.000750038		0.00084667		0.000846483		0.00093912
Rank				1		3		2		4



شكل (2) يبين دالة المعولية الحقيقية والمقدرة لطرائق التقدير كافة ولجميع احجام العينات للأنموذج الثاني

الملحق A

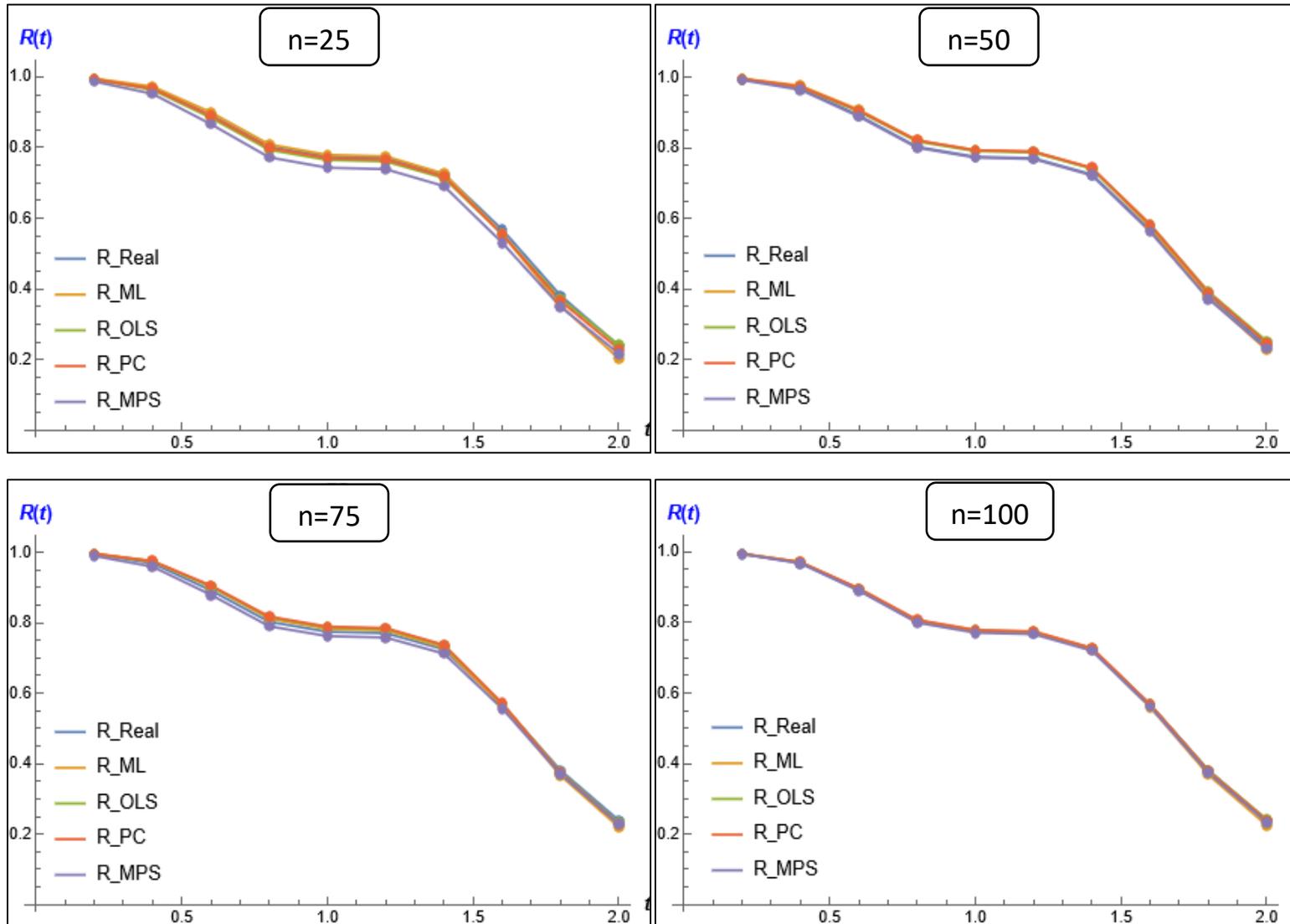
جدول (11)

يبين القيم الحقيقية لدالة المعولية ومقدراتها ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) والرتب الجزئية لمتوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) لكافة طرائق التقدير للأنموذج الثالث وحسب حجوم العينات.

n	t _j	R_real	R_MLE	MSE	R_LS	MSE	R_P.C	MSE	R_MPS	MSE
25	0.244738	0.994501	0.995315	2.10818E-05	0.992181	0.000056305	0.993226	4.31203E-05	0.987022	0.000544413
	0.491229	0.968653	0.97274	0.00039983	0.963418	0.000697167	0.966547	0.000608124	0.951895	0.00311252
	0.807304	0.891853	0.899953	0.00252546	0.884374	0.00344344	0.889778	0.00331549	0.866214	0.0100468
	1.02877	0.802581	0.809039	0.00507612	0.793522	0.00621972	0.798992	0.00627219	0.77229	0.016158
	1.08574	0.774409	0.77944	0.00574734	0.764804	0.0068646	0.769955	0.00699025	0.742946	0.0176186
	1.09349	0.770405	0.775206	0.0058362	0.760721	0.00694643	0.765817	0.00708254	0.73878	0.0178086
	1.17758	0.724288	0.726031	0.00673799	0.713681	0.00771554	0.717969	0.00796899	0.690878	0.0196965
	1.41415	0.567544	0.555574	0.0081841	0.554751	0.00829987	0.554635	0.00885892	0.530587	0.0209601
	1.63828	0.380964	0.352736	0.00720517	0.371995	0.00643464	0.36531	0.00715458	0.349493	0.013014
1.78443	0.238924	0.202729	0.00519314	0.240881	0.00418207	0.229688	0.00463948	0.216544	0.00720018	
IMSE				0.004692643		0.005085978		0.005293368		0.012615971
Rank				1		2		3		4
n	t _j	R_real	R_MLE	MSE	R_LS	MSE	R_P.C	MSE	R_MPS	MSE
50	0.244738	0.994501	0.996083	1.44154E-05	0.994744	2.33316E-05	0.995119	0.000021206	0.991725	0.000187699
	0.491229	0.968653	0.975847	0.000261491	0.972115	0.000335185	0.97339	0.000325276	0.964252	0.00125609
	0.807304	0.891853	0.907878	0.00165146	0.902904	0.0019973	0.905379	0.00201525	0.888579	0.00461705
	1.02877	0.802581	0.821319	0.00338352	0.818106	0.00407741	0.820839	0.0041767	0.800365	0.00787402
	1.08574	0.774409	0.79294	0.00385159	0.790593	0.00463358	0.793245	0.00476006	0.772233	0.00867425
	1.09349	0.770405	0.788875	0.00391384	0.786659	0.00470703	0.789294	0.00483725	0.768224	0.0087784
	1.17758	0.724288	0.741549	0.00454706	0.740964	0.00544289	0.743318	0.00561269	0.721858	0.00980508
	1.41415	0.567544	0.576137	0.00546327	0.58225	0.00639731	0.582748	0.0066291	0.562438	0.0110722
	1.63828	0.380964	0.37648	0.00435869	0.392554	0.00521356	0.389844	0.00538549	0.371948	0.00924218
1.78443	0.238924	0.226629	0.00260535	0.251982	0.00354176	0.246714	0.00357514	0.231426	0.00513453	
IMSE				0.003005069		0.003636936		0.003733816		0.00666415

الملحق A

Rank				1		2		3		4
n	t _j	R_real	R_MLE	MSE	R_LS	MSE	R_P.C	MSE	R_MPS	MSE
75	0.244738	0.994501	0.995808	8.50969E-06	0.995622	1.00226E-05	0.995897	1.01365E-05	0.98965	8.81503E-05
	0.491229	0.968653	0.974008	0.000144304	0.973943	0.000166707	0.974993	0.000174262	0.958891	0.000440719
	0.807304	0.891853	0.901846	0.000695397	0.903452	0.000848052	0.905547	0.000897577	0.879217	0.0010224
	1.02877	0.802581	0.811677	0.00108075	0.815397	0.00133925	0.81764	0.00141389	0.789925	0.00126817
	1.08574	0.774409	0.782444	0.00113543	0.786766	0.00140046	0.788906	0.00147474	0.761914	0.00130168
	1.09349	0.770405	0.778268	0.00114106	0.782672	0.00140599	0.784793	0.00147994	0.757935	0.00130544
	1.17758	0.724288	0.729862	0.00117441	0.735152	0.00142235	0.736984	0.0014887	0.712135	0.0013358
	1.41415	0.567544	0.563213	0.001072	0.57083	0.00117073	0.571008	0.00120309	0.556432	0.00134433
	1.63828	0.380964	0.366106	0.000914552	0.375856	0.000942299	0.373585	0.00100856	0.370542	0.00117717
1.78443	0.238924	0.220246	0.000732057	0.231713	0.000794001	0.227783	0.000895152	0.228495	0.000894871	
IMSE				0.000809847		0.000949986		0.001004605		0.001017873
Rank				1		2		3		4
n	t _j	R_real	R_MLE	MSE	R_LS	MSE	R_P.C	MSE	R_MPS	MSE
100	0.244738	0.994501	0.995079	6.96765E-06	0.994712	9.47169E-06	0.994944	8.93998E-06	0.993979	1.24702E-05
	0.491229	0.968653	0.970979	0.000116155	0.97025	0.000145161	0.971041	0.000142762	0.967658	0.000164425
	0.807304	0.891853	0.895446	0.000639715	0.895425	0.000790347	0.896864	0.00079221	0.890167	0.000809617
	1.02877	0.802581	0.804425	0.00119564	0.80604	0.00151083	0.807505	0.0015232	0.799629	0.00146709
	1.08574	0.774409	0.775335	0.0013327	0.777541	0.00129798	0.778922	0.00171401	0.770985	0.00162619
	1.09349	0.770405	0.771191	0.00135053	0.773483	0.00172274	0.77485	0.00173931	0.766913	0.00164675
	1.17758	0.724288	0.723343	0.0011267	0.726659	0.00197404	0.727815	0.00199695	0.719998	0.00184661
	1.41415	0.567544	0.560203	0.00075773	0.567363	0.00237038	0.56742	0.00241699	0.56089	0.00205649
	1.63828	0.380964	0.368064	0.00044501	0.380445	0.00203109	0.378883	0.00209007	0.373663	0.00158196
1.78443	0.238924	0.225116	0.000507435	0.241869	0.00136777	0.239109	0.00139246	0.233665	0.000925336	
IMSE				0.000747858		0.001321981		0.00138169		0.001213694
Rank				1		3		4		2



شكل (3) يبين دالة المعولية الحقيقية والمقدرة لطرائق التقدير كافة ولجميع احجام العينات للأنموذج الثالث

