



جمهورية العراق
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة كربلاء
كلية الإدارة والاقتصاد / قسم
الإحصاء

توزيع جديد لوقت الحياة ليندلي - رايلي المقطوع ومتسلسلة القوى

أطروحة مقدمة الى
مجلس كلية الإدارة والاقتصاد في جامعة كربلاء
وهي جزء من متطلبات نيل درجة دكتوراه
فلسفة في الإحصاء

تقدم بها
عادل عبود نجم

بإشراف
أ. د. مهدي وهاب نعمة

1444هـ
2022م

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

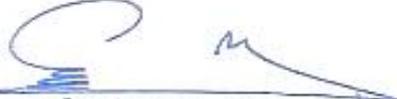
أَقَالُوا مَا هِيَ إِلَّا حَيَاتُنَا الدُّنْيَا
نَمُوتُ وَنَحْيَا وَمَا يُهْلِكُنَا إِلَّا
الدَّهْرُ وَمَا لَهُم بِذَلِكَ مِنْ عِلْمٍ إِنْ
هُمْ إِلَّا يَظُنُّونَ



صدق الله العلي العظيم

إقرار المشرف

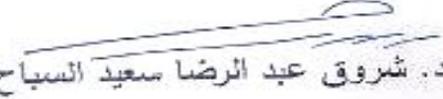
أشهد بأن إعداد هذه الأطروحة الموسومة (توزيع جديد لوقت الحياة ليندلي-رايلي المقطوع ومتسلسلة القوى) والتي تقدم بها الطالب " عادل عبود نجم " قد جرى بإشرافي في قسم الاحصاء - كلية الادارة والاقتصاد - جامعة كربلاء ، وهي جزء من متطلبات نيل درجة دكتوراه فلسفة في علوم في الاحصاء.


أ. د. مهدي وهاب نعمة نصر الله

التاريخ: / / 2022

توصية رئيس قسم الاحصاء

بناءً على توصية الاستاذ المشرف، أرشح الأطروحة للمناقشة.


أ. د. شروق عبد الرضا سعيد السباح
رئيس قسم الاحصاء

التاريخ: / / 2022

إقرار الخبير اللغوي

أشهد بأن الأطروحة الموسومة (توزيع جديد لوقت الحياة ليندلي-رايلي المقطوع ومتسلسلة القوى) قد جرى مراجعتها من الناحية اللغوية تحت إشرافي إذ أصبحت خالية من الأخطاء اللغوية ولأجله وقعت.

الخبير اللغوي
م. صلاح مهدي جابر

إقرار لجنة المناقشة

نشهد نحن رئيس وأعضاء لجنة المناقشة بأننا قد اطلعنا على الأطروحة الموسومة (توزيع جديد لوقت الحياة ليندلي-رايلي المقطوع ومتسلسلة القوي) والمقدمة من قبل الطالب "عادل عبود نجم" وناقشنا الطالب في محتوياتها وفيما له علاقة بها ، ووجدنا بأنها جديرة بنيل درجة دكتوراه فلسفة في علوم الإحصاء بتقدير (امتياز) .

أ.د شروق عبد الرضا سعيد السباح

أ. د. مناف يوسف حمود

عضواً

رئيساً

2022 / /

2022 / /

أ.م.د. طارق عزيز صالح

أ. م. د. وصفي طاهر صالح

عضواً

عضواً

2022 / /

2022 / /

أ. د. مهدي وهاب نعمة نصر الله

أ. م. د. مشتاق كريم عبد الرحيم

عضواً ومشرفاً

عضواً

2022 / /

2022 / /

إقرار رئيس لجنة الدراسات العليا

بناءً على إقرار الخبيرين العتميين والخبير اللغوي على أطروحة الطالب
'عائز عبود نجم' الموسومة بـ (توزيع جديد لوقت الحياة ليندلي-رايلي المقطوع
ومتسلمة القوى) ارشح هذه الأطروحة للمناقشة.

أ. د. محمد حسين كاظم الجبوري

رئيس لجنة الدراسات العليا

معاون العميد للشؤون العلمية والدراسات العليا

مصادقة مجلس الكلية

صاديق مجلس كلية الإدارة والاقتصاد / جامعة كربلاء على قرار لجنة

المناقشة.

