



جامعة كربلاء
كلية الإدارة والاقتصاد
قسم الإحصاء

تقدير دالة المخاطرة للتوزيع المركب (جمبرتز - الأسي)
مع تطبيق عملي

رسالة مقدمة إلى
مجلس كلية الإدارة والاقتصاد في جامعة كربلاء
وهي جزء من متطلبات نيل درجة ماجستير في علوم الإحصاء

كتبت بواسطة
حاتم عبد الرحمن براك السامرائي

بإشراف
أ.م.د. مشتاق كريم عبد الرحيم

2022 م

1444 هـ

كربلاء المقدسة

رُفِعُ دَرَجَاتٍ مِّنْ نَّشَأُ قَلِ

وَفَوْقَ كُلِّ ذِي عِلْمٍ عَلِيمٌ ﴿٧٦﴾

صدق الله العظيم

(يوسف: الآية 76)

إقرار المشرف

أشهد بأن إعداد هذه الرسالة الموسومة (تقدير دالة المخاطرة للتوزيع المركب (جمبرتز-الآسي) مع تطبيق عملي) والتي تقدم بها الطالب " حاتم عبدالرحمن براك " قد جرى بإشرافي في قسم الاحصاء - كلية الادارة والاقتصاد - جامعة كربلاء، وهي جزء من متطلبات نيل درجة ماجستير علوم في الاحصاء.


أ.م.د. مشتاق كريم عبدالرحيم

التاريخ: 2022 / /

توصية رئيس قسم الاحصاء

بناءً على توصية الاستاذ المشرف، أرشح الرسالة للمناقشة.


أ.د. شروق عبد الرضا السباح

رئيس قسم الاحصاء

التاريخ: 2022 / /

إقرار الخبير اللغوي

أشهد بأن الرسالة الموسومة (تقدير دالة المخاطرة للتوزيع المركب (جمبرتز- الأسي) مع تطبيق عملي) للطالب (حاتم عبدالرحمن براك)/ كلية الإدارة والاقتصاد- قسم الاحصاء قد جرى مراجعتها من الناحية اللغوية اذ أصبحت خالية من الاخطاء اللغوية والاسلوبية ولأجله وقعت.

الخبير اللغوي

م. صلاح مهدي جابر

جامعة كربلاء - كلية الإدارة والاقتصاد

إقرار رئيس لجنة الدراسات العليا

بناء على إقرار المشرف العلمي والخبير اللغوي على رسالة الماجستير للطالب "حاتم عبد الرحمن براك" الموسومة بـ (تقدير دالة المخاطرة للتوزيع المركب (جمبرتز- الأسي) مع تطبيق عملي) ارشح هذه الرسالة للمناقشة.



أ.د محمد حسين كاظم الجبوري

رئيس لجنة الدراسات العليا

معاون العميد للشؤون العلمية والدراسات العليا

مصادقة مجلس الكلية

صادق مجلس كلية الإدارة والاقتصاد/ جامعة كربلاء على قرار لجنة المناقشة.



أ.د محمد حسين كاظم الجبوري

عميد كلية الإدارة والاقتصاد/ وكالة

2022 / /

إقرار لجنة المناقشة

نشهد نحن أعضاء لجنة المناقشة بأننا قد اطلعنا على الرسالة الموسومة (تقدير دالة المخاطرة للتوزيع المركب (جمبرتز-الآسي) مع تطبيق عملي) والمقدمة من قبل الطالب "حاتم عبدالرحمن براك" وناقشنا الطالب في محتوياتها وفيما له علاقة بها، ووجدنا بأنها جديرة بنيل درجة ماجستير علوم في الإحصاء بتقدير () .



أ.د. وضاح صبري إبراهيم

عضواً

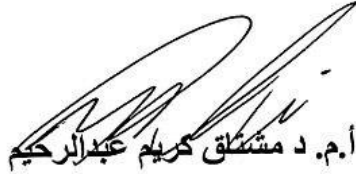
2022 / /



أ.د. عبدالحسين حبيب الطائي

رئيساً

2022 / /



أ.م. د. مشعل كريم عبدالرحيم

عضواً ومشرفاً

2022 / /



أ.م. د. إيناس عبدالحافظ محمد

عضواً

2022 / /

شكر و امتنان

الحمد لله رب العالمين، حمدا كثيرا طيبا مباركا فيه ملء السموات والأرض وملء ما بينهما من شيء بعد أهل الثناء والمجد أحق ما قال العبد وكلنا لك عبد، والصلاة والسلام على أشرف الأنبياء والمرسلين سيدنا محمد سيد الخلق وعلى آله وصحبه ومن تبعهم بإحسان إلى يوم الدين.

أتقدم بالشكر الجزيل وخالص الامتنان والاعتزاز لمشرفي الفاضل الأستاذ المساعد الدكتور **(مشتاق كريم عبد الرحيم)** لقبوله الإشراف على رسالتي ولما قدمه من دعم وتوجيهات علمية وآراء سديدة ومساندتي وإرشادي بالنصح والتصحيح إذ كان له الأثر الكبير في إخراج هذه الرسالة بالصورة التي هي عليها، فضلا عن نبل أخلاقه الرفيعة التي يشهد بها القاصي والداني فحفظه الله ورعاه ذخرا للعلم والمعرفة.

كما يسرني ويسعدني أن أتقدم بوافر الشكر والامتنان للأساتذة الفضلاء رئيس لجنة المناقشة وأعضائها المحترمين بقبول مناقشة هذه الرسالة.

كما أتقدم بالشكر الجزيل إلى المقومين العلميين والمقوم اللغوي لتفضلهم بمراجعة هذه الرسالة وتدقيقها، فجزاهم الله خيرا ووفقهم لكل خير.

كما أن شكري موجه إلى إدارة كلية الإدارة والاقتصاد/ جامعة كربلاء والى قسم الإحصاء، والى جميع أساتذتي الفضلاء الذين لم يدّخروا جهدا ولا معلومة كي يرتقوا بنا علميا وأفاضوا علينا مما كرمهم الله به من علم.

أيضا لا يفوتني أن أتقدم بالشكر الجزيل للدكتور **مثنى الفراجي** مدير مركز الأورام في صلاح الدين والدكتورة **سراب قحطان** لما قدماه من مساعدة لتوفير البيانات المستعملة في هذه الرسالة.

كما أتقدم بوافر الشكر والتقدير والاحترام إلى أمي الحبيبة والدي الحبيب الذين يدعوان لي دائما ويرجون لي كل خير، والشكر الجزيل لزوجتي الغالية التي صبرت معي وكانت خير سند ومشجع ومعين حتى أتمّ دراستي هذه.

وعرفانا بالجميل أتقدم بالشكر والتقدير للأستاذ **منتظر جمعة مهدي** والأستاذ **علي حسين نوري** لما أبداه من مساعدة وتشجيع طوال مدة الكتابة فجزاهما الله خيرا.

وأخيرا يسرني أن أتوجه بالشكر لكل من نصحتني وأرشدني ووجهني وأسهم معي ومدّ يد العون في إعداد هذا البحث ولم أذكره.

أسأل الله العليّ القدير أن يوفق الجميع لما يحبه ويرضاه

والله وليّ التوفيق

الباحث

الإهداء

إلى معلم الإنسانية ومنقذ البشرية من الضلال والظلام إلى الهدى والنور

رسول الحق والهدى والعلم سيدنا محمد (*)

إلى مَنْ أفضّلها على نفسي، مَنْ ضحّت من أجلي ولم تدّخر جُهدًا في سبيل إسعادي على الدّوام

(أمّي الحبيبة).

عندما نسير في دروب الحياة يبقى من يُسيطر على أذهاننا في كل مسلك نسلكه، صاحب الوجه الطيب، والأفعال الحسنة من لم يبخل عليّ طوال حياته

(والدي العزيز).

تواجهنا في الحياة عقبات كثيرة، نتعثّر ببعضها ونتجاوز الآخر بهمة وتفأول وحبّ للحياة

إلى رفيقة دربي وسندي

(زوجتي الغالية)

هنالك الكثير ممن يتمنون لك كل خير ويدعون لك في ظهر الغيب، هم أعلى ما نملك في هذه الحياة

(إخوتي وأخواتي)

نور قلبي وجمال روحي ونسائم نفسي، يا نعمة وهبها الله لي

(ابنتي .. جنى .. بيلسان)

إلى الأكرم منا جميعا.. من قدموا أرواحهم وبذلوا أنفسهم من أجل الوطن

شهداء العراق

أهدي لهم هذا الجهد المتواضع

حاتم

قائمة المحتويات

رقم الصفحة	العنوان
أ	الآية الكريمة
ب - ج	شكر وامتنان
د	الاهداء
هـ - ح	قائمة المحتويات
ط	قائمة الجداول
ظ - ي	قائمة الأشكال
ي - ك	قائمة الرموز
ل	المستخلص
2-7	الفصل الأول
2	تمهيد 1-1
2-3	منهجية الدراسة 2-1
3	مشكلة الدراسة 3-1
3	أهداف الدراسة 4-1
3-7	الاستعراض المرجعي 5-1
4-6	البحوث الخاصة بتوزيع جمبرتز 1-5-1
6-7	البحوث الخاصة بالتوزيع الأسي 2-5-1

9-34	الفصل الثاني: الجانب النظري	
9	تمهيد	1-2
9	دالة البقاء (المعولية)	2-2
10	دالة الكثافة للفشل	3-2
10	دالة المخاطرة (معدل الفشل)	4-2
11-13	التوزيع الأسي	5-2
14-16	توزيع جمبرتز	6-2
17	التوزيع المركب	7-2
17-23	توزيع جمبرتز الأسي	8-2
23-27	خصائص توزيع جمبرتز الأسي	1-8-2
23-24	الدالة الكمية	1-1-8-2
24	الوسيط	2-1-8-2
24-25	الدالة المولدة للعزوم	3-1-8-2
25	الوسط	4-1-8-2
25-26	العزوم المركزية	5-1-8-2
26	الالتواء	6-1-8-2
27	التفلطح	7-1-8-2
27	طرائق التقدير	9-2
27	طريقة الإمكان الأعظم	1-9-2
27-29	مقدرات الإمكان الأعظم لمعلمات توزيع جمبرتز الأسي	1-1-9-2

29	مقدرات الإمكان الأعظم لدالة المخاطرة توزيع جمبرتز الآسي	2-1-9-2
29-30	طريقة المربعات الصغرى الموزونة	2-9-2
30-31	مقدرات المربعات الصغرى الموزونة لمعلمت توزيع جمبرتز الآسي	1-2-9-2
31	مقدرات المربعات الصغرى الموزونة لدالة المخاطرة لتوزيع جمبرتز الآسي	2-2-9-2
31	طريقة كرامر فون ميس	3-9-2
32	مقدرات كرامر فون ميس لمعلمت توزيع جمبرتز الآسي	1-3-9-2
32-33	مقدرات كرامر فون ميس لدالة المخاطرة لتوزيع جمبرتز الآسي	2-3-9-2
33-34	معايير مقارنة طرائق التقدير	10-2
33-34	متوسط مربع الخطأ	1-10-2
36-55	الفصل الثالث: الجانب التجريبي والعملي	
36	تمهيد	1-3
36-43	القسم الأول	
36-37	المفهوم العام للمحاكاة	2-3
38	الأرقام العشوائية	3-3
38-40	بناء أنموذج المحاكاة	4-3
40-43	نتائج المحاكاة	5-3
44-45	القسم الثاني	
44	تمهيد	6-3
44-45	سرطان الثدي	1-6-3
45-46	البيانات الحقيقية	7-3

46	تحليل البيانات	1-7-3
47-48	اختبارات حسن المطابقة	8-3
47-48	اختبار مربع كاي	1-8-3
48-55	معايير اختيار أفضل توزيع	9-3
48	معيار معلومات اكاكي	1-9-3
48-49	معيار معلومات اكاكي المصحح	2-9-3
49-50	معيار المعلومات البيزي	3-9-3
51-55	نتائج البيانات الحقيقية	10-3
57-58	الفصل الرابع: الاستنتاجات والتوصيات	
57	الاستنتاجات	1-4
58	التوصيات	2-4
60-63	المصادر	
65-84	الملحق A	
85-103	الملحق B	
A	المستخلص باللغة الإنجليزية (Abstract)	

قائمة الجداول

رقم الصفحة	عنوان الجدول	رقم الجدول
39	القيم الافتراضية الأولية للمعلمات والنماذج المقترحة	(1-3)
41-42	متوسط مربعات الخطأ التكاملي IMSE لطرائق التقدير و نماذج قيم المعلمات الافتراضية وأحجام العينات	(2-3)
45-46	مدة بقاء المريض بسرطان الثدي على قيد الحياة من تاريخ تسجيل الحالة ولحين الشفاء أو الوفاة (بالأشهر)	(3-3)
46	أبرز احصاءات العينة للبيانات الحقيقية	(4-3)
47	قيمة اختبار χ^2	(5-3)
49	قيم المعلمات المقدرة ومعايير مقارنة التوزيعات بالنسبة لتوزيعات المقارنة	(6-3)
51-54	قيم دالة المخاطرة ودوال (PDF) و (CDF) و دالة البقاء بعد ترتيب بيانات عينة الدراسة تصاعديا	(7-3)

قائمة الأشكال

رقم الصفحة	عنوان الشكل	رقم الشكل
12	دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الاسي	(1-2)
12	الدالة التجميعية للتوزيع الاسي	(2-2)
13	دالة البقاء للتوزيع الاسي	(3-2)
13	دالة المخاطرة للتوزيع الاسي	(4-2)
15	دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع جمبرتز	(5-2)

15	الدالة التجميعية لتوزيع جمبرتز	(6-2)
16	دالة البقاء لتوزيع جمبرتز	(7-2)
16	دالة المخاطرة لتوزيع جمبرتز	(8-2)
21	دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع جمبرتز الاسي	(9-2)
21	الدالة التجميعية لتوزيع جمبرتز الاسي	(10-2)
22	دالة البقاء لتوزيع جمبرتز الاسي	(11-2)
22	دالة المخاطرة لتوزيع جمبرتز الاسي عندما $(1 < \lambda)$	(12-2)
23	دالة المخاطرة لتوزيع جمبرتز الاسي عندما $(1 > \lambda)$	(13-2)
50	دالة الكثافة الاحتمالية المقدره لتوزيع جمبرتز الاسي مقارنة بالتوزيع الاسي وتوزيع جمبرتز بالنسبة للبيانات الحقيقية	(1-3)
50	Probability Plot of (E-GD) (الرسم الاحتمالي للتوزيع جمبرتز الأسي)	(2-3)
55	دالة المخاطرة المقدره لتوزيع جمبرتز الاسي (E-GD) بالنسبة للبيانات الحقيقية	(3-3)

قائمة الرموز

Mean	المعنى	الرمز
Failure Density Function	دالة الكثافة للفشل	$f(.)$
Scale parameter of Exponential distribution	معلمة القياس للتوزيع الاسي	λ
Shape parameter of Gompertz Distribution	معلمة الشكل لتوزيع جمبرتز	β
Scale parameter of Gompertz Distribution	معلمة القياس لتوزيع جمبرتز	α
Vector of parameters	متجه معلمات	θ
Survival function	دالة البقاء	$S(.)$
Hazard Rate Function	دالة المخاطرة	$h(.)$
True value of a parameter	القيمة الحقيقية للمعلمة	φ
Exponential distribution	التوزيع الأسي	(ED)

Gompertz Distribution	توزيع جمبرتز	(GD)
Exponential-Gompertz Distribution	توزيع جمبرتز الاسي	(E-GD)
Cumulative Distribution Function Exponential-Gompertz Distribution	دالة الكثافة التجميعية لتوزيع جمبرتز الاسي	(FGE)
Maximum likelihood estimation	مقدر الإمكان الأعظم	MLE
Weighted least square estimation	مقدر المربعات الصغرى الموزونة	WLSE
Carmer-von mises estimation	مقدر كرامر فون ميس	CVM
Empirical Distribution Function	دالة التوزيع التجريبي	EDF
Moment Generating Function	الدالة المولدة للعزوم	M_x^t
Central Moments	العزوم المركزية	μk^*
Mean Square Error	متوسط مربعات الخطأ	MSE
Integrative Mean Square Error	متوسط مربعات الخطأ التكاملية	IMSE
Akaiki Information Criterion	معيار معلومات اكاكي	(AIC)
Akaiki Information Corrected criterion	معيار معلومات اكاكي المصحح	(AICc)
Bayesian Information Criterion)	معيار المعلومات البيزي	(BIC)

المستخلص

تم في هذه الرسالة إيجاد توزيع احتمالي جديد هو (جمبرتز الاسي) Exponential-Gompertz (E-GD) Distribution باستعمال طريقة التركيب (Compound Distributions) وهو توزيع ناتج عن تركيب توزيعين مستمرين وهما توزيع جمبرتز والتوزيع الأسّي وذلك بعدّ المعلمة الثانية لتوزيع جمبرتز (معلمة القياس) متغير عشوائي يتبع التوزيع الأسّي ليتم الحصول على التوزيع الاحتمالي الجديد (جمبرتز الأسّي). كما تم اشتقاق خصائص التوزيع الجديد الإحصائية وتقدير معالمه ودالة المخاطرة باستعمال ثلاثة طرائق للتقدير وهي طريقة الإمكان الأعظم، طريقة المربعات الصغرى الموزونة، وطريقة كرامر فون ميس.

ولغرض الحصول على أفضل النتائج عملت الدراسة على مقارنة بين طرائق التقدير عن طريق تطبيق أسلوب محاكاة مونت كارلو (Monte Carlo) باستعمال برنامج (Wolfram Mathematica) 12.2 إذ قمنا بإجراء عدة تجارب وقد تم في هذه الرسالة تكرار هذه التجارب (1000) مرة لكل تجربة وبأحجام عينات مختلفة (صغيرة، متوسطة، كبيرة) من أجل الوصول الى مستوى أفضل من التجانس. وقد أظهرت النتائج أفضلية طريقة الإمكان الأعظم في تقدير دالة المخاطرة لتوزيع جمبرتز الاسي لأحجام العينات كافة ثم بعد ذلك طريقة المربعات الصغرى الموزونة في حين لم تكن طريقة كرامر فون ميس الفضلى في أي حجم من أحجام العينات.

ولبيان كفاءة التوزيع في تمثيل عينة من البيانات الحقيقية فقد تم تطبيقه على عينة عشوائية كبيرة من المرضى متمثلة بمدة بقائهم على قيد الحياة لحين الوفاة أو الشفاء للمرضى المصابين بمرض سرطان الثدي وبتطبيق فضلى الطرائق فقد تبين ان توزيع جمبرتز الاسي يلائم هذه البيانات بشكل أفضل وتفسير سلوكها مقارنة بتوزيع جمبرتز أو التوزيع الاسي لوحده.

الفصل الأول

منهجية الرسالة

(1-1) تمهيد (preamble):

إن التوزيعات الإحصائية مهمة ومفيدة جدا في وصف البيانات الحقيقية للظاهرة المدروسة والتنبؤ بها، وقد استعملت التوزيعات الكلاسيكية على نطاق واسع ولعدة عقود في هذا المجال، أما في العقد الأخير فقد اهتم الباحثون في تطوير التوزيعات الاحتمالية والانتقال بها الى التوزيعات المركبة (Compound Distributions) بهدف البحث عن أفضل تمثيل للبيانات وبأقل الأخطاء وقد نالت اهتماما كبيرا ومميزا وذلك لأهمية تطبيقاتها في مجالات الحياة (الطبية والهندسية والصناعية... الخ)، ان التوزيعات المركبة هي ناتجة عن تركيب توزيعين أو أكثر وتشمل توزيعات دالة البقاء على قيد الحياة فيما اذا كانت الدراسة تخص البشر أو الحيوان أو الكائنات الحية ، اما اذا كانت الدراسة تخص المكنات والآلات والمعدات فتكون دالة المعولية، ويوجد الكثير من البحوث الإحصائية في هذين المجالين. في العقود الأخيرة كان الاهتمام واضحا ومتزايدا من أجل تطوير عائلات جديدة من التوزيعات إذ يتم الحصول على التوزيعات المعممة أو الموسعة عن طريق التحويلات أو إضافة معلمة أو أكثر إلى التوزيعات الكلاسيكية المعروفة من أجل الحصول على مرونة أكثر للتطبيق العملي لمعرفة السلوك الحقيقي للبيانات ولإسيما في توزيعات البقاء على قيد الحياة وهذا ما اهتمت بتقديمه هذه الرسالة.

(2-1) منهجية الدراسة (Study Methodology):

تحتوي هذه الرسالة على أربعة فصول تم تنظيمها وفق النحو الآتي:

اشتمل الفصل الأول على منهجية ومشكلة وهدف الرسالة واستعراض بعض الدراسات السابقة التي لها علاقة بمفهوم الرسالة، في حين يدرس الفصل الثاني المفاهيم الأساسية التي تتناولها الرسالة وطريقة تركيب التوزيعين وإيجاد التوزيع الاحتمالي الجديد واشتقاق خصائصه الإحصائية والهيكلية فضلا عن دالة المخاطرة $(h(x))$ (Hazard Function) (دالة معدل الفشل) يسبقها دالة البقاء $(S(x))$ (Survival Function) ثم بعد ذلك عرض طرائق التقدير المستعملة لتقدير معالم ودالة البقاء والمخاطرة للتوزيع الجديد.

أما الفصل الثالث فيشتمل على قسمين يتناول القسم الأول منه مفهوم المحاكاة وتطبيق أسلوب محاكاة (مونت كارلو) للمقارنة بين طرائق التقدير التي تم التطرق إليها في الفصل الثاني، أما القسم الثاني فيشتمل

الفصل الاول (منهجية الرسالة)

على الجانب التطبيقي الذي يتضمن تطبيق التوزيع الجديد على بيانات حقيقية تمثل عدد من المرضى المصابين بالسرطان من وقت دخول المريض لحين وفاته مع اجراء اختبار حسن المطابقة لتلك البيانات وأخيرا الفصل الرابع يتم فيه استعراض الاستنتاجات والتوصيات التي خرجت بها الدراسة في ضوء نتائج البحث ومدى إمكانية اخذها بنظر الاعتبار.

(3-1) مشكلة الدراسة (Research problem):

بالرغم من وجود عدد كبير من التوزيعات الاحتمالية الكلاسيكية وتطورها واتساع تطبيقاتها في مجالات الحياة المختلفة إلا أنها غير كافية أو قد تكون ضعيفة لتفسير السلوك الحقيقي للبيانات إذ تواجه التوزيع الكلاسيكي مشكلات متعددة من ناحية نمذجتها او مشكلة سلوك البيانات المعقدة بالنسبة للمرضى المصابين بمرض سرطان الثدي والتي تكون بشكل متذبذب وغير ثابت، أو ان الكثير من الدراسات السابقة تركز على دالة البقاء دون دالة المخاطرة لذا نرى من الضروري القيام بإيجاد توزيع احتمالي ملائم لتفسير دالة المخاطرة لهذا المرض لأنه يمثل مشكلة اجتماعية وصحية عالمية بشكل عام وفي العراق بشكل خاص.

(4-1) أهداف الدراسة (Research objectives):

تهدف هذه الدراسة الى:

- 1- إيجاد توزيع احتمالي جديد باستعمال طريقة التركيب (COMPOUND) يكون أكثر مرونة وملائمة لنمذجة البيانات الحقيقية الخاصة بمرضى سرطان الثدي.
- 2- اشتقاق خصائص التوزيع الجديد وتقدير معلماته وتقدير دالة المخاطرة بطرائق مختلفة والوصول الى أفضل طريقة لتقدير دالة المخاطرة للتوزيع الجديد.
- 3- الاهتمام والتركيز على تقدير دالة المخاطرة للبيانات الحقيقية كون أغلب الدراسات السابقة تركز على دالة البقاء وتطبيق النتائج المستخلصة من الجانب التجريبي في دراسة بيانات المصابين بمرض سرطان الثدي من تاريخ دخول المريض لحين وفاته.

(5-1) الاستعراض المرجعي (Review of Literature):

تُعد الدراسات السابقة مصدرا مهما وغنيا بالمعلومات بالنسبة للباحث، كما أنها تؤدي دورا مهما في البحث العلمي كونها تعد أحد المرتكزات الرئيسية في تكوين فكرة الدراسة والاطلاع على تجارب الاخرين

الفصل الاول (منهجية الرسالة)

والاستفادة منها، ونظرا لأهميتها سيتم التطرق الى بعض الدراسات الخاصة بتوزيع جمبرتز المركب والتوزيع الاسي المركب لا سيما الدراسات الحديثة منها لتلافي التكرار والاسهاب في الرسالة.

(1-5-1) البحوث الخاصة بتوزيع جمبرتز:

في عام 2014 قام (Jafari et al.,) [22] بتقديم توزيع جديد يتكون من اربع معلمات هذا التوزيع هو بيتا - جمبرتز (BG) (Beta-Gompertz) هذا التوزيع الجديد مرن للغاية ويمكن استعماله بفعالية في نمذجة بيانات البقاء وقد تم عمل محاكاة من أجل التحقق في مقدرات التوزيع المقترح على أساس طريقة MLE المقترحة فقد تم أخذ 10000 مجموعة بيانات بالحجم n من توزيع BG مع المعلمات α و β و θ و γ ، وحساب طريقة الامكان الاعظم MLE للمعلمات، فقد قام الباحثون بتقييم دقة تقريب الخطأ المعياري لـ MLE المحدد عن طريق مصفوفة معلومات Fisher وتباين المعلمات المقدرة إذ تم التوصل الى:

ان الاختلافات بين متوسط التقديرات والقيم الحقيقية تكاد تكون صغيرة، أيضا تتقارب MLE مع القيمة الحقيقية في جميع الحالات عندما يزداد حجم العينة، تنخفض الأخطاء المعيارية لـ MLE عندما يزداد حجم العينة.

من هذه المحاكاة استنتج الباحث أن تقدير المعلمات باستعمال MLE أفضل من النماذج الاصلية فيما لو تمت المقارنة بينها.

أما في عام 2016 فقد قدم (Chukwu & Ogunde) [13] نسخة معممة جديدة من خمسة معلمات لتوزيع جمبرتز -ميكهام تسمى كوماراسوامي جمبرتز -ميكهام (Kumaraswamy Gompertz-) (KGM) (Makeham)، التوزيع الجديد مرن أيضاً ويمكن أن يكون له دالة معدل فشل (دالة المخاطرة) متناقص ومتزايد وشكل حوض الاستحمام اعتماداً على معلماته مما يجعله فعالاً في نمذجة بيانات البقاء على قيد الحياة ومشاكل المعولية، وقد تم اشتقاق دالة الإمكان الأعظم للتوزيع الجديد وبعض الخصائص الشاملة للتوزيع الجديد، مثل دالة الكثافة الاحتمالية (PDF) ودالة التوزيع التراكمية (CDF) ودالة معدل الفشل (دالة المخاطرة) والإحصاءات المرتبة، بعد ذلك تمت مقارنة توزيع KGM المقترح مع الحالة الخاصة (GM) مع عدة توزيعات عمرية أخرى مثل Zografos-Balakrishnan log-logistic

الفصل الاول (منهجية الرسالة)

(ZBLL) و بيتا فريشت (BF) و Kumaraswamy Pareto (KP) إذ ظهر ان توزيع (KGM) هو أفضل أنموذج حسب طريقة تقدير الإمكان الأعظم.

وفي عام 2019 قدم الباحثون (Eraikhuemen et al.) [14] انموذجا مركبا ملتويا يسمى توزيع (LGM) (Lomax Gompertz-Makeham) وناقشوا بعض الخصائص الرياضية والإحصائية للتوزيع الجديد وتم تقدير معالم الأنموذج الجديد عن طريق تقدير الإمكان الأعظم، واخيرا تم تطبيق التوزيع الجديد على مجموعتين من البيانات الحقيقية ومقارنة التوزيع مع الأنموذجين من حالاته الخاصة للتحقق من مرونته وادائه و اشارت النتائج الى ان التوزيع المقترح اكثر مرونة من التوزيعات المذكورة في الدراسة.

وفي العام نفسه قدم (Mazucheli et al.) [27] انموذجا جديدا ومحولا يسمى توزيع (UG) (Unit – Gompertz) الذي يمكن أن يكون بديلا لتوزيعات بيتا وكوماراسوامي الذي يظهر دالة كثافة ملتوية نحو اليمين وعلى شكل حرف (J) ودالة معدل فشل (مخاطرة) على شكل حوض استحمام (بانيو) ثابت و متزايد مقلوب ثم دالة معدل فشل (مخاطرة) على شكل حوض الاستحمام (بانيو) مقلوبة، وقد تم استعمال طريقة الإمكان الأعظم لتقدير معالم التوزيع.

وتم إجراء عملية محاكاة مونت كارلو للتحقق من التحيز ومتوسط مربعات الخطأ لتقديرات الإمكان الأعظم ومن ثم مقارنتها بتوزيعات أخرى باستعمال مجموعتي بيانات حقيقيتين إذ اتضح ان توزيع (UG) أكثر ملائمة للاستعمال مقارنة بالأنموذجين الاخرين (توزيع بيتا وكوماراسوامي).

وفي العام ذاته قام (Ieren et al.,) [20] بتقديم توزيع احتمالي ثلاثي المعالم والذي يعطي امتداداً آخر لتوزيع Gompertz يُعرف باسم توزيع (PG) (Power Gompertz)، وقد تم اشتقاق الخصائص الإحصائية لتوزيع Power Gompertz بشكل منهجي ودرستها بشكل مناسب، وتم تقدير المعالم الثلاثة للأنموذج الجديد باستعمال طريقة تقدير الإمكان الأعظم، وقد تمت مقارنة التوزيع المقترح أيضاً بتوزيع Gompertz باستعمال مجموعة بيانات حقيقية واطهرت النتيجة أن توزيع Power Gompertz له أداء أفضل من توزيع Gompertz ومن ثم سيكون أكثر فائدة وفعالية إذا تم تطبيقه في بعض مواقف الحياة الواقعية وخاصة تحليل نماذج البقاء.

وفي العام اللاحق قام (Khaleel et al.,) [23] بتقديم توزيع جديد بأربع معالم تسمى

الفصل الاول (منهجية الرسالة)

MOEGo Marshall Olkin Exponential Gompertz (MOEGo)، وقاموا بتقدير معالمته MOEGo بطريقة الإمكان الأعظم وتطبيقه بمجموعتين من البيانات الحقيقية (متماثلة وملتوية نحو اليمين). واطهر التوزيع انه يوفر ملاءمة افضل ومرونة اكثر من بعض النماذج الأخرى مثل :

Kumaraswamy Gompertz (KuGo) و Beta Gompertz (BGo) ، توزيعات جمبرتز المعممة الأسية (EGGo) و Weibull Gompertz (WeGo)، تتيح هذه المرونة استعمال توزيع MOEGo في التطبيقات المختلفة ولاسيما دالة البقاء.

اما في عام 2021 فقد قدم (Bantan, et.al.,) [10] توزيع وحدة جاما - جمبرتز المبني على اساس التوزيع الاسي المعكوس وتوزيع كاما- جمبرتز ، وبناء على ان توزيع (gamma) – (Gg) (Gompertz) هو توزيع مرن ، فقد هدفت هذه الدراسة إلى نقل هذه المرونة إلى حد الوحدة، وقد تم التحقق من هذا الجانب بالسلوك التحليلي للدوال الأساسية، واتضح أن دالة الكثافة الاحتمالية يمكن أن تكون متزايدة أو متناقصة أو "متزايدة-متناقصة" و "متناقصة متزايدة" بخصائص مرنة غير متماثلة. من ناحية أخرى فان دالة معدل الفشل (المخاطرة) لها اشكال متزايدة او متناقصة او ثابتة.

(2-5-1) البحوث الخاصة بالتوزيع الأسّي:

نشر (Amina) [30] عام (2015) بحثا تضمن التوزيع الاحتمالي (The weibull -exponential distribution) (WE) إذ تم دراسة خصائص هذا التوزيع المركب وتقدير معالمه بطريقة الإمكان الأعظم وتم تطبيقه على نوعين من البيانات، الأولى تخص ألياف الكربون، والثانية تخص قوة الالياف الزجاجية، إذ تم اثبات مرونة هذا التوزيع وأفضليته من التوزيع المفرد.

قام الباحث (صالح) عام (2016) [5] بتقدير دالة المخاطرة للتوزيع المختلط (الأسّي - كاما من الدرجة الاولى) وباستعمال خمس طرائق التقدير الامكان الاعظم ، العزوم ، العزوم الخطية ، المقدرات التجزئية ، بيز القياسية وبتوظيف اسلوب المحاكاة مونت كارلو وتوصل الباحث الى ان طريقة بيز كانت الفضلى لحجوم العينات الصغيرة، والامكان الاعظم والمقدرات التجزئية الفضلى لحجوم العينات الكبيرة.

في حين قدم الباحثان (Hassan and Abd-Allah) [18] عام (2018) بحثا يشتمل على توزيع احتمالي مركب (Exponentiated- weibull lomax distribution) (EWL) إذ تمت دراسة خصائص التوزيع الجديد وتقدير معلماته بطريقة الإمكان الأعظم وطريقة المربعات الصغرى وطريقة المربعات الصغرى الموزونة إذ تم التطبيق على نوعين من البيانات الحقيقية، الأولى تخص كلوريد الفينول خاضعة للرقابة، والأخرى تتضمن بيانات ألياف الكربون غير خاضعة للرقابة.

أما في عام (2021) فقد قدم (Ahmad M. H. Al-Khazaleh) [9] بحثا استعمل فيه دالة Biweight Kernel (BKF) والتوزيعات الأسية لاقتراح توزيع جديد يسمى التوزيع الأسى للوزن الحيوي (BiEd). يتم تقديم التوزيع الجديد دون إضافة أي معلمات جديدة إلى التوزيعات الأصلية. يتم النظر في الخصائص الإحصائية بما في ذلك تقدير معلمات النموذج بطريقة الإمكان الأعظم وتطبيقها باستعمال بيانات حقيقية، تظهر نتائج التطبيق أن التوزيع الجديد أفضل من التوزيع الأسى.

إن ما اهتمت به هذه الرسالة هو التطرق الى دالة المخاطرة ومن ثم المقارنة بين طرائق التقدير فضلا عن بناء انموذج احتمالي جديد.

الفصل الثاني

الجانب النظري

(1-2) تمهيد (preamble):-

في هذا الفصل سيتم استعراض المفاهيم الأساسية التي يتناولها البحث وهي أهم تعاريف الدوال المستعملة في البحث سيما دالة معدل الفشل (المخاطرة) (Hazard Rate Function)، ونظرة عامة عن التوزيع الاسي (Exponential Distribution) (ED) وتوزيع جمبرتز (Gompertz distribution) ومفهوم التوزيع المركب (Compound Distribution)، وبناء التوزيع الاحتمالي المركب جمبرتز الاسي (Exponential-Gompertz Distribution) (E-GD) واشتقاق بعض خصائصه واستعمال طرائق (الامكان الاعظم Maximum Likelihood (ML)، المربعات الصغرى الموزونة (Weighted Least Square (WLS) وكرامر فون ميس ((CVM) Cramer Von Miss في تقدير معلماته ودالة معدل الفشل. وكذلك سيتم التطرق الى معايير مقارنة هذه الطرائق وبعض الاختبارات الاحصائية الخاصة باختبار ملائمة البيانات للتوزيعات الاحتمالية.