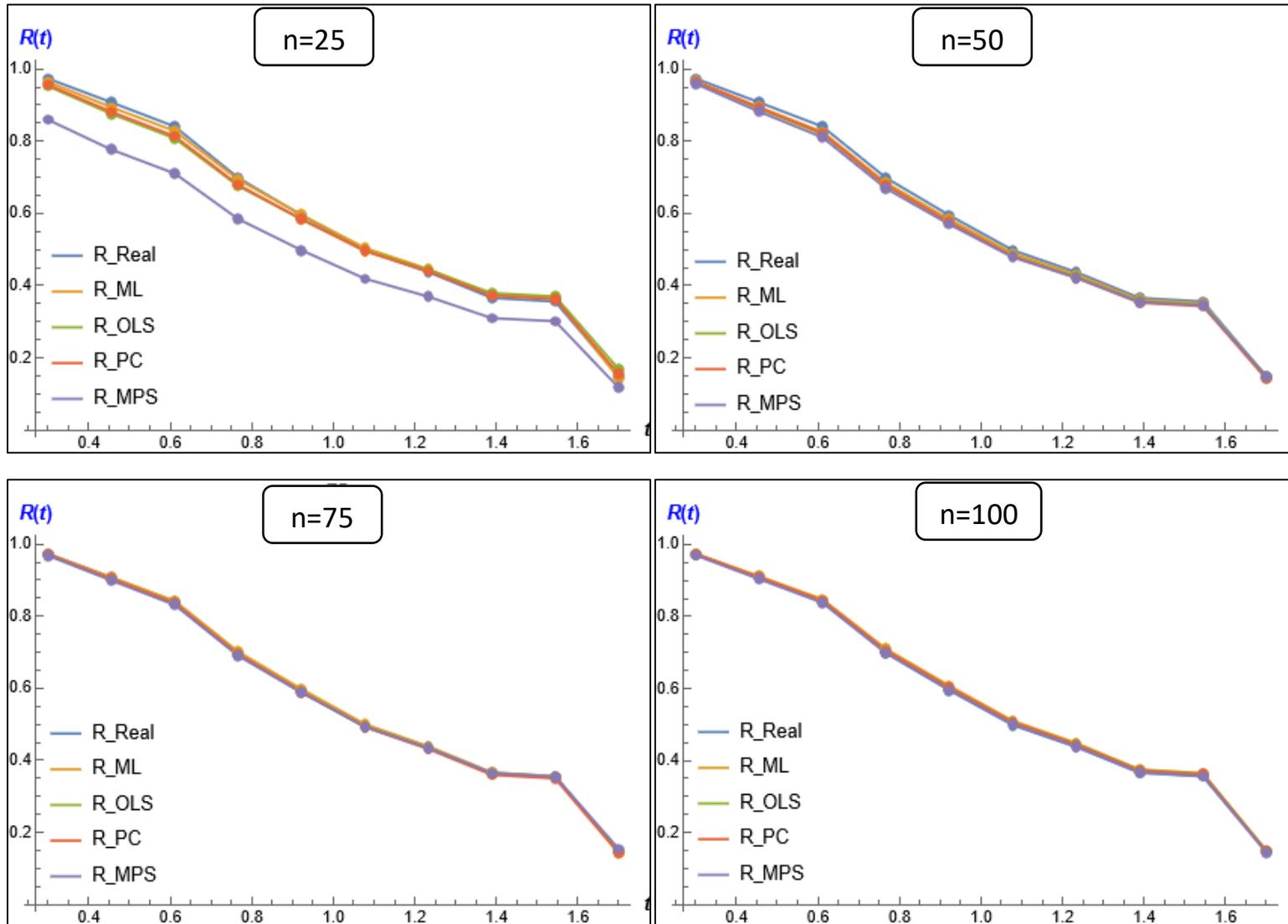
جدول (12)

يبين القيم الحقيقية لدالة المعولية ومقدراتها ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) والرتب الجزئية لمتوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) لكافة طرائق التقدير للأنموذج الرابع وحسب حجوم العينات.

n	t _j	R_real	R_MLE	MSE	R_LS	MSE	R_P.C	MSE	R_MPS	MSE
25	0.326424	0.973398	0.963921	0.000297624	0.95237	0.000924677	0.956154	0.000750213	0.859486	0.0695264
	0.543466	0.907568	0.894006	0.000986576	0.875553	0.00239328	0.881379	0.00205795	0.776665	0.0755643
	0.684469	0.840501	0.82809	0.00149564	0.807765	0.00301929	0.813702	0.00272646	0.710549	0.0712393
	0.908723	0.69867	0.693673	0.00233165	0.675879	0.00321914	0.67949	0.00322876	0.584591	0.0575975
	1.04773	0.59489	0.596097	0.00295954	0.583303	0.00327197	0.58406	0.00347993	0.497986	0.0455698
	1.17037	0.49823	0.504285	0.00358394	0.49776	0.00355078	0.495397	0.00384523	0.419235	0.0341619
	1.24671	0.437532	0.445702	0.00395503	0.443758	0.00384303	0.439315	0.00413137	0.369433	0.0280067
	1.33805	0.366035	0.375314	0.00430563	0.379311	0.00424406	0.372389	0.00446564	0.309968	0.0217526
	1.35119	0.35594	0.365226	0.00434317	0.370104	0.0043003	0.362834	0.00450776	0.301474	0.0209545
	1.65412	0.14865	0.144214	0.00414279	0.168943	0.0046903	0.155478	0.00454674	0.117654	0.00878615
IMSE				0.002840159		0.003345683		0.003374005		0.043315915
Rank				1		2		3		4
n	t _j	R_real	R_MLE	MSE	R_LS	MSE	R_P.C	MSE	R_MPS	MSE
50	0.326424	0.973398	0.966067	0.000260198	0.963606	0.000421274	0.965343	0.000375513	0.958859	0.000682869
	0.543466	0.907568	0.894471	0.00102312	0.889705	0.00150779	0.892724	0.00140481	0.881789	0.00225318
	0.684469	0.840501	0.825613	0.00165403	0.819392	0.00229364	0.822606	0.00219717	0.810611	0.00331481
	0.908723	0.69867	0.684959	0.00247254	0.677099	0.0030395	0.679111	0.00304758	0.669275	0.00421874
	1.04773	0.59489	0.58384	0.00273193	0.575879	0.00306865	0.576256	0.0031652	0.56977	0.00415676
	1.17037	0.49823	0.489994	0.00277853	0.482872	0.00288089	0.481433	0.00303883	0.478571	0.00380374
	1.24671	0.437532	0.430942	0.00272185	0.424881	0.00270183	0.42224	0.00288166	0.42167	0.00349897
	1.33805	0.366035	0.361016	0.0025702	0.356826	0.00245369	0.352774	0.00263964	0.354729	0.00309136
	1.35119	0.35594	0.351097	0.00254115	0.34723	0.0024161	0.342984	0.00260109	0.345268	0.00303066
	1.65412	0.14865	0.142419	0.00151852	0.149508	0.0015179	0.142165	0.00159177	0.148041	0.0016512
IMSE				0.002027207		0.002230126		0.002294326		0.002970229

الملحق A

Rank				1		2		3		4
n	t _j	R_real	R_MLE	MSE	R_LS	MSE	R_P.C	MSE	R_MPS	MSE
75	0.326424	0.973398	0.972552	0.000157989	0.969828	0.000212629	0.970841	0.000198765	0.968137	0.000258906
	0.543466	0.907568	0.907835	0.000751414	0.901853	0.00094025	0.903739	0.000913349	0.899166	0.00102092
	0.684469	0.840501	0.842013	0.00131929	0.834192	0.00160327	0.836274	0.00158707	0.831266	0.00164125
	0.908723	0.69867	0.70163	0.00216234	0.692531	0.00250569	0.693933	0.00253642	0.690113	0.00236887
	1.04773	0.59489	0.597781	0.00250469	0.589325	0.00277799	0.589683	0.00284008	0.58786	0.0025397
	1.17037	0.49823	0.500291	0.00265683	0.493375	0.00280317	0.492531	0.00288547	0.493178	0.00253885
	1.24671	0.437532	0.438744	0.00267013	0.433203	0.00272456	0.431547	0.00281447	0.433981	0.00248749
	1.33805	0.366035	0.365967	0.00258766	0.362415	0.00254395	0.359796	0.00263723	0.364505	0.00238644
	1.35119	0.35594	0.355669	0.00256591	0.35243	0.00251061	0.349676	0.00260382	0.354718	0.00236859
	1.65412	0.14865	0.143052	0.00136075	0.147826	0.0013298	0.142917	0.0013847	0.154576	0.0017548
IMSE				0.0018737		0.001995192		0.002040137		0.001936582
Rank				1		3		4		2
n	t _j	R_real	R_MLE	MSE	R_LS	MSE	R_P.C	MSE	R_MPS	MSE
100	0.326424	0.973398	0.97409	8.95833E-05	0.972246	0.000105436	0.972979	0.00010022	0.969638	0.000354442
	0.543466	0.907568	0.911662	0.000510315	0.907657	0.000482831	0.909056	0.000478719	0.903601	0.00112988
	0.684469	0.840501	0.847718	0.000952971	0.842477	0.000818091	0.844054	0.000826157	0.837777	0.0016846
	0.908723	0.69867	0.710255	0.00153138	0.70419	0.00121764	0.705335	0.00124723	0.69877	0.00211262
	1.04773	0.59489	0.607602	0.00159986	0.602093	0.00128795	0.602506	0.00131667	0.59628	0.0019715
	1.17037	0.49823	0.510424	0.00147093	0.506158	0.00124744	0.5057	0.00126473	0.499994	0.00168343
	1.24671	0.437532	0.448645	0.00133748	0.445465	0.0011883	0.444407	0.00119633	0.439095	0.00148926
	1.33805	0.366035	0.37514	0.00115989	0.373495	0.00109227	0.371711	0.00109061	0.366925	0.00128574
	1.35119	0.35594	0.364699	0.00113417	0.36329	0.00107636	0.361404	0.00107361	0.356697	0.0012603
	1.65412	0.14865	0.146798	0.000571171	0.150646	0.000585233	0.147025	0.000591774	0.144445	0.000851733
IMSE				0.001035775		0.000910155		0.000918605		0.001382351
Rank				3		1		2		4



شكل (4) يبين دالة المعولية الحقيقية والمقدرة لطرائق التقدير كافة ولجميع احجام العينات للأنموذج الرابع