أ. د. محمد حسين كاظم الجبوري

عميد كلية الإدارة والاقتصاد - جامعة كربلاء

2022 / 11 / 1

الإهداء

إلى ...

روحيهما الطاهرة رحمهما الله برحمته الواسعة وأسكنهما فسيح
جناته

والديّ

إلى ...

سندي وعزي وفرحتي ووسامي

إخوتي وأخواتي وأبناءهم

إلى ...

مَنْ لم تبخل بمساعدتي يوم ما ..

زوجتي

عادل

شكر وتقدير

قال نبينا الكريم (صلى الله عليه واله وسلم) :
(مَنْ لم يشكر الناس لم يشكر الله عز وجل)

(صدق رسول الله)

احمد الله تعالى حمداً كثيراً طيباً مباركاً ملئ السموات والأرض على ما أكرمني به من اتمام هذه الأطروحة التي أرجو أن تنال رضاه عز وجل، ثم اتقدم بجزيل الشكر والامتنان الى جميع أساتذتي الأفاضل الذين لم يخلوا علي بنصح او مشورة او توجيه، وأخص بالذكر منهم أستاذي الفاضل (أ. د. مهدي وهاب نعمه نصر الله) حفظه الله وسدد خطاه وبارك في عمره، لتفضله بالأشراف على الأطروحة ولما قدمه من جهد وارشادات علمية وتشجيعه المتواصل ومعاملته التي أتسمت بالتواضع الرفيع والأخلاق السامية وفي كلا المرحلتين التحضيرية والبحثية والتي كان لها الأثر الكبير بعد الله عز وجل في ميلاد فكرة هذه الأطروحة و اتمامها فجزاه الله عني خير الجزاء.

ومن واجب الوفاء يسرني أن اتقدم بالشكر الجزيل لأساتذتي في قسم الإحصاء - كلية الإدارة والاقتصاد-جامعة كربلاء لما بذلوه من جهد ومساندة خلال الدراسة التحضيرية وأخص بالذكر منهم (أ.د. جاسم ناصر حسين، أ.د. عواد الخالدي، أ.د. عبد الحسين الطائي، أ.د. شروق السباح، أ.م.د. مشتاق كريم) فجزاءهم الله خير الجزاء. كما أتقدم بالشكر والامتنان الى رئيس قسم الإحصاء (أ.د. شروق السباح) لما قدمته من جهد ونصح ورعاية لطلبة الدراسات العليا بالرغم من انشغالها بمهامها التدريسية في الدراسات الجامعية الأولية والعليا، أسأل الله أن يوفقها ويجعل عملها هذا في ميزان حسناتها.

كما أتوجه بالشكر والتقدير الى السادة رئيس وأعضاء لجنة المناقشة لتكرمهم بقبول مناقشة الأطروحة فلهم مني خالص الود والاحترام. والشكر موصول إلى السادة المقومين (اللغوي والعلميين) لتفضلهم بقبول تقويم الاطروحة من الناحية اللغوية والعلمية .

ولا يفوتني أن أتوجه بالشكر والتقدير الى كل من مد لي يد العون ولاسيما الشركة العامة للصناعات النسيجية في محافظة بغداد لتعاونهم معي في الحصول على البيانات والمعلومات المطلوبة لإنجاز الأطروحة.

الباحث

المستخلص

أن أغلب عوائل التوزيعات الاحتمالية Lindley-G (LG) إذ أن G تشير الى التوزيع المولد (Generator) وتحديدًا توزيع وقت الحياة ليندلي-رايلي Lindley-Rayleigh (LR) قد تم اقتراحها من أجل زيادة المرونة في توزيع ليندلي بإضافة معلمة اخرى، وبالرغم من ذلك فإن ذيل جهة اليمين لتوزيع LR لم يكن ثقيلًا بما يكفي ليلائم او يطابق بيانات تبدي تفلطحاً او تسطحاً عالياً، او بيانات تتسم بامتلاكها قيماً شاذة Outliers، وتحديدًا تلك التي تتعلق ببيانات وقت الحياة كتحليل المعولية والبقاء، وفضلاً عن ما تم ذكره، فإن هنالك توزيعات احتمالية تفشل في المطابقة والتنبؤ بشكل اكثر دقة عند وجود بيانات تتسم بتنوع انماط دالة معدل المخاطرة. لقد تم عمل توزيع احتمالي جديد لوقت الحياة لمعالجة هذه المشاكل والعوائق وبمقترحين سمي المقترح الأول بتوزيع ليندلي-رايلي المقطوع Slash Lindley-Rayleigh (SLR) وهو بثلاثة معلمات $SLR(\alpha, \theta, q)$ إذ تم ايجاده باستعمال اسلوب تحويل المتغيرات ، إذ تم اشتقاق ودراسة أغلب خصائصه الإحصائية والرياضية فضلاً عن تقديرات الإمكان الأعظم MLE للمعلمات الثلاثة والتي لم تظهر بالشكل او الصيغة المغلقة closed form.