(2-2) دالة البقاء (المعولية) Survival (Reliability) Function :- [8][31]

تسمى ايضا مكمل الدالة التجميعية (CCDF) Complement Cumulative Function والمرادف لها دالة البقاء (Survival Function) وهي عبارة عن احتمال البقاء لاي جزء من النظام في مدة زمنية معينة وتحت ظروف عمل خاصة، بمعنى اخر هي احتمال بقاء الوحدة التجريبية او النظام يعمل بدون فشل او الكائن الحي على قيد الحياة للمدة $0 \leq X \leq x$ [31] وغالبا ما يرمز لدالة البقاء بالرمز $S(x)$ ويعبر عنها رياضياً [7] بالصيغة :-

$$S(x) = P[X > x] = \int_x^{\infty} f(u)du \quad (1 - 2)$$

$$= 1 - \int_0^x f(u)du = 1 - F(x)$$

إذ ان X متغير عشوائي يمثل زمن البقاء على قيد الحياة حتى حدوث الحدث. ومن خصائص دالة البقاء $S(x)$ انها غير سالبة ومتناقصة رتيبة لجميع قيم X وهي دالة احتمالية اي ان $0 \leq S(x) \leq 1$ وان $S(0) = 1$ وكذلك $\lim_{x \rightarrow \infty} S(x) = 0$.

(3-2) دالة الكثافة للفشل (Failure Density Function):-[1]

هي احتمال فشل او توقف المفردة في المدة $[x, x + \Delta x]$ بغض النظر عن صغر المدة والتي تمثل السلوك العشوائي لتلك المفردة ويرمز لها بالرمز $f(x)$ ويمكن التعبير عنها رياضيا على النحو الآتي:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P[x < X < x + \Delta x]}{\Delta x} \quad (2 - 2)$$

وهي دالة التي تحقق شروط دالة الكثافة الاحتمالية:-

- 1- $f(x) > 0$
- 2- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

ولهذه الدالة دالة كثافة تجميعية $F(x)$ وهي عبارة عن $F(x) = \int_0^x f(u) du$

(4-2) دالة المخاطرة (معدل الفشل) Hazard Rate Function :-[7][11][22]

وهي تمثل احتمال شرطي بان الوحدة (او النظام) سوف يفشل في المدة $[x, x + \Delta x]$ علماً ان الماكنة تعمل (لم تفشل) حتى الوقت x وتستعمل هذه الدالة بأسماء متعددة في الحقول العلمية المختلفة فتسمى معدل الفشل في دراسات المعولية، قوة الفناء في الدراسات السكانية. ويرمز لدالة المخاطرة بالرمز $h(x)$ ويعبر عنها بالصيغة الآتية:

$$h(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P[x < X < x + \Delta x | X > x]}{\Delta x} \quad (3 - 2)$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P[x < X < x + \Delta x]}{P[X > x] * \Delta x}$$

$$h(x) = \frac{1}{S(x)} * \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P[x < X < x + \Delta x]}{\Delta x} \quad (4 - 2)$$

وبتعويض المعادلة (2-2) بالمعادلة (4-2) بالنسبة الى Δx نحصل على العلاقة التي تربط بين دالة البقاء ودالة الفشل ودالة المخاطرة وكالاتي :

$$h(x) = \frac{1}{S(x)} * f(x) = \frac{f(x)}{S(x)} \quad (5 - 2)$$

(5-2) التوزيع الاسي Exponential distribution :-[6]

الفصل الثاني (الجانب النظري)

التوزيع الاسي (ED) هو من التوزيعات المستمرة وقد اشتق اسمه من الدالة الاسية (Exponential Function) ويعد من اكثر التوزيعات انتشاراً وفائدة خصوصاً في تخمين الفترات الزمنية بين وقوع الاحداث في عمليات بواسون (Poisson Process)، ان التوزيع الاسي يختلف عن التوزيعات الاخرى بأن دالة المخاطرة له ثابتة، وان دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الاسي تكتب بالشكل الآتي :

$$f(x; \lambda) = \lambda e^{-\lambda x} \quad , x \geq 0 , \lambda > 0 \quad (6 - 2)$$

إذ ان λ تمثل معلمة القياس للتوزيع.

وان دالة التوزيع التراكمية تكون بالشكل:

$$F(x; \lambda) = 1 - e^{-\lambda x} \quad (7 - 2)$$

وان دالتي البقاء والمخاطرة تكونان بالشكل الآتي على الترتيب:

$$S(x; \lambda) = e^{-\lambda x} \quad (8 - 2)$$

$$h(x; \lambda) = \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{e^{-\lambda x}} = \lambda \quad (9 - 2)$$

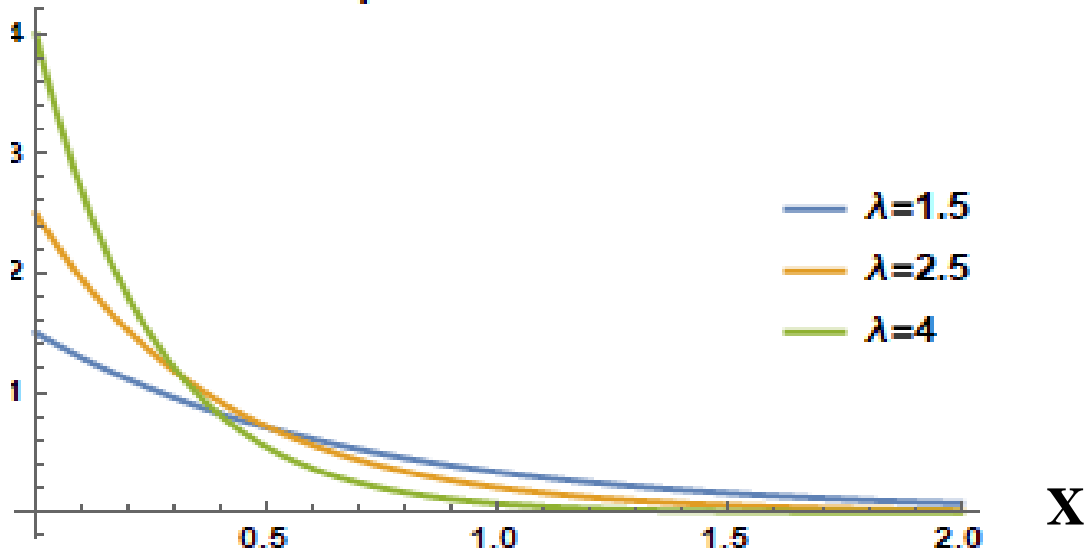
من الواضح جدا من المعادلة (9-2) بأن دالة المخاطرة للتوزيع الاسي تساوي مقلوب الوسط الحسابي للتوزيع وهذا ما يبرر كون الدالة ثابتة إذ ان :

$$E[x] = \int_0^{\infty} x f(x) dx \quad (10 - 2)$$

$$= \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$$

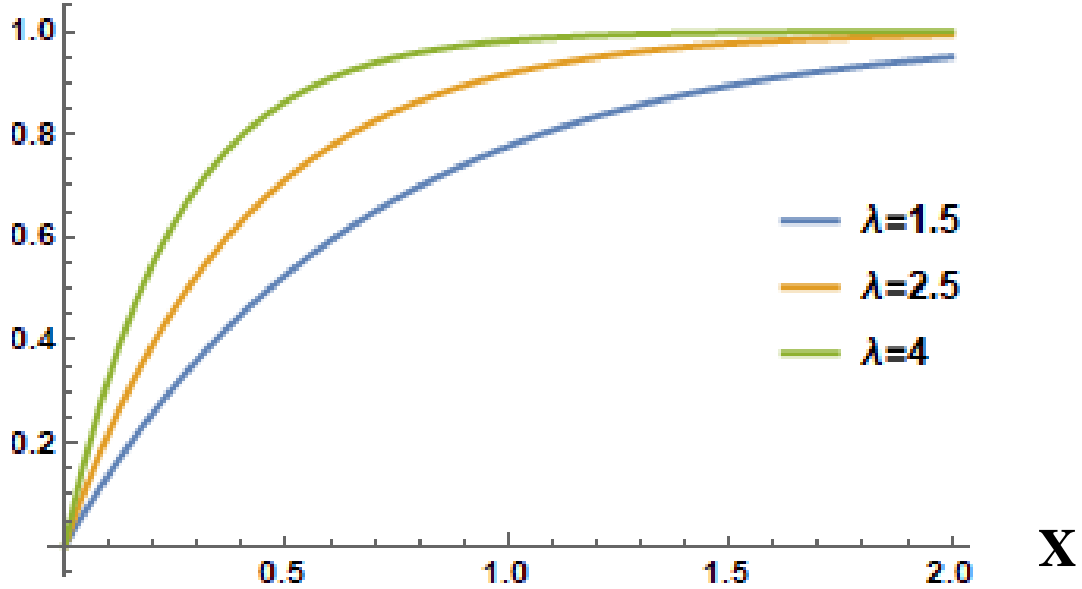
والاشكال الآتية توضح دوال التوزيع الاسي ولقيم مختلفة للمعلمة λ

PDF of Exponential Distribution



شكل (1-2) دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الاسي

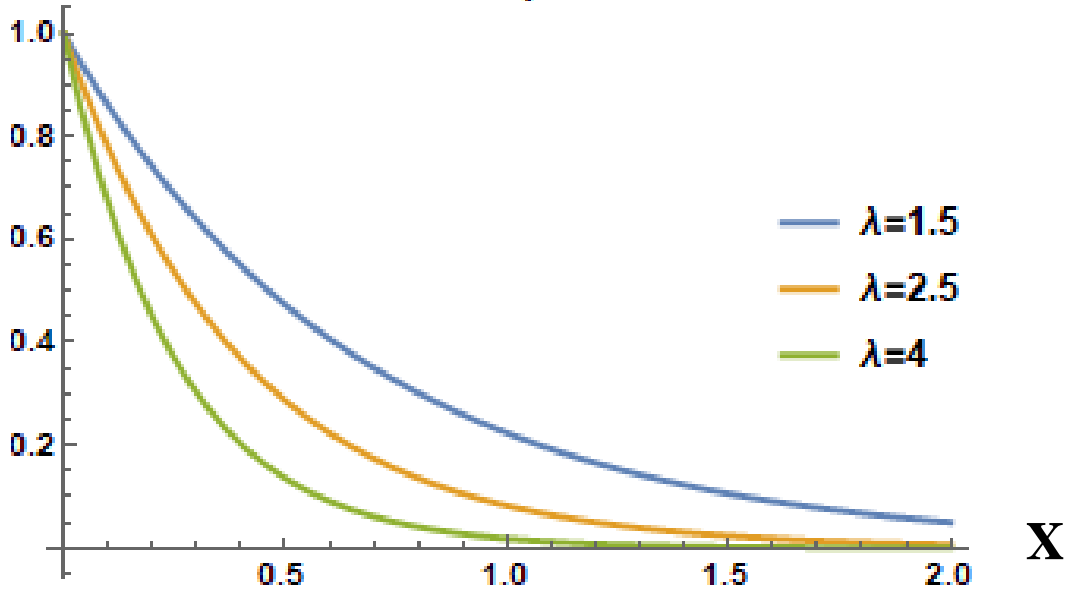
F(x) CDF of Exponential Distribution



شكل (2-2) الدالة التجميعية للتوزيع الاسي

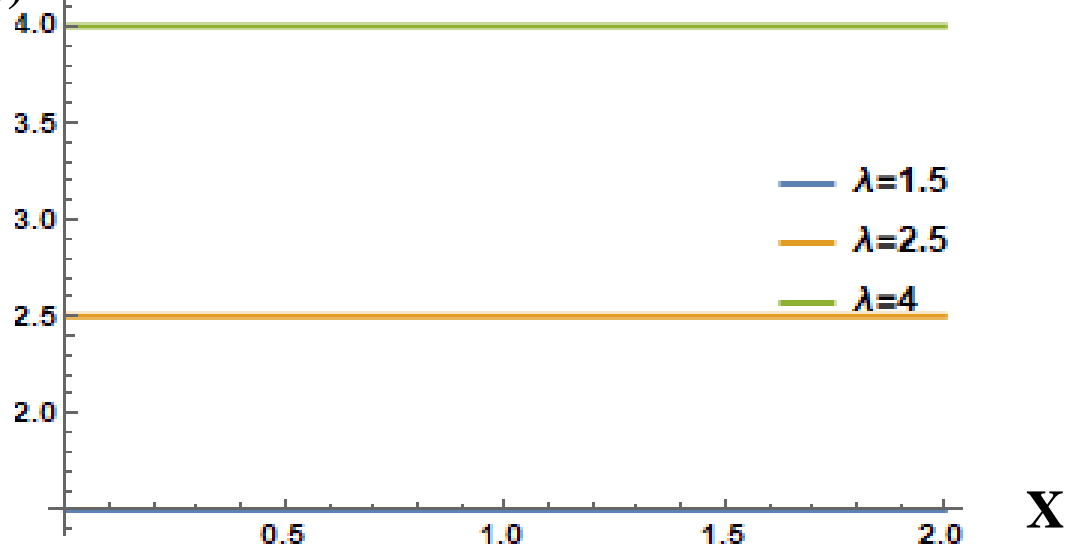
$s(x)$

Survival Function of Exponential Distributio



شكل (3-2) دالة البقاء للتوزيع الاسي

$h(x)$ Hazard Function of Exponential Distribution



شكل (4-2) دالة المخاطرة للتوزيع الاسي

نلاحظ من رسم دالة المخاطرة للتوزيع الاسي فإنها ثابتة لأنها تساوي قيمة المعلمة λ .

(6-2) توزيع جمبرتز Gompertz Distribution:- [17][32]

الفصل الثاني (الجانب النظري)

يُعد توزيع جمبرترز (GD) واحدا من النماذج الرياضية الكلاسيكية التي تمثل دالة البقاء على قيد الحياة بناء على قوانين معدل الوفيات. يؤدي هذا التوزيع دورا مهما في نمذجة الوفيات البشرية ووضع الجداول الاكتوارية، تم تقديم هذا التوزيع من لدن Benjamin Gompertz عام (1825). تم استعماله كأنموذج نمو في الدراسات الديموغرافية ويعد إعماما للتوزيع الاسي وله العديد من التطبيقات في الحياة لاسيما في الدراسات الطبية والاكتوارية. وان اهم ما يميز هذا التوزيع هو امتلاكه لدالة مخاطرة متزايدة بشكل اسي [32] ، وان دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع جمبرترز تكتب بالشكل الآتي:

$$f(x; \alpha, \beta) = \alpha\beta e^{x\alpha+(1-e^{x\alpha})\beta} , x \geq 0 , \alpha, \beta > 0 \quad (11 - 2)$$

إذ أن α تمثل معلمة القياس وان β تمثل معلمة الشكل للتوزيع.

وان دالة التوزيع التراكمية تكون بالشكل:

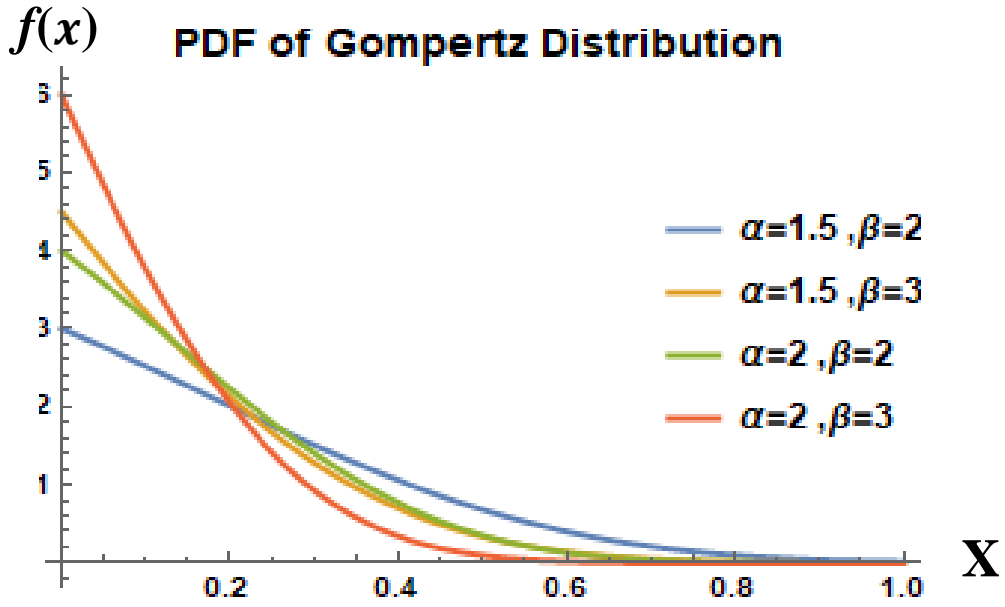
$$F(x; \alpha, \beta) = 1 - e^{(1-e^{x\alpha})\beta} \quad (12 - 2)$$

وان دالتي البقاء والمخاطرة تكونان بالشكل الآتي على الترتيب:

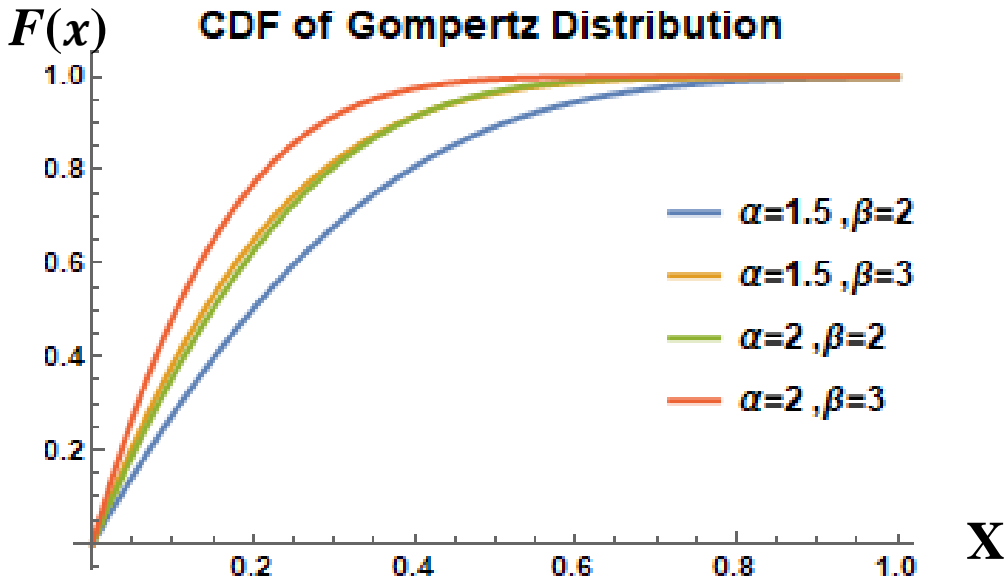
$$S(x; \alpha, \beta) = e^{(1-e^{x\alpha})\beta} \quad (13 - 2)$$

$$h(x; \alpha, \beta) = \frac{\alpha\beta e^{x\alpha+(1-e^{x\alpha})\beta}}{e^{(1-e^{x\alpha})\beta}} = \alpha\beta e^{x\alpha} \quad (14 - 2)$$

والاشكال الآتية توضح دوال توزيع جمبرترز ولقيم مختلفة للمعلمات (α, β) .

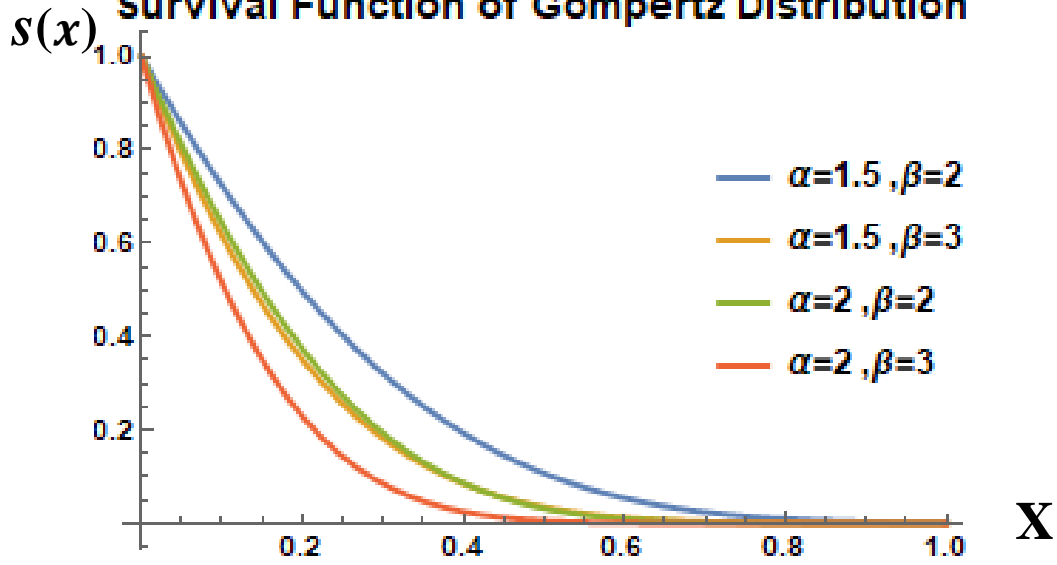


شكل (5-2) دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع جمبرتز



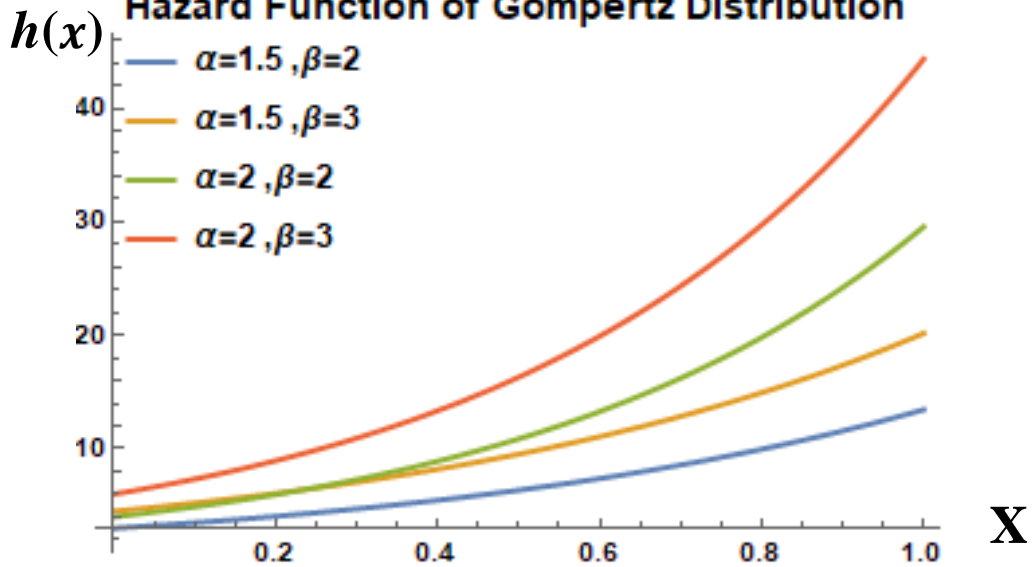
شكل (6-2) الدالة التجميعية لتوزيع جمبرتز

Survival Function of Gompertz Distribution



شكل (7-2) دالة البقاء لتوزيع جمبرتز

Hazard Function of Gompertz Distribution



شكل (8-2) دالة المخاطرة لتوزيع جمبرتز

كما نلاحظ من رسم دالة المخاطرة لتوزيع جمبرتز فإنها دالة متزايدة [31].

(7-2) التوزيع المركب Compound Distribution :-[21]

هو التوزيع الناتج من تركيب توزيعين او اكثر لغرض تسهيل عملية تحليل البيانات بشكل افضل من التوزيع الاساسي المفرد، ويمكن تطبيق عملية التركيب على التوزيعات الاحتمالية المتقطعة والمستمرة ويمكن تركيبهما مع بعض وفق شروط معينة. وهناك عدة طرائق لتركيب التوزيعات اقترحها الباحثون على مرّ الزمن نذكر منها إعمام كوما راسومي (Ku-G) وإعمام توبليون (TL-G) وتقنية تحويل المحول (T-X) وغيرها.

وفي هذه الرسالة تم استعمال طريقة تركيب خليط المعلمة والتي تُعد من طرائق التركيب الكلاسيكية التي تم استعمالها في تركيب توزيعين أحدهما مستمر والآخر متقطع فتكون توزيع احتمالي متقطع جديد، لكن في رسالتنا هذه سيتم تركيب توزيعين مستمرين هما (توزيع جمبرتز) (GD) و (التوزيع الاسي) (ED) باستعمال هذه الطريقة، الامر الذي يُعد الاول من نوعه على حد علم الباحث.

(8-2) توزيع جمبرتز الاسي Exponential-Gompertz Distribution :-[21][4]

هنا نقدم توزيعاً مركباً من توزيع جمبرتز مع التوزيع الاسي عن طريق معالجة معلمة الشكل β في توزيع جمبرتز بعدها كمتغير للتوزيع الاسي ليتم الحصول على توزيع احتمالي جديد اسمناه توزيع جمبرتز الاسي (E-GD) وكما يأتي:

$$f_{GE}(x; \alpha, \lambda) = \int_0^{\infty} f_G(x; \alpha, \beta) * f_E(\beta; \lambda) d\beta \quad (15 - 2)$$

$$f_{GE}(x; \alpha, \lambda) = \int_0^{\infty} \alpha \beta e^{x\alpha + (1 - e^{x\alpha})\beta} * \lambda e^{-\lambda\beta} d\beta \quad (16 - 2)$$

$$f_{GE}(x; \alpha, \lambda) = \alpha \lambda e^{\alpha x} \int_0^{\infty} \beta e^{-\beta(e^{x\alpha} + \lambda - 1)} d\beta \quad (17 - 2)$$

وعلى فرض أن $u = \beta(e^{x\alpha} + \lambda - 1)$

الفصل الثاني (الجانب النظري)

وبذلك فإن $\beta = \frac{u}{(e^{x\alpha} + \lambda - 1)}$ وان $d\beta = \frac{1}{(e^{x\alpha} + \lambda - 1)} du$ إذ ان حدود التكامل لا تتغير

وبتعويض النتائج أنفا في المعادلة (17-2) ينتج:

$$f_{GE}(x; \alpha, \lambda) = \alpha \lambda e^{\alpha x} \int_0^{\infty} \frac{u}{(e^{x\alpha} + \lambda - 1)} e^{-u} \frac{1}{(e^{x\alpha} + \lambda - 1)} du \quad (18 - 2)$$

$$f_{GE}(x; \alpha, \lambda) = \frac{\alpha \lambda e^{\alpha x}}{(e^{x\alpha} + \lambda - 1)^2} \int_0^{\infty} u e^{-u} du \quad (19 - 2)$$

نلاحظ ان ناتج التكامل في المعادلة (19-2) هو عبارة عن دالة كما $(\Gamma_2 = 1)$

$$\therefore f_{GE}(x; \alpha, \lambda) = \frac{\alpha \lambda e^{\alpha x}}{(e^{x\alpha} + \lambda - 1)^2}, \quad x > 0, \quad \alpha, \lambda > 0 \quad (20 - 2)$$

تمثل الصيغة (20-2) دالة الكثافة الاحتمالية (PDF) لتوزيع جمبرتز الاسي (E-GD) فتحقق الشروط الآتية:

$$1- f_{GE}(x; \alpha, \lambda) > 0 ; \text{for all } x$$

$$2- \int_0^{\infty} f_{GE}(x; \alpha, \lambda) dx = 1$$

ولإثبات ذلك نتبع الخطوات الآتية:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\alpha \lambda e^{\alpha x}}{(e^{x\alpha} + \lambda - 1)^2} dx \quad (21 - 2)$$

$$I = \alpha \lambda \int_0^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{(e^{x\alpha} + \lambda - 1)^2} dx \quad (22 - 2)$$

وعلى فرض أن $\alpha x = y$ وبذلك فإن $x = \frac{y}{\alpha}$ وان $dx = \frac{1}{\alpha} dy$ علما بأن حدود التكامل لا تتغير.

وبتعويض النتائج في المعادلة (22-2) ينتج:

الفصل الثاني (الجانب النظري)

$$I = \frac{\alpha\lambda}{\alpha} \int_0^{\infty} \frac{e^y}{(e^y + \lambda - 1)^2} dy \quad (23 - 2)$$

وعلى فرض أن $(e^y + \lambda - 1) = z$ وبذلك فإن $e^y = z - \lambda + 1$

وان $y = \ln(z - \lambda + 1)$

وان $dy = \frac{1}{z-\lambda+1} dz$ علما بأن حدود التكامل تتحول الى (λ, ∞)

وبتعويض النتائج في المعادلة (23-2) ينتج

$$= \lambda \int_{\lambda}^{\infty} \frac{z - \lambda + 1}{(z)^2} * \frac{1}{z - \lambda + 1} dz \quad (24 - 2)$$

$$= \lambda \int_{\lambda}^{\infty} \frac{1}{z^2} dz \rightarrow = \lambda \left[-\frac{1}{z} \right]_{\lambda}^{\infty}$$

$$= \lambda \left[-\frac{1}{\infty} + \frac{1}{\lambda} \right] = 1$$

ومن الجدير بالذكر بأن التوزيع الاسي هو حالة خاصة من توزع جمبرتز الاسي عندما $\lambda = 1$.

اما الدالة التجميعية لتوزيع جمبرتز الاسي (GE) فيمكن ايجادها كالاتي :

$$F_{GE}(x) = \int_0^x \frac{\alpha\lambda e^{at}}{(e^{t\alpha} + \lambda - 1)^2} dt \rightarrow = \alpha\lambda \int_0^x \frac{e^{at}}{(e^{t\alpha} + \lambda - 1)^2} dt \quad (25 - 2)$$

على فرض أن $at = y$ وبذلك فإن $t = \frac{y}{\alpha}$ وان $dt = \frac{1}{\alpha} dy$ علما بأن حدود التكامل

تتحول الى $(0, \alpha x)$

وبتعويض النتائج في المعادلة (25-2) ينتج:

$$F_{GE}(x) = \frac{\alpha\lambda}{\alpha} \int_0^{\alpha x} \frac{e^y}{(e^y + \lambda - 1)^2} dy \quad (26 - 2)$$

وعلى فرض أن $(e^y + \lambda - 1) = z$ وبذلك فإن $e^y = z - \lambda + 1$

وان $y = \ln(z - \lambda + 1)$

الفصل الثاني (الجانب النظري)

وان $dy = \frac{1}{z-\lambda+1} dz$ علما بأن حدود التكامل تتحول الى $(\lambda, e^{\alpha x} + \lambda - 1)$

وبتعويض النتائج في المعادلة (26-2) ينتج

$$F_{GE}(x) = \lambda \int_{\lambda}^{e^{\alpha x} + \lambda - 1} \frac{z - \lambda + 1}{z^2} * \frac{1}{z - \lambda + 1} dz \quad (27 - 2)$$

وبإجراء الاختصارات وإجراء التكامل نحصل على:

$$= \lambda \int_{\lambda}^{e^{\alpha x} + \lambda - 1} \frac{1}{z^2} dz \rightarrow = \lambda \left[-\frac{1}{z} \right]_{\lambda}^{e^{\alpha x} + \lambda - 1} \quad (28 - 2)$$

وبتعويض حدود التكامل ينتج:

$$= \lambda \left[-\frac{1}{e^{\alpha x} + \lambda - 1} + \frac{1}{\lambda} \right]$$

$$\therefore F_{GE}(x) = 1 - \frac{\lambda}{e^{\alpha x} + \lambda - 1} \quad (29 - 2)$$

وبذلك فان دالة البقاء (المعولية) للتوزيع تعطى بالصيغة:

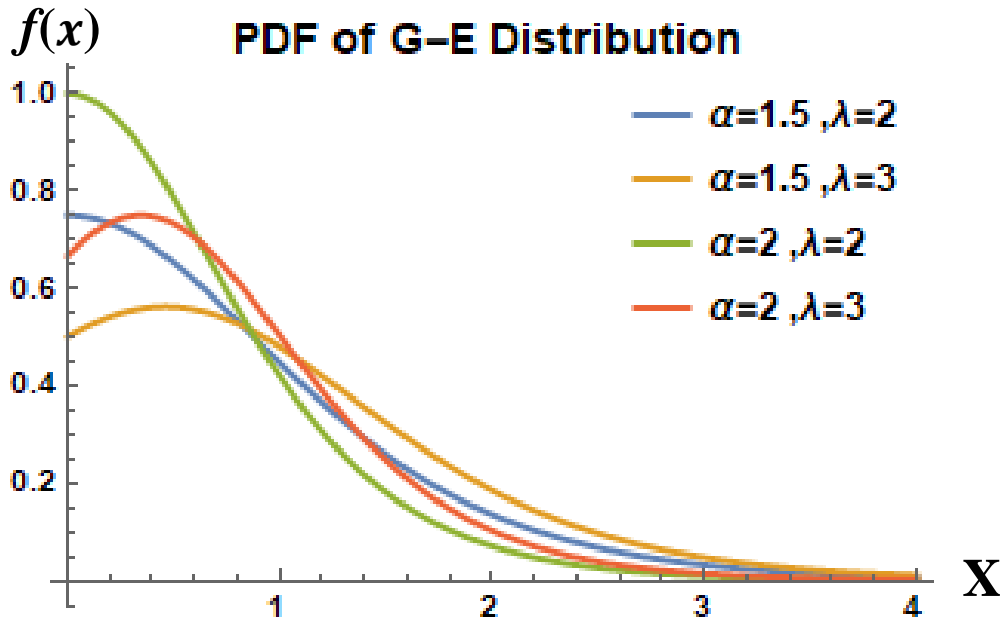
$$\therefore S_{GE}(x) = 1 - F(x) = \frac{\lambda}{e^{\alpha x} + \lambda - 1} \quad (30 - 2)$$

وان دالة المخاطرة للتوزيع تكون بالشكل الآتي:

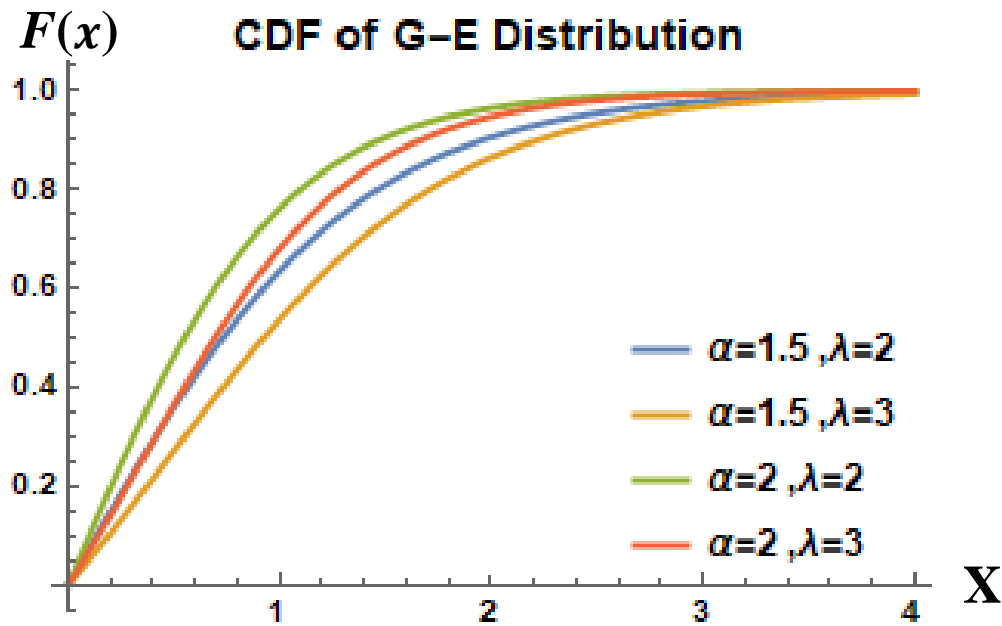
$$h_{GE}(x) = \frac{f(x)}{S(x)} = \frac{\alpha \lambda e^{\alpha x}}{(e^{\alpha x} + \lambda - 1)^2} * \frac{e^{\alpha x} + \lambda - 1}{\lambda} \quad (31 - 2)$$

$$\therefore h_{GE}(x) = \frac{\alpha e^{\alpha x}}{(e^{\alpha x} + \lambda - 1)} \quad (32 - 2)$$

والاشكال الآتية توضح دوال توزيع جمبرترز الاسي (E-GD) ولقيم مختلفة للمعلمات (α, λ)