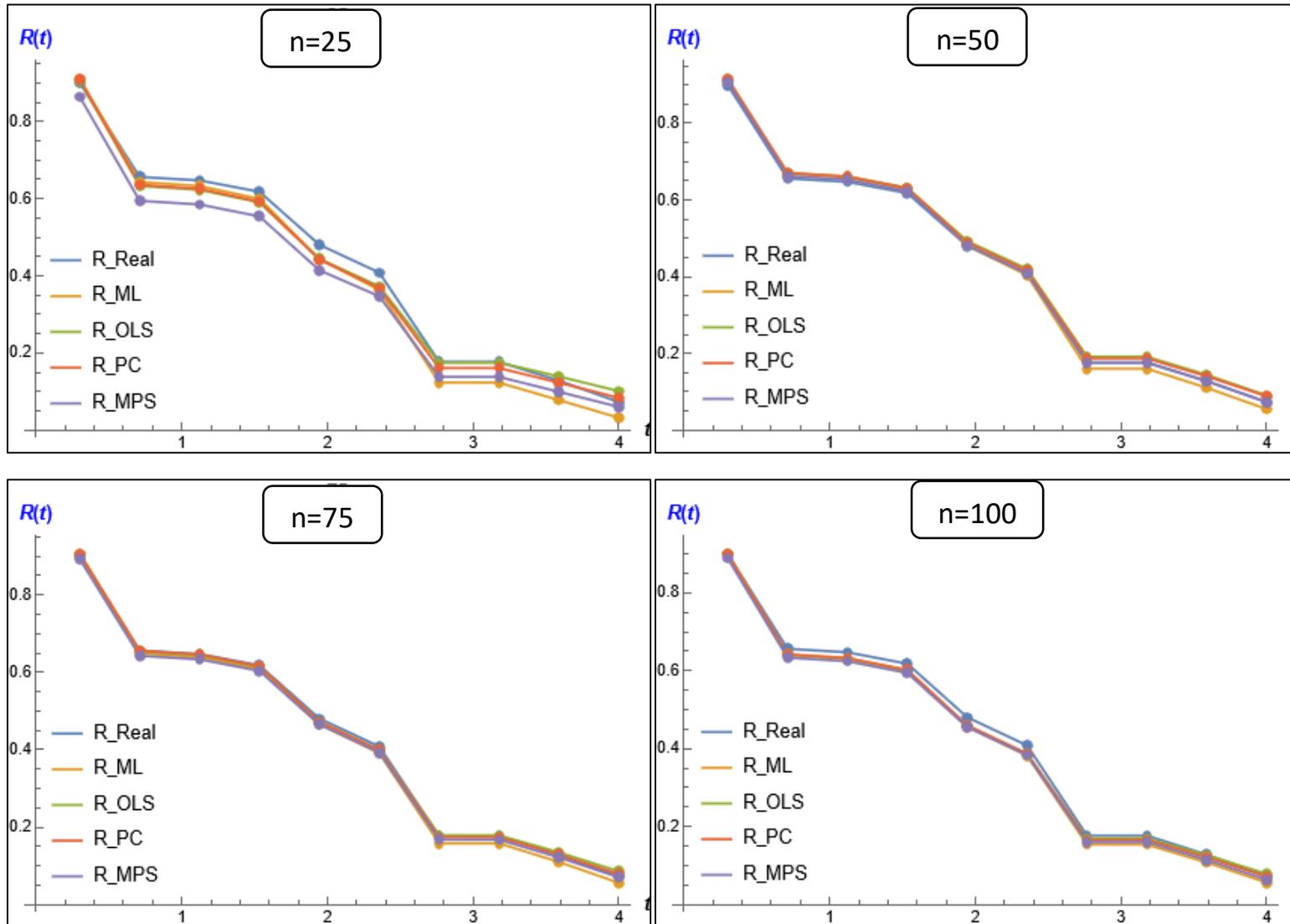
جدول (13)

يبين القيم الحقيقية لدالة المعولية ومقدراتها ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) والرتب الجزئية لمتوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) لكافة طرائق التقدير للأنموذج الخامس وحسب حجم العينات.

n	t _j	R_real	R_MLE	MSE	R_LS	MSE	R_P.C	MSE	R_MPS	MSE
25	0.383076	0.899912	0.911214	0.383076	0.906019	0.00213293	0.90839	0.00217008	0.863918	0.0106039
	1.33115	0.656203	0.643127	1.33115	0.632804	0.00942949	0.635742	0.0099484	0.594351	0.0267686
	1.36653	0.647217	0.632849	1.36653	0.62274	0.00961652	0.625529	0.0101529	0.584828	0.0270972
	1.48221	0.617893	0.599293	1.48221	0.59014	0.0101462	0.592366	0.0107411	0.553919	0.0280312
	2.02858	0.480514	0.44327	2.02858	0.444089	0.0106542	0.442378	0.0115364	0.414476	0.0275766
	2.31887	0.408276	0.363068	2.31887	0.372842	0.00955462	0.368437	0.0105509	0.346883	0.0226628
	3.26257	0.176991	0.123256	3.26257	0.174921	0.00355409	0.160872	0.00399223	0.137969	0.00935495
	3.26306	0.176871	0.123141	3.26306	0.17483	0.00355201	0.160777	0.00398923	0.137866	0.00934872
	3.46495	0.128092	0.0777328	3.46495	0.139054	0.00299276	0.122999	0.00298809	0.0992251	0.00635732
3.69515	0.0727716	0.0320391	3.69515	0.100975	0.00323882	0.0835957	0.00240792	0.0601805	0.00335431	
IMSE				2.2596146		0.006487164		0.006847725		0.01711556
Rank				4		1		2		3
n	t _j	R_real	R_MLE	MSE	R_LS	MSE	R_P.C	MSE	R_MPS	MSE
50	0.383076	0.899912	0.916662	0.00126717	0.910266	0.000885063	0.915279	0.000862949	0.907327	0.000940103
	1.33115	0.656203	0.669288	0.00520027	0.670412	0.0027877	0.670363	0.00317193	0.662351	0.00284672
	1.36653	0.647217	0.659738	0.00533371	0.661341	0.00283658	0.661043	0.00323498	0.653131	0.00288175
	1.48221	0.617893	0.628483	0.00576149	0.63171	0.00298477	0.630618	0.00342392	0.623014	0.00297822
	2.02858	0.480514	0.481145	0.00744243	0.492886	0.00335198	0.488783	0.00382358	0.481908	0.00306713
	2.31887	0.408276	0.403747	0.00792365	0.420306	0.0032473	0.415273	0.00361508	0.408074	0.00288002
	3.26257	0.176991	0.160357	0.00561796	0.191551	0.00181039	0.187159	0.0017634	0.175515	0.001522
	3.26306	0.176871	0.160233	0.00561512	0.191434	0.00180964	0.187043	0.00176269	0.175396	0.00152119
	3.46495	0.128092	0.110192	0.00431762	0.143932	0.00155986	0.140361	0.00158637	0.127306	0.00121257
3.69515	0.0727716	0.0547063	0.0024243	0.0903416	0.00147077	0.088195	0.00170705	0.073225	0.000937176	
IMSE				0.005090372		0.002274405		0.002495195		0.002078688

الملحق A

Rank				4		2		3		1
n	t_j	R_real	R_MLE	MSE	R_LS	MSE	R_P.C	MSE	R_MPS	MSE
75	0.383076	0.899912	0.9017	0.000809622	0.905564	0.000933681	0.906387	0.00101508	0.892379	0.00134106
	1.33115	0.656203	0.648628	0.00218012	0.65369	0.00201191	0.655517	0.00194963	0.642568	0.00341818
	1.36653	0.647217	0.639224	0.00219734	0.644299	0.00202177	0.64609	0.00195287	0.63344	0.00345328
	1.48221	0.617893	0.608552	0.00224157	0.613705	0.00204449	0.615347	0.00195806	0.6037	0.00354928
	2.02858	0.480514	0.465594	0.00223884	0.472289	0.00195292	0.472621	0.00188173	0.465364	0.00363454
	2.31887	0.408276	0.39119	0.00211358	0.399765	0.00176072	0.399076	0.00174856	0.393341	0.00345388
	3.26257	0.176991	0.158151	0.00126608	0.179008	0.000865443	0.174082	0.000872688	0.167737	0.00165903
	3.26306	0.176871	0.158033	0.00126557	0.178898	0.000865222	0.17397	0.000872269	0.167624	0.00165701
	3.46495	0.128092	0.110056	0.00106937	0.134787	0.00084499	0.128854	0.000743195	0.121974	0.000936634
3.69515	0.0727716	0.0561836	0.000801764	0.0858209	0.00105097	0.078727	0.000749972	0.0704783	0.000384671	
IMSE				0.001618386		0.001435212		0.001374405		0.002348757
Rank				3		2		1		4
n	t_j	R_real	R_MLE	MSE	R_LS	MSE	R_P.C	MSE	R_MPS	MSE
100	0.383076	0.899912	0.899669	0.000602781	0.900219	0.00062921	0.899142	0.00068396	0.888657	0.00115769
	1.33115	0.656203	0.64057	0.00169539	0.640708	0.00196246	0.642013	0.00191802	0.6335	0.0028999
	1.36653	0.647217	0.631016	0.00171528	0.631191	0.00200709	0.632551	0.00195355	0.624265	0.00292982
	1.48221	0.617893	0.599905	0.00177035	0.600254	0.0021443	0.601759	0.00206355	0.594217	0.00301139
	2.02858	0.480514	0.456014	0.00182137	0.458499	0.00247345	0.459857	0.00236288	0.455344	0.00305389
	2.31887	0.408276	0.381936	0.00170708	0.386504	0.00234472	0.387208	0.00229415	0.383634	0.00284623
	3.26257	0.176991	0.154053	0.000833597	0.169567	0.000945879	0.1657	0.00101119	0.160371	0.00139582
	3.26306	0.176871	0.153939	0.000833063	0.16946	0.000945265	0.16559	0.00101038	0.160257	0.00139495
	3.46495	0.128092	0.107868	0.000625876	0.1264	0.000769322	0.121156	0.000714769	0.114398	0.00106019
3.69515	0.0727716	0.056499	0.00043496	0.0786701	0.000822511	0.0717301	0.000509878	0.0636739	0.000616368	
IMSE				0.001203975		0.001504421		0.001452233		0.002036625
Rank				1		3		2		4



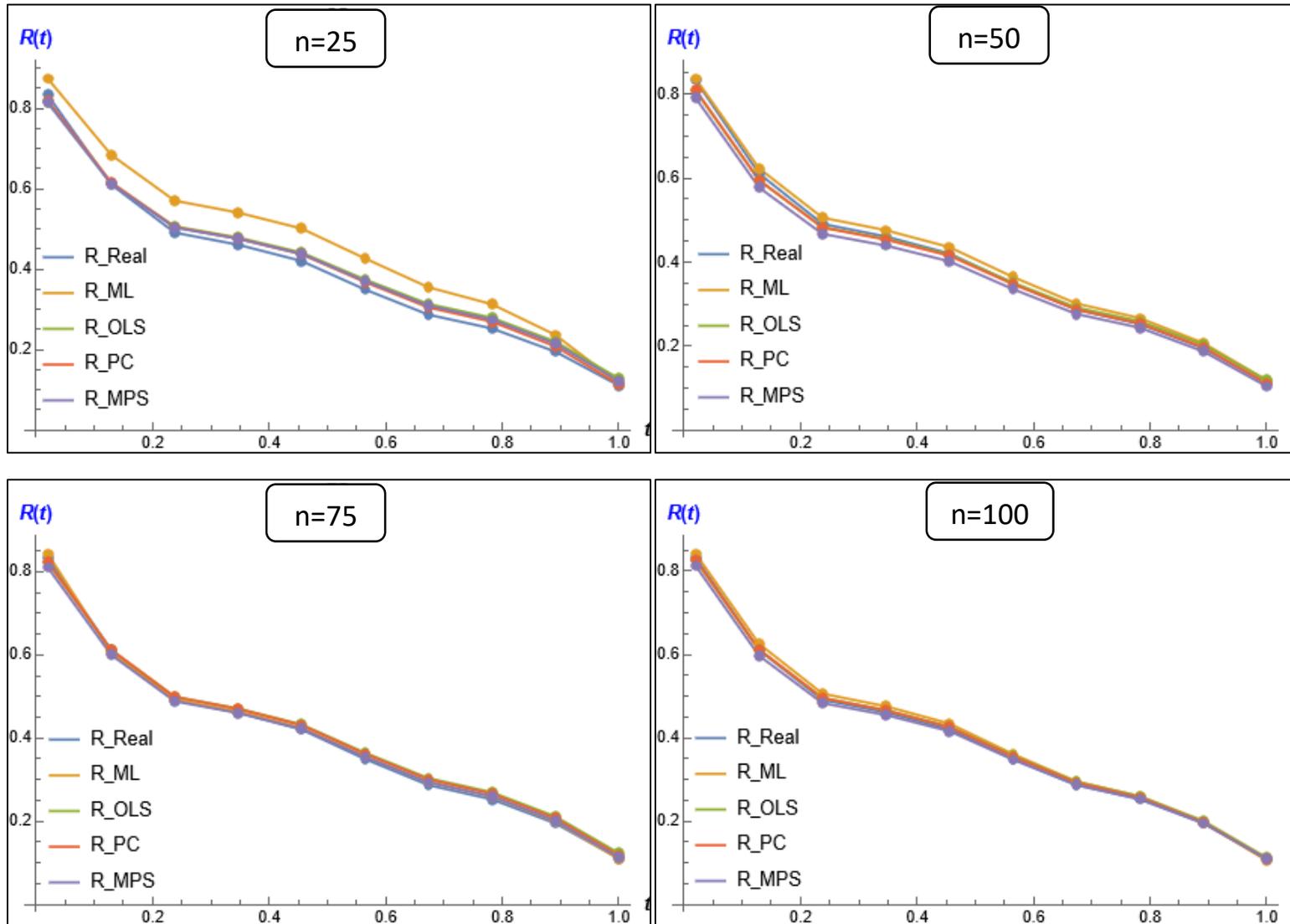
شكل (5) يبين دالة المعولية الحقيقية والمقدرة لطرائق التقدير كافة ولجميع احجام العينات للأنموذج الخامس