عمل الباحث على دراسة تأثير عدد المشاهدات N (نعني بها تحديدا عدد العطلات لماكنة او نظام معين) على دالة المعولية لتوزيع SLR وذلك بافتراض أن N متغيراً عشوائياً متقطعاً يتبع احد توزيعات متسلسلة القوى والمبتورة عند القيمة صفرًا وذات المعلمة λ التي ستمثل معدل عدد العطلات او احتمال العطل وذلك وفقاً لتوزيع توزيع PS (بواسون، الهندسي، اللوغاريتمي، ثنائي الحدين، ثنائي الحدين السالب). ولدراسة ومعرفة ذلك التأثير فقد تم اقتراح توزيع موسع للمقترح الأول وهو التوزيع الاحتمالي المقترح الثاني والذي سمي بتوزيع ليندلي-رايلي المقطوع ومتسلسلة القوى Slash Lindley- and Power Series (SLRPS) Rayleigh بأربعة معلمات، إذ تم الحصول على توزيع $SLRPS(\alpha, \theta, q, \lambda)$ باستعمال اسلوب التوزيعات المركبة بين توزيع SLR وتوزيع PS. إذ تم اشتقاق بعضاً من خصائصه الإحصائية، فضلاً عن ايجاد تقديرات الإمكان الأعظم MLE لمعلماته.

وعن طريق نتائج الجانب التجريبي المتمثل بأسلوب محاكاة Monte Carlo ونتائج الجانب التطبيقي المتمثل بالبيانات الحقيقية والتي تشير إلى المعدلات الاسبوعية لأوقات الاشتغال مقاسة بالساعات لاربعة مكائن ثلاثة منها للنسيج وواحدة للاكمال وبحجم عينة $n=75$ لكل ماكنة والمأخوذة من الشركة العامة للصناعات النسيجية / معمل السجاد العراقي/ بغداد. مع ملاحظة ان ماكنتي النسيج الاولى والثانية موصولتان وفق نظام التوالي، اما ماكنة النسيج الثالثة وماكنة الاكمال فأنهما موصولتان وفق نظام التوازي. وبالاعتماد على مؤشرات احصائية ومعايير مقارنة مختلفة (BIC,AIC,RAMSE,AMSE) توصل الباحث الى أن التوزيعين المقترحين أظهرتا أفضلية ومرونة اكبر من ناحية المطابقة ونمذجة بيانات ذات تفلطح عالٍ او مفروط مقارنة مع التوزيعات الأصلية (ليندلي، رايلي، ليندلي-رايلي) فيما يتعلق بتقدير المعلمات ودالة المعولية وهذه النتائج قد تم الحصول عليها وتنفيذها عن طريق كتابة برنامج خاص بلغة R (R-language) .

قائمة المحتوى

رقم الصفحة	الموضوع
I	الآية القرآنية
II	الإهداء
III	الشكر والتقدير
IV	المستخلص
VII - V	المحتوى
IX-VIII	الجدول
XI- X	الأشكال والمخططات
XIII-XII	قائمة المصطلحات والرموز
الفصل الأول : الإطار النظري للأطروحة	
1	المقدمة
3	مشكلة الأطروحة
4	هدف الأطروحة
13-5	الاستعراض المرجعي
الفصل الثاني : الجانب النظري	
14	التمهيد
14	بعض المفاهيم الأساسية
15	دالة الكثافة الاحتمالية للفشل
15	دالة المعولية
16	دالة معدل المخاطرة (معدل الفشل)
17	الإحصاءات المرتبة
18	الالتواء