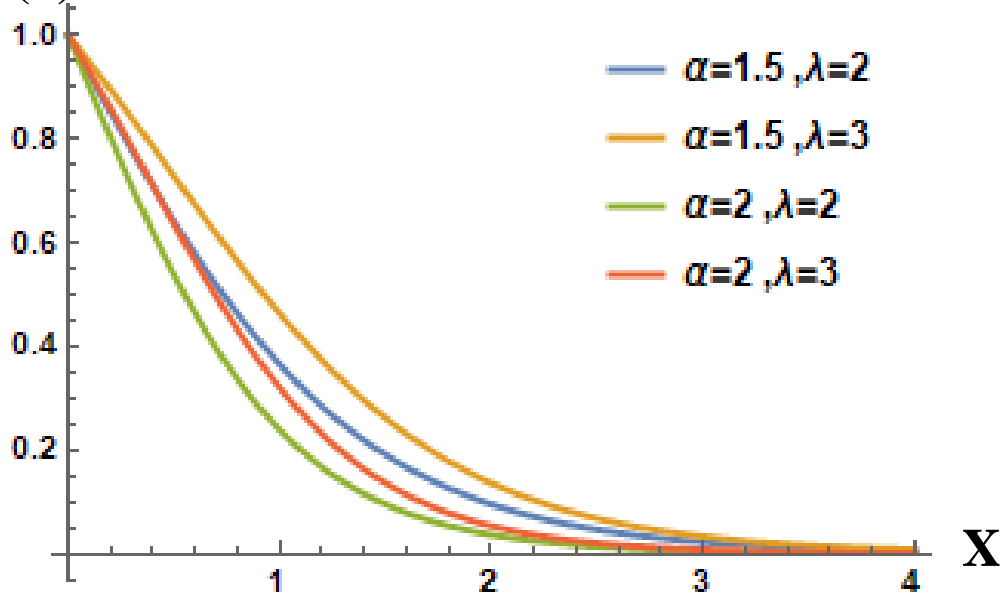


شكل (9-2) دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع جمبرتز الاسي [إعداد الباحث]



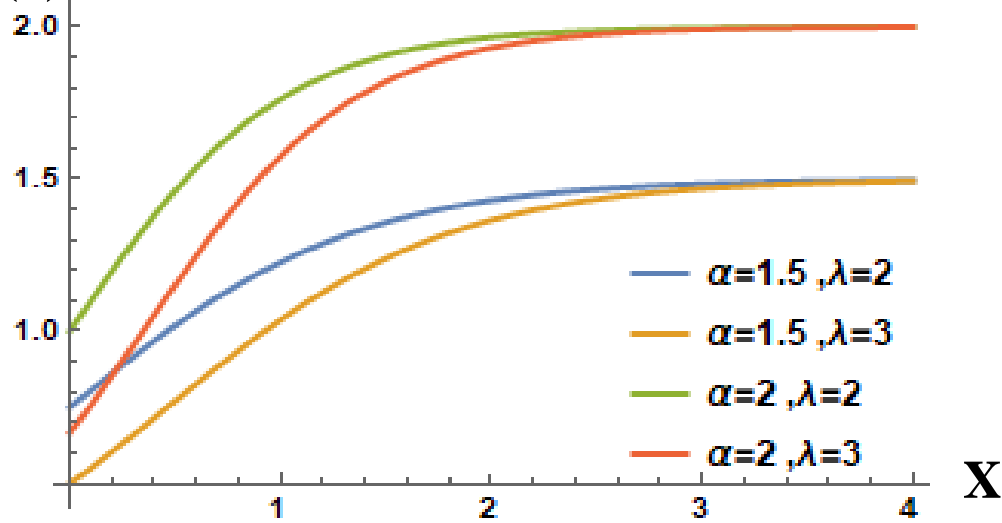
شكل (10-2) الدالة التجميعية لتوزيع جمبرتز الاسي [إعداد الباحث]

$s(x)$ Survival Function of G-E Distribution

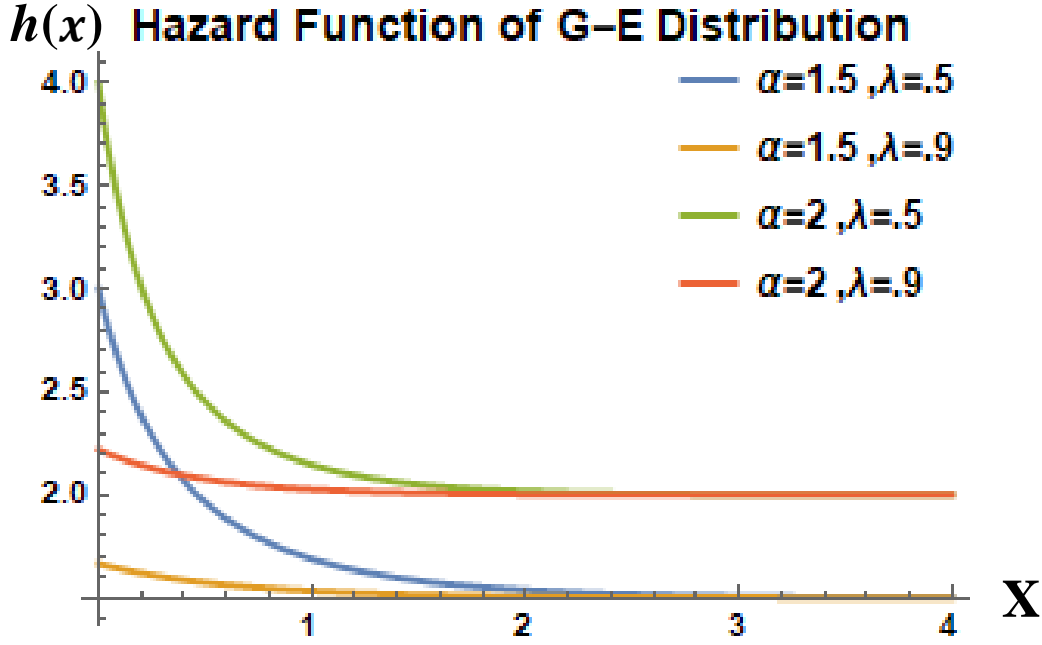


شكل (11-2) دالة البقاء لتوزيع جمبرتز الاسي [إعداد الباحث]

$h(x)$ Hazard Function of G-E Distribution



شكل (12-2) دالة المخاطرة لتوزيع جمبرتز الاسي عندما $(\lambda > 1)$ [إعداد الباحث]



شكل (13-2) دالة المخاطرة لتوزيع جمبرتز الاسي عندما ($\lambda < 1$) [إعداد الباحث]

كما نلاحظ من الاشكال (12-2) و (13-2) ان دالة المخاطرة لتوزيع جمبرتز الاسي بانها متزايدة او متناقصة او ثابتة مع الزمن ولكنها محددة بقيمة المعلمة (α)، فإذا كانت ($\lambda > 1$) فان دالة المخاطرة تبدأ بالتزايد لحين الوصول الى قيمة المعلمة (α) ثم تستقر وتكون ثابتة مع الزمن، واذا كانت ($\lambda < 1$) فان دالة المخاطرة تبدأ بالتناقص لحين الوصول الى قيمة المعلمة (α) ثم تستقر وتكون ثابتة مع الزمن، في حين اذا كانت ($\lambda = 1$) فان قيمة دالة المخاطرة تكون ثابتة مع الزمن ومساوية الى قيمة المعلمة (α)، وهذا أهم ما يميز التوزيع عن توزيع جمبرتز الذي تكون فيه دالة المخاطرة متزايدة مع الزمن وكذلك التوزيع الاسي الذي تكون فيه دالة المخاطرة ثابتة مع الزمن كما ذكرنا سابقا عند الاشكال (4-2) و (8-2).

1-8-2 خصائص توزيع جمبرتز الاسي (E-GD) [اعداد الباحث]

1-1-8-2 الدالة الكمية Quantile Function

يتم تعريف الدالة الكمية (العكسية) لتوزيع (E-GD) حسب الصيغة الآتية:

$$P(X \leq x) = F(x) = q \quad (33 - 2)$$

الفصل الثاني (الجانب النظري)

$$q = 1 - \frac{\lambda}{e^{\alpha x} + \lambda - 1} \quad (34 - 2)$$

$$\frac{\lambda}{e^{\alpha x} + \lambda - 1} = 1 - q \quad (35 - 2)$$

$$e^{\alpha x} + \lambda - 1 = \frac{\lambda}{1 - q} \rightarrow e^{\alpha x} = \frac{\lambda}{1 - q} - \lambda + 1 \quad (36 - 2)$$

$$\alpha x = \ln \left[\frac{\lambda q - q + 1}{1 - q} \right]$$

$$x_q = \frac{\ln \left[\frac{\lambda q - q + 1}{1 - q} \right]}{\alpha} \quad (37 - 2)$$

2-1-8-2 الوسيط Median

وهو احد مقاييس النزعة المركزية وتكون الصيغة العامة له كالآتي:

$$P(X \leq x) = F(x) = 0.5 \quad (38 - 2)$$

$$x_M = \frac{\ln \left[\frac{\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2} + 1}{1 - \frac{1}{2}} \right]}{\alpha} \rightarrow x_M = \frac{\ln[\lambda + 1]}{\alpha} \quad (39 - 2)$$

3-1-8-2 الدالة المولدة للعزوم Moment Generating Function

$$\begin{aligned} M_x^t &= E(e^{tx}) = \int_0^{\infty} \alpha \lambda e^{tx} \frac{e^{\alpha x}}{(e^{\alpha x} + \lambda - 1)^2} dx \\ &= \alpha \lambda \int_0^{\infty} e^{tx} \frac{e^{\alpha x}}{(e^{\alpha x} + \lambda - 1)^2} dx \\ &= \alpha \lambda \int_0^{\infty} \frac{e^{(t+\alpha)x}}{(e^{\alpha x} + \lambda - 1)^2} dx \end{aligned}$$

الفصل الثاني (الجانب النظري)

$$= \alpha \lambda \int_0^{\infty} \frac{e^{x(t+\alpha)}}{(e^{x\alpha} + \lambda - 1)^2} dx$$

$$M_x^t = E(e^{tx}) = \alpha \lambda \int_0^{\infty} e^{tx} \frac{e^{\alpha x}}{(e^{x\alpha} + \lambda - 1)^2} dx \quad (40 - 2)$$

وقد تم الحصول على الصيغة النهائية للدالة المولدة للعزوم باستخدام برنامج (Mathematica) وحسب الصيغة الآتية:

$$M_x^t = 1 + \frac{t(1 - \lambda)^{-1 + \frac{t}{\alpha}} \lambda B[1 - \lambda, 1 - \frac{t}{\alpha}, 0]}{\alpha} \quad (41 - 2)$$

حيث ان $B(\dots)$ يمثل دالة بيتا الغير كاملة

وباشتقاق الصيغة (41-2) بالنسبة للمتغير t والتعويض عن t بالصفر في المشتقة وحسب درجة العزم يمكن الحصول على اي عزم من عزوم التوزيع.

Mean الوسط 4-1-8-2

باشتقاق الصيغة (41-2) بالنسبة للمتغير t والاستعاضة عن t بالصفر يتم الحصول على الوسط الحسابي للتوزيع والذي يكون بالصيغة الآتية:-

$$E(x) = \frac{\lambda \text{Ln}[\lambda]}{\alpha(\lambda - 1)} = \mu_1^* \quad (42 - 2)$$

5-1-8-2 العزوم المركزية (Central Moments):

$$\mu_k = E(x - E(x))^k \longrightarrow \mu_k = E(x - \mu_1^*)^k$$

باستعمال قاعدة مفكوك نيوتن:

$$(x - y)^k = \sum_{j=0}^k C_j^k (-1)^j x^{k-j} y^j$$

فإن:

$$\begin{aligned}\mu_k &= \sum_{j=0}^k C_j^k (-1)^j x^{k-j} \mu_1^{*j} \\ &= \sum_{j=0}^k C_j^k (-1)^j x^{k-j} \left(\frac{\lambda \text{Ln}[\lambda]}{\alpha(\lambda - 1)} \right)^j\end{aligned}$$

الحد أعلاه عبارة عن متسلسلة حدودية طويلة جدا وقد تم إيجاد ناتجها مباشرة باستعمال برنامج (Mathematica) وكالآتي:

$$\begin{aligned}\mu_k &= E(x - E(x))^k = E(x - \mu_1^*)^k \\ &= \sum_{j=0}^k C_j^k (-1)^j x^{k-j} \mu_1^{*j}\end{aligned}\quad (43 - 2)$$

6-1-8-2 Skewness الالتواء

مؤشر لقياس درجة واتجاه تماثل دالة التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي، ومن الجدير بالذكر بأن توزيع (E-GD) هو توزيع ملتوي نحو اليمين أي ان قيمة معامل التواء التوزيع دائماً ما تكون موجبة ويتم الحصول على معامل التواء التوزيع حسب الصيغة الرياضية الآتية:

$$\begin{aligned}S.K &= \frac{\mu_3}{(\mu_2)^{\frac{3}{2}}} \\ S.K &= \frac{\sum_{j=0}^3 C_0^3 (-1)^j x^{3-j} \left(\frac{\lambda \text{Ln}[\lambda]}{\alpha(\lambda - 1)} \right)^j}{\left(\sum_{j=0}^2 C_0^2 (-1)^j x^{2-j} \left(\frac{\lambda \text{Ln}[\lambda]}{\alpha(\lambda - 1)} \right)^j \right)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}\quad (44 - 2)$$

إذ أن μ_2, μ_3 تمثل العزوم المركزية للتوزيع.

7-1-8-2 التفلطح kurtosis

هو مؤشر لقياس درجة تحذب أو تقوس دالة التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي ويتم ايجاد معامل تفرطح التوزيع حسب الصيغة الآتية:

$$K. u = \frac{\mu_4}{(\mu_2)^2} - 3$$

$$= \frac{\sum_{j=0}^4 C_j^4 (-1)^j x^{4-j} \left(\frac{\lambda \text{Ln}[\lambda]}{\alpha(\lambda - 1)} \right)^j}{\left(\sum_{j=0}^2 C_j^2 (-1)^j x^{2-j} \left(\frac{\lambda \text{Ln}[\lambda]}{\alpha(\lambda - 1)} \right)^j \right)} \quad (45 - 2)$$

إذ أن μ_2, μ_4 تمثل العزوم المركزية للتوزيع.

(9-2) طرائق التقدير Estimation Methods

هناك العديد من طرائق التقدير التي يمكن استعمالها لتقدير معالم توزيع جمبرتز الاسي وفي هذا الجزء سيتم التطرق الى عدد من طرائق التقدير التي تم استعمالها لحساب مقدرات دالة المخاطرة وعلى النحو الآتي:

1-9-2 طريقة الامكان الأعظم Maximum likelihood method [29]

تتضمن مقدرات طريقة الإمكان الأعظم في هذا الفصل مقدرات المعالم ودالة المخاطرة لتوزيع جمبرتز الاسي وعلى النحو الآتي :

1-1-9-2 مقدرات الامكان الاعظم لمعاملات توزيع جمبرتز الاسي

تُعد طريقة الإمكان الأعظم من الطرائق الشائعة الاستعمال لتقدير معالم دوال التوزيعات الاحتمالية، وقد تم استعمال دالة الإمكان الأعظم (Likelihood Function) لأول مرة من قبل الباحث Fisher [29] عام 1922 والتي تهدف الى جعل دالة الإمكان للمتغيرات العشوائية في نهايتها العظمى، ويفترض هذا الاسلوب في التقدير بان المعلمة المراد تقديرها هي قيمة ثابتة

الفصل الثاني (الجانب النظري)

(Fixed value) غير معلومة بمعنى ان التقدير سيعتمد على بيانات العينة للملاحظات فقط لذلك سنكون بحاجة الى دالة الإمكان الأعظم للمتغير العشوائي المستعمل ويتم تقدير المعلمات عن طريق مساواة مشتقة دالة الإمكان بالنسبة للمعلمات المراد تقديرها بالصفر، ومما يميز طريقة الإمكان الأعظم امتلاكها لخاصية عدم التغير او الثبات (Invariant) ما جعلها طريقة مفضلة فضلا عن أنها تعطي مقدرات غالبا ما تكون غير متحيزة (Unbiased) عندما يكون حجم العينة كبيرا وامتلاكها لأقل تباين ممكن وكافية (Sufficient) ووحيدة (Unique).

ولتقدير معلمات توزيع جمبرتر الاسي ذي المعلمتين (α, λ) وبفرض ان دالة الكثافة الاحتمالية هي $f(t_i|\alpha, \lambda)$ عندها تكون دالة الإمكان (L) وفق الصيغة الآتية:

$$L = f(t_1, t_2, \dots, t_n|\alpha, \lambda) = \prod_{i=1}^n f(t_i|\alpha, \lambda) \quad (46 - 2)$$

$$\prod_{i=1}^n f(t_i|\alpha, \lambda) = \prod_{i=1}^n \frac{e^{\alpha x_i} \alpha \lambda}{(-1 + e^{\alpha x_i} + \lambda)^2} \quad (47 - 2)$$

ولتقدير معلمات دالة الإمكان بأخذ اللوغاريتم الطبيعي لطرفي المعادلة (47-2):

$$\ln L = \sum_{i=1}^n \ln[f(t_i|\alpha, \lambda)] \quad (48 - 2)$$

$$\ln L = n(\ln[\alpha] + \ln[\lambda]) - 2 \sum_{i=1}^n \ln[-1 + e^{\alpha x_i} + \lambda] + \alpha \sum_{i=1}^n x_i \quad (49 - 2)$$

وللحصول على دالة الإمكان في نهايته العظمى يتم اشتقاق الدالة بالنسبة الى المعلمات المجهولة:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = \frac{n}{\hat{\alpha}} + \sum_{i=1}^n x_i - 2 \sum_{i=1}^n \frac{e^{\hat{\alpha} x_i} x_i}{-1 + e^{\hat{\alpha} x_i} + \lambda} \quad (50 - 2)$$

الفصل الثاني (الجانب النظري)

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = \frac{n}{\hat{\lambda}} - 2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{-1 + e^{\alpha x_i} + \hat{\lambda}} \quad (51 - 2)$$

وبمساواة المعادلات آنفاً للصفر وحل تلك المعادلات نحصل على مقدرات المعلمات المطلوبة والخاصة بطريقة الإمكان الأعظم.

وبعد حل المعادلات بالاعتماد على احد الطرق العددية لإيجاد المقدرات $(\hat{\alpha}_{mle}, \hat{\lambda}_{mle})$ إذ تم تطبيق طريقة نيوتن رافسون Newton's Raphson method لإيجاد حلول لمنظومة المعادلات آنفة الذكر .

2-1-9-2 مقدرات الامكان الاعظم لدالة المخاطرة توزيع جمبرتز الاسي

باستعمال خاصية الثبات (Invariant) لمقدرات طريقة الإمكان الأعظم يمكن الحصول على مقدر دالة المخاطرة باستعمال طريقة الإمكان الأعظم عن طريق تعويض النتائج التي يتم الحصول عليها من مقدرات الإمكان الأعظم للمعلمات $(\hat{\alpha}_{mle}, \hat{\lambda}_{mle})$ الخاصة بتوزيع جمبرتز الأسّي كما في المعادلة الآتية :

$$\hat{h}_{E-G}(x) = \frac{\hat{\alpha}_{mle} e^{\hat{\alpha}_{mle} x}}{(e^{x \hat{\alpha}_{mle}} + \hat{\lambda}_{mle} - 1)} \quad (52 - 2)$$

يتم تعويض قيم المعلمات الناتجة من حل المعادلات (50-2) و (51-2) والتي تمثل مقدرات الإمكان الأعظم للمعلمات (β, α) على التوالي للحصول على قيمة دالة المخاطرة لتوزيع (جمبرتز-الأسّي) ولا يوجد تفصيل آخر لأن النتائج يتم الحصول عليها برمجياً.

2-9-2 طريقة المربعات الصغرى الموزونة Weighted least square method [12][28]

تستعمل المربعات الصغرى الموزونة لتقليل مجموع مربعات الخطأ اقل ما يمكن، وتعرف صيغتها بالشكل الآتي :

$$Q_w = \sum_{i=1}^n w_i \left[F(x_i) - \frac{i}{n+1} \right]^2 \quad (53 - 2)$$

الفصل الثاني (الجانب النظري)

إذ أن i تمثل تسلسل المشاهدة في العينة

$F(x_i)$ تمثل دالة التوزيع التراكمية لتوزيع جمبرتز الاسي (E-GD)

وان w_i يمثل الوزن [12] وصيغته هي :

$$w_i = \frac{(n+1)^2(n+2)}{i(n-i+1)} \quad (54-2)$$

1-2-9-2 مقدرات المربعات الصغرى الموزونة لمعاملات توزيع جمبرتز الاسي

بتعويض صيغة دالة التوزيع التراكمي من المعادلة (25-2) كذلك الوزن من المعادلة (54-2) في المعادلة (53-2) ينتج :

$$Q_w = \sum_{i=1}^n \frac{(n+1)^2(n+2)}{i(n-i+1)} \left[\left(1 - \frac{\lambda}{e^{\alpha x} + \lambda - 1}\right) - \frac{i}{n+1} \right]^2 \quad (55-2)$$

بالاشتقاق الجزئي للمعادلة (55-2) بالنسبة للمعلمة α :

$$\frac{\partial Q_w}{\partial \alpha} = 2 \sum_{i=1}^n \frac{(n+1)^2(n+2)}{i(n-i+1)} \left[\left(1 - \frac{\lambda}{e^{\alpha x} + \lambda - 1}\right) - \frac{i}{n+1} \right] \left(-\frac{e^{\alpha x} \lambda x_i}{(-1+e^{\alpha x} + \lambda)^2} \right) \quad (56-2)$$

وبعد التبسيط ينتج:

$$\frac{\partial Q_w}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n \frac{(1+n)^2(2+n) \left(-\frac{2e^{\alpha x} \lambda^2 x_i}{(-1+e^{\alpha x} + \lambda)^3} + \frac{2e^{\alpha x} \lambda x_i}{(-1+e^{\alpha x} + \lambda)^2} - \frac{2e^{\alpha x} \lambda x_i}{(1+n)(-1+e^{\alpha x} + \lambda)^2} \right)}{i(1-i+n)} \quad (57-2)$$

بالاشتقاق الجزئي للمعادلة (55-2) بالنسبة للمعلمة λ :

$$\frac{\partial Q_w}{\partial \lambda} = 2 \sum_{i=1}^n \frac{(n+1)^2(n+2)}{i(n-i+1)} \left[\left(1 - \frac{\lambda}{e^{\alpha x} + \lambda - 1}\right) - \frac{i}{n+1} \right] \left(\frac{-1+e^{\alpha x}}{(-1+e^{\alpha x} + \lambda)^2} \right) \quad (58-2)$$

وبعد التبسيط ينتج:

$$\frac{\partial Q_w}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^n \frac{(1+n)^2(2+n) \left(-\frac{2\lambda^2}{(-1+e^{\alpha x} + \lambda)^3} + \frac{4\lambda}{(-1+e^{\alpha x} + \lambda)^2} - \frac{2i\lambda}{(1+n)(-1+e^{\alpha x} + \lambda)^2} - \frac{2}{-1+e^{\alpha x} + \lambda} + \frac{2i}{(1+n)(-1+e^{\alpha x} + \lambda)} \right)}{i(1-i+n)} \quad (59-2)$$

الفصل الثاني (الجانب النظري)

وبمساواة المعادلات (57-2) و(59-2) للصفر وحل تلك المعادلات بالاعتماد على احد الطرائق العددية لإيجاد المقدرات $(\hat{\alpha}_{wls}, \hat{\lambda}_{wls})$ إذ تم تطبيق طريقة نيوتن رافسون Newton's Raphson method لإيجاد حلول لمنظومة المعادلات آنفة الذكر نحصل على مقدرات المعلمة المطلوبة .

2-2-9-2 مقدرات المربعات الصغرى الموزونة لدالة المخاطرة لتوزيع جمبرتز الاسي

يمكن الحصول على مقدر دالة المخاطرة باستعمال طريقة المربعات الصغرى الموزونة عن طريق تعويض النتائج التي يتم الحصول عليها من مقدرات المربعات الصغرى الموزونة للمعلمة $(\hat{\alpha}_{wls}, \hat{\lambda}_{wls})$ الخاصة بتوزيع جمبرتز الاسي كما في المعادلة الآتية :

$$\hat{h}_{E-G}(x) = \frac{\hat{\alpha}_{wls} e^{\hat{\alpha}_{wls} x}}{(e^{x \hat{\alpha}_{wls}} + \hat{\lambda}_{wls} - 1)} \quad (60 - 2)$$

3-9-2 طريقة كرامر فون ميس Carmer-von mises method [25][26]

تستند هذه الطريقة إلى تصغير إحصاءات دالة التوزيع التجريبي Empirical Distribution Function (EDF) ويمكن استعمالها لأن إحصاءات التوزيع التجريبي (EDF) تستعمل لاختبار حسن المطابقة أو الملائمة للتوزيعات المستمرة وتنص الطريقة على جعل دالة مجموع مربعات المسافة في نهايتها الصغرى وبالاعتماد على المقدرات الموجودة في الدالة التوزيعية (CDF)، ويمكن تقدير معلمة التوزيع عن طريق ايجاد الحد الأدنى للمقدار الآتي:

$$C = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left[F(x_i; \alpha, \lambda) - \frac{2i-1}{2n} \right]^2 \quad (61 - 2)$$

إذ أن: i تمثل تسلسل المشاهدة في العينة

n تمثل حجم العينة

الفصل الثاني (الجانب النظري)

2-3-9-1 مقدرات كرامر فون ميس لمعطيات توزيع جمبرتز الاسي

وبتعويض معادلة (25-2) في معادلة (61-2) ينتج:-

$$C = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\lambda}{-1 + e^{\alpha x_i} + \lambda} - \frac{2i-1}{2n} \right]^2 \quad (62-2)$$

بالاشتقاق الجزئي للمعادلة (62-2) بالنسبة للمعلمة α :

$$\frac{\partial C}{\partial \alpha} = 2 \sum_{i=1}^n \left[\frac{\lambda}{-1 + e^{\alpha x_i} + \lambda} - \frac{2i-1}{2n} \right] \left(-\frac{e^{\alpha x_i} \lambda x_i}{(-1 + e^{\alpha x_i} + \lambda)^2} \right) = 0 \quad (63-2)$$

وبتبسيط المعادلة (63-2) ينتج:

$$\sum_{i=1}^n \left(-\frac{2e^{\alpha x_i} \lambda^2 x_i}{(-1 + e^{\alpha x_i} + \lambda)^3} + \frac{2e^{\alpha x_i} \lambda x_i}{(-1 + e^{\alpha x_i} + \lambda)^2} + \frac{e^{\alpha x_i} \lambda x_i}{n(-1 + e^{\alpha x_i} + \lambda)^2} - \frac{2e^{\alpha x_i} i \lambda x_i}{n(-1 + e^{\alpha x_i} + \lambda)^2} \right) = 0 \quad (64-2)$$

وبالاشتقاق الجزئي للمعلمة (λ) ينتج

$$\frac{\partial C}{\partial \lambda} = 2 \sum_{i=1}^n \left[\frac{\lambda}{-1 + e^{\alpha x_i} + \lambda} - \frac{2i-1}{2n} \right] \left(\frac{-1 + e^{\alpha x_i}}{(-1 + e^{\alpha x_i} + \lambda)^2} \right) = 0 \quad (65-2)$$

وبعد التبسيط ينتج:

$$\sum_{i=1}^n \frac{(1+n)^2(2+n) \left(-\frac{2\lambda^2}{(-1 + e^{\alpha x_i} + \lambda)^3} + \frac{4\lambda}{(-1 + e^{\alpha x_i} + \lambda)^2} - \frac{2i\lambda}{(1+n)(-1 + e^{\alpha x_i} + \lambda)^2} - \frac{2}{-1 + e^{\alpha x_i} + \lambda} + \frac{2i}{(1+n)(-1 + e^{\alpha x_i} + \lambda)} \right)}{i(1-i+n)} = 0 \quad (66-2)$$

وبحل المعادلتين (64-2) و(66-2) بالاعتماد على احد الطرق العددية لايجاد المقدرات $(\hat{\alpha}_{cvm}, \hat{\lambda}_{cvm})$ إذ تم تطبيق طريقة نيوتن رافسون Newton's Raphson method لايجاد حلول لمنظومة المعادلات اعلاه نحصل على مقدرات المعلمات المطلوبة.

2-3-9-2 مقدرات كرامر فون ميس لدالة المخاطرة لتوزيع جمبرتز الاسي

يمكن الحصول على مقدر دالة المخاطرة باستعمال طريقة كرامر فون ميس عن طريق تعويض النتائج التي يتم الحصول عليها من مقدرات كرامر فون ميس للمعلمات $(\hat{\alpha}_{cvm}, \hat{\lambda}_{cvm})$ الخاصة بتوزيع جمبرتز الاسي كما في المعادلة الآتية :

$$\hat{h}_{E-G}(x) = \frac{\hat{\alpha}_{cvm} e^{\hat{\alpha}_{cvm} x}}{(e^{x \hat{\alpha}_{cvm}} + \hat{\lambda}_{cvm} - 1)} \quad (67 - 2)$$

Criteria for comparing طرائق التقدير (10-2) معايير مقارنة طرائق التقدير estimation methods

Mean Square Error"-MSE" الخطأ متوسط مربع الخطأ 1-10-2

إذا كان $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ لعينة عشوائية من $f(t_i|\theta)$ والاحصاء T مقدر لـ $\varphi(\theta)$. فإن متوسط مربع الخطأ MSE يعرف كالآتي :

$$\begin{aligned} MSE &= E[T - \varphi(\theta)]^2 \\ &= V(T) + b^2(\theta) \end{aligned}$$

إذ أن θ تمثل متجه معلمات التوزيع

$\varphi(\theta)$ تمثل القيمة الحقيقية للمعلمة

ونلاحظ من هذه العلاقة بأنه عندما $b(\theta) = 0$ فإن $MSE = V(T)$ أي ان التباين هو حالة خاصة من معدل مربع الخطأ . ولهذا السبب فان MSE يستخدم كمعيار شامل لقياس دقة نتائج أنموذج معين بدلاً من التباين .

ويتم حساب MSE لدالة المخاطرة الخاصة بتوزيع جمبرتز الاسي (E-GD) عن طريق المعادلة الآتية:

$$MSE[\hat{h}(t_j)] = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R (\hat{h}_i(t_j) - h(t_j))^2, \quad j = 1, 2, \dots, K \quad (68 - 2)$$

إذ ان:

$h_i(t_j)$ تمثل القيم الحقيقية لدالة مخاطرة التوزيع.

الفصل الثاني (الجانب النظري)

$\hat{h}_i(t_j)$: تمثل القيم المقدرة لدالة بقاء التوزيع حسب الطريقة المستعملة للتقدير.

R : تمثل عدد تكرارات التجربة في هذه الرسالة والمساوية الى (1000).

K : تمثل عدد مشاهدات التجربة (قيم t_j).

وللوصول الى المقدر الأفضل لتقدير دالة المخاطرة ولكون (MSE) يحسب لكل (t_j) من الزمن فتم المفاضلة بين طرائق التقدير المدروسة بواسطة المقياس متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) الذي هو عبارة عن تكامل للمساحة الكلية لـ (t_j) واختزالها بقيمة واحدة معبرة عن الزمن الكلي وان صيغة هذا المقياس هي:

$$IMSE[\hat{h}(t_j)] = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K \left[\frac{1}{R} \sum_{i=1}^R (\hat{h}_i(t_j) - h(t_j))^2 \right]$$

$$IMSE[\hat{h}(t_j)] = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K MSE[\hat{h}(t_j)] \quad (69 - 2)$$

الفصل الثالث

الجانب

التجريبي

والعقلي

(1-3) تمهيد (preamble)

يشتمل هذا الفصل قسمين أساسيين فقد تضمن الاول النتائج التي تم الحصول عليها باستعمال اسلوب المحاكاة (مونت كارلو) إذ تم توليد بيانات تتبع توزيع جمبرتز الاسي (E-GD) عن طريق بناء برنامج ضمن بيئة إحدى لغات البرمجة المرئية وهي لغة وولفرام (Wolfram) ، وذلك من اجل المقارنة بين طرائق تقدير دالة المخاطرة لتوزيع جمبرتز الاسي (E-GD) والقيام بتحليل تلك النتائج، إذ أن المقارنة على أساس احد المعايير الإحصائية وهو معيار مجموع مربعات الخطأ التكلمي (IMSE) (Integration Mean Square Error) وبحسب هذا المعيار فان الطريقة التي تمتلك اقل مجموع مربعات أخطاء تكاملية هي الفضلى.

في حين يتضمن الآخر استعمال عينة لبيانات من الواقع العملي والتي تتمثل بمرضى سرطان الثدي المسجلين في مركز الاورام في محافظة صلاح الدين من اجل تقدير دالة المخاطرة لهم باستعمال فضلى الطرائق من القسم الاول وتطبيقها على التوزيع جمبرتز الاسي (E-GD) ومقارنته بالتوزيعات الكلاسيكية المكونة له.

القسم الاول:

(2-3) المفهوم العام للمحاكاة

يلجأ الباحثون إلى استعمال اسلوب المحاكاة في حالة صعوبة الحصول على البيانات الخاصة بظاهرة معينة أو إذا كان الحصول على تلك البيانات يتطلب الكثير من الجهد والوقت والمال، أو في حال عدم توافر تلك البيانات بالشكل الكافي.

لقد واجه الباحثون صعوبات بالغة في تحليل العديد من النظريات الإحصائية والهندسية باستعمال البراهين الرياضية وظهرت العديد من الظواهر صعبة الفهم والتحليل إذ ظهرت الحاجة إلى وصف تلك الظواهر والنظريات بصورة مشابهة الى حد كبير لصورها الحقيقية ضمن نماذج معينة ووفق عمليات رياضية إذ يتمكن الباحثون من فهم وإدراك وتحليل تلك الظواهر عن طريق محاكاة النماذج التي تصفها وهو ما يعرف بالمحاكاة [2]

الفصل الثالث (الجانب التجريبي والعملي)

ويمكن تعريف المحاكاة أنها عملية بناء أنموذج يشبه الواقع الحقيقي إلى حد كبير وبعبارة أخرى يمكن القول بان المحاكاة عملية إعطاء صورة بديلة لنظام معين دون إعطاء صورة لذلك النظام الذي هو عبارة عن علاقة دالية تشمل مجموعة الأجزاء التي تعرف بأنها مكونات ذلك النظام

وبصورة عامة فان مفهوم المحاكاة يستند إلى علاقات رياضية ودالية ومنطقية تصف التجربة المراد دراستها تعمل داخل الحاسب الالكتروني لذلك نلاحظ مؤخرا تطورا وتعددا لأساليب المحاكاة نتيجة التطور السريع في الحواسيب الالكترونية.

وغالبا ما يستعمل اسلوب المحاكاة لملاحظة وتحديد التغيرات التي تحدث على صياغة المشكلة عند تنفيذها عمليا كما تعد المحاكاة أسلوبا من أساليب اختبار التجربة قبل تطبيقها واقعا على بيانات حقيقية وبذلك تعطي المحاكاة للباحث قاعدة تجريبية تضاف للقاعدة النظرية لكي تمكن الباحث من تحديد الاسلوب الملائم لدراسة تلك التجربة، فضلا عن أنها تضمن حصول الباحثين على التحليلات الرياضية والحلول لبعض التكاملات والمعادلات التفاضلية المعقدة.

إن النتائج التي تظهرها المحاكاة تمتاز بالدقة لذلك نجد الباحثين يعتمدونها أساسا عند دراسة مجموعة من التجارب لغرض المقارنة فيما بينها

وهنا يجب الإشارة إلى أن دقة نتائج المحاكاة تعتمد وبشكل رئيسي على درجة المشابهة بين تجربة المحاكاة والواقع العملي الذي تمثله [4].