جدول (14)

يبين القيم الحقيقية لدالة المعولية ومقدراتها ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) والرتب الجزئية لمتوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) لكافة طرائق التقدير للأنموذج السادس وحسب حجم العينات.

n	t _j	R_real	R_MLE	MSE	R_LS	MSE	R_P.C	MSE	R_MPS	MSE
25	0.19959	0.833131	0.874104	0.00884622	0.814865	0.00467817	0.819983	0.00458224	0.814386	0.00493621
	0.376245	0.610689	0.684444	0.0335406	0.614302	0.00714094	0.615893	0.00754785	0.612309	0.00773169
	0.469995	0.49109	0.570523	0.0456923	0.50644	0.00723895	0.504702	0.00765753	0.503679	0.0079984
	0.494276	0.460961	0.540833	0.0468726	0.478842	0.00714062	0.476164	0.00752485	0.475885	0.00793322
	0.527531	0.42051	0.501206	0.0459047	0.441404	0.00693156	0.437413	0.00724965	0.43818	0.00775912
	0.588196	0.349599	0.426887	0.0413478	0.374455	0.0063536	0.368051	0.00651564	0.370726	0.00720977
	0.645141	0.286972	0.355131	0.034138	0.313546	0.00562604	0.304939	0.00563544	0.309307	0.00646875
	0.678001	0.252756	0.313052	0.0291368	0.279386	0.00514941	0.269567	0.00508305	0.274828	0.00597099
	0.736953	0.195134	0.236777	0.0201293	0.220107	0.00424651	0.20827	0.00408905	0.214913	0.00502205
0.834462	0.110925	0.116101	0.0110377	0.128227	0.00288435	0.113653	0.00274923	0.12203	0.00358996	
IMSE				0.031664602		0.005739015		0.005863453		0.006462016
Rank				4		1		2		3
n	t _j	R_real	R_MLE	MSE	R_LS	MSE	R_P.C	MSE	R_MPS	MSE
50	0.19959	0.833131	0.83717	0.00252419	0.807746	0.00217691	0.810412	0.00205829	0.791061	0.00557607
	0.376245	0.610689	0.623296	0.00738579	0.594773	0.00215499	0.595359	0.00219897	0.57772	0.00600214
	0.469995	0.49109	0.50582	0.0104854	0.483452	0.0018649	0.482224	0.0019567	0.467174	0.00526799
	0.494276	0.460961	0.475963	0.0113108	0.455434	0.00180428	0.453708	0.0018987	0.43935	0.0050623
	0.527531	0.42051	0.435725	0.0124029	0.417749	0.00173471	0.41534	0.00182657	0.401905	0.00478509
	0.588196	0.349599	0.364769	0.0140512	0.351328	0.00164233	0.347688	0.00171442	0.335793	0.00430603
	0.645141	0.286972	0.301608	0.014756	0.292032	0.00157799	0.287299	0.00162036	0.276592	0.00389075
	0.678001	0.252756	0.266832	0.0145939	0.259269	0.00154115	0.253947	0.00156479	0.243782	0.00366368
	0.736953	0.195134	0.207587	0.0130285	0.203292	0.0014617	0.197007	0.00145509	0.187518	0.00327489
0.834462	0.110925	0.118348	0.00737154	0.118871	0.00128566	0.111316	0.00125912	0.104249	0.00206131	
IMSE				0.010791022		0.001724462		0.001755301		0.004389025

Rank				4		1		2		3
n	t _j	R_real	R_MLE	MSE	R_LS	MSE	R_P.C	MSE	R_MPS	MSE
75	0.19959	0.833131	0.84285	0.00303234	0.821685	0.00176871	0.823643	0.00174452	0.80991	0.00380564
	0.376245	0.610689	0.604806	0.0187316	0.611593	0.00237524	0.612181	0.00243529	0.599836	0.00397414
	0.469995	0.49109	0.492351	0.0163664	0.499424	0.00228489	0.498746	0.00232743	0.48846	0.00353114
	0.494276	0.460961	0.46366	0.0157806	0.47098	0.00223216	0.469952	0.00226246	0.460223	0.00340363
	0.527531	0.42051	0.424861	0.0149369	0.432596	0.00214297	0.431086	0.00215301	0.422104	0.00322501
	0.588196	0.349599	0.355928	0.0131418	0.364599	0.0019328	0.362224	0.00160068	0.354493	0.00288687
	0.645141	0.286972	0.293833	0.0110115	0.303541	0.00168465	0.300401	0.00161508	0.293636	0.00254916
	0.678001	0.252756	0.259299	0.00956718	0.269666	0.00152273	0.266119	0.00143589	0.259789	0.00234327
	0.736953	0.195134	0.19991	0.00667905	0.211572	0.00121066	0.207371	0.0011057	0.201563	0.00195661
0.834462	0.110925	0.10937	0.00208282	0.12348	0.000715102	0.118468	0.000625727	0.112687	0.00132765	
IMSE				0.011133019		0.001786991		0.001730579		0.002900312
Rank				4		2		1		3
n	t _j	R_real	R_MLE	MSE	R_LS	MSE	R_P.C	MSE	R_MPS	MSE
100	0.19959	0.833131	0.841701	0.00231014	0.825789	0.00145316	0.827243	0.00143639	0.812547	0.00226743
	0.376245	0.610689	0.625448	0.00671071	0.611334	0.00218052	0.611772	0.00221501	0.597046	0.00290629
	0.469995	0.49109	0.50601	0.00798776	0.49583	0.00208857	0.495294	0.00212011	0.483325	0.0027154
	0.494276	0.460961	0.475525	0.0080673	0.466526	0.00202823	0.465719	0.00205541	0.454626	0.00263705
	0.527531	0.42051	0.434315	0.00798647	0.427004	0.00192758	0.425822	0.00194736	0.415987	0.00251668
	0.588196	0.349599	0.361203	0.00728362	0.357109	0.00170304	0.355253	0.00170795	0.347794	0.00226673
	0.645141	0.286972	0.29555	0.0060805	0.294569	0.00146101	0.292117	0.00145464	0.28685	0.00200535
	0.678001	0.252756	0.259164	0.00524313	0.260003	0.00131457	0.257232	0.0013045	0.253163	0.00184625
	0.736953	0.195134	0.196882	0.00375495	0.201011	0.00105322	0.197729	0.00104377	0.195611	0.00155429
0.834462	0.110925	0.105778	0.00179801	0.112494	0.000689682	0.108577	0.00070496	0.10893	0.00110508	
IMSE				0.005722259		0.001589958		0.00159901		0.002182055
Rank				4		1		2		3



شكل (6) يبين دالة المعولية الحقيقية والمقدرة لطرائق التقدير كافة ولجميع احجام العينات للأنموذج السادس

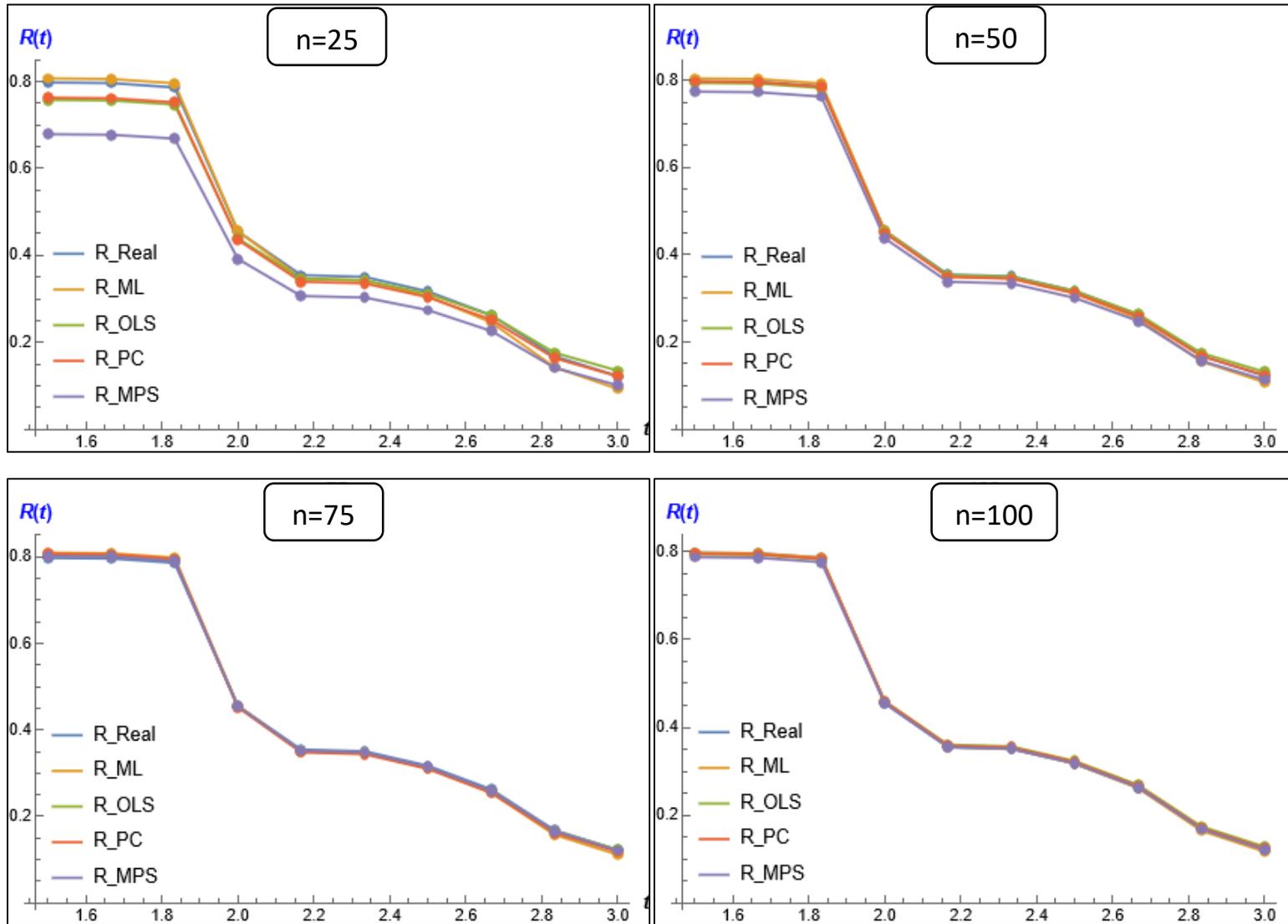
جدول (15)