إن من أكثر طرائق المحاكاة شيوعاً في التحليل هي طريقة مونت كارلو (Monte Carlo) والتي تستعمل كثيرا في توليد مشاهدات للتوزيعات الاحتمالية المعروفة وان اسلوب محاكاة مونت كارلو يعتمد على قابلية الحاسبات الالكترونية في توليد الأعداد العشوائية التي تحاكي العملية العشوائية لتوليد بيانات معينة، وأنها تتناول عددا كبيرا من العينات التي يجب ان تكون مشاهداتها مستقلة، ويمكن تلخيص آلية طريقة مونت كارلو بالخطوات الآتية:-

- 1- استعمال دالة الكثافة التجميعية التي تصف الأنموذج قيد الدراسة في توليد الأعداد العشوائية التي تتبع التوزيع المنتظم على المدة [1,0].
- 2- تحويل الأعداد العشوائية التي تم توليدها في الخطوة السابقة إلى المتغير العشوائي الذي يصف الأنموذج ويتبع توزيعا إحصائيا معينيا باستعمال أسلوب رياضي إحصائي.

(3-3) الأرقام العشوائية:-

هي عملية توليد قيم في معادلة خاصة عددا من المرات تعطي في كل مرة رقما عشوائيا مختلفا عن سابقه وتتراوح قيمها بين الصفر والواحد وان طبيعة هذه الأرقام إنها تتبع التوزيع المنتظم (Uniform Distribution). وتكون الفائدة العلمية من هذه العملية هي اننا نستطيع الحصول على متغيرات عشوائية من أي توزيع إحصائي احتمالي وذلك باستعمال وسائل رياضية لتحويل هذه الأرقام العشوائية إلى متغيرات عشوائية من التوزيع الإحصائي قيد الدراسة.

(4-3) بناء أنموذج المحاكاة:-

تضمنت تجارب المحاكاة كتابة مجموعة من البرامج بلغة وولفرام ماثماتيكا (Wolfram Mathematica) والمبينة في الملحق 2 إذ يتطلب بناء أنموذج المحاكاة تحقيق ثلاثة مراحل أساسية لتقدير دالة المخاطرة لتوزيع جمبرتز الاسي (G-ED) وهي كالآتي:-

المرحلة الأولى:-

تعيين القيم الأولية الافتراضية لمعلمتي التوزيع (α, λ) وحجوم العينات وعدد تكرارات التجربة، إذ يتم في هذه المرحلة تحديد المدخلات الأساسية التي بدورها تبني أنموذج المحاكاة الذي يمثل التجربة و تُعد هذه المرحلة الأساس الذي تستند إليه مراحل المحاكاة اللاحقة وتتضمن الآتي:-

أولاً:- تحديد القيم الافتراضية لمعلمتي التوزيع (α, λ)

تم تحديد قيم افتراضية لمعلمتي التوزيع على افتراض انهما غير معلومتين إذ أخذت كل معلمة عددا من القيم الافتراضية وقد تم تشكيل النماذج الآتية:

الفصل الثالث (الجانب التجريبي والعملي)

جدول (1-3) يبين القيم الافتراضية الأولية للمعلمات والنماذج المقترحة

Model	α	λ
1	1.5	0.5
2	1.5	1.5
3	1.5	3
4	2	0.5
5	2	1.5
6	2	3
7	0.2	0.5
8	0.5	0.5
9	0.5	4
10	0.5	6.5

ثانياً:- تحديد حجم العينة (n):-

تم اختيار حجوم عينات مختلفة بشكل يتناسب مع تأثير حجم العينة على مدى دقة وكفاية النتائج المتحصلة من طرائق التقدير التي تم استعمالها في هذه الرسالة وكذلك مراعاة تناسبها مع حجم العينة الحقيقية للبيانات المدروسة إذ تم أخذ حجم عينة صغيرة (n=20) وحجمي عينة متوسط (n=50;75) واخيرا حجم عينة كبير (n=100).

ثالثاً:- تحديد عدد مرات تكرار التجربة

وقد تم تكرار هذه التجارب بمقدار 1000 مرة (R=1000) لكل تجربة من اجل الوصول الى مستوى افضل من التجانس.

المرحلة الثانية:-

(مرحلة توليد البيانات)

تم في هذه المرحلة توليد بيانات عشوائية تتبع توزيع جمبرتز الاسي وذلك باستعمال طريقة التحويل المعكوس لسهولة وكفايتها وكالاتي:

أولاً: توليد أرقام عشوائية U_i تتبع التوزيع المنتظم ضمن المدة [1,0]

الفصل الثالث (الجانب التجريبي والعملي)

U_i : يمثل متغيراً عشوائياً ومستمرًا يتبع التوزيع المنتظم يتم توليده باستعمال البرنامج على وفق الصيغة الآتية :-

$$U = [0 \leq p \leq 1], p \sim \text{UniformDistribution}[]$$

ثانياً : تحويل البيانات المولدة من الخطوة الاولى التي تتبع التوزيع المنتظم الى بيانات تتبع توزيع جمبرتز الاسي (E-GD) باستعمال طريقة التحويل المعكوس وحسب المعادلة (37-2) وكما في الصيغة الآتية :-

$$t_i = \frac{\ln\left[\frac{\lambda u - u + 1}{1 - u}\right]}{\alpha} \quad (1 - 3)$$

المرحلة الثالثة :- (مرحلة إيجاد مقدرات دالة المخاطرة لتوزيع جمبرتز الاسي)

تمت في هذه المرحلة إيجاد تقدير لمعلمتي توزيع جمبرتز الاسي (E-GD) عن طريق طرائق التقدير التي تناولها البحث في الجانب النظري من الدراسة ومن ثم إيجاد دالة المخاطرة للتوزيع وبحسب الصيغ الآتية:-

1- مقدر طريقة الامكان الاعظم وحسب المعادلة (52-2)

2- مقدر طريقة المربعات الصغرى الموزونة وحسب المعادلة (60-2)

3- مقدر طريقة كرامر فون ميس وحسب المعادلة (67-2)

المرحلة الرابعة :- (مرحلة المقارنة)

تمت في هذه المرحلة عملية المقارنة بين مقدرات دالة المخاطرة لتوزيع جمبرتز الاسي (E-GD) إذ تمت المقارنة باستعمال معيار مجموع مربعات الخطأ التكلمي (IMSE) وبحسب الصيغة (69-2) إذ أن الطريقة الافضل هي التي تمتلك اقل قيمة للمقياس (IMSE).

(5-3) نتائج المحاكاة:-

لقد تم في هذا المبحث الحصول على النتائج النهائية لتطبيق أسلوب المحاكاة اذ يتم عرض وتحليل نتائج محاكاة طرائق التقدير للوصول إلى أفضل مقدر لدالة المخاطرة لتوزيع جمبرتز الاسي (E-GD) بالطرائق المدروسة كافة باستعمال معيار المقارنة (IMSE) ضمن الجداول (1)

الفصل الثالث (الجانب التجريبي والعملي)

الى (10) المبينة في الملحق 1 وتم بعد ذلك استخلاص النتائج الخاصة بمعيار متوسط مربعات الخطأ التكاملية (IMSE) وتلخيصها في الجدول (2-3) من اجل تحديد افضل الطرائق.

جدول (2-3) يمثل متوسط مربعات الخطأ التكاملية IMSE لطرائق التقدير كافة و نماذج قيم المعلمات الافتراضية وأحجام العينات

Models	n	ML	CVM	WLS	Best
Model 1	20	0.844237	1.419719	0.8351	WLS
	50	0.214406	0.391636	0.243245	MLE
	75	0.096649	0.180332	0.122366	MLE
	100	0.078322	0.143307	0.101351	MLE
Model 2	20	0.207599	0.337184	0.244898	MLE
	50	0.050828	0.066336	0.051441	MLE
	75	0.031898	0.044899	0.037499	MLE
	100	0.025686	0.034368	0.028683	MLE
Model 3	20	0.071209	0.09095	0.070871	WLS
	50	0.024189	0.025472	0.023413	WLS
	75	0.01386	0.015205	0.01391	MLE
	100	0.011291	0.012863	0.011839	MLE
Model 4	20	1.465866	3.969049	1.864443	MLE
	50	0.323391	0.827072	0.486651	MLE
	75	0.185935	0.355274	0.235475	MLE
	100	0.146765	0.261154	0.171941	MLE
Model 5	20	0.506093	1.02868	0.542554	MLE
	50	0.101673	0.152994	0.116683	MLE
	75	0.067217	0.096089	0.076613	MLE
	100	0.05141	0.072399	0.056842	MLE

الفصل الثالث (الجانب التجريبي والعملي)

ملحق جدول (2-3)

Models	n	ML	CVM	WLS	Best
Model 6	20	0.181068	0.245366	0.176944	WLS
	50	0.054779	0.064086	0.054392	WLS
	75	0.029977	0.037279	0.030639	MLE
	100	0.025961	0.02916	0.025862	WLS
Model 7	20	0.014661	0.017253	0.016144	MLE
	50	0.006517	0.007078	0.006943	MLE
	75	0.003584	0.003925	0.003798	MLE
	100	0.003471	0.003554	0.003548	MLE
Model 8	20	0.061669	0.088647	0.063253	MLE
	50	0.019032	0.02361	0.020041	MLE
	75	0.013043	0.01489	0.013407	MLE
	100	0.009328	0.01047	0.009433	MLE
9Model	20	0.00436	0.004912	0.005235	MLE
	50	0.001541	0.001749	0.001681	MLE
	75	0.001072	0.001197	0.001167	MLE
	100	0.000862	0.000887	0.000855	WLS
10Model	20	0.00185	0.002065	0.002254	MLE
	50	0.000874	0.000936	0.000932	MLE
	75	0.000491	0.000534	0.00051	MLE
	100	0.000434	0.000499	0.000464	MLE

الفصل الثالث (الجانب التجريبي والعملي)

من الجدول (2-3) أنفاً يتبين الآتي:

- 1- افضلية طريقة الامكان الاعظم في تقدير دالة المخاطرة لتوزيع جمبرتز الاسي (E-GD) بعدد مرات الافضلية وب 33 مرة وبنسبة (82.5%).
- 2- جاءت طريقة المربعات الصغرى الموزونة في المرتبة الثانية بعدد مرات الافضلية في تقدير دالة المخاطرة لتوزيع جمبرتز الاسي (E-GD) ب 7 مرات وبنسبة (17.5%).
- 3- لم تكن طريقة كرامر فون ميس الطريقة الفضلى في اي من النماذج واحجام العينات مقارنة بطريقة المربعات الطغرى الموزونة وطريقة الامكان الاعظم.
- 4- بلغ عدد مرات الافضلية لطريقة الامكان الاعظم عند حجم العينة (n=20) 7 مرات من اصل 10 اي بنسبة (70%) في حين كانت عدد مرات الافضلية لطريقة المربعات الصغرى الموزونة 3 مرات وبنسبة (30%).
- 5- بلغ عدد مرات الافضلية لطريقة الامكان الاعظم عند حجم العينة (n=50) 8 مرات أي بنسبة (80%) في حين كانت عدد مرات الافضلية لطريقة المربعات الموزونة مرتين فقط وبنسبة (20%).
- 6- كان عدد مرات الافضلية لطريقة الامكان الاعظم 10 مرات وبنسبة (100%) عند حجم العينة (n=75).
- 7- بلغ عدد مرات افضلية طريقة الامكان الاعظم 8 مرات عند حجم العينة (n=100) وبنسبة (80%) في حين جاءت طريقة المربعات الصغرى الموزونة بالمرتبة الثانية وبنسبة (20%) وبعدها مرات افضلية بلغ مرتين
- 8- تكون طريقة الامكان الاعظم هي الطريقة الفضلى لأحجام العينات كافة وبنسبة (92%) في النماذج التي تكون فيها ($\alpha > \lambda$).
- 9- تنخفض نسبة الافضلية لطريقة الامكان الاعظم في النماذج التي تكون فيها ($\alpha < \lambda$). إذ تبلغ عدد مرات الافضلية 14 من اصل 20 وبنسبة (70%).
- 10- تكون طريقة الامكان الاعظم هي الطريقة الفضلى في النماذج التي تكون فيها ($\alpha = \lambda$). بنسبة (100%)

القسم الثاني:-

(6-3) تمهيد

يتضمن هذا القسم تطبيقاً عملياً لتوزيع جمبرتز الاسي (E-GD) على بيانات من الواقع الحقيقي متمثلة بأوقات البقاء على قيد الحياة لحين الوفاة للحالات المسجلة للمرضى المصابين بسرطان الثدي/ مركز الاورام السرطانية في محافظة صلاح الدين للمدة منذ افتتاح مركز الاورام في محافظة صلاح الدين عام 2019 وحتى شهر أكتوبر لعام 2021 وتقدير دالة المخاطرة لكل مريض من اجل رسم صورة عن احتمال الوفاة المفاجئ للمرضى المصابين بهذا النوع من الامراض.

(1-6-3) سرطان الثدي:- [19]

يُعد سرطان الثدي من أكثر أنواع السرطان شيوعاً في العالم وأول سرطان في العراق بين الإناث مع أكثر من 2.2 مليون حالة في عام 2020 في العالم، تُصاب قرابة امرأة واحدة من بين كل 12 امرأة بسرطان الثدي في حياتهن.

سرطان الثدي هو السبب الأول للوفيات الناجمة عن السرطان في أوساط النساء، وقد توفيت بسببه 685000 امرأة تقريباً في عام 2020.

تحدث معظم حالات الإصابة بسرطان الثدي والوفيات الناجمة عنه في البلدان المنخفضة الدخل والمتوسطة الدخل، هناك فوارق كبيرة بين البلدان المرتفعة الدخل والبلدان المنخفضة الدخل والمتوسطة الدخل، إذ يتجاوز معدل البقاء على قيد الحياة بعد الإصابة بسرطان الثدي 5 سنوات 90% في البلدان المرتفعة الدخل، في حين لا تتعدى نسبته 66% في الهند و40% في جنوب أفريقيا.

تُسجَل أعلى معدلات الوفيات من جراء سرطان الثدي في أفريقيا وبولينيزيا. وتحدث نصف الوفيات الناجمة عن سرطان الثدي في أوساط النساء دون سن الخمسين في أفريقيا جنوب الصحراء الكبرى.

الفصل الثالث (الجانب التجريبي والعملي)

يُحرز تقدماً كبيراً في مجال علاج سرطان الثدي منذ عام 1980؛ إذ انخفض معدّل الوفيات من جراء سرطان الثدي بنسبة 40% بين الثمانينيات و عام 2020 في البلدان المرتفعة الدخل. وما زال يُنتظر تحقيق تحسّنٍ مماثلٍ في البلدان المنخفضة الدخل والمتوسطة الدخل.

يمكن أن يكون علاج سرطان الثدي فعالاً للغاية، سيما عند الكشف عن المرض في وقت مبكر. وغالباً ما ينطوي علاج سرطان الثدي على مزيج من الاستئصال الجراحي والعلاج الإشعاعي والأدوية (العلاج الهرموني و/أو المعالجة الكيميائية و/أو العلاج البيولوجي الموجّه) سعياً إلى علاج السرطان المجهرى الذي انتشر من ورم الثدي بالدم، وهذا العلاج الذي يمكن أن يمنع نمو السرطان وانتشاره ينقذ الأرواح بالنتيجة النهائية، ان الغالبية العظمى من الأدوية المستعملة في علاج سرطان الثدي موجودة بالفعل على قائمة منظمة الصحة العالمية للأدوية الأساسية. وعليه، يمكن تحقيق تحسينات عالمية كبيرة في مجال علاج سرطان الثدي.

(7-3) البيانات الحقيقية Real data:-

تم جمع البيانات الحقيقية من السجل الخاص بالمرضى المسجلين في مركز الاورام في محافظة صلاح الدين والذين أدت بهم الاصابة بالمرض الى الوفاة، إذ تم اخذ عينة عشوائية بحجم 95 مريض وتحديد مدة بقائهم (t_i) على قيد الحياة لحين الشفاء أو الوفاة (بالأشهر) وادراجها في الجدول (3-3) وكما يأتي:-

جدول (3-3) مدة بقاء المريض بسرطان الثدي على قيد الحياة من تاريخ تسجيل الحالة ولحين

الشفاء أو الوفاة (بالأشهر) [اعداد الباحث]

i	t_i	i	t_i	i	t_i	i	t_i	i	t_i	i	t_i	i	t_i
1	0.23	15	3.33	29	5.5	43	7.43	57	9.93	71	12.33	85	17.33
2	0.6	16	3.37	30	5.97	44	7.5	58	10.1	72	13.3	86	17.4
3	0.77	17	3.43	31	5.97	45	7.57	59	10.17	73	13.8	87	18.03
4	0.87	18	3.53	32	6	46	8	60	10.17	74	14.03	88	18.07
5	1.83	19	3.67	33	6.1	47	8.07	61	10.36	75	14.33	89	20.27
6	1.83	20	4.2	34	6.1	48	8.83	62	10.7	76	14.8	90	20.8

الفصل الثالث (الجانب التجريبي والعملي)

7	2.03	21	4.4	35	6.2	49	8.87	63	10.73	77	15.1	91	21.17
8	2.13	22	4.9	36	6.23	50	8.9	64	10.8	78	15.67	92	21.23
9	2.3	23	5	37	6.73	51	8.93	65	10.93	79	15.83	93	23.2
10	2.47	24	5	38	6.83	52	9.2	66	11.5	80	16.43	94	23.9
11	2.5	25	5.07	39	6.93	53	9.23	67	11.87	81	16.57	95	26.03
12	3.1	26	5.2	40	7	54	9.23	68	11.97	82	16.7		
13	3.1	27	5.3	41	7.07	55	9.3	69	12.03	83	16.87		
14	3.23	28	5.47	42	7.3	56	9.87	70	13.27	84	17.07		

data analysis تحليل البيانات (1-7-3)

تم استخراج أبرز مقاييس النزعة المركزية لعينة البيانات الحقيقية وإدراجها في الجدول الآتي:

جدول (4-3) يبين أبرز احصاءات العينة للبيانات الحقيقية

Min	0.23
Mean	9.41589
Variance	34.9849
Skewness	0.682298
Kurtosis	2.80327
Median	8.83
Standard Deviation	5.9148
Max	26.03

(8-3) اختبارات حسن المطابقة (Goodness of fit tests)

(1-8-3) اختبار مربع كاي (Chi square test) [Chi] [15]

لمعرفة فيما اذا كانت البيانات تتبع توزيع (E-GD) فقد تم اختبارها وفق اختبار χ^2 لحسن المطابقة الذي يُعد من اكثر الاختبارات الاحصائية شيوعا واستعمالا وذلك لأهميته البالغة ودقة نتائجه. إن مبدأ هذا الاختبار هو تحديد الفرق بين التكرارات المشاهدة والتكرارات المتوقعة فاذا كان الفرق صغيراً جداً يتحقق على ضوءه مطابقة البيانات للتوزيع المفترض، وان الصيغة الرياضية لهذا الاختبار يمكن توضيحها بالمعادلة الآتية :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \quad (70 - 2)$$

إذ أن

O_i تمثل التكرار المشاهد للفئة i

E_i تمثل التكرار المتوقع للفئة i

m تمثل عدد الفئات

يتم اختبار مدى مطابقة توزيع (E-GD) لعينة البيانات الحقيقية وبواسطة اختبار مربع كاي وبحسب الصيغة (70-2) لغرض اختبار الفرضية الآتية:

$$H_0: x \sim E - GD$$

$$H_1: x \not\sim E - GD$$

جدول (5-3) يبين قيمة اختبار χ^2

Test	Sig.	P-Value
χ^2	0.75585	0.05

من الجدول أعلاه يمكن القول إن البيانات تتبع التوزيع موضوع الدراسة لأن قيمة Sig. والتي تساوي (0.75585) أكبر من P-Value والتي تساوي (0.05).

(9-3) معايير اختيار أفضل توزيع (Criteria for selecting the best distribution)

تعد عملية اختيار التوزيع الاحتمالي الافضل من بين عدد من التوزيعات للبيانات من اهم العمليات في التحليل الاحصائي ولغرض تحقيق ذلك يتوفر عدة معايير وسيتم استعمال معيار معلومات اكاكي (AIC) (Akai Information Criterion) ، معيار معلومات المصحح (AICc) (Akai Information Corrected criterion) ، معيار المعلومات البيزي (BIC) (Bayesian Information Criterion) لغرض التحقق من افضلية توزيع جمبرتز الاسي (E-GD) مقارنة بالتوزيع الاسي (ED) وتوزيع جمبرتز (GD) .

(1-9-3) معيار معلومات اكاكي (AIC) [16]

يتم استعمال هذا المعيار في قياس افضلية التوزيع الاحتمالي المطبق على عينة من البيانات ويكون التوزيع الذي يمتلك اقل قيمة لهذا المعيار هو التوزيع الافضل مقارنة ببقية التوزيعات في تمثيل هذه البيانات وتكون صيغته الرياضية بالشكل الآتي:

$$AIC = 2M - 2 \ln(L)$$

إذ أن :

M تمثل عدد معلمات التوزيع.

L تمثل قيمة دالة الامكان الاعظم للبيانات

(2-9-3) معيار معلومات اكاكي المصحح (Akai Information Corrected)

[16] (AICc) (criterion)

كذلك يتم استعمال هذا المعيار في قياس افضلية التوزيع الاحتمالي المطبق على عينة من البيانات ويكون التوزيع الذي يمتلك اقل قيمة لهذا المعيار هو التوزيع الافضل وهو ناتج من تصحيح المعيار السابق وحسب الصيغة الآتية:

الفصل الثالث (الجانب التجريبي والعملي)

$$AICc = AIC + \frac{2M(M + 1)}{n - M - 1}$$

إذ n تمثل حجم العينة.

(3-9-3) معيار المعلومات البيزي (Bayesian Information Criterion) [16](BIC)

ويعمل هذا المعيار عمل المعيارين السابقين تقريبا وبصيغة رياضية مختلفة تكون بالشكل الآتي:

$$BIC = M \ln(n) - 2 \ln(L)$$

كذلك فإن التوزيع الذي يملك أقل قيمة لهذا المعيار يكون التوزيع الأفضل في تمثيل البيانات.

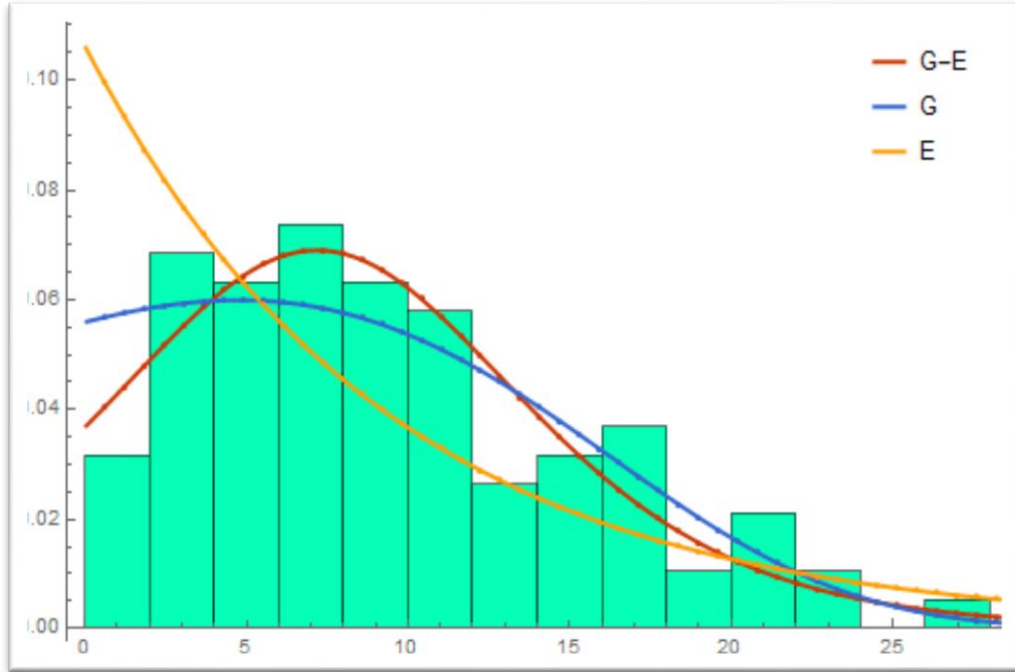
تم استعمال طريقة الامكان الاعظم بعدّها فضلى الطرائق بحسب نسبة وعدد مرات الافضلية كما ورد في القسم السابق لغرض تحليل عينة البيانات الحقيقية، وقد تم استخراج النتائج الخاصة بتقدير معالم التوزيع (E-GD) وكذلك كل من التوزيع الاسي (ED) وتوزيع جمبرتز (GD) وكذلك قيم معايير المقارنة بين التوزيعات المذكورة وادراجها في الجدول الآتي:-

جدول (6-3) قيم المعالم المقدرة ومعايير مقارنة التوزيعات بالنسبة لتوزيعات المقارنة

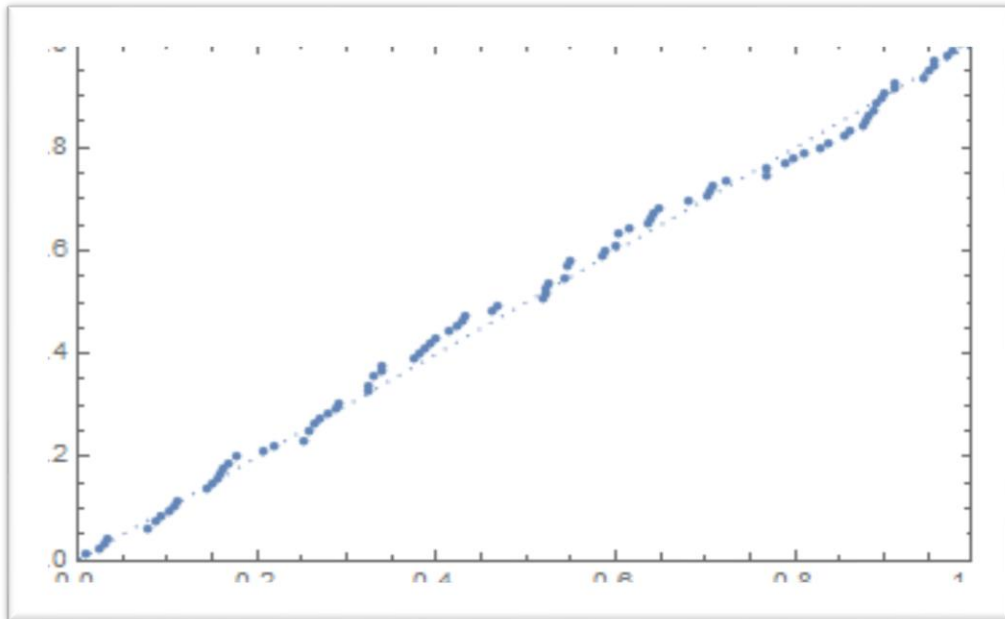
Distribution	$\hat{\lambda}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	AIC	AICc	BIC
E-GD	6.309	0.232	-	594.534	594.664	599.642
GD	-	0.083	0.673	594.841	594.972	599.949
ED	0.106	-	-	618.056	594.885	620.61

من الجدول (6-3) يتبين بأن توزيع جمبرتز الاسي (E-GD) هو الافضل في تمثيل عينة البيانات الحقيقية الخاصة بمرضى سرطان الثدي مقارنة بكل من توزيع جمبرتز (GD) والتوزيع الاسي (ED) والشكلين (1-3) و(2-3) تبين ملائمة التوزيع للبيانات الحقيقية

الفصل الثالث (الجانب التجريبي والعملي)



شكل (1-3) دالة الكثافة الاحتمالية المقدره لتوزيع جمبرتز الاسي مقارنة بالتوزيع الاسي وتوزيع جمبرتز بالنسبة للبيانات الحقيقية.



شكل (2-3) Probability Plot of (E-GD)

الفصل الثالث (الجانب التجريبي والعملي)

(10-3) نتائج البيانات الحقيقية (Real data results)

بعد ان اتضح من الجانب التجريبي أفضلية طريقة الإمكان الأعظم في تقدير دالة المخاطرة لتوزيع (E-GD)، وتبين كذلك من الجانب التطبيقي أفضلية التوزيع المختلط لتمثيل البيانات الحقيقية على ضوء ذلك تم تقدير دالة المخاطرة لتوزيع جمبرترر الاسي باستعمال البيانات الحقيقية وعن طريق كود تم كتابته بواسطة برنامج Mathematica وقد تم ادراج النتائج في الجدول (3-6) علما بأنه قد تم اضافة كل من دالة (PDF) و (CDF) و دالة البقاء الى النتائج لغرض التوضيح.

جدول (3-7) يبين قيم دالة المخاطرة ودوال (PDF) و (CDF) و دالة البقاء بعد ترتيب بيانات عينة الدراسة تصاعديا

ti	PDF	CDF	S	h
0.23	0.0381764	0.00862439	0.991376	0.038509
0.6	0.040392	0.023158	0.976842	0.04135
0.77	0.0414229	0.030112	0.969888	0.042709
0.87	0.0420325	0.034285	0.965715	0.043525
1.83	0.0479405	0.077468	0.922533	0.051966
1.83	0.0479405	0.077468	0.922533	0.051966
2.03	0.0491687	0.087178	0.912822	0.053865
2.13	0.0497803	0.092126	0.907874	0.054832
2.3	0.0508146	0.100676	0.899324	0.056503
2.47	0.0518407	0.109402	0.890598	0.058209
2.5	0.0520208	0.11096	0.88904	0.058514
3.1	0.0555379	0.143236	0.856764	0.064823
3.1	0.0555379	0.143236	0.856764	0.064823
3.23	0.0562737	0.150504	0.849496	0.066244
3.33	0.056832	0.156159	0.843841	0.067349
3.37	0.0570533	0.158437	0.841563	0.067794
3.43	0.057383	0.16187	0.83813	0.068466

الفصل الثالث (الجانب التجريبي والعملي)

ملحق جدول (7-3)

ti	PDF	CDF	S	h
3.53	0.0579264	0.167635	0.832365	0.069593
3.67	0.0586734	0.175798	0.824202	0.071188
4.2	0.0613366	0.207612	0.792388	0.077407
4.4	0.0622646	0.219973	0.780027	0.079824
4.9	0.0643697	0.251645	0.748355	0.086015
5	0.06475	0.2581	0.7419	0.08728
5	0.06475	0.2581	0.7419	0.08728
5.07	0.065009	0.262642	0.737358	0.088165
5.2	0.0654696	0.271124	0.728876	0.089823
5.3	0.0658069	0.277687	0.722313	0.091106
5.47	0.0663449	0.288921	0.711079	0.093302
5.5	0.0664352	0.290913	0.709087	0.093691
5.97	0.0676571	0.322438	0.677562	0.099854
5.97	0.0676571	0.322438	0.677562	0.099854
6	0.06772	0.3245	0.6755	0.1003
6.1	0.0679292	0.331252	0.668748	0.101577
6.1	0.0679292	0.331252	0.668748	0.101577
6.2	0.0681184	0.338054	0.661946	0.102906
6.23	0.0681718	0.340099	0.659901	0.103306
6.73	0.0688226	0.374366	0.625634	0.110005
6.83	0.068898	0.381252	0.618748	0.111351
6.93	0.0689549	0.388145	0.611855	0.112698
7	0.06898	0.393	0.607	0.1136
7.07	0.0690034	0.397802	0.602198	0.114586
7.3	0.0690039	0.413675	0.586325	0.117689
7.43	0.0689606	0.422643	0.577357	0.119442

الفصل الثالث (الجانب التجريبي والعملي)

ملحق جدول (7-3)

ti	PDF	CDF	S	h
7.5	0.0689243	0.427469	0.572531	0.120385
7.57	0.0688789	0.432292	0.567708	0.121328
8	0.0684	0.4618	0.5382	0.1271
8.07	0.0682935	0.466604	0.533396	0.128035
8.83	0.0665595	0.51791	0.48209	0.138064
8.87	0.0664415	0.52057	0.47943	0.138584
8.9	0.0663514	0.522562	0.477438	0.138974
8.93	0.0662598	0.524551	0.475449	0.139363
9.2	0.065373	0.542324	0.457676	0.142837
9.23	0.0652677	0.544284	0.455716	0.14322
9.23	0.0652677	0.544284	0.455716	0.14322
9.3	0.0650167	0.548844	0.451156	0.144111
9.87	0.0627204	0.585269	0.414731	0.151232
9.93	0.0624542	0.589024	0.410976	0.151966
10.1	0.0616766	0.599576	0.400424	0.154028
10.17	0.0613468	0.603882	0.396118	0.15487
10.17	0.0613468	0.603882	0.396118	0.15487
10.36	0.0604248	0.615451	0.384549	0.157131
10.7	0.0586847	0.635702	0.364298	0.16109
10.73	0.0585261	0.637461	0.362539	0.161434
10.8	0.058153	0.641544	0.358456	0.162232
10.93	0.0574494	0.649059	0.350941	0.163701
11.5	0.0542235	0.680895	0.319105	0.169924
11.87	0.0520336	0.700555	0.299445	0.173767

الفصل الثالث (الجانب التجريبي والعملي)

ملحق جدول (7-3)

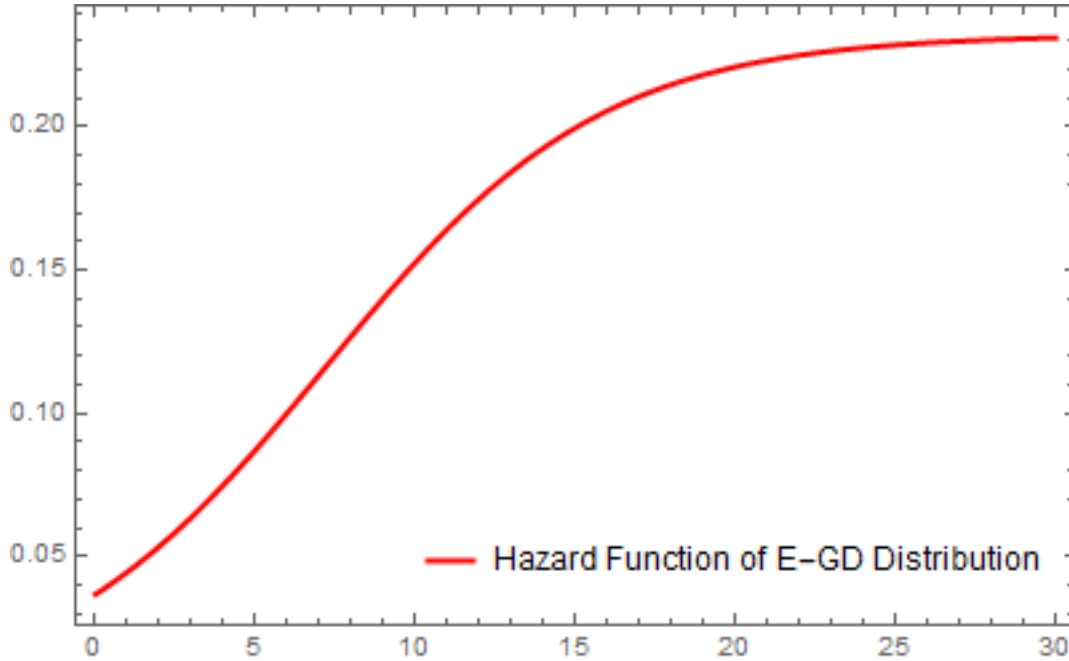
ti	PDF	CDF	S	h
11.97	0.0514323	0.705728	0.294272	0.174778
12.03	0.0510698	0.708803	0.291197	0.175379
13.27	0.0434545	0.76742	0.23258	0.186837
12.33	0.0492431	0.723851	0.276149	0.17832
13.3	0.0432702	0.768721	0.231279	0.187091
13.8	0.0402238	0.789592	0.210408	0.191171
14.03	0.0388433	0.798685	0.201315	0.192948
14.33	0.0370691	0.810071	0.189929	0.195173
14.8	0.0343615	0.826853	0.173147	0.198453
15.1	0.0326864	0.836909	0.163091	0.200419
15.67	0.0296327	0.854662	0.145338	0.203888
15.83	0.028808	0.859337	0.140663	0.204802
16.43	0.02585	0.875724	0.124276	0.208004
16.57	0.0251911	0.879296	0.120704	0.208702
16.7	0.0245901	0.882532	0.117468	0.209335
16.87	0.0238199	0.886647	0.113353	0.210139
17.07	0.0229367	0.891322	0.108678	0.211052
17.33	0.0218257	0.89714	0.10286	0.212189
17.4	0.0215338	0.898658	0.101342	0.212486
18.03	0.0190416	0.911426	0.088574	0.21498
18.07	0.0188915	0.912185	0.087815	0.215129
20.27	0.0120332	0.945717	0.054283	0.221677
20.8	0.0107527	0.95175	0.04825	0.222854
21.17	0.0099334	0.955575	0.044425	0.2236
21.23	0.00980605	0.956167	0.043833	0.223715
23.2	0.00637657	0.971882	0.028119	0.226775
23.9	0.00545826	0.976016	0.023984	0.227578
26.03	0.00338088	0.98526	0.014741	0.22936

الفصل الثالث (الجانب التجريبي والعملي)

من الجدول (7-3) يتبين بأن قيم دالة المخاطرة المقدرة تكون متزايدة بتزايد مدة بقاء المريض على قيد الحياة وتميل الى الثبات عند اقتراب قيمها من قيمة المعلمة $\hat{\alpha}$ والبالغة (0.232) وهذا ما يؤكد ما تم طرحه في الجانب النظري لهذه الدراسة إذ نلاحظ بأن قيم دالة المخاطرة تكون متزايدة حتى بلوغ المريض مدة بقاء 18 شهرا تقريبا ثم تبدأ بالاستقرار عند تجاوز هذه المدة وهذا ما يفسر السلوك الحقيقي للإصابة بالمرض إذ عند تجاوز هذه المدة يكون المريض أقرب الى التماثل للشفاء منه الى الوفاة.

وكذلك نلاحظ بأن معدل احتمال الوفاة المفاجئ بالنسب للمريض المصاب بسرطان الثدي يبلغ (0.13) تقريبا.

والشكل ادناه يبين سلوك دالة المخاطرة المقدرة لتوزيع جمبرتز الاسي (E-GD) بالنسبة للبيانات الحقيقية.



شكل (3-3) دالة المخاطرة المقدرة لتوزيع جمبرتز الاسي (E-GD) بالنسبة للبيانات الحقيقية.

الفصل الرابع

الاستنتاجات

والتوصيات

الاستنتاجات والتوصيات

في هذا الفصل سيتم عرض اهم الاستنتاجات التي توصل اليها الباحث وكذلك سيتم طرح بعض التوصيات عن طريق الجانب والتجريبي والتطبيقي للدراسة.

(1-4) الاستنتاجات:

1. ان توزيع جمبرتز الاسي (E-GD) يكون اكثر مرونة مقارنة بتوزيعات (جمبرتز و التوزيع الاسي) وذلك لامتلاكه دالة مخاطرة تأخذ عدة اشكال (ثابتة)، (متزايدة-ثابتة)، (متناقصة-ثابتة).
2. اقتراب مقدرات دالة المخاطرة من قيم دالة المخاطرة الافتراضية بازياد حجم العينة في جميع طرائق وهذا ما يتناسب مع النظرية الاحصائية.
3. افضلية طريقة الامكان الاعظم في تقدير دالة المخاطرة لتوزيع جمبرتز الاسي (E-GD) مقارنة بطريقتي المربعات الصغرى الموزونة وطريقة كرامر فون ميس بالاعتماد على معيار متوسط مربعات الخطأ التكاملية (IMSE).
4. تكون طريقة الامكان الاعظم هي الطريقة الفضلى لأحجام العينات كافة في النماذج التي تكون فيها $(\alpha > \lambda)$ كذلك النماذج التي تكون فيها $(\alpha = \lambda)$ في حين تنخفض الافضلية في النماذج التي تكون فيها $(\alpha < \lambda)$.
5. عدم ملائمة طريقة كرامر فون ميس في تقدير دالة المخاطرة لتوزيع جمبرتز الاسي (E-GD).
6. اظهر الجانب التطبيقي ان تقديرات معاملات توزيع جمبرتز الاسي (E-GD) للبيانات الحقيقية كانت متقاربة مع القيم الافتراضية للجانب التجريبي. (الإشارة الى المرض وما توصلت له الدراسة من مدة البقاء أو الشفاء أو الموت)

(1-4) التوصيات:

1. التعمق في دراسة خواص توزيع جمبرتز الاسي (E-GD) ودراسة سلوك بقية دواله كدالة البقاء.
2. اجراء دراسة لمقارنة توزيع جمبرتز الاسي (E-GD) مع توزيعات اخرى ناشئة من عائلة التوزيعات الاسية ولعينة البيانات نفسها أو غيرها.
3. استعمال الطرائق البيزية لتقدير دالة المخاطرة لتوزيع جمبرتز الاسي (E-GD) واجراء دراسة مقارنة مع الطرائق الكلاسيكية المستعملة في هذه الدراسة او غيرها من الطرائق.
4. استعمال التوزيعات لدراسة انواع اخرى من البيانات كعينات البيانات غير الكاملة (المراقبة وغيرها).
5. اعتماد الدراسة لدى وزارة الصحة للاستفادة منها في تفسير سلوك انواع اخرى من امراض السرطان أو غيرها من الامراض. (إضافة توصية أخرى خاصة بالمرض ومُدد البقاء أو الموت)

المصادر

المصادر العربية

القرآن الكريم

- 1- البياتي، حسام نجم عبود (2002)، "مقارنة طرائق تقدير أنموذج وييل للفشل باستعمال المحاكاة"، أطروحة دكتوراه- كلية الإدارة والاقتصاد- جامعة بغداد.
- 2- الجميلي ، صبا صباح احمد (2007)، " بعض طرائق تقدير المعلمة والمعولية لأنموذج رياضي للفشل لبيانات تامة وبيانات تحت المراقبة من النوع الاول باستعمال المحاكاة " ، رسالة ماجستير مقدمة الى كلية الادارة والاقتصاد ، جامعة بغداد.
- 3-الدليمي، قصي حامد خلف ، (2006) ، " استعمال المحاكاة في مقارنة طرائق تقدير معالم توزيع القيمة المتطرفة في العينات الكاملة والمبتورة "، رسالة ماجستير مقدمة الى كلية الادارة والاقتصاد ، جامعة بغداد.
- 4- الصالحي، عبد الأمير طعيمة بندر (2018)، " اختيار أفضل توزيع احصائي لتقدير معادلة انحدار حوادث الطرق مع تطبيق عملي"، رسالة ماجستير مقدمة الى كلية الادارة والاقتصاد، جامعة كربلاء.
- 5-صالح ، احمد علوان ، (2016) ، " تقدير دالة المخاطرة لتوزيع (*Quasi-Lindely*) بحث مقارن مع تطبيق عملي " ، رسالة ماجستير ، جامعة بغداد ، كلية الادارة والاقتصاد ، قسم الاحصاء.
- 6- نعمان ، انعام عبد الرحمن (2012) (" تصميم خطط عينات القبول للشركة العامة للصناعات الالكترونية باستعمال التوزيع الاسي " اطروحة دكتوراه ، جامعة بغداد ، كلية الادارة والاقتصاد ،قسم الاحصاء.

المصادر الاجنبية

- 7- Abdel-Hamee D. & cinlar M.S. , and Quinn., (1984),"Reliability theory and Models",Academ press New York
- 8- Afify ,E.E. ,(2006), "Note on the Exponential Distribution" ,Faculty of Engineering Menowfiya University, shibeen,EL.Koom.

- 9- Ahmad M. H. Al-Khazaleh*, Loai Alzoubi. (2021). New compound probability distribution using biweight kernel function and exponential distribution. (2021). Journal of Mathematical and Computational Science. <https://doi.org/10.28919/jmcs/6082>
- 10- Bantan, R. A. R., Jamal, F., Chesneau, C., & Elgarhy, M. (2021). Theory and applications of the unit gamma/gompertz distribution. Mathematics, 9(16). <https://doi.org/10.3390/math9161850>
- 11- Charles, E.E. (1997), "An Introduction to Reliability and Maintainability Engineering" the Mcgrau Hial, companies, Inc. New York.
- 12- Cheng ,S. W. ,& Fu ,J. C. (1982). Estimation of mixed Weibull parameters in life testing. IEEE Transactions on Reliability ,31(4) ,377-381.
- 13- Chukwu, A. U., & Ogunde, A. A. (2016). On Kumaraswamy Gompertz Makeham Distribution. American Journal of {M}athematics and Statistics, 6(3).
- 14- Eraikhuemen, I. B., Godfrey Ieren, T., Mabur, T. M., Sa'ad, M., Kuje, S., & Felix Chama, A. (2019). A Study on Properties and Applications of a Lomax Gompertz-Makeham Distribution. Asian Research Journal of Mathematics. <https://doi.org/10.9734/arjom/2019/v15i430155>
- 15- Famoye ,F. (2000). Goodness-of-fit tests for generalized logarithmic series distribution. Computational statistics & data analysis33 ,(1)-59 , 67.
- 16- Frank J. F, and Sergio M. F,and Svetlozar T. R, and Bala G. A,(2014),"Model Selection Criterion:AIC and BIC" , 2014 John Wiley & Sons, Inc Published by John Wiley & Sons, Inc, Vol.95, No.3, page (631- 636) .

- 17- Gompertz, B. (1833, December). On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new mode of determining the value of life contingencies. In a letter to Francis Baily, Esq. FRS &c. By Benjamin Gompertz, Esq. FR S. In Abstracts of the Papers Printed in the Philosophical Transactions of the Royal Society of London (No. 2, pp. 252-253). London: The Royal Society.
- 18- Hassan, A. S., & Abd-Allah, M. (2018). Exponentiated Weibull-Lomax distribution: properties and estimation. *Journal of Data Science*, 16(2), 277-298.
- 19- <https://www.who.int/ar/news-room/fact-sheets/detail/breast-cancer>
- 20- Ieren, T. G., M. Kromtit, F., Uke Agbor, B., Eraikhuemen, I. B., & Koleoso, P. O. (2019). A Power Gompertz Distribution: Model, Properties and Application to Bladder Cancer Data. *Asian Research Journal of Mathematics*. <https://doi.org/10.9734/arjom/2019/v15i230146>
- 21- Irungu, E. W. (2013). Negative binomial Mixtures, construction of negative binomial mixtures and their properties (Doctoral dissertation).
- 22- Jafari, A. A., Tahmasebi, S., & Alizadeh, M. (2014). The Beta-Gompertz Distribution. *Revista Colombiana de Estadística*, 37(1). <https://doi.org/10.15446/rce.v37n1.44363>
- 23- Khaleel, M. A., Al-Noor, N. H., & Abdal-Hameed, M. K. (2020). Marshall Olkin exponential Gompertz distribution: Properties and applications. *Periodicals of Engineering and Natural Sciences*, 8(1), 298–312. <https://doi.org/10.21533/pen.v8i1.1152.g513>
- 24- Lawless, J. F. (2003). *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*. John Wiley and Sons, New York, 2 edition.

- 25- Luceño, A. (2006). Fitting the generalized Pareto distribution to data using maximum goodness-of-fit estimators. *Computational Statistics & Data Analysis*, 51(2), 904-917.
- 26- Macdonald, P. D. M. (1971). Comments and queries comment on “an estimation procedure for mixtures of distributions” by choi and bulgren. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 33(2), 326-329.
- 27- Mazucheli, J., Menezes, A. F., & Dey, S. (2019). Unit-Gompertz distribution with applications. *Statistica*, 79(1). <https://doi.org/10.6092/issn.1973-2201/8497>
- 28- Meeker, W. Q., & Escobar, L. A. (2014). *Statistical methods for reliability data*. John Wiley & Sons.
- 29- Naylor, T.H. & others (1966), "Computer Simulation Techniques", Willey .
- 30- Oguntunde, P. E., Balogun, O. S., Okagbue, H. I., & Bishop, S. A. (2015). The Weibull-exponential distribution: Its properties and applications. *Journal of Applied Sciences*, 15(11), 1305-1311.
- 31- Wahayeb, B.R. (1978), "Some Models for Accelerated Life Testing", M.Sc. Thesis, University Of Baghdad.
- 32- Willemsse W, Koppelaar H. Knowledge elicitation of Gompertz' law of mortality. *Scandinavian Actuarial Journal*. 2000; 2:168–179.

الملاحق

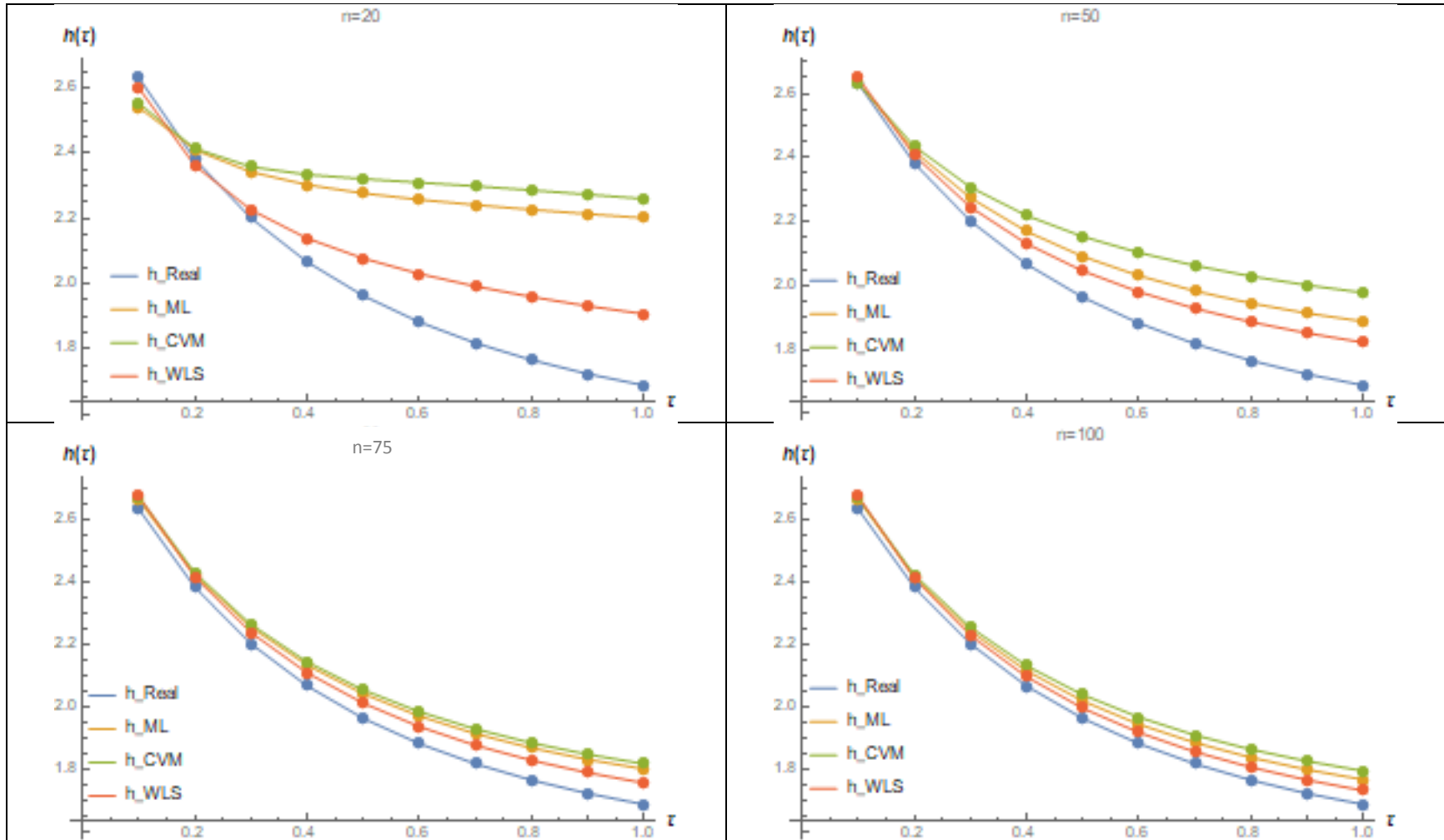
(A) الملحق

جدول (1) دالة المخاطرة الحقيقية والمقدرة ومتوسط مربعات الخطأ ومتوسط مربعات الخطأ التكاملي لطرائق التقدير واحجام لعينات كافة للأنموذج الأول

MODEL 1

h													
t	h_real	ML				CVM				WLS			
		20	50	75	100	20	50	75	100	20	50	75	100
0.1	2.63321	2.54205	2.63521	2.66173	2.66515	2.55472	2.63254	2.67197	2.66789	2.6024	2.65021	2.67406	2.67453
0.2	2.3825	2.41133	2.41964	2.42159	2.41606	2.4152	2.43481	2.42895	2.42315	2.36318	2.40679	2.41547	2.41103
0.3	2.20204	2.34324	2.27399	2.25506	2.2425	2.35904	2.30753	2.26348	2.25442	2.22693	2.24555	2.23797	2.22893
0.4	2.06727	2.30394	2.16941	2.13357	2.11552	2.33501	2.21895	2.14406	2.13171	2.13966	2.13114	2.10921	2.09629
0.5	1.96382	2.27799	2.09113	2.04175	2.01939	2.32175	2.15351	2.05426	2.03905	2.0779	2.04595	2.01213	1.99606
0.6	1.88273	2.25837	2.03073	1.97051	1.94474	2.31086	2.10287	1.98465	1.96711	2.03056	1.98021	1.93683	1.91822
0.7	1.81811	2.24196	1.98306	1.91413	1.88566	2.2995	2.06235	1.92943	1.91004	1.99215	1.92809	1.87714	1.85652
0.8	1.76595	2.22738	1.94474	1.8688	1.83818	2.28712	2.02913	1.88482	1.86403	1.9598	1.88591	1.82901	1.80679
0.9	1.72339	2.21409	1.91352	1.83189	1.79956	2.27404	2.00141	1.84826	1.82643	1.93189	1.85122	1.78968	1.76619
1	1.68836	2.20188	1.88779	1.80153	1.76783	2.2608	1.97801	1.81796	1.79537	1.9075	1.82233	1.75717	1.73268
MSE													
t	n	20	50	75	100	20	50	75	100	20	50	75	100
0.1		0.606709	0.268391	0.142945	0.142383	0.654966	0.276279	0.150355	0.142264	0.592846	0.268228	0.144046	0.141532
0.2		0.392763	0.152075	0.070209	0.072251	0.469098	0.16403	0.083263	0.080914	0.360065	0.138256	0.071257	0.07244
0.3		0.437196	0.133563	0.054815	0.052546	0.672943	0.187173	0.088262	0.078559	0.426798	0.127318	0.063179	0.059445
0.4		0.580478	0.148656	0.059724	0.051058	1.00125	0.257083	0.116452	0.095845	0.582389	0.155803	0.076322	0.065569
0.5		0.747556	0.174795	0.071986	0.056587	1.33324	0.338893	0.151099	0.119062	0.75143	0.1965	0.096251	0.078288
0.6		0.905073	0.203303	0.086446	0.064699	1.62432	0.417697	0.185686	0.1429	0.905881	0.238737	0.117469	0.092776
0.7		1.04177	0.230772	0.100928	0.073496	1.86391	0.487815	0.217664	0.165288	1.03775	0.278262	0.137787	0.107078
0.8		1.15596	0.255923	0.114525	0.082145	2.05454	0.547917	0.246207	0.185515	1.1471	0.313598	0.156392	0.120419
0.9		1.24949	0.278389	0.126906	0.090283	2.20354	0.598549	0.271255	0.203462	1.23673	0.3445	0.173072	0.132542
1		1.32537	0.298197	0.138002	0.097774	2.31938	0.640927	0.293074	0.219257	1.31001	0.371245	0.187882	0.143421
	IMSE	0.844237	0.214406	0.096649	0.078322	1.419719	0.391636	0.180332	0.143307	0.8351	0.243245	0.122366	0.101351

(A) الملحق



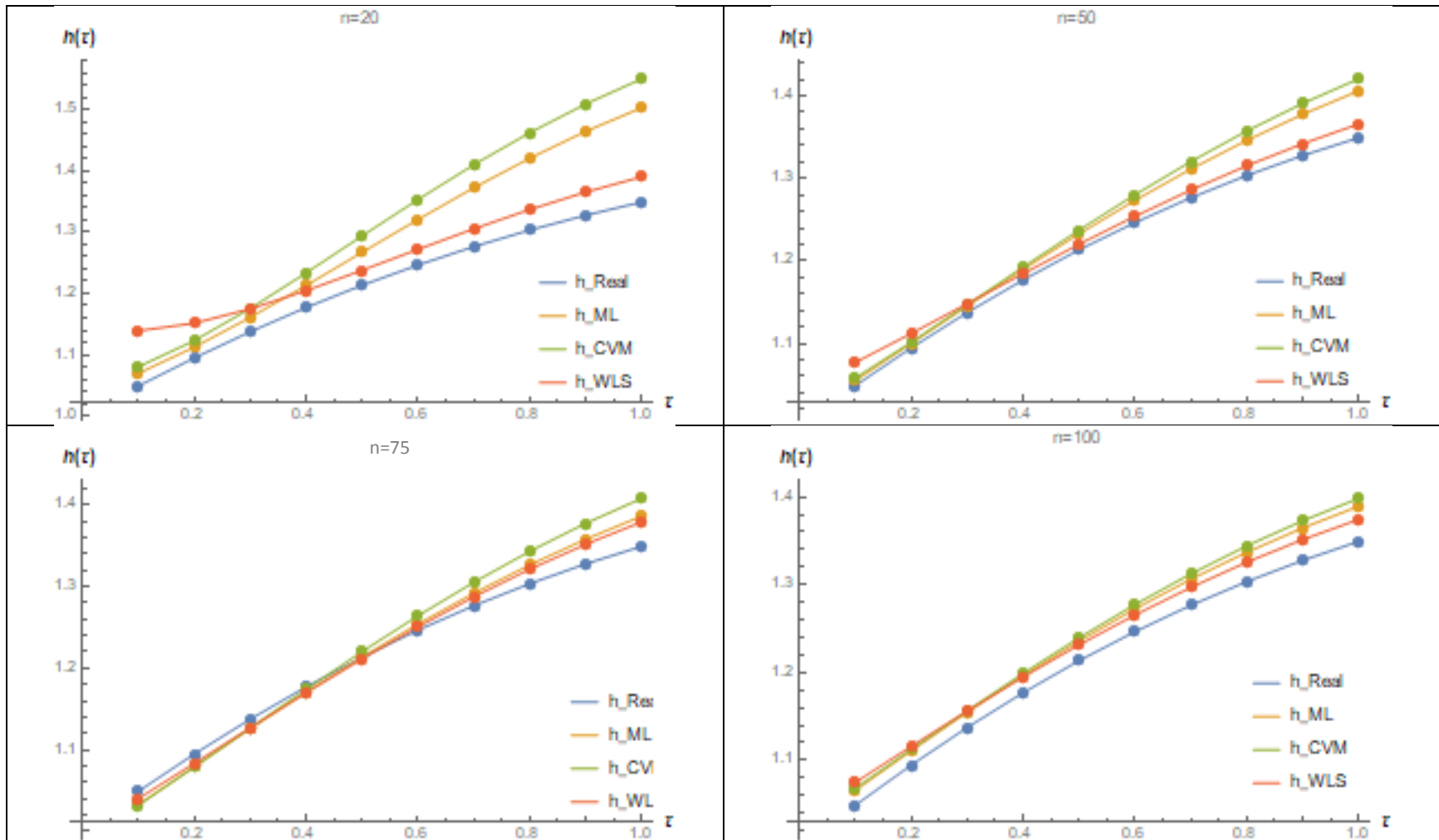
(A) الملحق

جدول (2) دالة المخاطرة الحقيقية والمقدرة ومتوسط مربعات الخطأ ومتوسط مربعات الخطأ التكاملي لطرائق التقدير واحجام لعينات كافة للأنموذج الثاني

MODEL 2

h													
t	h_real	ML				CVM				WLS			
		20	50	75	100	20	50	75	100	20	50	75	100
0.1	1.04869	1.06934	1.05494	1.03222	1.06568	1.08007	1.05788	1.03169	1.06811	1.13895	1.07692	1.03983	1.07484
0.2	1.09456	1.11217	1.10006	1.07915	1.11077	1.1228	1.10156	1.07865	1.11259	1.15157	1.11203	1.08316	1.11596
0.3	1.13739	1.16071	1.14531	1.12547	1.15449	1.17533	1.14687	1.12644	1.15647	1.17478	1.14828	1.12675	1.15615
0.4	1.17702	1.21299	1.18979	1.17046	1.1963	1.23363	1.1925	1.17393	1.19899	1.20465	1.18459	1.1697	1.1948
0.5	1.21341	1.26706	1.2327	1.21352	1.23575	1.29402	1.2373	1.22013	1.2395	1.23793	1.2201	1.21121	1.23141
0.6	1.24659	1.32095	1.2734	1.25413	1.27249	1.35365	1.28026	1.26419	1.27746	1.27221	1.25408	1.25063	1.2656
0.7	1.27663	1.37286	1.31137	1.29192	1.3063	1.41047	1.32055	1.3054	1.31248	1.30575	1.28599	1.28745	1.29708
0.8	1.30367	1.42127	1.34627	1.32664	1.33705	1.46293	1.35759	1.34328	1.34434	1.33726	1.31542	1.32131	1.32571
0.9	1.32788	1.46509	1.37789	1.35816	1.36472	1.5099	1.39104	1.37756	1.37296	1.36581	1.34215	1.35201	1.35146
1	1.34945	1.50375	1.4062	1.38648	1.38939	1.55079	1.42078	1.40814	1.39836	1.39084	1.36609	1.37951	1.37439
MSE													
t	n	20	50	75	100	20	50	75	100	20	50	75	100
0.1		0.182576	0.068104	0.052779	0.034355	0.195455	0.075726	0.059693	0.037103	0.203808	0.074038	0.056569	0.035774
0.2		0.150176	0.053121	0.040366	0.026299	0.164598	0.055203	0.041785	0.026868	0.150932	0.053852	0.040689	0.026337
0.3		0.134486	0.043323	0.031381	0.020978	0.17009	0.043478	0.030586	0.021102	0.135999	0.041532	0.030257	0.020666
0.4		0.134358	0.038115	0.025577	0.018245	0.206632	0.03939	0.025402	0.019444	0.150278	0.03546	0.024633	0.018343
0.5		0.149139	0.037016	0.022703	0.017864	0.263329	0.042124	0.025714	0.021437	0.183229	0.03456	0.023301	0.018919
0.6		0.177341	0.039478	0.022435	0.019498	0.329916	0.050691	0.030837	0.026475	0.225893	0.037901	0.025667	0.021876
0.7		0.216338	0.044838	0.024364	0.02273	0.401284	0.063791	0.039828	0.033831	0.273714	0.044545	0.031011	0.026645
0.8		0.26243	0.05234	0.028012	0.027109	0.475038	0.079916	0.051559	0.042726	0.324465	0.053539	0.038529	0.032647
0.9		0.31112	0.061211	0.032878	0.032192	0.548286	0.097573	0.064869	0.052418	0.375791	0.063966	0.047411	0.039344
1		0.358028	0.070738	0.038484	0.037591	0.617207	0.115473	0.078714	0.062276	0.424869	0.075015	0.056926	0.046283
	IMSE	0.207599	0.050828	0.031898	0.025686	0.337184	0.066336	0.044899	0.034368	0.244898	0.051441	0.037499	0.028683

(A) الملحق



(A) الملحق

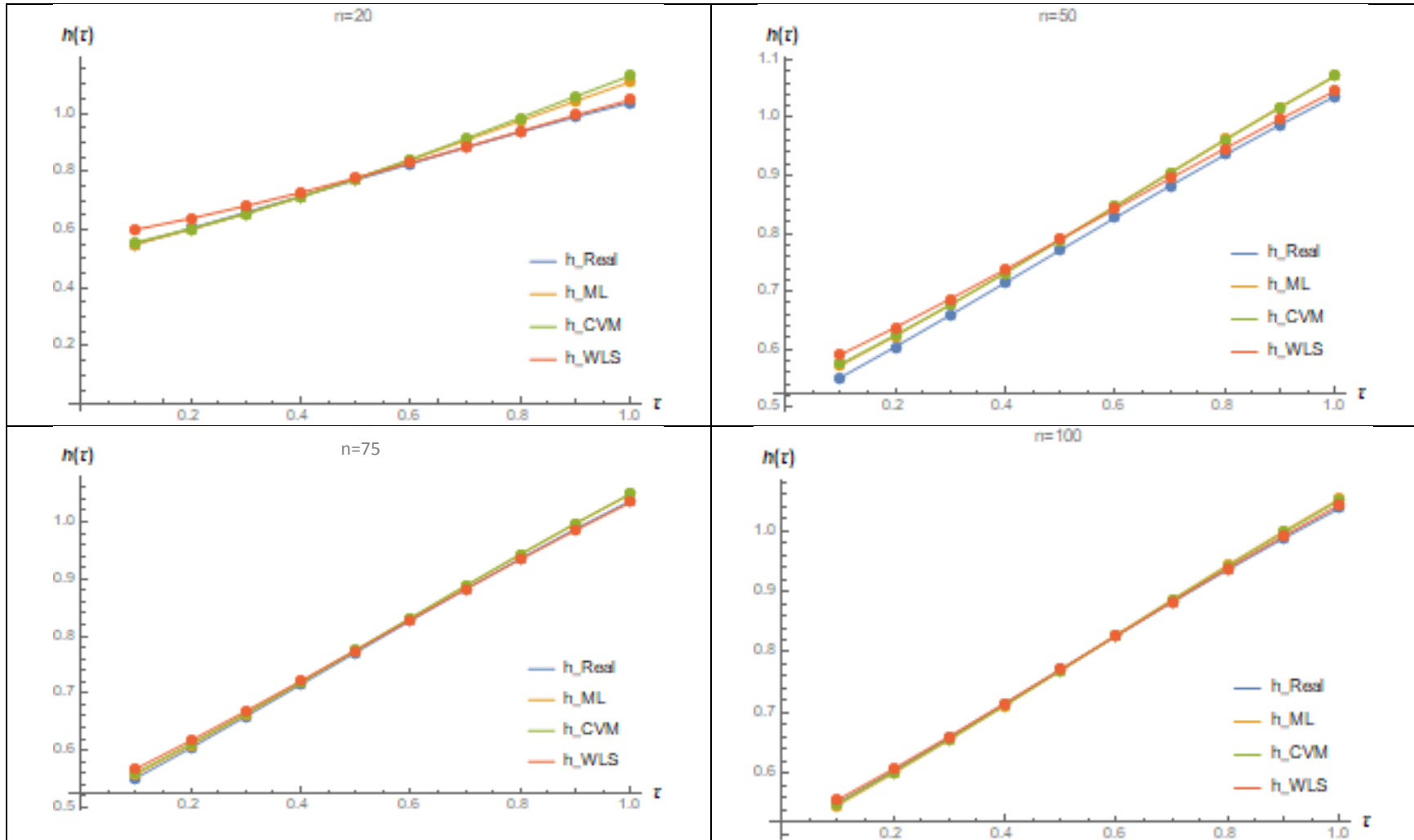
جدول (3) دالة المخاطرة الحقيقية والمقدرة ومتوسط مربعات الخطأ ومتوسط مربعات الخطأ التكاملي لطرائق التقدير واحجام لعينات كافة للأنموذج الثالث

MODEL 3

h													
t	h_real	ML				CVM				WLS			
		20	50	75	100	20	50	75	100	20	50	75	100
0.1	0.551184	0.551303	0.571839	0.557265	0.547836	0.556874	0.574585	0.560832	0.55092	0.600655	0.590661	0.567609	0.556716
0.2	0.60444	0.60114	0.623152	0.609039	0.600682	0.603223	0.624615	0.611784	0.602663	0.639127	0.637869	0.617245	0.607839
0.3	0.659266	0.655303	0.676863	0.66286	0.655712	0.655153	0.677212	0.664889	0.656698	0.681702	0.687061	0.66868	0.660986
0.4	0.715095	0.713514	0.732543	0.718246	0.712424	0.712533	0.732003	0.719694	0.712554	0.728005	0.737876	0.721463	0.715685
0.5	0.771314	0.775317	0.78965	0.774632	0.77023	0.775059	0.78849	0.775649	0.769661	0.777579	0.789858	0.775069	0.771378
0.6	0.827294	0.840042	0.847546	0.831386	0.828477	0.842122	0.846053	0.832123	0.82737	0.829805	0.842459	0.828916	0.827446
0.7	0.882418	0.906803	0.905513	0.887837	0.886475	0.912673	0.903964	0.888431	0.884979	0.883861	0.895063	0.882386	0.883231
0.8	0.936103	0.974523	0.962786	0.943308	0.943529	0.985204	0.961426	0.943867	0.941766	0.93873	0.947005	0.934859	0.938071
0.9	0.98783	1.042	1.0186	0.997153	0.998976	1.05789	1.01762	0.997749	0.997034	0.993297	0.99762	0.985742	0.991333
1	1.03716	1.10799	1.07225	1.04879	1.05222	1.12889	1.07176	1.04945	1.05014	1.04648	1.04628	1.0345	1.04244

MSE													
t	n	20	50	75	100	20	50	75	100	20	50	75	100
0.1		0.069828	0.027054	0.014354	0.012954	0.083027	0.029916	0.01619	0.014586	0.085064	0.0305	0.01556	0.014006
0.2		0.064368	0.024695	0.013401	0.012125	0.072035	0.026687	0.014599	0.01312	0.070445	0.026835	0.014079	0.012688
0.3		0.060163	0.022431	0.012463	0.011232	0.063922	0.023545	0.013099	0.011701	0.059906	0.023335	0.012695	0.011395
0.4		0.057508	0.020537	0.011713	0.010403	0.058906	0.020876	0.011937	0.010535	0.05303	0.020337	0.011604	0.010296
0.5		0.056997	0.019366	0.011343	0.009786	0.058229	0.019156	0.011385	0.009851	0.050131	0.018235	0.01101	0.009574
0.6		0.059427	0.019309	0.011545	0.009534	0.064102	0.018903	0.011712	0.009874	0.051997	0.017437	0.011108	0.009408
0.7		0.065619	0.020721	0.012476	0.009785	0.079158	0.020597	0.013133	0.010796	0.059481	0.018303	0.012049	0.009946
0.8		0.076188	0.023845	0.014234	0.010642	0.105055	0.024574	0.015771	0.012738	0.072905	0.02107	0.013918	0.01128
0.9		0.091326	0.028728	0.016841	0.012152	0.141031	0.030942	0.019632	0.015729	0.091624	0.025788	0.016717	0.013435
1		0.110671	0.035203	0.02023	0.014302	0.184031	0.039528	0.024597	0.0197	0.114126	0.032296	0.020363	0.016359
	IMSE	0.071209	0.024189	0.01386	0.011291	0.09095	0.025472	0.015205	0.012863	0.070871	0.023413	0.01391	0.011839