يبين القيم الحقيقية لدالة المعولية ومقدراتها ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) والرتب الجزئية لمتوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) لكافة طرائق التقدير للأنموذج السابع وحسب حجوم العينات.

n	t _j	R_real	R_MLE	MSE	R_LS	MSE	R_P.C	MSE	R_MPS	MSE
25	1.56953	0.797597	0.806924	0.00509445	0.757637	0.0270739	0.762695	0.0271185	0.678604	0.0784473
	1.57331	0.796218	0.805597	0.00512342	0.75635	0.027022	0.761396	0.0270703	0.677405	0.0783684
	1.60066	0.786084	0.795824	0.00532913	0.746891	0.0266369	0.75184	0.0267132	0.668613	0.0777692
	2.272	0.455207	0.456261	0.00557683	0.439215	0.0130568	0.435797	0.0136106	0.391813	0.0391114
	2.43752	0.354548	0.346971	0.00449056	0.346285	0.00946184	0.339494	0.00994556	0.30659	0.026073
	2.444	0.350514	0.342562	0.00444909	0.342575	0.00932707	0.335651	0.00980545	0.303119	0.0255995
	2.49732	0.317133	0.30602	0.00411692	0.311929	0.00823985	0.303914	0.00866532	0.274228	0.0218361
	2.58358	0.262519	0.246115	0.00361716	0.261975	0.00657193	0.252245	0.00687546	0.22631	0.0162932
	2.7313	0.168234	0.142825	0.0028716	0.176178	0.00409348	0.163774	0.00408938	0.141598	0.00867192
2.80338	0.12237	0.0928329	0.0025883	0.134846	0.00308547	0.121832	0.00276148	0.101006	0.00553893	
IMSE				0.004325746		0.013456924		0.013665525		0.037770895
Rank				1		2		3		4
n	t _j	R_real	R_MLE	MSE	R_LS	MSE	R_P.C	MSE	R_MPS	MSE
50	1.56953	0.797597	0.803909	0.00323833	0.793594	0.00330796	0.796519	0.00334096	0.773613	0.0091395
	1.57331	0.796218	0.802544	0.00325953	0.792221	0.00332487	0.795138	0.003359	0.772256	0.00916633
	1.60066	0.786084	0.792492	0.00341239	0.782121	0.00344498	0.784977	0.00348739	0.762288	0.00935357
	2.272	0.455207	0.454967	0.00490461	0.451901	0.00450462	0.44981	0.00470596	0.4376	0.00928073
	2.43752	0.354548	0.350177	0.00407678	0.353128	0.00395143	0.349198	0.00414524	0.338102	0.00803571
	2.444	0.350514	0.345969	0.00403392	0.349202	0.00391852	0.345201	0.00411082	0.334106	0.00798009
	2.49732	0.317133	0.31113	0.0036557	0.31682	0.00361305	0.312249	0.00378842	0.301098	0.00745438
	2.58358	0.262519	0.254084	0.00296428	0.264247	0.00299416	0.25881	0.00312405	0.248301	0.00582039
	2.7313	0.168234	0.155561	0.00170611	0.174607	0.00173478	0.16793	0.00174214	0.15674	0.00345271
2.80338	0.12237	0.107648	0.00117371	0.131417	0.00119536	0.124279	0.00113632	0.113459	0.0021667	
IMSE				0.003242536		0.003198973		0.00329403		0.007185011

الملحق A

Rank				2		1		3		4
n	t_j	R_real	R_MLE	MSE	R_LS	MSE	R_P.C	MSE	R_MPS	MSE
75	1.56953	0.797597	0.80965	0.00136444	0.804769	0.00154738	0.807078	0.00163008	0.80172	0.00153044
	1.57331	0.796218	0.808282	0.00136949	0.803395	0.00155152	0.8057	0.00163446	0.800353	0.00153329
	1.60066	0.786084	0.798199	0.00140438	0.793272	0.00157952	0.795546	0.00166386	0.790292	0.00155203
	2.272	0.455207	0.456113	0.00137091	0.453743	0.00157271	0.45228	0.00162988	0.454527	0.00142345
	2.43752	0.354548	0.350399	0.00122115	0.350855	0.00143893	0.348013	0.00152751	0.352091	0.00132507
	2.444	0.350514	0.346175	0.00121401	0.346768	0.00143031	0.343875	0.00151983	0.348004	0.001319
	2.49732	0.317133	0.311279	0.00114948	0.313091	0.00134642	0.309793	0.00144151	0.314261	0.00125942
	2.58358	0.262519	0.254484	0.00101764	0.25858	0.0011586	0.254696	0.00125167	0.259381	0.00112078
	2.7313	0.168234	0.157668	0.000695928	0.166529	0.000727118	0.161909	0.000779971	0.165815	0.000760628
2.80338	0.12237	0.111316	0.00050553	0.122835	0.000534009	0.118	0.000554931	0.120943	0.000558973	
IMSE				0.001131296		0.001288652		0.00136337		0.001238308
Rank				1		3		4		2
n	t_j	R_real	R_MLE	MSE	R_LS	MSE	R_P.C	MSE	R_MPS	MSE
100	1.56953	0.797597	0.79749	0.000972937	0.79363	0.00146454	0.795233	0.0014673	0.787325	0.00153265
	1.57331	0.796218	0.796129	0.000979417	0.792287	0.0014709	0.793886	0.00147399	0.785978	0.00154093
	1.60066	0.786084	0.786126	0.00102662	0.782416	0.00151615	0.78398	0.00152164	0.776079	0.00159912
	2.272	0.455207	0.456906	0.00127954	0.459534	0.00100326	0.458552	0.00103379	0.454075	0.00294892
	2.43752	0.354548	0.355263	0.00172479	0.360282	0.00136106	0.358355	0.00188062	0.355	0.00062526
	2.444	0.350514	0.35117	0.00111348	0.35629	0.00135245	0.354326	0.00187148	0.351007	0.0006078
	2.49732	0.317133	0.317243	0.00110506	0.323202	0.00127245	0.32094	0.00178675	0.317896	0.00114955
	2.58358	0.262519	0.261477	0.00037397	0.268858	0.00110882	0.266138	0.00061478	0.2634	0.00013886
	2.7313	0.168234	0.164322	0.000263504	0.174288	0.00025901	0.170902	0.00025092	0.168153	0.00048519
2.80338	0.12237	0.116577	0.000507586	0.127848	0.00009325	0.124215	0.00008051	0.121149	0.00015545	
IMSE				0.00093469		0.001090189		0.001198178		0.001078373
Rank				1		3		4		2



شكل (7) يبين دالة المعولية الحقيقية والمقدرة لطرائق التقدير كافة ولجميع احجام العينات للأنموذج السابع

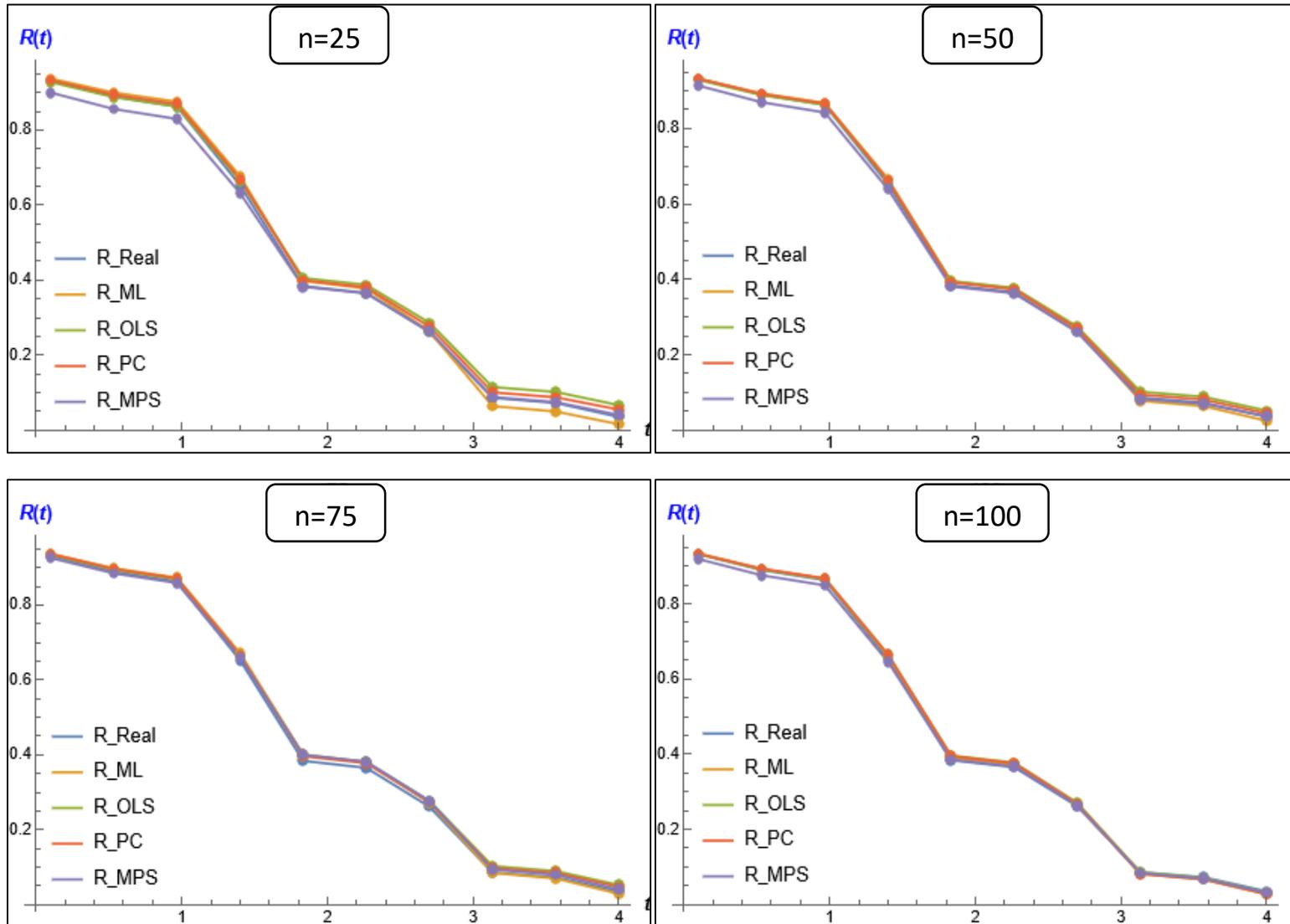
جدول (16)

يبين القيم الحقيقية لدالة المعولية ومقدراتها ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) والرتب الجزئية لمتوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) لكافة طرائق التقدير للأنموذج الثامن وحسب حجوم العينات.

n	t _j	R_real	R_MLE	MSE	R_LS	MSE	R_P.C	MSE	R_MPS	MSE
25	0.185362	0.931817	0.93718	0.00147221	0.927752	0.00138609	0.932948	0.00130349	0.899806	0.0103678
	0.304177	0.889485	0.899707	0.00254445	0.887798	0.00236037	0.894043	0.00236054	0.856012	0.0137714
	0.381161	0.862615	0.875599	0.00320326	0.862656	0.00295449	0.869239	0.00303233	0.829475	0.0155215
	1.02914	0.65306	0.677169	0.00655744	0.665219	0.00621551	0.669247	0.00682531	0.631903	0.0227513
	2.0228	0.383865	0.397727	0.00588704	0.405324	0.00698624	0.399556	0.00734068	0.382406	0.0138666
	2.10031	0.36526	0.377562	0.0056803	0.387245	0.00689889	0.380746	0.00720713	0.364587	0.0132735
	2.56015	0.261381	0.263191	0.00425004	0.286241	0.00597488	0.27593	0.00597275	0.263533	0.00987343
	3.46927	0.085996	0.0639107	0.00190729	0.114722	0.00349337	0.100627	0.00286388	0.0881102	0.00309428
	3.54791	0.0725374	0.0496086	0.00165762	0.101719	0.00332905	0.0874563	0.00268485	0.0744341	0.00269406
3.7751	0.0350752	0.0156566	0.000666127	0.0665199	0.00302245	0.054708	0.00207542	0.0403569	0.0015086	
IMSE				0.003382578		0.004262134		0.004166638		0.010672247
Rank				1		3		2		4
n	t _j	R_real	R_MLE	MSE	R_LS	MSE	R_P.C	MSE	R_MPS	MSE
50	0.185362	0.931817	0.931957	0.000936752	0.928454	0.0012504	0.931153	0.00120826	0.913194	0.00190128
	0.304177	0.889485	0.892259	0.00164265	0.888204	0.00194698	0.89139	0.0019338	0.869106	0.00283307
	0.381161	0.862615	0.867065	0.00206692	0.862698	0.00231866	0.866017	0.00233165	0.842025	0.0033256
	1.02914	0.65306	0.666325	0.00392732	0.660544	0.00368766	0.662267	0.00384419	0.639309	0.00532113
	2.0228	0.383865	0.394639	0.00292824	0.395125	0.00319593	0.391901	0.0032686	0.380736	0.00496719
	2.10031	0.36526	0.375316	0.00278368	0.376757	0.00307903	0.373181	0.00313851	0.362561	0.00485965
	2.56015	0.261381	0.266249	0.0019233	0.274378	0.00222487	0.268989	0.00219555	0.25982	0.00411692
	3.46927	0.085996	0.0776987	0.000701523	0.101683	0.000899795	0.0942641	0.000732803	0.0827642	0.00191538
	3.54791	0.0725374	0.063554	0.0005665	0.0883616	0.00090269	0.0808628	0.000733197	0.0695463	0.00168288
3.7751	0.0350752	0.0246215	0.000270008	0.0515381	0.00105865	0.0442633	0.000856035	0.037322	0.000720085	
IMSE				0.001774689		0.002056467		0.00202426		0.003164319

الملحق A

Rank				1		3		2		4
n	t _j	R_real	R_MLE	MSE	R_LS	MSE	R_P.C	MSE	R_MPS	MSE
75	0.185362	0.931817	0.937314	0.000361579	0.934587	0.000480699	0.93643	0.000485545	0.925931	0.000982653
	0.304177	0.889485	0.898228	0.000668794	0.894588	0.000816213	0.896792	0.000840239	0.884874	0.0015103
	0.381161	0.862615	0.873179	0.000865334	0.869014	0.00101457	0.871317	0.00105144	0.859193	0.00179688
	1.02914	0.65306	0.671933	0.00202543	0.665376	0.00215788	0.666559	0.00223671	0.660731	0.00309359
	2.0228	0.383865	0.400402	0.00203136	0.398617	0.00237231	0.396438	0.00237513	0.399978	0.00308919
	2.10031	0.36526	0.381151	0.00196467	0.380136	0.00230993	0.377722	0.00230417	0.381504	0.00301953
	2.56015	0.261381	0.272538	0.00144754	0.276982	0.0017888	0.273364	0.00173049	0.276927	0.00244564
	3.46927	0.085996	0.0845148	0.000337854	0.102753	0.000878178	0.097858	0.000744371	0.0938615	0.000881115
	3.54791	0.0725374	0.0698134	0.0002769	0.0893448	0.000868171	0.0844098	0.000731895	0.0797149	0.000713278
3.7751	0.0350752	0.0286528	0.000168401	0.0522239	0.000925028	0.047401	0.000771315	0.040344	0.000325486	
IMSE				0.001014786		0.001361178		0.001327131		0.001785766
Rank				1		3		2		4
n	t _j	R_real	R_MLE	MSE	R_LS	MSE	R_P.C	MSE	R_MPS	MSE
100	0.185362	0.931817	0.93277	0.000324969	0.931379	0.000518142	0.932733	0.000515315	0.918497	0.0011942
	0.304177	0.889485	0.891946	0.000536824	0.89118	0.000783736	0.892789	0.00079349	0.875364	0.00161589
	0.381161	0.862615	0.865995	0.000656576	0.8657	0.000915439	0.867379	0.000934016	0.84864	0.00179516
	1.02914	0.65306	0.661168	0.00122312	0.664306	0.0013491	0.6652	0.00139025	0.645905	0.00210044
	2.0228	0.383865	0.390943	0.00124809	0.396235	0.00145417	0.394674	0.00144854	0.385374	0.00181214
	2.10031	0.36526	0.371961	0.00121719	0.377305	0.00143951	0.375564	0.0014316	0.36708	0.0017734
	2.56015	0.261381	0.265188	0.000951317	0.270574	0.00124291	0.267883	0.00122868	0.26382	0.00146072
	3.46927	0.085996	0.0813337	0.000308601	0.0855649	0.000616831	0.0817024	0.000637304	0.083318	0.000664981
	3.54791	0.0725374	0.0669955	0.00027417	0.0710458	0.000592135	0.0671284	0.000620152	0.0690191	0.000620381
3.7751	0.0350752	0.0273532	0.00018071	0.0315061	0.000471918	0.0276575	0.000504527	0.0309189	0.000340792	
IMSE				0.000692157		0.000938389		0.000950387		0.00133781
Rank				1		2		3		4



شكل (8) يبين دالة المعولية الحقيقية والمقدرة لطرائق التقدير كافة ولجميع احجام العينات للأنموذج الثامن

برنامج محاكاة الجانب التجريبي

```

Clear[all]
Needs["LibraryLink`"]
<<Optimization`UnconstrainedProblems`
dist[α_,β_,λ_]:= ProbabilityDistribution[ $e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta \lambda} x^{-1+\beta} \alpha^{-\beta} \beta (1+\lambda-(x/\alpha)^\beta)$ 
λ),{x,0,α},Assumptions->α>0&&λ>0&&β>0];
F[x_]:=1+ $e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta \lambda} (-1+x^\beta \alpha^{-\beta})$ ;
r=1000;n1=25;n2=50;n3=75;n4=100;
α1=2;α2=4;β1=1;β2=2.5;λ1=0.05;λ2=0.5;
distGen1=dist[α1,β1,λ1];
target1 := distGen1
□1 = TransformedDistribution[Refine[InverseCDF[target1, p], 0 <= p <= 1], p □
UniformDistribution[]];
BlockRandom[
{data1=RandomVariate[□1,{r,n1}];
data2=RandomVariate[□1,{r,n2}];
data3=RandomVariate[□1,{r,n3}];
data4=RandomVariate[□1,{r,n4}];
}];
mlm1=Table[res=
FindDistributionParameters[data1[[i]],dist[α,β,λ], ParameterEstimator-
>{"MaximumLikelihood"}],{i,1,r}];
mlm2=Table[res=
FindDistributionParameters[data2[[i]],dist[α,β,λ], ParameterEstimator-
>{"MaximumLikelihood"}],{i,1,r}];
mlm3=Table[res=
FindDistributionParameters[data3[[i]],dist[α,β,λ],ParameterEstimator-
>{"MaximumLikelihood"}],{i,1,r}];
mlm4=Table[res=
FindDistributionParameters[data4[[i]],dist[α,β,λ], ParameterEstimator-
>{"MaximumLikelihood"}],{i,1,r}];

```

$$\sum_{i=1}^{n_1} (F[\text{sdata1}][j][i] - i / (n_1 + 1))^2$$

ols1=Last/@Table[res=Minimize[{
 $\alpha > \lambda > 0, \beta > 0$ }, { α, β, λ }, Method->"Newton"], {j, 1, r}];

$$\sum_{i=1}^{n_2} (F[\text{sdata2}][j][i] - i / (n_2 + 1))^2$$

ols2=Last/@Table[res=Minimize[{
 $\alpha > \lambda > 0, \beta > 0$ }, { α, β, λ }, Method->"Newton"], {j, 1, r}];

$$\sum_{i=1}^{n_3} (F[\text{sdata3}][j][i] - i / (n_3 + 1))^2$$

ols3=Last/@Table[res=Minimize[{
 $\alpha > \lambda > 0, \beta > 0$ }, { α, β, λ }, Method->"Newton"], {j, 1, r}];

$$\sum_{i=1}^{n_4} (F[\text{sdata4}][j][i] - i / (n_4 + 1))^2$$

ols4=Last/@Table[res=Minimize[{
 $\alpha > \lambda > 0, \beta > 0$ }, { α, β, λ }, Method->"Newton"], {j, 1, r}];

$$\sum_{i=1}^{n_1} \left(\frac{i - 0.3}{n_1 + 0.25} - F[\text{sdata1}][j][i] \right)^2$$

PC1=Last/@Table[res=Minimize[{
 $\alpha > \lambda > 0, \beta > 0$ }, { α, β, λ }, Method->"Newton"], {j, 1, r}];

$$\sum_{i=1}^{n_2} \left(\frac{i - 0.3}{n_2 + 0.25} - F[\text{sdata2}][j][i] \right)^2$$

PC2=Last/@Table[res=Minimize[{
 $\alpha > \lambda > 0, \beta > 0$ }, { α, β, λ }, Method->"Newton"], {j, 1, r}];

$$\sum_{i=1}^{n_3} \left(\frac{i - 0.3}{n_3 + 0.25} - F[\text{sdata3}][j][i] \right)^2$$

PC3=Last/@Table[res=Minimize[{
 $\alpha > \lambda > 0, \beta > 0$ }, { α, β, λ }, Method->"Newton"], {j, 1, r}];

$$\sum_{i=1}^{n_4} \left(\frac{i - 0.3}{n_4 + 0.25} - F[\text{sdata4}][j][i] \right)^2$$

PC4=Last/@Table[res=Minimize[{
 $\alpha > \lambda > 0, \beta > 0$ }, { α, β, λ }, Method->"Newton"], {j, 1, r}];

MPS1=Last/@Table[res=FindMaximum[{1/(n₁+1)*

$$\sum_{i=2}^{n_1} \text{Log}[F[\text{sdata1}][j][i] - F[\text{sdata1}][j][i-1]] + F[\text{sdata1}][j][1]] + 1 -$$

F[sdata1][j][n₁]], $\alpha > \lambda > 0, \beta > 0$ }, { α, β, λ }, {j, 1, r}];

MPS2=Last/@Table[res=FindMaximum[{1/(n2+1)*

$$\sum_{i=2}^{n_2} \text{Log}[F[\text{sdata2}[[j]][[i]]] - F[\text{sdata2}[[j]][[i-1]]]] + F[\text{sdata2}[[j]][[1]]] + 1 -$$