(A) الملحق



(A) الملحق

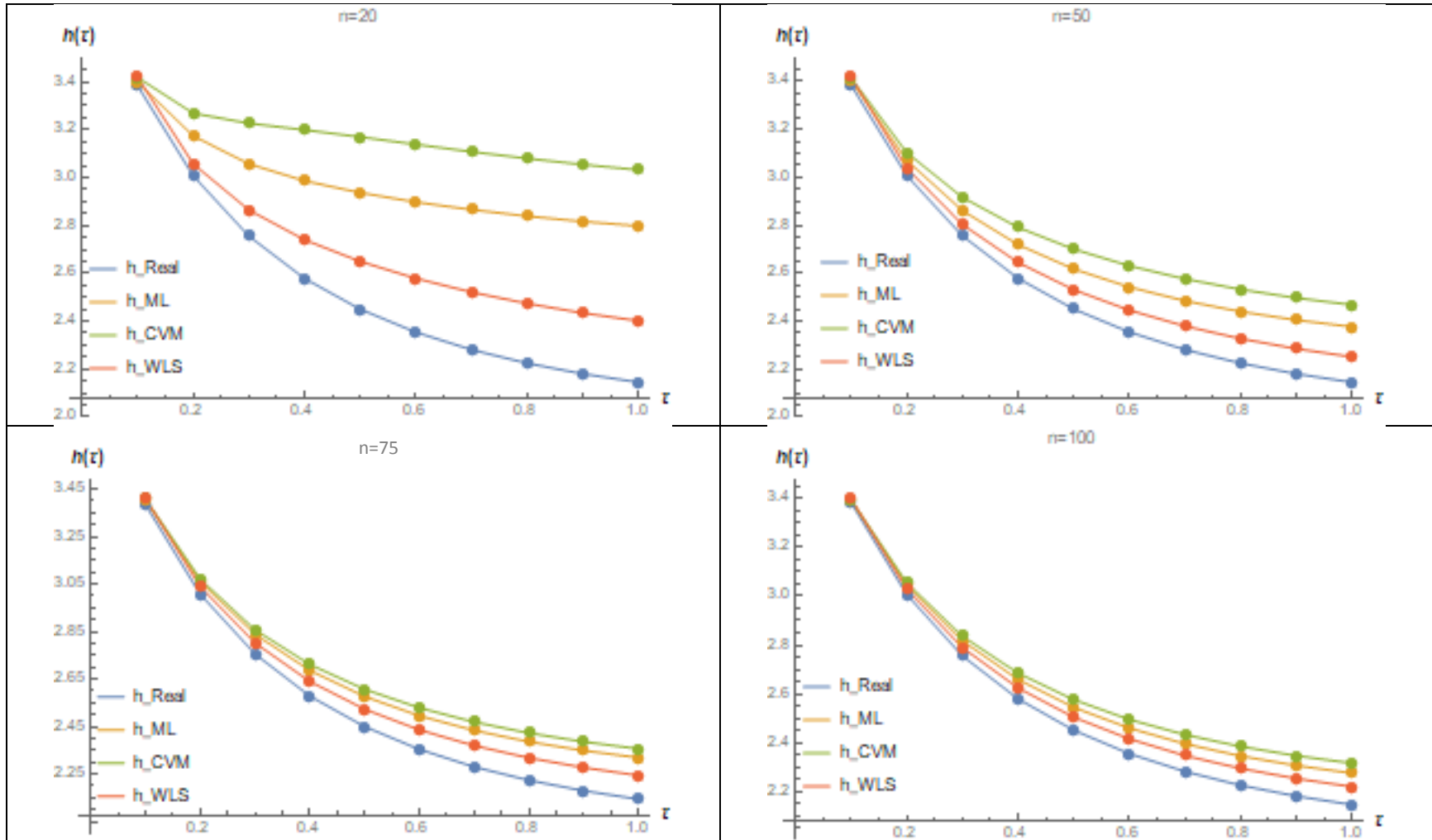
جدول (4) دالة المخاطرة الحقيقية والمقدرة ومتوسط مربعات الخطأ ومتوسط مربعات الخطأ التكاملي لطرائق التقدير واحجام لعينات كافة للأنموذج الرابع

MODEL 4

h													
t	h_real	ML				CVM				WLS			
		20	50	75	100	20	50	75	100	20	50	75	100
0.1	3.38619	3.40022	3.40593	3.40554	3.39705	3.41941	3.41582	3.4095	3.39627	3.42167	3.41937	3.4122	3.4009
0.2	3.00824	3.17503	3.07148	3.06123	3.04655	3.26975	3.10392	3.07179	3.05596	3.05802	3.03845	3.04023	3.0303
0.3	2.75636	3.05822	2.86171	2.83969	2.81785	3.2274	2.91716	2.85836	2.83661	2.8653	2.80393	2.80328	2.79028
0.4	2.57953	2.98733	2.71952	2.68728	2.65927	3.19986	2.79168	2.71264	2.68533	2.74103	2.6455	2.64083	2.62433
0.5	2.4508	2.93736	2.61788	2.57768	2.54472	3.17052	2.70044	2.60792	2.57613	2.65041	2.53151	2.52393	2.50443
0.6	2.3546	2.89837	2.54242	2.49636	2.45953	3.13939	2.63083	2.52989	2.4947	2.57952	2.44586	2.43689	2.41505
0.7	2.28128	2.86642	2.48485	2.43462	2.39478	3.10885	2.57619	2.4702	2.4325	2.52203	2.37959	2.37045	2.34686
0.8	2.22457	2.83973	2.44005	2.38691	2.34476	3.08052	2.53249	2.42362	2.38413	2.47455	2.32723	2.31874	2.29389
0.9	2.18019	2.8173	2.40466	2.34955	2.3056	3.0551	2.4971	2.38671	2.34597	2.43491	2.28524	2.2779	2.25219
1	2.14516	2.79841	2.37638	2.31996	2.27462	3.03272	2.46816	2.35711	2.31553	2.40157	2.25115	2.24525	2.21898

MSE													
t	n	20	50	75	100	20	50	75	100	20	50	75	100
0.1		0.920222	0.300309	0.20762	0.148427	0.963062	0.310583	0.216063	0.152828	0.809455	0.287082	0.203441	0.145552
0.2		0.696912	0.158071	0.104796	0.087141	1.4108	0.260889	0.139147	0.105321	0.711363	0.176066	0.108488	0.0859
0.3		0.873678	0.16675	0.101684	0.087813	2.64991	0.436547	0.184288	0.138536	1.15367	0.245451	0.122934	0.095451
0.4		1.15517	0.219275	0.125816	0.105617	3.65942	0.648073	0.256321	0.190194	1.58984	0.354472	0.163383	0.122598
0.5		1.42561	0.280525	0.15616	0.127272	4.36189	0.831657	0.328319	0.241982	1.93302	0.459752	0.207281	0.15248
0.6		1.64716	0.337824	0.185821	0.148397	4.83698	0.976653	0.392467	0.288377	2.1899	0.549127	0.247939	0.180429
0.7		1.81832	0.387368	0.212578	0.167573	5.16286	1.08868	0.447249	0.328228	2.3804	0.621724	0.283639	0.205145
0.8		1.94857	0.428871	0.235914	0.184465	5.39351	1.17557	0.493267	0.361897	2.52354	0.680077	0.314332	0.226517
0.9		2.04808	0.463249	0.255948	0.199139	5.56233	1.24383	0.53173	0.390196	2.63343	0.727176	0.340513	0.244835
1		2.12494	0.491667	0.273016	0.211802	5.68973	1.29824	0.56389	0.413984	2.71981	0.765579	0.362803	0.260499
	IMSE	1.465866	0.323391	0.185935	0.146765	3.969049	0.827072	0.355274	0.261154	1.864443	0.486651	0.235475	0.171941

(A) الملحق



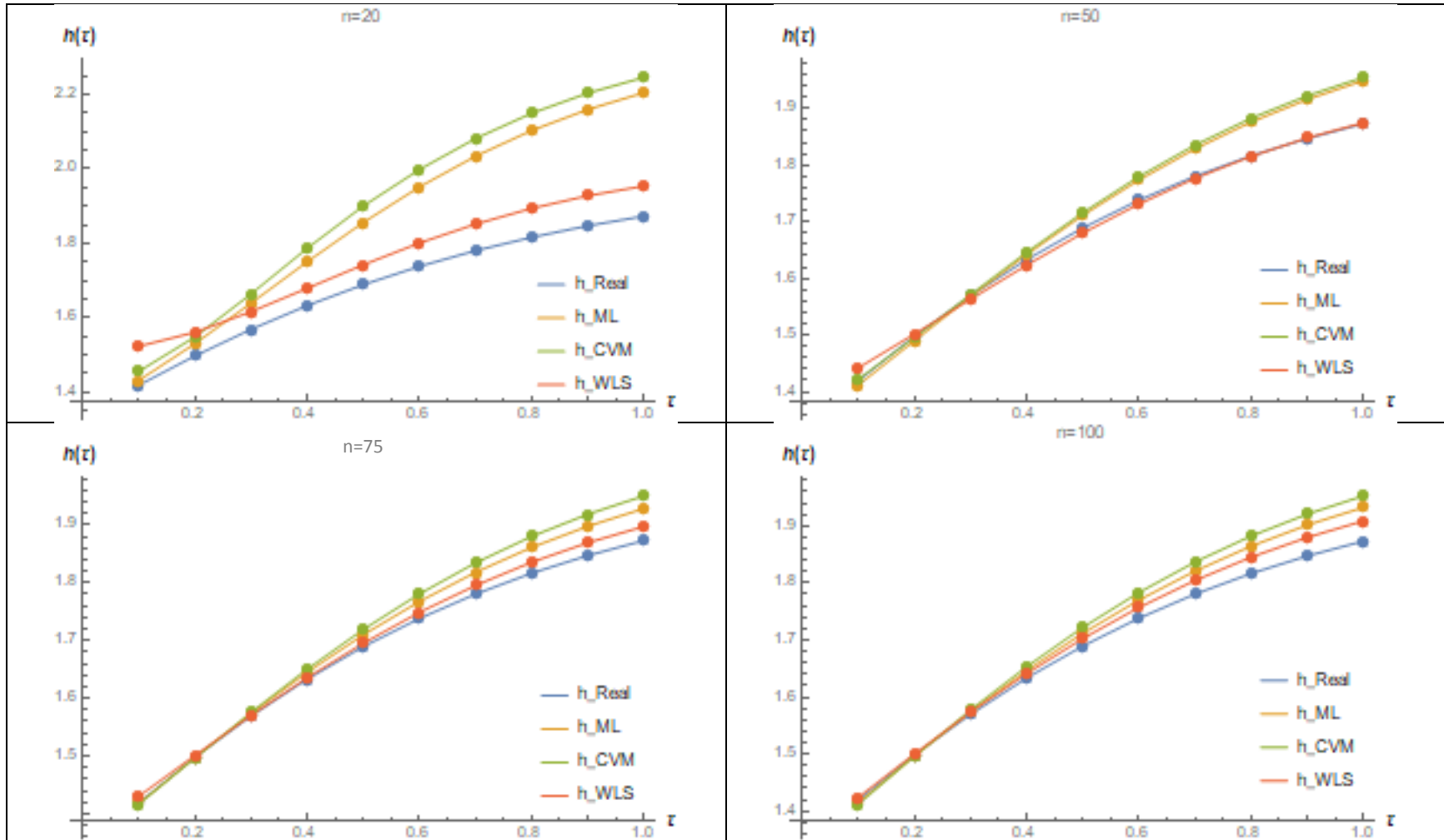
(A) الملحق

جدول (5) دالة المخاطرة الحقيقية والمقدرة ومتوسط مربعات الخطأ ومتوسط مربعات الخطأ التكاملي لطرائق التقدير واحجام لعينات كافة للأنموذج الخامس

MODEL 5

h													
t	h_real	ML				CVM				WLS			
		20	50	75	100	20	50	75	100	20	50	75	100
0.1	1.41908	1.43181	1.41146	1.41754	1.4142	1.45598	1.42177	1.41652	1.41176	1.52377	1.44189	1.43027	1.42381
0.2	1.49795	1.53063	1.4899	1.49728	1.49602	1.54854	1.49542	1.49671	1.49616	1.56121	1.50183	1.50124	1.50032
0.3	1.56936	1.63944	1.56756	1.57365	1.57379	1.66413	1.57131	1.57546	1.57715	1.61649	1.56332	1.57032	1.57315
0.4	1.6331	1.75035	1.64202	1.64493	1.64601	1.78673	1.64586	1.65027	1.65283	1.67948	1.6235	1.63552	1.64082
0.5	1.68928	1.85611	1.71126	1.70984	1.71159	1.89992	1.71605	1.71915	1.72176	1.74264	1.68009	1.69535	1.70225
0.6	1.73823	1.95156	1.77383	1.76766	1.76991	1.99841	1.77967	1.78078	1.78309	1.80104	1.73147	1.74886	1.75684
0.7	1.78047	2.03411	1.82893	1.81813	1.8208	2.08156	1.83545	1.83452	1.8365	1.8519	1.77673	1.79562	1.80444
0.8	1.81662	2.10318	1.87632	1.86143	1.86449	2.14959	1.883	1.88037	1.88216	1.89414	1.81556	1.8357	1.84526
0.9	1.84732	2.15955	1.91629	1.89803	1.90147	2.20366	1.9226	1.91878	1.92059	1.92798	1.84818	1.86949	1.87977
1	1.87324	2.20468	1.94946	1.92861	1.93239	2.24568	1.95497	1.95049	1.9525	1.95439	1.87509	1.89759	1.9086
MSE													
t	n	20	50	75	100	20	50	75	100	20	50	75	100
0.1		0.286899	0.097634	0.068183	0.056431	0.313539	0.106492	0.074804	0.057066	0.314356	0.101882	0.072858	0.055486
0.2		0.234287	0.069953	0.049953	0.040312	0.276174	0.072227	0.051123	0.041405	0.236138	0.067581	0.04988	0.039757
0.3		0.242069	0.056423	0.041277	0.031649	0.396865	0.06205	0.04242	0.035593	0.252496	0.054434	0.039922	0.032481
0.4		0.305585	0.055836	0.040889	0.029878	0.687445	0.072831	0.047057	0.038742	0.330879	0.058385	0.04089	0.032617
0.5		0.406629	0.066311	0.047084	0.033848	0.987539	0.100314	0.062471	0.049123	0.441837	0.075487	0.050396	0.038622
0.6		0.521951	0.085079	0.057841	0.042003	1.21941	0.138814	0.085171	0.064481	0.563178	0.10139	0.065693	0.048686
0.7		0.634063	0.108874	0.071148	0.052685	1.40469	0.182403	0.111453	0.082489	0.681103	0.131816	0.084045	0.061029
0.8		0.733221	0.134559	0.085287	0.064413	1.55617	0.226134	0.138165	0.10114	0.786478	0.163188	0.10316	0.074147
0.9		0.815513	0.159629	0.099001	0.076046	1.67644	0.266626	0.16312	0.118951	0.87445	0.192974	0.121419	0.086929
1		0.880712	0.182436	0.111505	0.086832	1.76853	0.302054	0.185112	0.135002	0.944628	0.219689	0.137871	0.098665
	IMSE	0.506093	0.101673	0.067217	0.05141	1.02868	0.152994	0.096089	0.072399	0.542554	0.116683	0.076613	0.056842

(A) الملحق



(A) الملحق

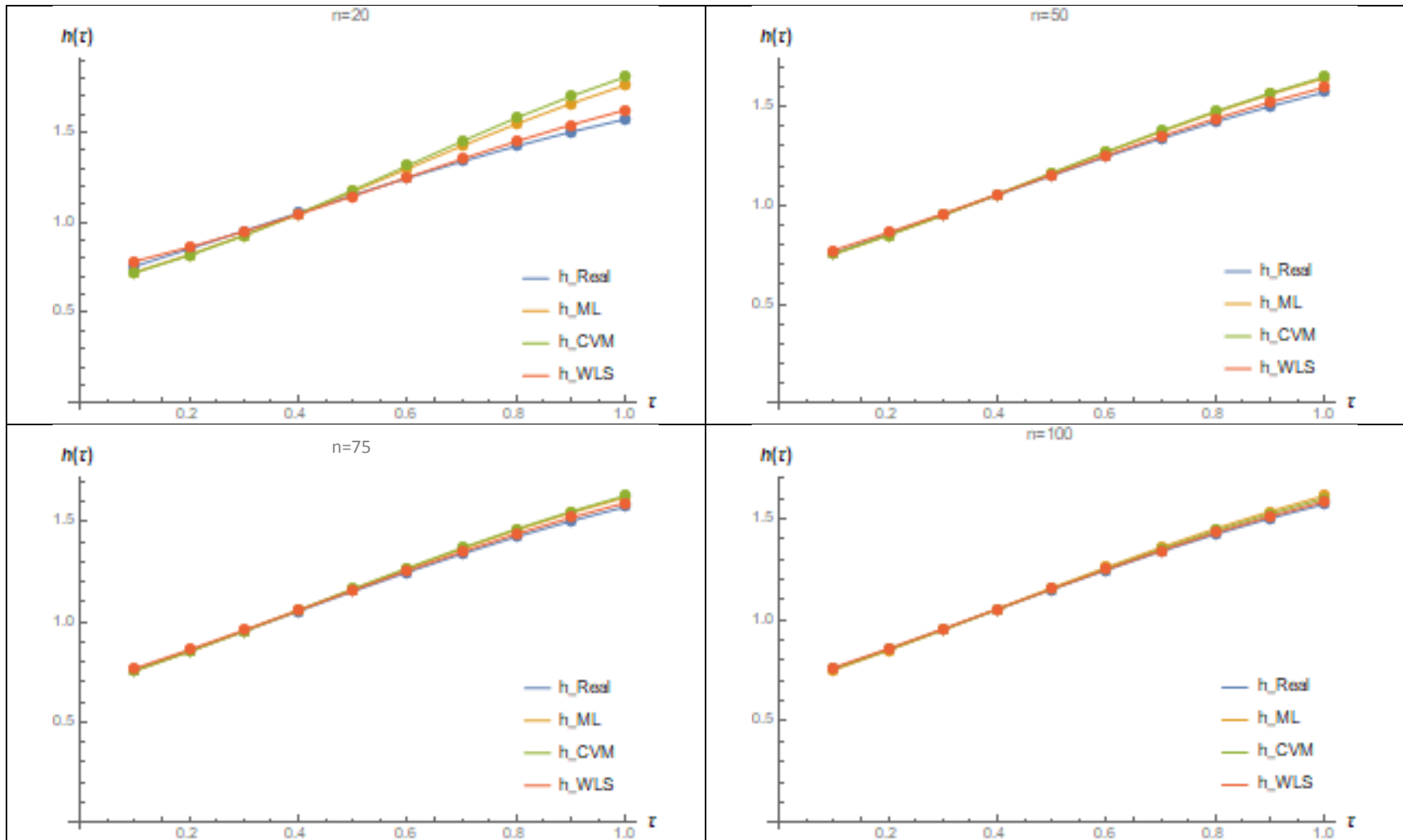
جدول (6) دالة المخاطرة الحقيقية والمقدرة ومتوسط مربعات الخطأ ومتوسط مربعات الخطأ التكاملي لطرائق التقدير واحجام لعينات كافة للأنموذج السادس

MODEL 6

h													
t	h_real	ML				CVM				WLS			
		20	50	75	100	20	50	75	100	20	50	75	100
0.1	0.758305	0.724865	0.753476	0.755867	0.753487	0.722947	0.755408	0.757661	0.76007	0.786087	0.773751	0.768735	0.766016
0.2	0.854467	0.821986	0.849269	0.852204	0.850367	0.818591	0.850394	0.853555	0.854233	0.86378	0.863796	0.861552	0.859247
0.3	0.95346	0.929783	0.950708	0.953231	0.951577	0.927545	0.951614	0.954555	0.952658	0.95072	0.958665	0.958473	0.956203
0.4	1.05338	1.04698	1.05614	1.05714	1.05526	1.0487	1.05737	1.05885	1.05361	1.04566	1.05678	1.05778	1.05516
0.5	1.15223	1.17119	1.16349	1.1618	1.15931	1.17943	1.16545	1.16425	1.15507	1.14644	1.15619	1.15748	1.15417
0.6	1.24814	1.29886	1.27033	1.26492	1.26151	1.31538	1.27329	1.26836	1.2549	1.24999	1.25472	1.25544	1.25121
0.7	1.33941	1.42573	1.37417	1.36426	1.35976	1.45106	1.37818	1.36877	1.35102	1.35267	1.35013	1.34961	1.34436
0.8	1.42471	1.54744	1.47264	1.45787	1.45223	1.58109	1.4776	1.46338	1.44158	1.45101	1.44038	1.43821	1.43198
0.9	1.50308	1.6604	1.56381	1.5442	1.53753	1.70118	1.56948	1.55053	1.52518	1.5423	1.52382	1.51986	1.51279
1	1.57397	1.76217	1.64633	1.62226	1.61474	1.80856	1.65242	1.62915	1.60086	1.62472	1.59934	1.59367	1.58599

MSE													
t	n	20	50	75	100	20	50	75	100	20	50	75	100
0.1		0.092017	0.044264	0.024301	0.022171	0.101654	0.046621	0.026213	0.025253	0.105814	0.046141	0.024991	0.023601
0.2		0.086702	0.041214	0.021784	0.020832	0.091378	0.041766	0.02264	0.022779	0.087367	0.040851	0.021714	0.021539
0.3		0.085212	0.038226	0.0195	0.019519	0.088914	0.038098	0.019865	0.020496	0.07828	0.036668	0.019045	0.019627
0.4		0.091519	0.036473	0.018311	0.018801	0.100382	0.037014	0.019014	0.019166	0.081598	0.034691	0.017846	0.018472
0.5		0.110638	0.03741	0.019094	0.019255	0.134008	0.040135	0.021204	0.019565	0.10143	0.036113	0.018929	0.018662
0.6		0.146437	0.042405	0.022502	0.021315	0.195499	0.048821	0.027211	0.022288	0.140058	0.041885	0.022836	0.020617
0.7		0.19903	0.052238	0.028755	0.02515	0.282094	0.063609	0.037185	0.027562	0.194993	0.052346	0.029668	0.02448
0.8		0.263866	0.066711	0.037561	0.030615	0.38343	0.083845	0.050557	0.035171	0.259679	0.067007	0.039036	0.030074
0.9		0.333678	0.084633	0.048207	0.037301	0.488241	0.107792	0.066193	0.044519	0.327269	0.084631	0.050176	0.036966
1		0.401587	0.104215	0.05976	0.04465	0.588061	0.133156	0.082712	0.054802	0.392949	0.103585	0.062146	0.044578
	IMSE	0.181068	0.054779	0.029977	0.025961	0.245366	0.064086	0.037279	0.02916	0.176944	0.054392	0.030639	0.025862

(A) الملحق



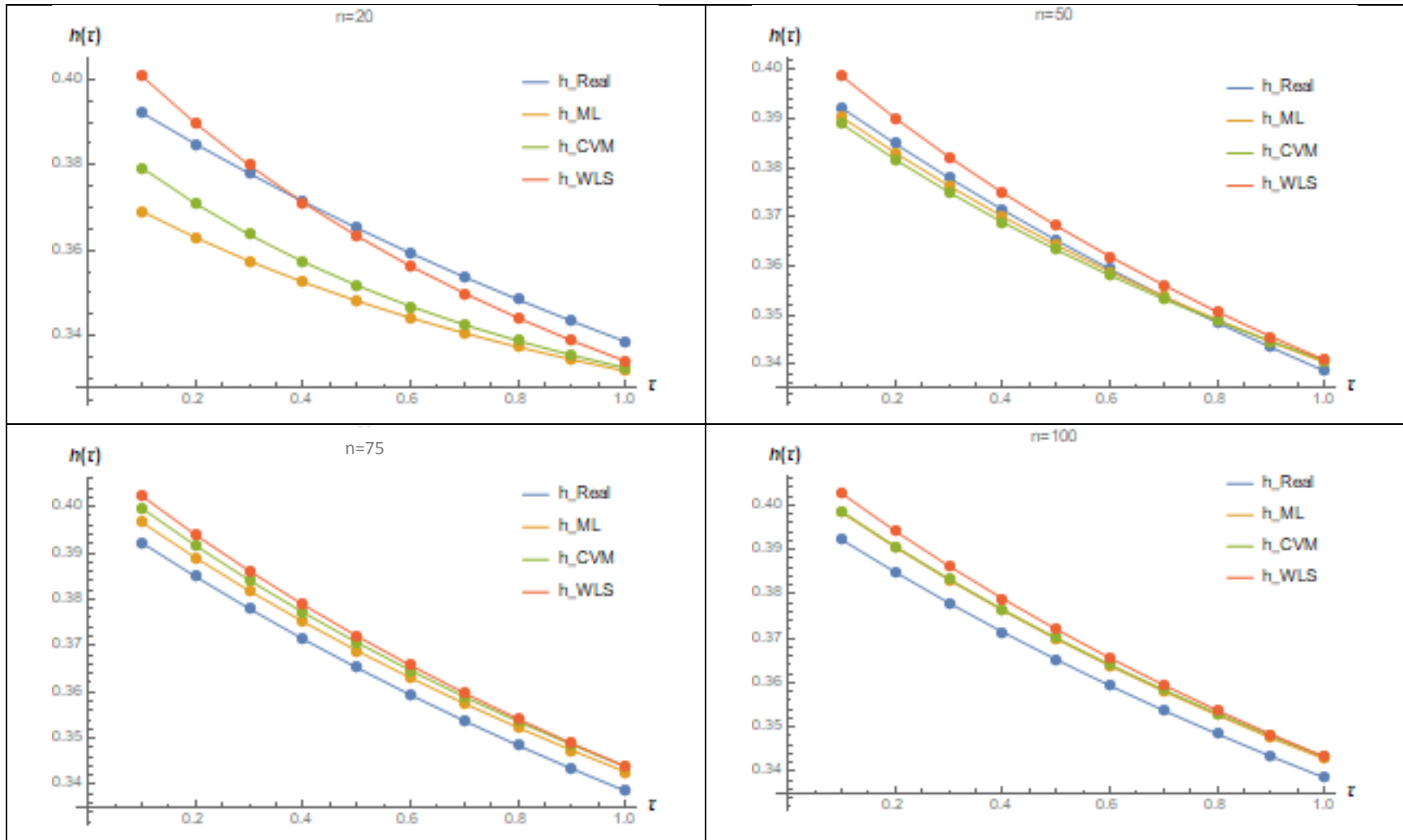
(A) الملحق

جدول (7) دالة المخاطرة الحقيقية والمقدرة ومتوسط مربعات الخطأ ومتوسط مربعات الخطأ التكاملي لطرائق التقدير واحجام لعينات كافة للأنموذج السابع

MODEL 7

h													
t	h_real	ML				CVM				WLS			
		20	50	75	100	20	50	75	100	20	50	75	100
0.1	0.392233	0.369167	0.390324	0.396648	0.398348	0.37936	0.38894	0.399688	0.398629	0.40085	0.398695	0.402326	0.402658
0.2	0.384908	0.362986	0.383044	0.388992	0.390493	0.370942	0.381672	0.391618	0.39073	0.389733	0.3901	0.393934	0.394192
0.3	0.377988	0.357487	0.376312	0.381855	0.383157	0.363659	0.375024	0.384139	0.383378	0.379921	0.382205	0.386137	0.386307
0.4	0.371442	0.352571	0.370069	0.375182	0.376289	0.357316	0.368921	0.377186	0.376516	0.371189	0.374926	0.378873	0.378944
0.5	0.365243	0.34816	0.36426	0.368931	0.369846	0.351763	0.363297	0.370703	0.370096	0.363367	0.368191	0.372087	0.372052
0.6	0.359363	0.344189	0.358841	0.363061	0.363789	0.346884	0.3581	0.364645	0.364076	0.356323	0.36194	0.365732	0.365586
0.7	0.353781	0.340603	0.353774	0.357538	0.358084	0.342586	0.353284	0.358969	0.35842	0.34995	0.356122	0.359769	0.359508
0.8	0.348476	0.337358	0.349024	0.352333	0.352701	0.338791	0.348808	0.35364	0.353096	0.34416	0.350692	0.354161	0.353784
0.9	0.343427	0.334415	0.344564	0.347419	0.347613	0.335438	0.34464	0.348628	0.348075	0.33888	0.345613	0.348878	0.348383
1	0.338619	0.33174	0.340367	0.342771	0.342798	0.332471	0.340748	0.343905	0.343332	0.334051	0.340852	0.343892	0.34328
MSE													
t	n	20	50	75	100	20	50	75	100	20	50	75	100
0.1		0.024548	0.010906	0.006198	0.005813	0.032247	0.0126	0.007122	0.00614399	0.031302	0.012494	0.006777	0.00614608
0.2		0.021119	0.009438	0.005332	0.005047	0.02653	0.010685	0.006012	0.0052652	0.025454	0.010575	0.005758	0.00527535
0.3		0.018338	0.008219	0.004608	0.004403	0.022172	0.009122	0.005106	0.00453928	0.021038	0.009011	0.004921	0.00455287
0.4		0.016061	0.007202	0.004003	0.003861	0.018782	0.007841	0.004365	0.00393774	0.017637	0.007729	0.004231	0.00395083
0.5		0.014183	0.00635	0.003493	0.003401	0.016115	0.006789	0.003757	0.0034383	0.01498	0.006674	0.00366	0.00344748
0.6		0.012629	0.005636	0.003064	0.003011	0.014004	0.005925	0.003258	0.00302332	0.012888	0.005802	0.003188	0.00302558
0.7		0.011343	0.005035	0.002701	0.002679	0.012337	0.005216	0.002849	0.0026787	0.011232	0.005081	0.002795	0.00267139
0.8		0.010281	0.00453	0.002394	0.002395	0.011033	0.004637	0.002514	0.00239306	0.009924	0.004484	0.00247	0.00237379
0.9		0.00941	0.004106	0.002135	0.002153	0.010029	0.004169	0.002243	0.00215712	0.008895	0.003991	0.002201	0.00212379
1		0.008703	0.00375	0.001916	0.001946	0.009282	0.003794	0.002024	0.00196329	0.008094	0.003585	0.001979	0.001914
	IMSE	0.014661	0.006517	0.003584	0.003471	0.017253	0.007078	0.003925	0.003554	0.016144	0.006943	0.003798	0.00354812

(A) الملحق



(A) الملحق

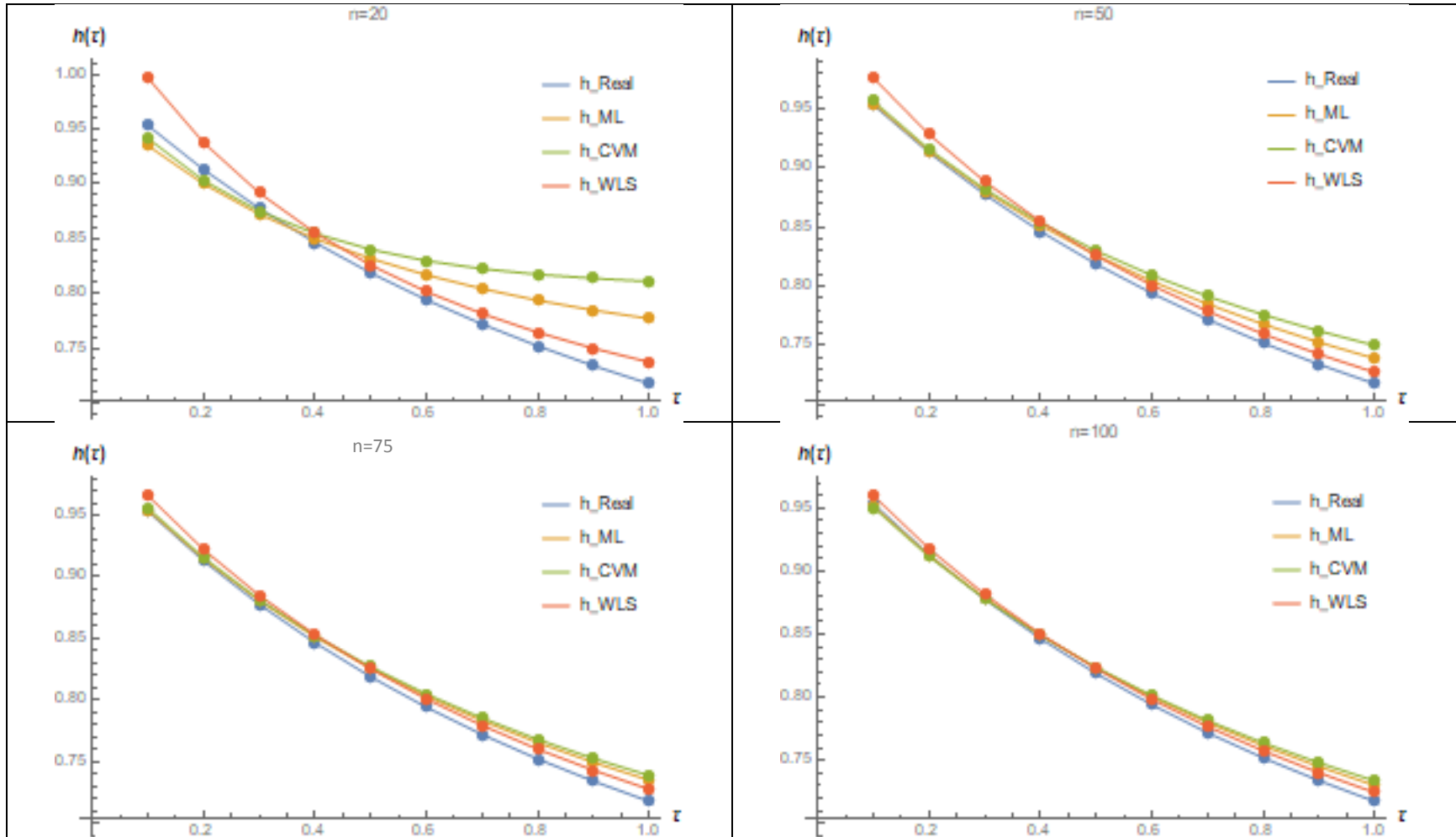
جدول (8) دالة المخاطرة الحقيقية والمقدرة ومتوسط مربعات الخطأ ومتوسط مربعات الخطأ التكاملي لطرائق التقدير واحجام لعينات كافة للأنموذج الثامن

MODEL 8

h													
t	h_real	ML				CVM				WLS			
		20	50	75	100	20	50	75	100	20	50	75	100
0.1	0.953497	0.93509	0.954751	0.954289	0.951724	0.941728	0.956818	0.956107	0.950448	0.996892	0.976326	0.966167	0.959899
0.2	0.913106	0.900026	0.91454	0.91464	0.912566	0.903208	0.915953	0.915761	0.911445	0.937826	0.928488	0.922307	0.9178
0.3	0.877738	0.872336	0.880566	0.880727	0.87875	0.875219	0.882222	0.88163	0.878023	0.891923	0.888605	0.885071	0.881629
0.4	0.846547	0.850055	0.851483	0.851385	0.849263	0.854852	0.853955	0.852374	0.849069	0.855416	0.854843	0.85305	0.850225
0.5	0.818867	0.831868	0.826318	0.825754	0.823342	0.840188	0.829967	0.827022	0.823754	0.825885	0.825905	0.82522	0.822715
0.6	0.794167	0.816848	0.804343	0.803183	0.800392	0.8298	0.809388	0.804848	0.801447	0.801656	0.800837	0.800814	0.798433
0.7	0.772015	0.804315	0.785005	0.783166	0.779948	0.822534	0.791561	0.7853	0.781655	0.781504	0.778922	0.779246	0.776857
0.8	0.752061	0.793756	0.76787	0.765307	0.761638	0.817438	0.775979	0.767947	0.76399	0.764502	0.759611	0.760058	0.757574
0.9	0.734014	0.784779	0.752596	0.749289	0.745161	0.813773	0.762246	0.752448	0.74814	0.74995	0.742472	0.742887	0.740252
1	0.717633	0.777074	0.738907	0.734854	0.73027	0.811005	0.750046	0.73853	0.733849	0.737316	0.727162	0.727442	0.724619

MSE													
t	n	20	50	75	100	20	50	75	100	20	50	75	100
0.1		0.123431	0.046622	0.032448	0.020891	0.142968	0.053269	0.0361	0.0238	0.145725	0.05122	0.034606	0.022155
0.2		0.090802	0.033389	0.023216	0.01543	0.098109	0.036151	0.024962	0.016822	0.095356	0.034664	0.023943	0.015893
0.3		0.070386	0.02463	0.017086	0.011756	0.072971	0.025648	0.017915	0.01236	0.066833	0.024353	0.017111	0.011788
0.4		0.057514	0.018769	0.012976	0.009277	0.060191	0.019412	0.013504	0.009552	0.05059	0.017943	0.012715	0.009097
0.5		0.049657	0.014864	0.010223	0.007615	0.056731	0.016078	0.010846	0.007862	0.042195	0.014088	0.009921	0.00736
0.6		0.045308	0.01232	0.008404	0.006524	0.06116	0.014798	0.009384	0.006946	0.03931	0.011969	0.008207	0.00628
0.7		0.043495	0.010747	0.007243	0.00584	0.072216	0.015007	0.00875	0.006572	0.040452	0.011059	0.007235	0.005661
0.8		0.043557	0.009879	0.00655	0.005446	0.088175	0.016306	0.008697	0.006583	0.04446	0.011004	0.006781	0.005369
0.9		0.045018	0.009531	0.006195	0.005264	0.107014	0.018394	0.009053	0.006865	0.050338	0.01156	0.006691	0.00531
1		0.047521	0.009567	0.006086	0.005237	0.126939	0.021037	0.009696	0.007342	0.057269	0.012549	0.006858	0.00542
	IMSE	0.061669	0.019032	0.013043	0.009328	0.088647	0.02361	0.01489	0.01047	0.063253	0.020041	0.013407	0.009433

(A) الملحق



(A) الملحق

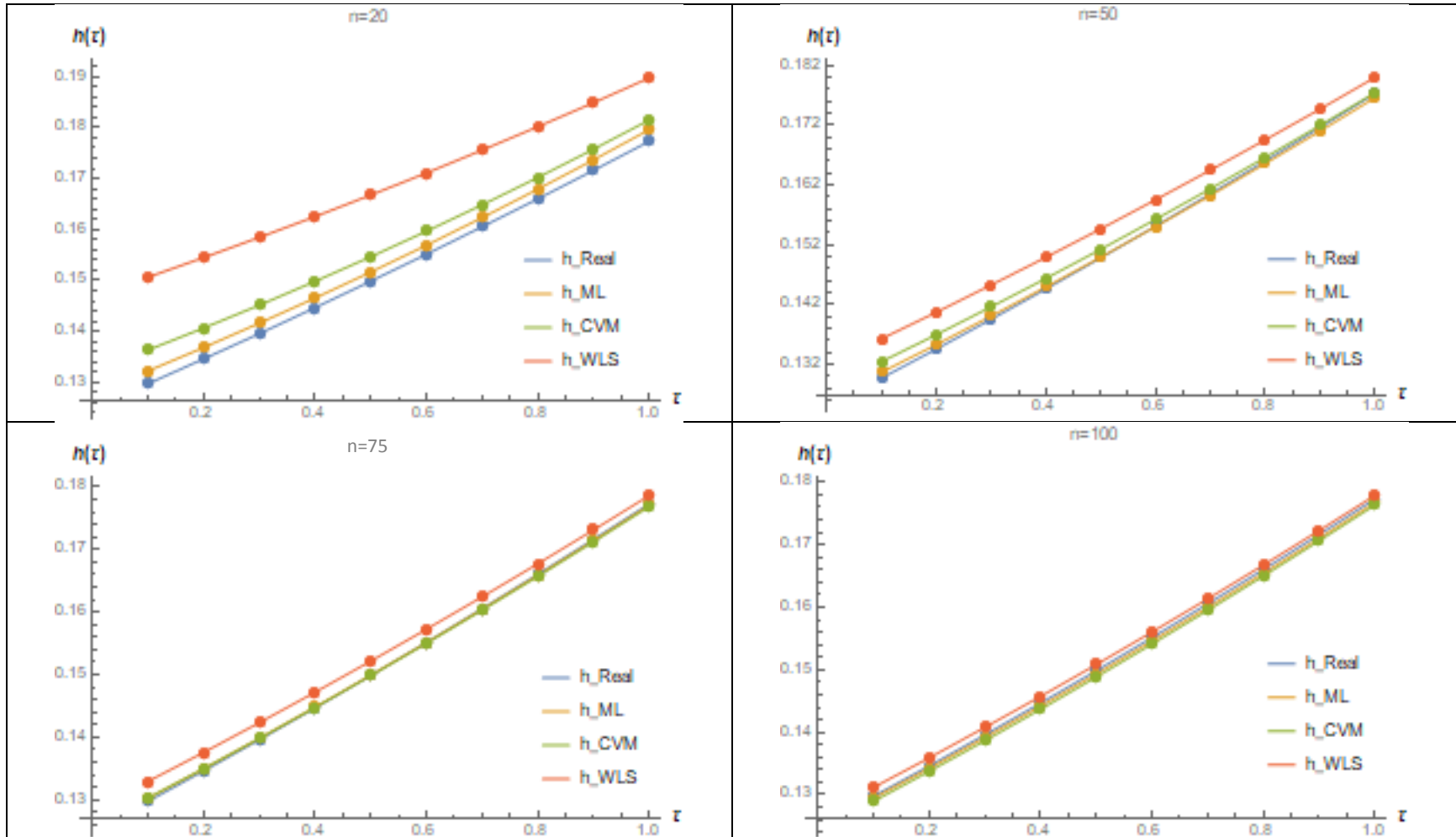
جدول (9) دالة المخاطرة الحقيقية والمقدرة ومتوسط مربعات الخطأ ومتوسط مربعات الخطأ التكاملي لطرائق التقدير واحجام لعينات كافة للأنموذج التاسع

MODEL 9

h													
t	h_real	ML				CVM				WLS			
		20	50	75	100	20	50	75	100	20	50	75	100
0.1	0.129746	0.132232	0.130733	0.130227	0.129449	0.136348	0.132495	0.130276	0.12895	0.150654	0.136322	0.132927	0.131159
0.2	0.134607	0.136856	0.135365	0.134973	0.134243	0.140678	0.137014	0.134977	0.133739	0.154497	0.140761	0.137572	0.135909
0.3	0.139582	0.141635	0.140117	0.139838	0.139158	0.145174	0.141654	0.1398	0.138653	0.158466	0.145307	0.142329	0.140775
0.4	0.144668	0.146574	0.144987	0.144822	0.144191	0.149837	0.146416	0.144745	0.143689	0.16256	0.149959	0.147198	0.145755
0.5	0.149862	0.151674	0.149976	0.149924	0.149342	0.154673	0.151298	0.14981	0.148847	0.166781	0.154715	0.152177	0.150847
0.6	0.155161	0.156936	0.155081	0.15514	0.154607	0.159683	0.156301	0.154994	0.154124	0.171129	0.159576	0.157263	0.156049
0.7	0.160562	0.162361	0.1603	0.160468	0.159986	0.164871	0.161421	0.160294	0.159518	0.175603	0.164538	0.162455	0.161359
0.8	0.16606	0.16795	0.165633	0.165907	0.165473	0.17024	0.166659	0.165709	0.165026	0.180204	0.1696	0.16775	0.166774
0.9	0.171651	0.173704	0.171076	0.171452	0.171066	0.175791	0.172012	0.171236	0.170645	0.18493	0.174759	0.173145	0.172289
1	0.177331	0.179621	0.176625	0.177099	0.176762	0.181527	0.177477	0.17687	0.176372	0.189781	0.180013	0.178636	0.177902

MSE													
t	n	20	50	75	100	20	50	75	100	20	50	75	100
0.1		0.004348	0.001561	0.001073	0.000849	0.0052	0.001878	0.001244	0.00089	0.00598	0.00182	0.001216	0.000856
0.2		0.004342	0.001562	0.001076	0.000856	0.005107	0.001853	0.001238	0.000893	0.005778	0.001794	0.00121	0.000859
0.3		0.004338	0.001561	0.001078	0.000861	0.005023	0.001827	0.001231	0.000894	0.005589	0.001765	0.001201	0.000861
0.4		0.004336	0.001557	0.001079	0.000865	0.004948	0.001798	0.001221	0.000894	0.005412	0.001734	0.001191	0.000862
0.5		0.004338	0.001551	0.001077	0.000867	0.004884	0.001768	0.001209	0.000892	0.005249	0.001702	0.001179	0.000861
0.6		0.004344	0.001544	0.001075	0.000868	0.004832	0.001737	0.001196	0.00089	0.0051	0.001668	0.001166	0.000859
0.7		0.004354	0.001535	0.001071	0.000867	0.004794	0.001705	0.001182	0.000886	0.004967	0.001634	0.001151	0.000856
0.8		0.004371	0.001524	0.001067	0.000865	0.004772	0.001673	0.001166	0.000882	0.00485	0.001599	0.001135	0.000852
0.9		0.004396	0.001513	0.001062	0.000863	0.004771	0.001641	0.001149	0.000877	0.004753	0.001565	0.001119	0.000847
1		0.00443	0.001501	0.001057	0.000859	0.004793	0.001611	0.001133	0.000872	0.004676	0.001531	0.001103	0.000842
	IMSE	0.00436	0.001541	0.001072	0.000862	0.004912	0.001749	0.001197	0.000887	0.005235	0.001681	0.001167	0.000855

(A) الملحق



(A) الملحق

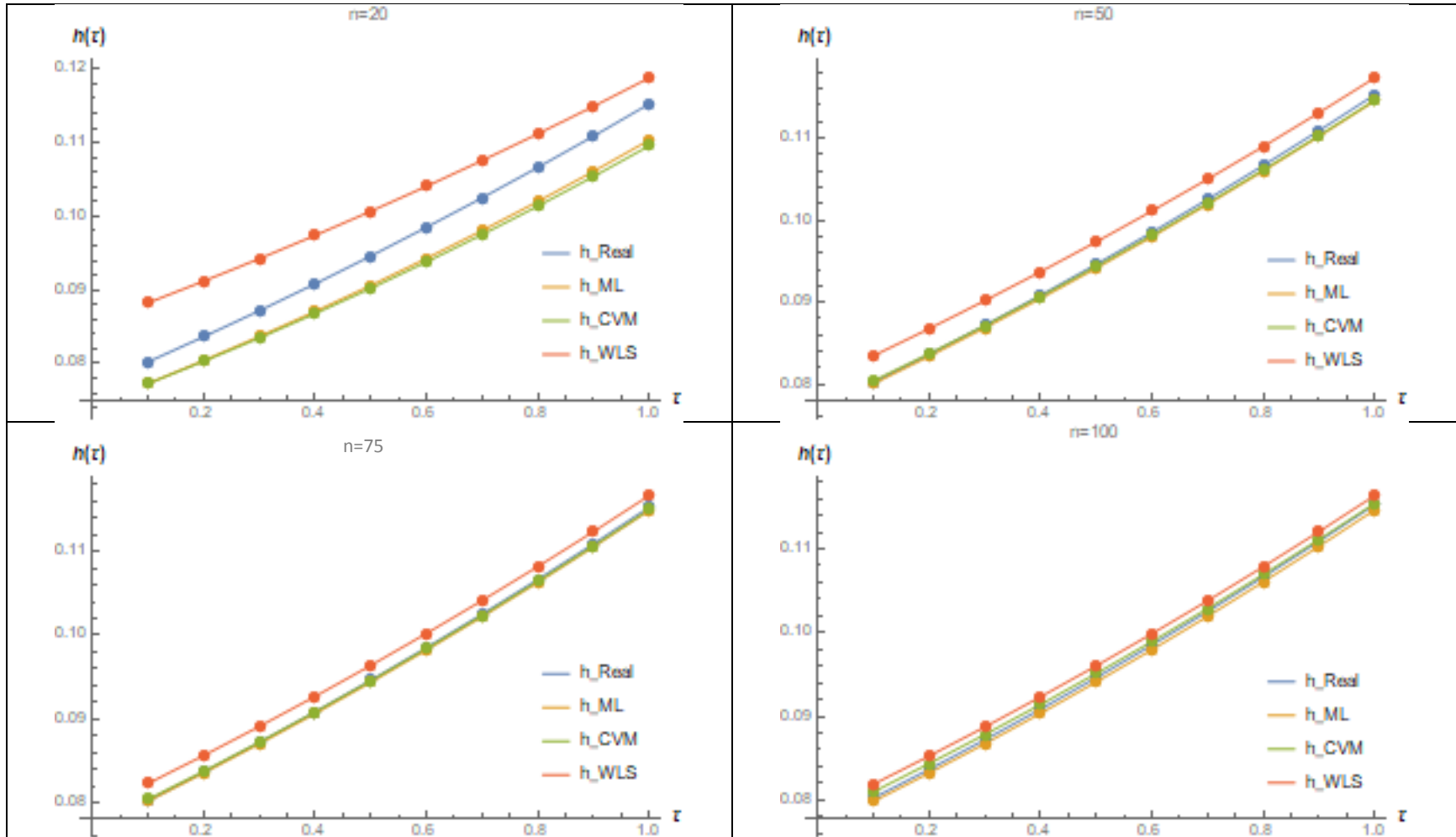
جدول (10) دالة المخاطرة الحقيقية والمقدرة ومتوسط مربعات الخطأ ومتوسط مربعات الخطأ التكاملي لطرائق التقدير واحجام لعينات كافة للأنموذج العاشر

MODEL 10

h													
t	h_real	ML				CVM				WLS			
		20	50	75	100	20	50	75	100	20	50	75	100
0.1	0.080234	0.077297	0.080084	0.080168	0.079838	0.077287	0.08043	0.08041	0.08098	0.088259	0.083484	0.082285	0.081874
0.2	0.08366	0.08044	0.083422	0.083541	0.083226	0.080333	0.083738	0.083769	0.08434	0.091213	0.086789	0.085643	0.085247
0.3	0.087201	0.083708	0.086878	0.087033	0.086733	0.083505	0.087165	0.087246	0.087814	0.094271	0.090204	0.089115	0.088733
0.4	0.090859	0.087105	0.090455	0.090644	0.090359	0.086808	0.090713	0.090843	0.091406	0.097437	0.093732	0.092701	0.092333
0.5	0.094636	0.090634	0.094154	0.094377	0.094107	0.090247	0.094384	0.094562	0.095115	0.100713	0.097375	0.096405	0.09605
0.6	0.098532	0.094299	0.097978	0.098233	0.097978	0.093825	0.09818	0.098405	0.098944	0.104101	0.101134	0.100225	0.099884
0.7	0.102548	0.098104	0.101928	0.102214	0.101973	0.097547	0.102103	0.102374	0.102893	0.107605	0.10501	0.104165	0.103836
0.8	0.106684	0.102053	0.106005	0.106321	0.106093	0.101418	0.106155	0.106469	0.106963	0.111227	0.109005	0.108225	0.107906
0.9	0.11094	0.106149	0.110211	0.110554	0.110338	0.105441	0.110337	0.110692	0.111156	0.114969	0.113119	0.112405	0.112096
1	0.115316	0.110394	0.114547	0.114915	0.11471	0.109622	0.114651	0.115043	0.115472	0.118833	0.117354	0.116706	0.116406

MSE													
t	n	20	50	75	100	20	50	75	100	20	50	75	100
0.1		0.001684	0.000772	0.000445	0.000379	0.001954	0.000861	0.000498	0.000447	0.002306	0.000866	0.000475	0.000413
0.2		0.00172	0.000796	0.000457	0.000392	0.001978	0.000879	0.000508	0.00046	0.002295	0.000882	0.000484	0.000425
0.3		0.001756	0.000819	0.000468	0.000404	0.002002	0.000896	0.000517	0.000472	0.002283	0.000898	0.000493	0.000437
0.4		0.001793	0.000842	0.000479	0.000417	0.002026	0.000913	0.000525	0.000484	0.002271	0.000913	0.000502	0.000449
0.5		0.00183	0.000865	0.000489	0.000429	0.002051	0.00093	0.000533	0.000496	0.002259	0.000928	0.000509	0.00046
0.6		0.001867	0.000887	0.000498	0.000441	0.002076	0.000946	0.000541	0.000507	0.002247	0.000941	0.000516	0.000471
0.7		0.001905	0.000909	0.000507	0.000453	0.002101	0.000962	0.000547	0.000517	0.002235	0.000955	0.000522	0.000481
0.8		0.001943	0.00093	0.000516	0.000465	0.002127	0.000977	0.000553	0.000527	0.002224	0.000967	0.000528	0.000491
0.9		0.001982	0.000951	0.000524	0.000476	0.002154	0.000991	0.000558	0.000537	0.002214	0.000979	0.000533	0.000501
1		0.002022	0.000971	0.000531	0.000487	0.002182	0.001006	0.000562	0.000546	0.002205	0.000991	0.000537	0.00051
	IMSE	0.00185	0.000874	0.000491	0.000434	0.002065	0.000936	0.000534	0.000499	0.002254	0.000932	0.00051	0.000464

(A) الملحق



(B) الملحق

%%%%%*Hatem*%%%%%

Simulation of ((Gompertz-Exponential Distribution))

```
Clear[α, λ, x]
<<Optimization`UnconstrainedProblems`
dist[α_, λ_]:= ProbabilityDistribution[(λ α Eα x)/(λ+E(α x)-1)2, {x, 0, ∞}, Assumptions-
>λ>0&&α>0];
F[x_]:=1- λ /(-1+Ex α+ λ);
S[x_]:= λ /(-1+Ex α+ λ);
r=1000;n1=20;n2=50;n3=75;n4=100;
α1=.2;α2=.5;λ1=.5;λ2=4;λ3=6.5;
α11=1.5;α22=2;λ11=.5;λ22=1.5;λ33=3;
distGen1=dist[α11,λ1];
distGen2=dist[α11,λ22];
distGen3=dist[α11,λ33];
distGen4=dist[α22,λ11];
distGen5=dist[α22,λ22];
distGen6=dist[α22,λ33];
distGen7=dist[α1,λ1];
distGen8=dist[α2,λ1];
distGen9=dist[α2,λ2];
distGen10=dist[α2,λ3];
target1 := distGen1
t1 = TransformedDistribution[Refine[InverseCDF[target1, p], 0 <= p <= 1], p]
UniformDistribution[]];
target2 := distGen2
t2 = TransformedDistribution[Refine[InverseCDF[target2, p], 0 <= p <= 1], p]
UniformDistribution[]];
target3 := distGen3
t3 = TransformedDistribution[Refine[InverseCDF[target3, p], 0 <= p <= 1], p]
UniformDistribution[]];
target4 := distGen4
t4 = TransformedDistribution[Refine[InverseCDF[target4, p], 0 <= p <= 1], p]
UniformDistribution[]];
target5 := distGen5
t5 = TransformedDistribution[Refine[InverseCDF[target5, p], 0 <= p <= 1], p]
UniformDistribution[]];
target6 := distGen6
t6 = TransformedDistribution[Refine[InverseCDF[target6, p], 0 <= p <= 1], p]
UniformDistribution[]];
target7 := distGen7
t7 = TransformedDistribution[Refine[InverseCDF[target7, p], 0 <= p <= 1], p]
UniformDistribution[]];
target8 := distGen8
```

(B) الملحق

```
target8 = TransformedDistribution[Refine[InverseCDF[target8, p], 0 <= p <= 1], p]
UniformDistribution[];
target9 := distGen9
target9 = TransformedDistribution[Refine[InverseCDF[target9, p], 0 <= p <= 1], p]
UniformDistribution[];
target10 := distGen10
target10 = TransformedDistribution[Refine[InverseCDF[target10, p], 0 <= p <= 1], p]
UniformDistribution[];
SeedRandom[1]; {data1=RandomVariate[target1, {r,n1}];
data2=RandomVariate[target1, {r,n2}];
data3=RandomVariate[target1, {r,n3}];
data4=RandomVariate[target1, {r,n4}];
data5=RandomVariate[target2, {r,n1}];
data6=RandomVariate[target2, {r,n2}];
data7=RandomVariate[target2, {r,n3}];
data8=RandomVariate[target2, {r,n4}];
data9=RandomVariate[target3, {r,n1}];
data10=RandomVariate[target3, {r,n2}];
data11=RandomVariate[target3, {r,n3}];
data12=RandomVariate[target3, {r,n4}];
data13=RandomVariate[target4, {r,n1}];
data14=RandomVariate[target4, {r,n2}];
data15=RandomVariate[target4, {r,n3}];
data16=RandomVariate[target4, {r,n4}];
data17=RandomVariate[target5, {r,n1}];
data18=RandomVariate[target5, {r,n2}];
data19=RandomVariate[target5, {r,n3}];
data20=RandomVariate[target5, {r,n4}];
data21=RandomVariate[target6, {r,n1}];
data22=RandomVariate[target6, {r,n2}];
data23=RandomVariate[target6, {r,n3}];
data24=RandomVariate[target6, {r,n4}];
data25=RandomVariate[target7, {r,n1}];
data26=RandomVariate[target7, {r,n2}];
data27=RandomVariate[target7, {r,n3}];
data28=RandomVariate[target7, {r,n4}];
data29=RandomVariate[target8, {r,n1}];
data30=RandomVariate[target8, {r,n2}];
data31=RandomVariate[target8, {r,n3}];
data32=RandomVariate[target8, {r,n4}];
data33=RandomVariate[target9, {r,n1}];
data34=RandomVariate[target9, {r,n2}];
data35=RandomVariate[target9, {r,n3}];
data36=RandomVariate[target9, {r,n4}];
```

(B) الملحق

```
data37=RandomVariate[10,{r,n1}];
data38=RandomVariate[10,{r,n2}];
data39=RandomVariate[10,{r,n3}];
data40=RandomVariate[10,{r,n4}];};
sdata1= ConstantArray[{} ,r];
sdata2= ConstantArray[{} ,r];
sdata3= ConstantArray[{} ,r];
sdata4= ConstantArray[{} ,r];
sdata5= ConstantArray[{} ,r];
sdata6= ConstantArray[{} ,r];
sdata7= ConstantArray[{} ,r];
sdata8= ConstantArray[{} ,r];
sdata9= ConstantArray[{} ,r];
sdata10= ConstantArray[{} ,r];
sdata11= ConstantArray[{} ,r];
sdata12= ConstantArray[{} ,r];
sdata13= ConstantArray[{} ,r];
sdata14= ConstantArray[{} ,r];
sdata15= ConstantArray[{} ,r];
sdata16= ConstantArray[{} ,r];
sdata17= ConstantArray[{} ,r];
sdata18= ConstantArray[{} ,r];
sdata19= ConstantArray[{} ,r];
sdata20= ConstantArray[{} ,r];
sdata21= ConstantArray[{} ,r];
sdata22= ConstantArray[{} ,r];
sdata23= ConstantArray[{} ,r];
sdata24= ConstantArray[{} ,r];
sdata25= ConstantArray[{} ,r];
sdata26= ConstantArray[{} ,r];
sdata27= ConstantArray[{} ,r];
sdata28= ConstantArray[{} ,r];
sdata29= ConstantArray[{} ,r];
sdata30= ConstantArray[{} ,r];
sdata31= ConstantArray[{} ,r];
sdata32= ConstantArray[{} ,r];
sdata33= ConstantArray[{} ,r];
sdata34= ConstantArray[{} ,r];
sdata35= ConstantArray[{} ,r];
sdata36= ConstantArray[{} ,r];
sdata37= ConstantArray[{} ,r];
sdata38= ConstantArray[{} ,r];
sdata39= ConstantArray[{} ,r];
sdata40= ConstantArray[{} ,r];
For[j=1,j<=r,j++,sdata1[[j]]=Sort[data1[[j]]];];
For[j=1,j<=r,j++,sdata2[[j]]=Sort[data2[[j]]];];
```


الملحق (B)

```
FindDistributionParameters[data2[[i]],dist[ $\alpha,\lambda$ ],ParameterEstimator-
>{"MaximumLikelihood"}],{i,1,r}];
mlm3=Table[res=
FindDistributionParameters[data3[[i]],dist[ $\alpha,\lambda$ ],ParameterEstimator-
>{"MaximumLikelihood"}],{i,1,r}];
mlm4=Table[res=
FindDistributionParameters[data4[[i]],dist[ $\alpha,\lambda$ ],ParameterEstimator-
>{"MaximumLikelihood"}],{i,1,r}];
mlm5=Table[res=
FindDistributionParameters[data5[[i]],dist[ $\alpha,\lambda$ ],ParameterEstimator-
>{"MaximumLikelihood"}],{i,1,r}];
mlm6=Table[res=
FindDistributionParameters[data6[[i]],dist[ $\alpha,\lambda$ ],ParameterEstimator-
>{"MaximumLikelihood"}],{i,1,r}];
mlm7=Table[res=
FindDistributionParameters[data7[[i]],dist[ $\alpha,\lambda$ ],ParameterEstimator-
>{"MaximumLikelihood"}],{i,1,r}];
mlm8=Table[res=
FindDistributionParameters[data8[[i]],dist[ $\alpha,\lambda$ ],ParameterEstimator-
>{"MaximumLikelihood"}],{i,1,r}];
mlm9=Table[res=
FindDistributionParameters[data9[[i]],dist[ $\alpha,\lambda$ ],ParameterEstimator-
>{"MaximumLikelihood"}],{i,1,r}];
mlm10=Table[res=
FindDistributionParameters[data10[[i]],dist[ $\alpha,\lambda$ ],ParameterEstimator-
>{"MaximumLikelihood"}],{i,1,r}];
mlm11=Table[res=
FindDistributionParameters[data11[[i]],dist[ $\alpha,\lambda$ ],ParameterEstimator-
>{"MaximumLikelihood"}],{i,1,r}];
mlm12=Table[res=
FindDistributionParameters[data12[[i]],dist[ $\alpha,\lambda$ ],ParameterEstimator-
>{"MaximumLikelihood"}],{i,1,r}];
mlm13=Table[res=
FindDistributionParameters[data13[[i]],dist[ $\alpha,\lambda$ ],ParameterEstimator-
>{"MaximumLikelihood"}],{i,1,r}];
mlm14=Table[res=
FindDistributionParameters[data14[[i]],dist[ $\alpha,\lambda$ ],ParameterEstimator-
>{"MaximumLikelihood"}],{i,1,r}];
mlm15=Table[res=
FindDistributionParameters[data15[[i]],dist[ $\alpha,\lambda$ ],ParameterEstimator-
>{"MaximumLikelihood"}],{i,1,r}];
mlm16=Table[res=
FindDistributionParameters[data16[[i]],dist[ $\alpha,\lambda$ ],ParameterEstimator-
>{"MaximumLikelihood"}],{i,1,r}];
mlm17=Table[res=
```

الملحق (B)

```
FindDistributionParameters[data17[[i]],dist[ $\alpha,\lambda$ ],ParameterEstimator-
>{"MaximumLikelihood"}],{i,1,r}];
mlm18=Table[res=
FindDistributionParameters[data18[[i]],dist[ $\alpha,\lambda$ ],ParameterEstimator-
>{"MaximumLikelihood"}],{i,1,r}];
mlm19=Table[res=
FindDistributionParameters[data19[[i]],dist[ $\alpha,\lambda$ ],ParameterEstimator-
>{"MaximumLikelihood"}],{i,1,r}];
mlm20=Table[res=
FindDistributionParameters[data20[[i]],dist[ $\alpha,\lambda$ ],ParameterEstimator-
>{"MaximumLikelihood"}],{i,1,r}];
mlm21=Table[res=
FindDistributionParameters[data21[[i]],dist[ $\alpha,\lambda$ ],ParameterEstimator-
>{"MaximumLikelihood"}],{i,1,r}];
mlm22=Table[res=
FindDistributionParameters[data22[[i]],dist[ $\alpha,\lambda$ ],ParameterEstimator-
>{"MaximumLikelihood"}],{i,1,r}];
mlm23=Table[res=
FindDistributionParameters[data23[[i]],dist[ $\alpha,\lambda$ ],ParameterEstimator-
>{"MaximumLikelihood"}],{i,1,r}];
mlm24=Table[res=
FindDistributionParameters[data24[[i]],dist[ $\alpha,\lambda$ ],ParameterEstimator-
>{"MaximumLikelihood"}],{i,1,r}];
mlm25=Table[res=
FindDistributionParameters[data25[[i]],dist[ $\alpha,\lambda$ ],ParameterEstimator-
>{"MaximumLikelihood"}],{i,1,r}];
mlm26=Table[res=
FindDistributionParameters[data26[[i]],dist[ $\alpha,\lambda$ ],ParameterEstimator-
>{"MaximumLikelihood"}],{i,1,r}];
mlm27=Table[res=
FindDistributionParameters[data27[[i]],dist[ $\alpha,\lambda$ ],ParameterEstimator-
>{"MaximumLikelihood"}],{i,1,r}];
mlm28=Table[res=
FindDistributionParameters[data28[[i]],dist[ $\alpha,\lambda$ ],ParameterEstimator-
>{"MaximumLikelihood"}],{i,1,r}];
mlm29=Table[res=
FindDistributionParameters[data29[[i]],dist[ $\alpha,\lambda$ ],ParameterEstimator-
>{"MaximumLikelihood"}],{i,1,r}];
mlm30=Table[res=
FindDistributionParameters[data30[[i]],dist[ $\alpha,\lambda$ ],ParameterEstimator-
>{"MaximumLikelihood"}],{i,1,r}];
mlm31=Table[res=
FindDistributionParameters[data31[[i]],dist[ $\alpha,\lambda$ ],ParameterEstimator-
>{"MaximumLikelihood"}],{i,1,r}];
mlm32=Table[res=
```

(B) الملحق

```
FindDistributionParameters[data32[[i]],dist[α,λ],ParameterEstimator-  
>{"MaximumLikelihood"}],{i,1,r});  
mlm33=Table[res=  
FindDistributionParameters[data33[[i]],dist[α,λ],ParameterEstimator-  
>{"MaximumLikelihood"}],{i,1,r});  
mlm34=Table[res=  
FindDistributionParameters[data34[[i]],dist[α,λ],ParameterEstimator-  
>{"MaximumLikelihood"}],{i,1,r});  
mlm35=Table[res=  
FindDistributionParameters[data35[[i]],dist[α,λ],ParameterEstimator-  
>{"MaximumLikelihood"}],{i,1,r});  
mlm36=Table[res=  
FindDistributionParameters[data36[[i]],dist[α,λ],ParameterEstimator-  
>{"MaximumLikelihood"}],{i,1,r});  
mlm37=Table[res=  
FindDistributionParameters[data37[[i]],dist[α,λ],ParameterEstimator-  
>{"MaximumLikelihood"}],{i,1,r});  
mlm38=Table[res=  
FindDistributionParameters[data38[[i]],dist[α,λ],ParameterEstimator-  
>{"MaximumLikelihood"}],{i,1,r});  
mlm39=Table[res=  
FindDistributionParameters[data39[[i]],dist[α,λ],ParameterEstimator-  
>{"MaximumLikelihood"}],{i,1,r});  
mlm40=Table[res=  
FindDistributionParameters[data40[[i]],dist[α,λ],ParameterEstimator-  
>{"MaximumLikelihood"}],{i,1,r});
```

LEAST SQUARE METHOD

```
CVM1=Last/@Table[res=FindMinimum[(1/(2 n1)) $\sum_{i=1}^{n_1} \left( F[sdata1[j][i]] - \left( \frac{2i-1}{2n_1} \right) \right)^2$ ],{α,λ},Method->"Newton",AccuracyGoal->5],{j,1,r});  
CVM2=Last/@Table[res=FindMinimum[(1/(2 n2)) $\sum_{i=1}^{n_2} \left( F[sdata2[j][i]] - \left( \frac{2i-1}{2n_2} \right) \right)^2$ ],{α,λ},Method->"Newton",AccuracyGoal->5],{j,1,r});  
CVM3=Last/@Table[res=FindMinimum[(1/(2 n3)) $\sum_{i=1}^{n_3} \left( F[sdata3[j][i]] - \left( \frac{2i-1}{2n_3} \right) \right)^2$ ],{α,λ},Method->"Newton",AccuracyGoal->5],{j,1,r});  
CVM4=Last/@Table[res=FindMinimum[(1/(2 n4)) $\sum_{i=1}^{n_4} \left( F[sdata4[j][i]] - \left( \frac{2i-1}{2n_4} \right) \right)^2$ ],{α,λ},Method->"Newton",AccuracyGoal->5],{j,1,r});
```

(B) الملحق

$$\sum_{i=1}^{n_1} \left(F[\text{sdata5}][j][i] - \left(\frac{2i-1}{2n_1} \right) \right)^2$$

CVM5=Last/@Table[res=FindMinimum[(1/(12 n₁))+i=1
,{α,λ},Method->"Newton",AccuracyGoal->5],{j,1,r}];

$$\sum_{i=1}^{n_2} \left(F[\text{sdata6}][j][i] - \left(\frac{2i-1}{2n_2} \right) \right)^2$$

CVM6=Last/@Table[res=FindMinimum[(1/(12 n₂))+i=1
,{α,λ},Method->"Newton",AccuracyGoal->5],{j,1,r}];

$$\sum_{i=1}^{n_3} \left(F[\text{sdata7}][j][i] - \left(\frac{2i-1}{2n_3} \right) \right)^2$$

CVM7=Last/@Table[res=FindMinimum[(1/(12 n₃))+i=1
,{α,λ},Method->"Newton",AccuracyGoal->5],{j,1,r}];

$$\sum_{i=1}^{n_4} \left(F[\text{sdata8}][j][i] - \left(\frac{2i-1}{2n_4} \right) \right)^2$$

CVM8=Last/@Table[res=FindMinimum[(1/(12 n₄))+i=1
,{α,λ},Method->"Newton",AccuracyGoal->5],{j,1,r}];

$$\sum_{i=1}^{n_1} \left(F[\text{sdata9}][j][i] - \left(\frac{2i-1}{2n_1} \right) \right)^2$$

CVM9=Last/@Table[res=FindMinimum[(1/(12 n₁))+i=1
,{α,λ},Method->"Newton",AccuracyGoal->5],{j,1,r}];

CVM10=Last/@Table[res=FindMinimum[(1/(12 n₂))+
$$\sum_{i=1}^{n_2} \left(F[\text{sdata10}][j][i] - \left(\frac{2i-1}{2n_2} \right) \right)^2$$

,{α,λ},Method->"Newton",AccuracyGoal->5],{j,1,r}];

CVM11=Last/@Table[res=FindMinimum[(1/(12 n₃))+
$$\sum_{i=1}^{n_3} \left(F[\text{sdata11}][j][i] - \left(\frac{2i-1}{2n_3} \right) \right)^2$$

,{α,λ},Method->"Newton",AccuracyGoal->5],{j,1,r}];

CVM12=Last/@Table[res=FindMinimum[(1/(12 n₄))+
$$\sum_{i=1}^{n_4} \left(F[\text{sdata12}][j][i] - \left(\frac{2i-1}{2n_4} \right) \right)^2$$

,{α,λ},Method->"Newton",AccuracyGoal->5],{j,1,r}];

CVM13=Last/@Table[res=FindMinimum[(1/(12 n₁))+
$$\sum_{i=1}^{n_1} \left(F[\text{sdata13}][j][i] - \left(\frac{2i-1}{2n_1} \right) \right)^2$$

,{α,λ},Method->"Newton",AccuracyGoal->5],{j,1,r}];

(B) الملحق

CVM14=Last/@Table[res=FindMinimum[(1/(12 n₂))+
$$\sum_{i=1}^{n_2} \left(F[\text{sdata14}[\text{j}][\text{i}]] - \left(\frac{2i-1}{2n_2} \right)^2 \right)^2$$
, {α,λ},Method->"Newton",AccuracyGoal->5],{j,1,r}];

CVM15=Last/@Table[res=FindMinimum[(1/(12 n₃))+
$$\sum_{i=1}^{n_3} \left(F[\text{sdata15}[\text{j}][\text{i}]] - \left(\frac{2i-1}{2n_3} \right)^2 \right)^2$$
, {α,λ},Method->"Newton",AccuracyGoal->5],{j,1,r}];

CVM16=Last/@Table[res=FindMinimum[(1/(12 n₄))+
$$\sum_{i=1}^{n_4} \left(F[\text{sdata16}[\text{j}][\text{i}]] - \left(\frac{2i-1}{2n_4} \right)^2 \right)^2$$
, {α,λ},Method->"Newton",AccuracyGoal->5],{j,1,r}];