F[sdata2[[j]][[n2]], $\alpha > \lambda > 0, \beta > 0$ }, { α, β, λ }, {j, 1, r}];

MPS3=Last/@Table[res=FindMaximum[{1/(n3+1)*

$$\sum_{i=2}^{n_3} \text{Log}[F[\text{sdata3}[[j]][[i]]] - F[\text{sdata3}[[j]][[i-1]]]] + F[\text{sdata3}[[j]][[1]]] + 1 -$$

F[sdata3[[j]][[n3]], $\alpha > \lambda > 0, \beta > 0$ }, { α, β, λ }, {j, 1, r}];

MPS4=Last/@Table[res=FindMaximum[{1/(n4+1)*

$$\sum_{i=2}^{n_4} \text{Log}[F[\text{sdata4}[[j]][[i]]] - F[\text{sdata4}[[j]][[i-1]]]] + F[\text{sdata4}[[j]][[1]]] + 1 -$$

F[sdata4[[j]][[n4]], $\alpha > \lambda > 0, \beta > 0$ }, { α, β, λ }, {j, 1, r}];

(*Estimate maen of the parameters and the mean of MSE for the parameters model with all samples*)

(*MLM*)

TableForm[{Mean[{ α }, {(Subscript[α , 1]- α)²}, { β }, {(Subscript[β , 1]- β)²}, { λ }, {(Subscript[λ , 1]- λ)²}] /. m1}, Mean[{ α }, {(Subscript[α , 1]- α)²}, { β }, {(Subscript[β , 1]- β)²}, { λ }, {(Subscript[λ , 1]- λ)²}] /. m2},

Mean[{ α }, {(Subscript[α , 1]- α)²}, { β }, {(Subscript[β , 1]- β)²}, { λ }, {(Subscript[λ , 1]- λ)²}] /. m3}, Mean[{ α }, {(Subscript[α , 1]- α)²}, { β }, {(Subscript[β , 1]- β)²}, { λ }, {(Subscript[λ , 1]- λ)²}] /. m4}],

TableHeadings->{"25", "50", "75", "100"}, {" α ", "MSE(α)", " β ", "MSE(β)", " λ ", "MSE(λ)"}]

(*OLS*)

TableForm[{Mean[{ α }, {(Subscript[α , 1]- α)²}, { β }, {(Subscript[β , 1]- β)²}, { λ }, {(Subscript[λ , 1]- λ)²}] /. ols1}, Mean[{ α }, {(Subscript[α , 1]- α)²}, { β }, {(Subscript[β , 1]- β)²}, { λ }, {(Subscript[λ , 1]- λ)²}] /. ols2},

Mean[{{ α },{(Subscript[α , 1]- α)²},{ β },{(Subscript[β , 1]- β)²},{ λ },{(Subscript[λ , 1]- λ)²}}/. ols3],Mean[{{ α },{(Subscript[α , 1]- α)²},{ β },{(Subscript[β , 1]- β)²},{ λ },{(Subscript[λ , 1]- λ)²}}/. ols4]],

TableHeadings->{{"25","50","75","100"},{ " α ","MSE(α)"," β ","MSE(β)"," λ ","MSE(λ)"}}

(*PC*)

TableForm[{Mean[{{ α },{(Subscript[α , 1]- α)²},{ β },{(Subscript[β , 1]- β)²},{ λ },{(Subscript[λ , 1]- λ)²}}/. PC1],Mean[{{ α },{(Subscript[α , 1]- α)²},{ β },{(Subscript[β , 1]- β)²},{ λ },{(Subscript[λ , 1]- λ)²}}/. PC2],

Mean[{{ α },{(Subscript[α , 1]- α)²},{ β },{(Subscript[β , 1]- β)²},{ λ },{(Subscript[λ , 1]- λ)²}}/. PC3],Mean[{{ α },{(Subscript[α , 1]- α)²},{ β },{(Subscript[β , 1]- β)²},{ λ },{(Subscript[λ , 1]- λ)²}}/. PC4]],

TableHeadings->{{"25","50","75","100"},{ " α ","MSE(α)"," β ","MSE(β)"," λ ","MSE(λ)"}}

(*MPS*)

TableForm[{Mean[{{ α },{(Subscript[α , 1]- α)²},{ β },{(Subscript[β , 1]- β)²},{ λ },{(Subscript[λ , 1]- λ)²}}/. MPS1],Mean[{{ α },{(Subscript[α , 1]- α)²},{ β },{(Subscript[β , 1]- β)²},{ λ },{(Subscript[λ , 1]- λ)²}}/. MPS2],

Mean[{{ α },{(Subscript[α , 1]- α)²},{ β },{(Subscript[β , 1]- β)²},{ λ },{(Subscript[λ , 1]- λ)²}}/. MPS3],Mean[{{ α },{(Subscript[α , 1]- α)²},{ β },{(Subscript[β , 1]- β)²},{ λ },{(Subscript[λ , 1]- λ)²}}/. MPS4]],

TableHeadings->{{"25","50","75","100"},{ " α ","MSE(α)"," β ","MSE(β)"," λ ","MSE(λ)"}}

Reliability

{TableForm[{Table[SurvivalFunction[distGen1,t],{t,Sort[Take[data1[[1]],10]]}],

Mean[Table[SurvivalFunction[dist[α , β , λ],t],{t,Sort[Take[data1[[1]],10]]}]/.mlm1],

Mean[Table[SurvivalFunction[dist[α , β , λ],t],{t,Sort[Take[data1[[1]],10]]}]/. mlm2],

Mean[Table[SurvivalFunction[dist[α , β , λ],t],{t,Sort[Take[data1[[1]],10]]}]/. mlm3],

Mean[Table[SurvivalFunction[dist[α , β , λ],t],{t,Sort[Take[data1[[1]],10]]}]/.mlm4]],

TableHeadings->{{"R_real","25","50","100","200"},

Sort[Take[data1[[1]],10]]],TableDirections->Row

],TableForm[{Mean[Table[SurvivalFunction[dist[α,β,λ],t],{t,Sort[Take[data1[[1]],10]]}]/.ols1],

Mean[Table[SurvivalFunction[dist[α,β,λ],t],{t,Sort[Take[data1[[1]],10]]}]/.ols2],

Mean[Table[SurvivalFunction[dist[α,β,λ],t],{t,Sort[Take[data1[[1]],10]]}]/.ols3],

Mean[Table[SurvivalFunction[dist[α,β,λ],t],{t,Sort[Take[data1[[1]],10]]}]/.ols4}],

TableHeadings->{{"25","50","75","100"},Sort[Take[data1[[1]],10]]},TableDirections->Row

],TableForm[{Mean[Table[SurvivalFunction[dist[α,β,λ],t],{t,Sort[Take[data1[[1]],10]]}]/.PC1],

Mean[Table[SurvivalFunction[dist[α,β,λ],t],{t,Sort[Take[data1[[1]],10]]}]/.PC2],

Mean[Table[SurvivalFunction[dist[α,β,λ],t],{t,Sort[Take[data1[[1]],10]]}]/.PC3],

Mean[Table[SurvivalFunction[dist[α,β,λ],t],{t,Sort[Take[data1[[1]],10]]}]/.PC4}],

TableHeadings->{{"25","50","75","100"},Sort[Take[data1[[1]],10]]},TableDirections->Row

],TableForm[{Mean[Table[SurvivalFunction[dist[α,β,λ],t],{t,Sort[Take[data1[[1]],10]]}]/.MPS1],

Mean[Table[SurvivalFunction[dist[α,β,λ],t],{t,Sort[Take[data1[[1]],10]]}]/.MPS2],

Mean[Table[SurvivalFunction[dist[α,β,λ],t],{t,Sort[Take[data1[[1]],10]]}]/.MPS3],

Mean[Table[SurvivalFunction[dist[α,β,λ],t],{t,Sort[Take[data1[[1]],10]]}]/.MPS4}],

TableHeadings->{{"25","50","75","100"},Sort[Take[data1[[1]],10]]},TableDirections->Row

]]

{TableForm[{Mean[(Table[SurvivalFunction[dist[α,β,λ],t],{t,Sort[Take[data1[[1]],10]]}]-Table[SurvivalFunction[distGen1,t],{t,Sort[Take[data1[[1]],10]]}])²/.mlm1],

Mean[(Table[SurvivalFunction[dist[α,β,λ],t],{t,Sort[Take[data1[[1]],10]]}]-

Table[SurvivalFunction[distGen1,t],{t,Sort[Take[data1[[1]],10]]}])²/.mlm2],

Mean[(Table[SurvivalFunction[dist[α,β,λ],t],{t,Sort[Take[data1[[1]],10]]}]-

Table[SurvivalFunction[distGen1,t],{t,Sort[Take[data1[[1]],10]]}])²/.mlm3],

Mean[(Table[SurvivalFunction[dist[α,β,λ],t],{t,Sort[Take[data1[[1]],10]]}]-

Table[SurvivalFunction[distGen1,t],{t,Sort[Take[data1[[1]],10]]}])²/.mlm4}],

TableHeadings->{{"25","50","75","100"},Sort[Take[data1[[1]],10]]}

```

,TableDirections-
>Row],TableForm[ {Mean[(Table[SurvivalFunction[dist[α,β,λ],t], {t,Sort[Take[data1[[1]],10]
]])-Table[SurvivalFunction[distGen1,t], {t,Sort[Take[data1[[1]],10]]})2/.ols1],
  Mean[(Table[SurvivalFunction[dist[α,β,λ],t], {t,Sort[Take[data1[[1]],10]]})-
Table[SurvivalFunction[distGen1,t], {t,Sort[Take[data1[[1]],10]]})2/.ols2],
  Mean[(Table[SurvivalFunction[dist[α,β,λ],t], {t,Sort[Take[data1[[1]],10]]})-
Table[SurvivalFunction[distGen1,t], {t,Sort[Take[data1[[1]],10]]})2/.ols3],
  Mean[(Table[SurvivalFunction[dist[α,β,λ],t], {t,Sort[Take[data1[[1]],10]]})-
Table[SurvivalFunction[distGen1,t], {t,Sort[Take[data1[[1]],10]]})2/.ols4]},
  TableHeadings->{ {"25","50","75","100"}, Sort[Take[data1[[1]],10]]}
,TableDirections-
>Row],TableForm[ {Mean[(Table[SurvivalFunction[dist[α,β,λ],t], {t,Sort[Take[data1[[1]],10]
]])-Table[SurvivalFunction[distGen1,t], {t,Sort[Take[data1[[1]],10]]})2/.PC1],
  Mean[(Table[SurvivalFunction[dist[α,β,λ],t], {t,Sort[Take[data1[[1]],10]]})-
Table[SurvivalFunction[distGen1,t], {t,Sort[Take[data1[[1]],10]]})2/.PC2],
  Mean[(Table[SurvivalFunction[dist[α,β,λ],t], {t,Sort[Take[data1[[1]],10]]})-
Table[SurvivalFunction[distGen1,t], {t,Sort[Take[data1[[1]],10]]})2/.PC3],
  Mean[(Table[SurvivalFunction[dist[α,β,λ],t], {t,Sort[Take[data1[[1]],10]]})-
Table[SurvivalFunction[distGen1,t], {t,Sort[Take[data1[[1]],10]]})2/.PC4]},
  TableHeadings->{ {"25","50","75","100"}, Sort[Take[data1[[1]],10]]}
,TableDirections-
>Row],TableForm[ {Mean[(Table[SurvivalFunction[dist[α,β,λ],t], {t,Sort[Take[data1[[1]],10]
]])-Table[SurvivalFunction[distGen1,t], {t,Sort[Take[data1[[1]],10]]})2/.MPS1],
  Mean[(Table[SurvivalFunction[dist[α,β,λ],t], {t,Sort[Take[data1[[1]],10]]})-
Table[SurvivalFunction[distGen1,t], {t,Sort[Take[data1[[1]],10]]})2/.MPS2],
  Mean[(Table[SurvivalFunction[dist[α,β,λ],t], {t,Sort[Take[data1[[1]],10]]})-
Table[SurvivalFunction[distGen1,t], {t,Sort[Take[data1[[1]],10]]})2/.MPS3],
  Mean[(Table[SurvivalFunction[dist[α,β,λ],t], {t,Sort[Take[data1[[1]],10]]})-
Table[SurvivalFunction[distGen1,t], {t,Sort[Take[data1[[1]],10]]})2/.MPS4]},
  TableHeadings->{ {"25","50","75","100"}, Sort[Take[data1[[1]],10]]}
,TableDirections->Row]}//AccountingForm
{ListLinePlot[ {Table[SurvivalFunction[distGen1,t], {t,Sort[Take[data1[[1]],10]]}],
  Mean[Table[SurvivalFunction[dist[α,β,λ],t], {t,Sort[Take[data1[[1]],10]]}]/.mlm1],
  Mean[Table[SurvivalFunction[dist[α,β,λ],t], {t,Sort[Take[data1[[1]],10]]}]/.ols1],