CVM17=Last/@Table[res=FindMinimum[(1/(12 n₁))+
$$\sum_{i=1}^{n_1} \left(F[\text{sdata17}[\text{j}][\text{i}]] - \left(\frac{2i-1}{2n_1} \right)^2 \right)^2$$
, {α,λ},Method->"Newton",AccuracyGoal->5],{j,1,r}];

CVM18=Last/@Table[res=FindMinimum[(1/(12 n₂))+
$$\sum_{i=1}^{n_2} \left(F[\text{sdata18}[\text{j}][\text{i}]] - \left(\frac{2i-1}{2n_2} \right)^2 \right)^2$$
, {α,λ},Method->"Newton",AccuracyGoal->5],{j,1,r}];

CVM19=Last/@Table[res=FindMinimum[(1/(12 n₃))+
$$\sum_{i=1}^{n_3} \left(F[\text{sdata19}[\text{j}][\text{i}]] - \left(\frac{2i-1}{2n_3} \right)^2 \right)^2$$
, {α,λ},Method->"Newton",AccuracyGoal->5],{j,1,r}];

CVM20=Last/@Table[res=FindMinimum[(1/(12 n₄))+
$$\sum_{i=1}^{n_4} \left(F[\text{sdata20}[\text{j}][\text{i}]] - \left(\frac{2i-1}{2n_4} \right)^2 \right)^2$$
, {α,λ},Method->"Newton",AccuracyGoal->5],{j,1,r}];

CVM21=Last/@Table[res=FindMinimum[(1/(12 n₁))+
$$\sum_{i=1}^{n_1} \left(F[\text{sdata21}[\text{j}][\text{i}]] - \left(\frac{2i-1}{2n_1} \right)^2 \right)^2$$
, {α,λ},Method->"Newton",AccuracyGoal->5],{j,1,r}];

(B) الملحق

CVM22=Last/@Table[res=FindMinimum[(1/(12 n₂))+
$$\sum_{i=1}^{n_2} \left(F[\text{sdata22}[j][i]] - \left(\frac{2i-1}{2n_2} \right)^2 \right)^2$$
, {α,λ},Method->"Newton",AccuracyGoal->5],{j,1,r}];

CVM23=Last/@Table[res=FindMinimum[(1/(12 n₃))+
$$\sum_{i=1}^{n_3} \left(F[\text{sdata23}[j][i]] - \left(\frac{2i-1}{2n_3} \right)^2 \right)^2$$
, {α,λ},Method->"Newton",AccuracyGoal->5],{j,1,r}];

CVM24=Last/@Table[res=FindMinimum[(1/(12 n₄))+
$$\sum_{i=1}^{n_4} \left(F[\text{sdata24}[j][i]] - \left(\frac{2i-1}{2n_4} \right)^2 \right)^2$$
, {α,λ},Method->"Newton",AccuracyGoal->5],{j,1,r}];

CVM25=Last/@Table[res=FindMinimum[(1/(12 n₁))+
$$\sum_{i=1}^{n_1} \left(F[\text{sdata25}[j][i]] - \left(\frac{2i-1}{2n_1} \right)^2 \right)^2$$
, {α,λ},Method->"Newton",AccuracyGoal->5],{j,1,r}];

CVM26=Last/@Table[res=FindMinimum[(1/(12 n₂))+
$$\sum_{i=1}^{n_2} \left(F[\text{sdata26}[j][i]] - \left(\frac{2i-1}{2n_2} \right)^2 \right)^2$$
, {α,λ},Method->"Newton",AccuracyGoal->5],{j,1,r}];

CVM27=Last/@Table[res=FindMinimum[(1/(12 n₃))+
$$\sum_{i=1}^{n_3} \left(F[\text{sdata27}[j][i]] - \left(\frac{2i-1}{2n_3} \right)^2 \right)^2$$
, {α,λ},Method->"Newton",AccuracyGoal->5],{j,1,r}];

CVM28=Last/@Table[res=FindMinimum[(1/(12 n₄))+
$$\sum_{i=1}^{n_4} \left(F[\text{sdata28}[j][i]] - \left(\frac{2i-1}{2n_4} \right)^2 \right)^2$$
, {α,λ},Method->"Newton",AccuracyGoal->5],{j,1,r}];

CVM29=Last/@Table[res=FindMinimum[(1/(12 n₁))+
$$\sum_{i=1}^{n_1} \left(F[\text{sdata29}[j][i]] - \left(\frac{2i-1}{2n_1} \right)^2 \right)^2$$
, {α,λ},Method->"Newton",AccuracyGoal->5],{j,1,r}];

(B) الملحق

CVM30=Last/@Table[res=FindMinimum[(1/(12 n₂))+
$$\sum_{i=1}^{n_2} \left(F[\text{sdata30}[j][i]] - \left(\frac{2i-1}{2n_2} \right)^2 \right)^2$$
, {α,λ},Method->"Newton",AccuracyGoal->5],{j,1,r}];

CVM31=Last/@Table[res=FindMinimum[(1/(12 n₃))+
$$\sum_{i=1}^{n_3} \left(F[\text{sdata31}[j][i]] - \left(\frac{2i-1}{2n_3} \right)^2 \right)^2$$
, {α,λ},Method->"Newton",AccuracyGoal->5],{j,1,r}];

CVM32=Last/@Table[res=FindMinimum[(1/(12 n₄))+
$$\sum_{i=1}^{n_4} \left(F[\text{sdata32}[j][i]] - \left(\frac{2i-1}{2n_4} \right)^2 \right)^2$$
, {α,λ},Method->"Newton",AccuracyGoal->5],{j,1,r}];

CVM33=Last/@Table[res=FindMinimum[(1/(12 n₁))+
$$\sum_{i=1}^{n_1} \left(F[\text{sdata33}[j][i]] - \left(\frac{2i-1}{2n_1} \right)^2 \right)^2$$
, {α,λ},Method->"Newton",AccuracyGoal->5],{j,1,r}];

CVM34=Last/@Table[res=FindMinimum[(1/(12 n₂))+
$$\sum_{i=1}^{n_2} \left(F[\text{sdata34}[j][i]] - \left(\frac{2i-1}{2n_2} \right)^2 \right)^2$$
, {α,λ},Method->"Newton",AccuracyGoal->5],{j,1,r}];

CVM35=Last/@Table[res=FindMinimum[(1/(12 n₃))+
$$\sum_{i=1}^{n_3} \left(F[\text{sdata35}[j][i]] - \left(\frac{2i-1}{2n_3} \right)^2 \right)^2$$
, {α,λ},Method->"Newton",AccuracyGoal->5],{j,1,r}];

CVM36=Last/@Table[res=FindMinimum[(1/(12 n₄))+
$$\sum_{i=1}^{n_4} \left(F[\text{sdata36}[j][i]] - \left(\frac{2i-1}{2n_4} \right)^2 \right)^2$$
, {α,λ},Method->"Newton",AccuracyGoal->5],{j,1,r}];

CVM37=Last/@Table[res=FindMinimum[(1/(12 n₁))+
$$\sum_{i=1}^{n_1} \left(F[\text{sdata37}[j][i]] - \left(\frac{2i-1}{2n_1} \right)^2 \right)^2$$
, {α,λ},Method->"Newton",AccuracyGoal->5],{j,1,r}];

(B) الملحق

CVM38=Last/@Table[res=FindMinimum[(1/(12 n₂))+
 $\sum_{i=1}^{n_2} \left(F[sdata38[j][i]] - \left(\frac{2i-1}{2n_2} \right)^2 \right)^2$, {α,λ},Method->"Newton",AccuracyGoal->5],{j,1,r}];

CVM39=Last/@Table[res=FindMinimum[(1/(12 n₃))+
 $\sum_{i=1}^{n_3} \left(F[sdata39[j][i]] - \left(\frac{2i-1}{2n_3} \right)^2 \right)^2$, {α,λ},Method->"Newton",AccuracyGoal->5],{j,1,r}];

CVM40=Last/@Table[res=FindMinimum[(1/(12 n₄))+
 $\sum_{i=1}^{n_4} \left(F[sdata40[j][i]] - \left(\frac{2i-1}{2n_4} \right)^2 \right)^2$, {α,λ},Method->"Newton",AccuracyGoal->5],{j,1,r}];

\$WEIGHTED LEAST SQUARE METHOD\$

wls1=Last/@Table[res=FindMinimum[
 $\sum_{i=1}^{n_1} \left(\frac{(n_1+1)^2 (n_1+2)}{i (n_1-i+1)} \right) (F[sdata1[j][i]] - i / (n_1+1))^2$, {α,λ},Method->"Newton",AccuracyGoal->5],{j,1,r}];

wls2=Last/@Table[res=FindMinimum[
 $\sum_{i=1}^{n_2} \left(\frac{(n_2+1)^2 (n_2+2)}{i (n_2-i+1)} \right) (F[sdata2[j][i]] - i / (n_2+1))^2$, {α,λ},Method->"Newton",AccuracyGoal->5],{j,1,r}];

wls3=Last/@Table[res=FindMinimum[
 $\sum_{i=1}^{n_3} \left(\frac{(n_3+1)^2 (n_3+2)}{i (n_3-i+1)} \right) (F[sdata3[j][i]] - i / (n_3+1))^2$, {α,λ},Method->"Newton",AccuracyGoal->5],{j,1,r}];

wls4=Last/@Table[res=FindMinimum[
 $\sum_{i=1}^{n_4} \left(\frac{(n_4+1)^2 (n_4+2)}{i (n_4-i+1)} \right) (F[sdata4[j][i]] - i / (n_4+1))^2$, {α,λ},Method->"Newton",AccuracyGoal->5],{j,1,r}];

wls5=Last/@Table[res=FindMinimum[
 $\sum_{i=1}^{n_1} \left(\frac{(n_1+1)^2 (n_1+2)}{i (n_1-i+1)} \right) (F[sdata5[j][i]] - i / (n_1+1))^2$, {α,λ},Method->"Newton",AccuracyGoal->5],{j,1,r}];

(B) الملحق

```
wls6=Last/@Table[res=FindMinimum[

$$\sum_{i=1}^{n_2} \left( \frac{(n_2 + 1)^2 (n_2 + 2)}{i (n_2 - i + 1)} \right) (F[sdata6[j][i]] - i / (n_2 + 1))^2$$

, {α, λ}, Method-
>"Newton", AccuracyGoal->5], {j, 1, r}];
wls7=Last/@Table[res=FindMinimum[

$$\sum_{i=1}^{n_3} \left( \frac{(n_3 + 1)^2 (n_3 + 2)}{i (n_3 - i + 1)} \right) (F[sdata7[j][i]] - i / (n_3 + 1))^2$$

, {α, λ}, Method-
>"Newton", AccuracyGoal->5], {j, 1, r}];
wls8=Last/@Table[res=FindMinimum[

$$\sum_{i=1}^{n_4} \left( \frac{(n_4 + 1)^2 (n_4 + 2)}{i (n_4 - i + 1)} \right) (F[sdata8[j][i]] - i / (n_4 + 1))^2$$

, {α, λ}, Method-
>"Newton", AccuracyGoal->5], {j, 1, r}];
wls9=Last/@Table[res=FindMinimum[

$$\sum_{i=1}^{n_1} \left( \frac{(n_1 + 1)^2 (n_1 + 2)}{i (n_1 - i + 1)} \right) (F[sdata9[j][i]] - i / (n_1 + 1))^2$$

, {α, λ}, Method-
>"Newton", AccuracyGoal->5], {j, 1, r}];
wls10=Last/@Table[res=FindMinimum[

$$\sum_{i=1}^{n_2} \left( \frac{(n_2 + 1)^2 (n_2 + 2)}{i (n_2 - i + 1)} \right) (F[sdata10[j][i]] - i / (n_2 + 1))^2$$

, {α, λ}, Method-
>"Newton", AccuracyGoal->5], {j, 1, r}];
wls11=Last/@Table[res=FindMinimum[

$$\sum_{i=1}^{n_3} \left( \frac{(n_3 + 1)^2 (n_3 + 2)}{i (n_3 - i + 1)} \right) (F[sdata11[j][i]] - i / (n_3 + 1))^2$$

, {α, λ}, Method-
>"Newton", AccuracyGoal->5], {j, 1, r}];
wls12=Last/@Table[res=FindMinimum[

$$\sum_{i=1}^{n_4} \left( \frac{(n_4 + 1)^2 (n_4 + 2)}{i (n_4 - i + 1)} \right) (F[sdata12[j][i]] - i / (n_4 + 1))^2$$

, {α, λ}, Method-
>"Newton", AccuracyGoal->5], {j, 1, r}];
wls13=Last/@Table[res=FindMinimum[

$$\sum_{i=1}^{n_1} \left( \frac{(n_1 + 1)^2 (n_1 + 2)}{i (n_1 - i + 1)} \right) (F[sdata13[j][i]] - i / (n_1 + 1))^2$$

, {α, λ}, Method-
>"Newton", AccuracyGoal->5], {j, 1, r}];
```

(B) الملحق

```
wls14=Last/@Table[res=FindMinimum[

$$\sum_{i=1}^{n_2} \left( \frac{(n_2 + 1)^2 (n_2 + 2)}{i (n_2 - i + 1)} \right) (F[sdata14[j][i]] - i / (n_2 + 1))^2$$

, {α, λ}, Method-
>"Newton", AccuracyGoal->5], {j, 1, r}];
wls15=Last/@Table[res=FindMinimum[

$$\sum_{i=1}^{n_3} \left( \frac{(n_3 + 1)^2 (n_3 + 2)}{i (n_3 - i + 1)} \right) (F[sdata15[j][i]] - i / (n_3 + 1))^2$$

, {α, λ}, Method-
>"Newton", AccuracyGoal->5], {j, 1, r}];
wls16=Last/@Table[res=FindMinimum[

$$\sum_{i=1}^{n_4} \left( \frac{(n_4 + 1)^2 (n_4 + 2)}{i (n_4 - i + 1)} \right) (F[sdata16[j][i]] - i / (n_4 + 1))^2$$

, {α, λ}, Method-
>"Newton", AccuracyGoal->5], {j, 1, r}];
wls17=Last/@Table[res=FindMinimum[

$$\sum_{i=1}^{n_1} \left( \frac{(n_1 + 1)^2 (n_1 + 2)}{i (n_1 - i + 1)} \right) (F[sdata17[j][i]] - i / (n_1 + 1))^2$$

, {α, λ}, Method-
>"Newton", AccuracyGoal->5], {j, 1, r}];
wls18=Last/@Table[res=FindMinimum[

$$\sum_{i=1}^{n_2} \left( \frac{(n_2 + 1)^2 (n_2 + 2)}{i (n_2 - i + 1)} \right) (F[sdata18[j][i]] - i / (n_2 + 1))^2$$

, {α, λ}, Method-
>"Newton", AccuracyGoal->5], {j, 1, r}];
wls19=Last/@Table[res=FindMinimum[

$$\sum_{i=1}^{n_3} \left( \frac{(n_3 + 1)^2 (n_3 + 2)}{i (n_3 - i + 1)} \right) (F[sdata19[j][i]] - i / (n_3 + 1))^2$$

, {α, λ}, Method-
>"Newton", AccuracyGoal->5], {j, 1, r}];
wls20=Last/@Table[res=FindMinimum[

$$\sum_{i=1}^{n_4} \left( \frac{(n_4 + 1)^2 (n_4 + 2)}{i (n_4 - i + 1)} \right) (F[sdata20[j][i]] - i / (n_4 + 1))^2$$

, {α, λ}, Method-
>"Newton", AccuracyGoal->5], {j, 1, r}];
wls21=Last/@Table[res=FindMinimum[

$$\sum_{i=1}^{n_1} \left( \frac{(n_1 + 1)^2 (n_1 + 2)}{i (n_1 - i + 1)} \right) (F[sdata21[j][i]] - i / (n_1 + 1))^2$$

, {α, λ}, Method-
>"Newton", AccuracyGoal->5], {j, 1, r}];
```

(B) الملحق

```
wls22=Last/@Table[res=FindMinimum[

$$\sum_{i=1}^{n_2} \left( \frac{(n_2 + 1)^2 (n_2 + 2)}{i (n_2 - i + 1)} \right) (F[sdata22[[j]][i]] - i / (n_2 + 1))^2$$

, {α, λ}, Method-
>"Newton", AccuracyGoal->5], {j, 1, r}];
wls23=Last/@Table[res=FindMinimum[

$$\sum_{i=1}^{n_3} \left( \frac{(n_3 + 1)^2 (n_3 + 2)}{i (n_3 - i + 1)} \right) (F[sdata23[[j]][i]] - i / (n_3 + 1))^2$$

, {α, λ}, Method-
>"Newton", AccuracyGoal->5], {j, 1, r}];
wls24=Last/@Table[res=FindMinimum[

$$\sum_{i=1}^{n_4} \left( \frac{(n_4 + 1)^2 (n_4 + 2)}{i (n_4 - i + 1)} \right) (F[sdata24[[j]][i]] - i / (n_4 + 1))^2$$

, {α, λ}, Method-
>"Newton", AccuracyGoal->5], {j, 1, r}];
wls25=Last/@Table[res=FindMinimum[

$$\sum_{i=1}^{n_1} \left( \frac{(n_1 + 1)^2 (n_1 + 2)}{i (n_1 - i + 1)} \right) (F[sdata25[[j]][i]] - i / (n_1 + 1))^2$$

, {α, λ}, Method-
>"Newton", AccuracyGoal->5], {j, 1, r}];
wls26=Last/@Table[res=FindMinimum[

$$\sum_{i=1}^{n_2} \left( \frac{(n_2 + 1)^2 (n_2 + 2)}{i (n_2 - i + 1)} \right) (F[sdata26[[j]][i]] - i / (n_2 + 1))^2$$

, {α, λ}, Method-
>"Newton", AccuracyGoal->5], {j, 1, r}];
wls27=Last/@Table[res=FindMinimum[

$$\sum_{i=1}^{n_3} \left( \frac{(n_3 + 1)^2 (n_3 + 2)}{i (n_3 - i + 1)} \right) (F[sdata27[[j]][i]] - i / (n_3 + 1))^2$$

, {α, λ}, Method-
>"Newton", AccuracyGoal->5], {j, 1, r}];
wls28=Last/@Table[res=FindMinimum[

$$\sum_{i=1}^{n_4} \left( \frac{(n_4 + 1)^2 (n_4 + 2)}{i (n_4 - i + 1)} \right) (F[sdata28[[j]][i]] - i / (n_4 + 1))^2$$

, {α, λ}, Method-
>"Newton", AccuracyGoal->5], {j, 1, r}];
wls29=Last/@Table[res=FindMinimum[

$$\sum_{i=1}^{n_1} \left( \frac{(n_1 + 1)^2 (n_1 + 2)}{i (n_1 - i + 1)} \right) (F[sdata29[[j]][i]] - i / (n_1 + 1))^2$$

, {α, λ}, Method-
>"Newton", AccuracyGoal->5], {j, 1, r}];
```

(B) الملحق

```
wls30=Last/@Table[res=FindMinimum[

$$\sum_{i=1}^{n_2} \left( \frac{(n_2 + 1)^2 (n_2 + 2)}{i (n_2 - i + 1)} \right) (F[sdata30[j][i]] - i / (n_2 + 1))^2$$

, {α, λ}, Method-
>"Newton", AccuracyGoal->5], {j, 1, r}];
wls31=Last/@Table[res=FindMinimum[

$$\sum_{i=1}^{n_3} \left( \frac{(n_3 + 1)^2 (n_3 + 2)}{i (n_3 - i + 1)} \right) (F[sdata31[j][i]] - i / (n_3 + 1))^2$$

, {α, λ}, Method-
>"Newton", AccuracyGoal->5], {j, 1, r}];
wls32=Last/@Table[res=FindMinimum[

$$\sum_{i=1}^{n_4} \left( \frac{(n_4 + 1)^2 (n_4 + 2)}{i (n_4 - i + 1)} \right) (F[sdata32[j][i]] - i / (n_4 + 1))^2$$

, {α, λ}, Method-
>"Newton", AccuracyGoal->5], {j, 1, r}];
wls33=Last/@Table[res=FindMinimum[

$$\sum_{i=1}^{n_1} \left( \frac{(n_1 + 1)^2 (n_1 + 2)}{i (n_1 - i + 1)} \right) (F[sdata33[j][i]] - i / (n_1 + 1))^2$$

, {α, λ}, Method-
>"Newton", AccuracyGoal->5], {j, 1, r}];
wls34=Last/@Table[res=FindMinimum[

$$\sum_{i=1}^{n_2} \left( \frac{(n_2 + 1)^2 (n_2 + 2)}{i (n_2 - i + 1)} \right) (F[sdata34[j][i]] - i / (n_2 + 1))^2$$

, {α, λ}, Method-
>"Newton", AccuracyGoal->5], {j, 1, r}];
wls35=Last/@Table[res=FindMinimum[

$$\sum_{i=1}^{n_3} \left( \frac{(n_3 + 1)^2 (n_3 + 2)}{i (n_3 - i + 1)} \right) (F[sdata35[j][i]] - i / (n_3 + 1))^2$$

, {α, λ}, Method-
>"Newton", AccuracyGoal->5], {j, 1, r}];
wls36=Last/@Table[res=FindMinimum[

$$\sum_{i=1}^{n_4} \left( \frac{(n_4 + 1)^2 (n_4 + 2)}{i (n_4 - i + 1)} \right) (F[sdata36[j][i]] - i / (n_4 + 1))^2$$

, {α, λ}, Method-
>"Newton", AccuracyGoal->5], {j, 1, r}];
wls37=Last/@Table[res=FindMinimum[

$$\sum_{i=1}^{n_1} \left( \frac{(n_1 + 1)^2 (n_1 + 2)}{i (n_1 - i + 1)} \right) (F[sdata37[j][i]] - i / (n_1 + 1))^2$$

, {α, λ}, Method-
>"Newton", AccuracyGoal->5], {j, 1, r}];
```

(B) الملحق

```
wls38=Last/@Table[res=FindMinimum[

$$\sum_{i=1}^{n_2} \left( \frac{(n_2 + 1)^2 (n_2 + 2)}{i (n_2 - i + 1)} \right) (F[sdata38[[j]][[i]] - i / (n_2 + 1))^2$$

, {α, λ}, Method-
>"Newton", AccuracyGoal->5], {j, 1, r}];
wls39=Last/@Table[res=FindMinimum[

$$\sum_{i=1}^{n_3} \left( \frac{(n_3 + 1)^2 (n_3 + 2)}{i (n_3 - i + 1)} \right) (F[sdata39[[j]][[i]] - i / (n_3 + 1))^2$$

, {α, λ}, Method-
>"Newton", AccuracyGoal->5], {j, 1, r}];
wls40=Last/@Table[res=FindMinimum[

$$\sum_{i=1}^{n_4} \left( \frac{(n_4 + 1)^2 (n_4 + 2)}{i (n_4 - i + 1)} \right) (F[sdata40[[j]][[i]] - i / (n_4 + 1))^2$$

, {α, λ}, Method-
>"Newton", AccuracyGoal->5], {j, 1, r}];
(*Estimate maen of the parameters and the mean of MSE for the parameters model
with all samples*)
(*MLM*)
TableForm[{Mean[{{α}, {(Subscript[α, 1]-α)2}, {θ}, {(Subscript[θ, 1]-θ)2}}/.
mlm1], Mean[{{α}, {(Subscript[α, 1]-α)2}, {θ}, {(Subscript[θ, 1]-θ)2}}/. mlm2],
Mean[{{α}, {(Subscript[α, 1]-α)2}, {θ}, {(Subscript[θ, 1]-θ)2}}/.
mlm3], Mean[{{α}, {(Subscript[α, 1]-α)2}, {θ}, {(Subscript[θ, 1]-θ)2}}/. mlm4]],
TableHeadings->{{"20", "50", "75", "100"}, {"α", "MSE(α)", "θ", "MSE(θ)"}}
]
(*OLS*)
TableForm[{Mean[{{α}, {(Subscript[α, 1]-α)2}, {θ}, {(Subscript[θ, 1]-
θ)2}}/.CVM1], Mean[{{α}, {(Subscript[α, 1]-α)2}, {θ}, {(Subscript[θ, 1]-θ)2}}/.CVM2],
Mean[{{α}, {(Subscript[α, 1]-α)2}, {θ}, {(Subscript[θ, 1]-
θ)2}}/.CVM3], Mean[{{α}, {(Subscript[α, 1]-α)2}, {θ}, {(Subscript[θ, 1]-θ)2}}/. CVM4]],
TableHeadings->{{"20", "50", "75", "100"}, {"α", "MSE(α)", "θ", "MSE(θ)"}}
]
(*WLS*)
TableForm[{Mean[{{α}, {(Subscript[α, 1]-α)2}, {θ}, {(Subscript[θ, 1]-
θ)2}}/.wls1], Mean[{{α}, {(Subscript[α, 1]-α)2}, {θ}, {(Subscript[θ, 1]-θ)2}}/.wls2],
Mean[{{α}, {(Subscript[α, 1]-α)2}, {θ}, {(Subscript[θ, 1]-θ)2}}/.
wls3], Mean[{{α}, {(Subscript[α, 1]-α)2}, {θ}, {(Subscript[θ, 1]-θ)2}}/. wls4]],
TableHeadings->{{"20", "50", "75", "100"}, {"α", "MSE(α)", "θ", "MSE(θ)"}}
]
Hazard
{TableForm[{Table[HazardFunction[distGen1, t], {t, 0.1, 1, 0.1}],
Mean[Table[HazardFunction[dist[α, θ], t], {t, 0.1, 1, 0.1}]/. mlm1],
```

(B) الملحق

```
Mean[Table[HazardFunction[dist[α, θ], t], {t, 0.1, 1, 0.1}] /. mlm2],
Mean[Table[HazardFunction[dist[α, θ], t], {t, 0.1, 1, 0.1}] /. mlm3],
Mean[Table[HazardFunction[dist[α, θ], t], {t, 0.1, 1, 0.1}] /. mlm4}},
TableHeadings -> {"h_real", "20", "50", "75", "100"}, {"0.1", "0.2", "0.3", "0.4",
"0.5", "0.6", "0.7", "0.8", "0.9", "1"}}, TableDirections -> Row
], TableForm[{Mean[Table[HazardFunction[dist[α, θ], t], {t, 0.1, 1, 0.1}] /.
CVM1],
Mean[Table[HazardFunction[dist[α, θ], t], {t, 0.1, 1, 0.1}] /. CVM2],
Mean[Table[HazardFunction[dist[α, θ], t], {t, 0.1, 1, 0.1}] /. CVM3],
Mean[Table[HazardFunction[dist[α, θ], t], {t, 0.1, 1, 0.1}] /. CVM4]},
TableHeadings -> {"20", "50", "75", "100"}, {"0.1", "0.2", "0.3", "0.4", "0.5",
"0.6", "0.7", "0.8", "0.9", "1"}}, TableDirections -> Row
], TableForm[{Mean[Table[HazardFunction[dist[α, θ], t], {t, 0.1, 1, 0.1}] /. wls1],
Mean[Table[HazardFunction[dist[α, θ], t], {t, 0.1, 1, 0.1}] /. wls2],
Mean[Table[HazardFunction[dist[α, θ], t], {t, 0.1, 1, 0.1}] /. wls3],
Mean[Table[HazardFunction[dist[α, θ], t], {t, 0.1, 1, 0.1}] /. wls4]},
TableHeadings -> {"20", "50", "75", "100"}, {"0.1", "0.2", "0.3", "0.4", "0.5",
"0.6", "0.7", "0.8", "0.9", "1"}}, TableDirections -> Row
}]
{TableForm[{Mean[(Table[HazardFunction[dist[α,θ],t],{t,0.1,1,0.1}]-
Table[HazardFunction[distGen1,t],{t,0.1,1,0.1}])^2/.mlm1],
Mean[(Table[HazardFunction[dist[α,θ],t],{t,0.1,1,0.1}]-
Table[HazardFunction[distGen1,t],{t,0.1,1,0.1}])^2/.mlm2],
Mean[(Table[HazardFunction[dist[α,θ],t],{t,0.1,1,0.1}]-
Table[HazardFunction[distGen1,t],{t,0.1,1,0.1}])^2/.mlm3],
Mean[(Table[HazardFunction[dist[α,θ],t],{t,0.1,1,0.1}]-
Table[HazardFunction[distGen1,t],{t,0.1,1,0.1}])^2/.mlm4]},
TableHeadings->{"20","50","75","100"},
{"0.1","0.2","0.3","0.4","0.5","0.6","0.7","0.8","0.9","1"}
,TableDirections-
>Row],TableForm[{Mean[(Table[HazardFunction[dist[α,θ],t],{t,0.1,1,0.1}]-
Table[HazardFunction[distGen1,t],{t,0.1,1,0.1}])^2/.CVM1],
Mean[(Table[HazardFunction[dist[α,θ],t],{t,0.1,1,0.1}]-
Table[HazardFunction[distGen1,t],{t,0.1,1,0.1}])^2/.CVM2],
Mean[(Table[HazardFunction[dist[α,θ],t],{t,0.1,1,0.1}]-
Table[HazardFunction[distGen1,t],{t,0.1,1,0.1}])^2/.CVM3],
Mean[(Table[HazardFunction[dist[α,θ],t],{t,0.1,1,0.1}]-
Table[HazardFunction[distGen1,t],{t,0.1,1,0.1}])^2/.CVM4]},
TableHeadings->{"20","50","75","100"},
{"0.1","0.2","0.3","0.4","0.5","0.6","0.7","0.8","0.9","1"}]}
```

(B) الملحق

```
,TableDirections-
>Row],TableForm[{Mean[(Table[HazardFunction[dist[ $\alpha$ , $\theta$ ],t],{t,0.1,1,0.1}]-
Table[HazardFunction[distGen1,t],{t,0.1,1,0.1}])2/.wls1],
  Mean[(Table[HazardFunction[dist[ $\alpha$ , $\theta$ ],t],{t,0.1,1,0.1}]-
Table[HazardFunction[distGen1,t],{t,0.1,1,0.1}])2/.wls2],
  Mean[(Table[HazardFunction[dist[ $\alpha$ , $\theta$ ],t],{t,0.1,1,0.1}]-
Table[HazardFunction[distGen1,t],{t,0.1,1,0.1}])2/.wls3],
  Mean[(Table[HazardFunction[dist[ $\alpha$ , $\theta$ ],t],{t,0.1,1,0.1}]-
Table[HazardFunction[distGen1,t],{t,0.1,1,0.1}])2/.wls4]}],
  TableHeadings->{{"20","50","75","100"},
{"0.1","0.2","0.3","0.4","0.5","0.6","0.7","0.8","0.9","1"}}
,TableDirections->Row]//AccountingForm
{ListLinePlot[{Table[HazardFunction[distGen1,t],{t,0.1,1,0.1}],
  Mean[Table[HazardFunction[dist[ $\alpha$ , $\theta$ ],t],{t,0.1,1,0.1}]/.mlm1],
  Mean[Table[HazardFunction[dist[ $\alpha$ , $\theta$ ],t],{t,0.1,1,0.1}]/.CVM1],
  Mean[Table[HazardFunction[dist[ $\alpha$ , $\theta$ ],t],{t,0.1,1,0.1}]/.wls1]}],{AxesLabel -
> {Style[t,Black,Bold,Medium],Style[h[t],Black,Bold,Medium]}],DataRange ->
{0.1,1},PlotLabel -> "n=20",PlotLegends -> Placed[{"h_Real","h_ML","h_CVM",
"h_WLS"},Center],Mesh -> Full,ImageSize -> 400}},
ListLinePlot[{Table[HazardFunction[distGen1,t],{t,0.1,1,0.1}],
  Mean[Table[HazardFunction[dist[ $\alpha$ , $\theta$ ],t],{t,0.1,1,0.1}]/.mlm2],
  Mean[Table[HazardFunction[dist[ $\alpha$ , $\theta$ ],t],{t,0.1,1,0.1}]/.CVM2],
  Mean[Table[HazardFunction[dist[ $\alpha$ , $\theta$ ],t],{t,0.1,1,0.1}]/.wls2]}],{AxesLabel -
> {Style[t,Black,Bold,Medium],Style[h[t],Black,Bold,Medium]}],DataRange ->
{0.1,1},PlotLabel -> "n=50",PlotLegends -> Placed[{"h_Real","h_ML","h_CVM",
"h_WLS"},Center],Mesh -> Full,ImageSize -> 400}},
ListLinePlot[{Table[HazardFunction[distGen1,t],{t,0.1,1,0.1}],
  Mean[Table[HazardFunction[dist[ $\alpha$ , $\theta$ ],t],{t,0.1,1,0.1}]/.mlm3],
  Mean[Table[HazardFunction[dist[ $\alpha$ , $\theta$ ],t],{t,0.1,1,0.1}]/.CVM3],
  Mean[Table[HazardFunction[dist[ $\alpha$ , $\theta$ ],t],{t,0.1,1,0.1}]/.wls3]}],{AxesLabel -
> {Style[t,Black,Bold,Medium],Style[h[t],Black,Bold,Medium]}],DataRange ->
{0.1,1},PlotLabel -> "n=75",PlotLegends -> Placed[{"h_Real","h_ML","h_CVM",
"h_WLS"},Center],Mesh -> Full,ImageSize -> 400}},
ListLinePlot[{Table[HazardFunction[distGen1,t],{t,0.1,1,0.1}],
  Mean[Table[HazardFunction[dist[ $\alpha$ , $\theta$ ],t],{t,0.1,1,0.1}]/.mlm4],
  Mean[Table[HazardFunction[dist[ $\alpha$ , $\theta$ ],t],{t,0.1,1,0.1}]/.CVM4],
  Mean[Table[HazardFunction[dist[ $\alpha$ , $\theta$ ],t],{t,0.1,1,0.1}]/.wls4]}],{AxesLabel -
> {Style[t,Black,Bold,Medium],Style[h[t],Black,Bold,Medium]}],DataRange ->
{0.1,1},PlotLabel -> "n=100",PlotLegends -> Placed[{"h_Real","h_ML","h_CVM",
"h_WLS"},Center],Mesh -> Full,ImageSize -> 400}}}
```


Abstract

Abstract

In this thesis, a new probability distribution was found, which is (E-GD) Exponential-Gompertz Distribution using the (Compound Distributions method.) as a random variable that follows the exponential distribution to obtain the new probability distribution (Exponential Gompertz). Also, the statistical characteristics of the new distribution were derived, its features were estimated and the hazard function was determined using three methods of estimation, which are the (Maximum Likelihood method) (MLE),(weighted least squares method) (WLS), and (Kramer von Mess method) (CVM).In order to obtain the best results, the study made a comparison between the estimation methods by applying the (Monte Carlo simulation method) using the (Wolfram Mathematica 12.2) program.We conducted several experiments, and in this thesis, these experiments were repeated (1000) times for each experiment with different sample sizes (small, medium, large) in order to reach a better level of homogeneity. The results showed the preference of the Maximum Likelihood method in estimating the hazard function for the exponential Gompertz distribution for all sample sizes and then the weighted least squares method, while Kramer von Meese's method was not the best for any of the sample sizes.

In order to show the efficiency of the distribution in representing a sample of real data, it was applied to a large random sample of patients, represented by the duration of their survival until death or recovery for patients with breast cancer, and by applying the best methods, it was found that the exponential Gompertz distribution fits these data better and explains their behavior compared to Gompertz distribution or the exponential distribution alone.



**University of Karbala
Faculty of Administration and Economics
Department of statistics**

**Estimation of the Hazard Rate Function
of a Compound distribution**

(Exponential-Gompertz) with practical application

**A Thesis Submitted to
Council of The Administration and Economics at the University
of Karbala
as Partial fulfillment of the Requirements for the Degree of
Master of Science in Statistics**

**Written by
Hatem. Abdulrahman. Barrak Al samarraie**

**Supervised By
Ass. Prof. Dr. Mushtaq Kareem Abdul-Rahem**

2022 A.D

1444 A.H

Holy Karbala