```

```

Mean[Table[SurvivalFunction[dist[ $\alpha,\beta,\lambda$ ],t],{t,Sort[Take[data1[[1]],10]]}]/.PC1],
Mean[Table[SurvivalFunction[dist[ $\alpha,\beta,\lambda$ ],t],{t,Sort[Take[data1[[1]],10]]}]/.MPS1}],{
AxesLabel->{Style[t,Black,Bold,Medium],Style[R[t],Blue,Bold,Medium]},PlotLabel-
>"n=25",DataRange->{0.1,2},PlotLegends-
>Placed[{"R_Real","R_ML","R_OLS","R_PC","R_MPS"},Center],Mesh->Full,ImageSize-
>400}],
ListLinePlot[{Table[SurvivalFunction[distGen1,t],{t,Sort[Take[data1[[1]],10]]}],
Mean[Table[SurvivalFunction[dist[ $\alpha,\beta,\lambda$ ],t],{t,Sort[Take[data1[[1]],10]]}]/.mlm2],
Mean[Table[SurvivalFunction[dist[ $\alpha,\beta,\lambda$ ],t],{t,Sort[Take[data1[[1]],10]]}]/.ols2],
Mean[Table[SurvivalFunction[dist[ $\alpha,\beta,\lambda$ ],t],{t,Sort[Take[data1[[1]],10]]}]/.PC2],
Mean[Table[SurvivalFunction[dist[ $\alpha,\beta,\lambda$ ],t],{t,Sort[Take[data1[[1]],10]]}]/.MPS2}],{
AxesLabel->{Style[t,Black,Bold,Medium],Style[R[t],Blue,Bold,Medium]},PlotLabel-
>"n=50",DataRange->{0.1,2},PlotLegends-
>Placed[{"R_Real","R_ML","R_OLS","R_PC","R_MPS"},Center],Mesh->Full,ImageSize-
>400}],
ListLinePlot[{Table[SurvivalFunction[distGen1,t],{t,Sort[Take[data1[[1]],10]]}],
Mean[Table[SurvivalFunction[dist[ $\alpha,\beta,\lambda$ ],t],{t,Sort[Take[data1[[1]],10]]}]/.mlm3],
Mean[Table[SurvivalFunction[dist[ $\alpha,\beta,\lambda$ ],t],{t,Sort[Take[data1[[1]],10]]}]/.ols3],
Mean[Table[SurvivalFunction[dist[ $\alpha,\beta,\lambda$ ],t],{t,Sort[Take[data1[[1]],10]]}]/.PC3],
Mean[Table[SurvivalFunction[dist[ $\alpha,\beta,\lambda$ ],t],{t,Sort[Take[data1[[1]],10]]}]/.MPS3}],{
AxesLabel->{Style[t,Black,Bold,Medium],Style[R[t],Blue,Bold,Medium]},PlotLabel-
>"n=75",DataRange->{0.1,2},PlotLegends-
>Placed[{"R_Real","R_ML","R_OLS","R_PC","R_MPS"},Center],Mesh->Full,ImageSize-
>400}],
ListLinePlot[{Table[SurvivalFunction[distGen1,t],{t,Sort[Take[data1[[1]],10]]}],
Mean[Table[SurvivalFunction[dist[ $\alpha,\beta,\lambda$ ],t],{t,Sort[Take[data1[[1]],10]]}]/.mlm4],
Mean[Table[SurvivalFunction[dist[ $\alpha,\beta,\lambda$ ],t],{t,Sort[Take[data1[[1]],10]]}]/.ols4],
Mean[Table[SurvivalFunction[dist[ $\alpha,\beta,\lambda$ ],t],{t,Sort[Take[data1[[1]],10]]}]/.PC4],
Mean[Table[SurvivalFunction[dist[ $\alpha,\beta,\lambda$ ],t],{t,Sort[Take[data1[[1]],10]]}]/.MPS4}],{
AxesLabel->{Style[t,Black,Bold,Medium],Style[R[t],Blue,Bold,Medium]},PlotLabel-
>"n=100",DataRange->{0.1,2},PlotLegends-
>Placed[{"R_Real","R_ML","R_OLS","R_PC","R_MPS"},Center],Mesh->Full,ImageSize-
>400}}]

```

برنامج الجانب التطبيقي

```

Clear[all]
Needs["CCompilerDriver`"]
Needs["SymbolicC`"]
<<Optimization`UnconstrainedProblems`

dist[α_,β_,λ_]:= ProbabilityDistribution[ $e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta \lambda} x^{-1+\beta} \alpha^{-\beta} \beta (1+\lambda-(x/\alpha)^\beta$ 
λ),{x,0,α},Assumptions->α>λ>0&&β>0];
Text@Grid[nndata,Frame->All]
{\pard{\par \par \par \par \par \par \par \par \par \par }}
sndata= Sort[nndata];
n=Length[nndata]
estmlm=FindDistributionParameters[nndata,dist[α,β,λ],{{α,5},{β,1},{λ,0.05}},WorkingPrecision->5]
AndersonDarlingTest[nndata,dist[α,β,λ]/.estmlm]
CramerVonMisesTest[nndata,dist[α,β,λ]/.estmlm]
PearsonChiSquareTest[nndata,dist[α,β,λ]/.estmlm]
estmlmp=FindDistributionParameters[nndata,PowerDistribution[α,β],WorkingPrecision->5]
AndersonDarlingTest[nndata,PowerDistribution[α,β]]
CramerVonMisesTest[nndata,PowerDistribution[α,β]]
PearsonChiSquareTest[nndata,PowerDistribution[α,β]]
Show[Histogram[nndata,10,"PDF",ImageSize->500,ChartStyle->Hue[.25]],
Plot[{PDF[dist[α,β,λ]/.estmlm,x],PDF[PowerDistribution[α,β]/.estmlmp,x]},{x,0,5},
{Frame->False,PlotRange->Full,PlotLegends->Placed[{"NLTE-PF","PF"},Center],
PlotStyle->Thick,Mesh->Full,PlotTheme->"Web"}]]
TableForm[{{aic1=6+(-2)*LogLikelihood[dist[α,β,λ]/.estmlm,nndata],aic1+24/(n-4),(-
2)*LogLikelihood[dist[α,β,λ]/.estmlm,nndata]+3*Log[n]},
{aic2=4+(-2)*LogLikelihood[PowerDistribution[α,β]/.estmlmp,nndata],aic2+12/(n-3),(-
2)*LogLikelihood[PowerDistribution[α,β]/.estmlmp,nndata]+2*Log[n]}}],
TableHeadings->{{"NLTE-PF","PF"},{"AIC","AICc","BIC"}}]
□=EmpiricalDistribution[nndata]
Plot[{CDF[□,t],CDF[dist[α,β,λ]/.estmlm,t]},{t,0,5},{Frame->True,ImageSize-
>400,PlotLegends->Placed[{"Empirical Distribution","NLTE-PF Distribution"},Center]]]

```

```
Plot[{SurvivalFunction[□,t],SurvivalFunction[dist[α,β,λ]/.estmlm,t]},{t,0,5},{Frame->True,ImageSize->400,PlotLegends->Placed[{"Empirical Distribution","NLTE-PF Distribution"},Center]}}
TableForm[#[□]&/@{Mean,Variance,Skewness,Kurtosis,Median,StandardDeviation}]/N
TableForm[Table[CDF[dist[α,β,λ]/.estmlm,t],{t,{ndata}}],TableDirections->Row]
TableForm[Table[SurvivalFunction[dist[α,β,λ]/.estmlm,t],{t,{ndata}}],TableDirections->Row]
```

Abstract

The process of expanding probability distributions is one of the important processes that has grown in importance exponentially over the past few decades, this is due to the increased ability of classical distributions to represent real data on a larger scale and accuracy, the process of extending distributions using families and derived classes is one of the methods recently used to extend distributions, In this letter, The new lifetime exponential- X family is used (NLTE-X Family) in constructing a new probabilistic model called (The new lifetime exponential- Power function distribution) " NLTE-PF" The proposed model is an extension of the power function distribution, Some of its statistical properties were studied, the coefficients and reliability function of the new probabilistic model were estimated by four estimation methods,(Maximum Likelihood Estimators, Least square Method, Method of Percentiles Estimators, Maximum product of spacing estimation method), A brief simulation study was carried out using the method (Monte Carlo) to evaluate the performance of parameter estimates and reliability function estimates for the new model using the four methods, This work was performed by Mathematica 12.2 software packages, Several experiments were conducted with small, medium and large sample sizes 4 different sample sizes (25,50,75,100), The statistical standard was used, the mean of squares of error to compare the four estimation methods for parameter estimations, Mean integral error squares to compare the four estimation methods for the reliability function estimator.

The new probabilistic model (NLTE-PF) was applied to real data with (96) observations representing continuous positive airway pressure device operating times until failure. The comparison was made between the (NLTE-PF) distribution and the power function (PF) distribution, the new

model gave greater flexibility and efficiency in representing real data and proved to be superior to the power function (PF) distribution. The reliability function for the Maximum Likelihood Estimators (NLTE-PF) distribution was estimated, which outperformed other methods for estimating the reliability function for medium and large sample sizes.

Republic of Iraq
Ministry of higher Education and Scientific
Research
University of Karbala
Faculty of Administration and Economics
Department of statistics



**Estimating the reliability of an extended power function
distribution using (NLTE-X Family) with practical
application**

A Thesis Submitted to
Council of The Administration and Economics/ Karbala
University as Partial fulfillment of the Requirements for
the Degree of Master of Science in Statistics

Presented by

Falah Hassan Jabbar Abdul-Hassan

Under supervision

Ass .Prof .Dr. Enas Abdu Alhafudh Mohammed

A.H.1444

A.D.2022

Holy Karbala