رقم الصفحة	الموضوع	
18	التفرطح (التسطح)	6.2.2
18	التوزيعات ذات الذيل الثقيل والخفيف	7.2.2
19	التوزيعات ذات الذيل الثقيل	1.7.2.2
19	التوزيعات ذات الذيل السميك	1.1.7.2.2
19	التوزيعات ذات الذيل الطويل	2.1.7.2.2
20	التوزيعات شبه الأسيية	3.1.7.2.2
20	التوزيعات ذات الذيل الخفيف	2.7.2.2
21	توزيعات زمن الفشل المعلمية الأساسية	3.2
21	توزيع ليندلي	1.3.2
22	توزيع رايلي	2.3.2
23	توزيعات متسلسلة القوى	3.3.2
25	توزيع جديد لوقت الحياة ليندلي- رايلي المقطوع (المقترح الأول)	4.2
29	اشتقاق الصيغة الأولى pdf للمقترح الأول SLR	القضية المقترحة (1.2)
30	اشتقاق الصيغة الثانية pdf للمقترح الأول SLR	نتيجة (1.2)
31	اشتقاق الصيغة الثالثة pdf للمقترح الأول SLR	نتيجة (2.2)
33	اشتقاق صيغة pdf خاصة لتوزيع SLR	نتيجة (3.2)
34	أثبات خاصية pdf لتوزيع SLR للصورة الأولى	1.4.2
35	أثبات خاصية pdf لتوزيع SLR للصورة الثانية	2.4.2
39	خصائص توزيع ليندلي- رايلي المقطوع SLR	5.2

رقم الصفحة	الموضوع	
39	اشتقاق دالة التوزيع التراكمي cdf لتوزيع SLR	نتيجة (4.2)
41	العزوم	1.5.2
41	العزوم ذات الرتبة r لتوزيع LR	تمهيدية (1.2)
42	العزوم ذات الرتبة r لتوزيع SLR	القضية المقترحة (2.2)
43	الوسط الحسابي والتباين ومعامل الاختلاف لتوزيع SLR	نتيجة (5.2)
44	معامل الالتواء لتوزيع SLR	نتيجة (6.2)
45	معامل التفرطح (التسطح) لتوزيع SLR	نتيجة (7.2)
47	الوسط الهندسي لتوزيع SLR	نتيجة (8.2)
50	دوال المعولية ومعدل المخاطرة لتوزيع SLR	2.5.2
51	دالتي المعولية ومعدل المخاطرة لتوزيع SLR	نتيجة (9.2)
54	تقدير معالم توزيع ليندلي-رايلي المقطوع (SLR)	3.5.2
54	طريقة تقدير الإمكان الأعظم لمعاملات توزيع SLR	1.3.5.2
58	توزيع ليندلي-رايلي المقطوع ومتسلسلة القوى SLRPS	6.2
60	بعض أهم خصائص توزيع SLRPS (المقترح الثاني)	7.2
60	اشتقاق دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع SLRPS	1.7.2
65	دالة المعولية لتوزيع SLRPS	2.7.2
65	دالة المخاطرة لتوزيع SLRPS	3.7.2

رقم الصفحة	الموضوع	
67	العلاقة بين توزيعي SLR و SLRPS	القضية المقترحة (3.2)
73-68	تقديرات الإمكان الأعظم لمعاملات توزيع SLRPS	4.7.2
الفصل الثالث : الجانب التجريبي والتطبيقي		
74	التمهيد	1.3
74	الجانب التجريبي/ المحاكاة	2.3
74	المفهوم العام للمحاكاة	1.2.3
75	طريقة مونت كارلو	2.2.3
75	وصف تجربة المحاكاة	3.2.3
76	مراحل تجارب المحاكاة	3.3
76	المرحلة الأولى	1.3.3
77	المرحلة الثانية	2.3.3
79	المرحلة الثالثة	3.3.3
80	المرحلة الرابعة	4.3.3
80	تحليل نتائج تجربة المحاكاة	4.3
141	الجانب التطبيقي	5.3
141	التمهيد	1.5.3
141	نبذة عن المعمل	2.5.3
141	وصف العملية الإنتاجية والمكائن	3.5.3
160-142	وصف البيانات وتحليل النتائج	4.5.3
الفصل الرابع : الاستنتاجات والتوصيات		
161	توطئة	1.4

رقم الصفحة	الموضوع	
161	الاستنتاجات	2.4
167-165	التوصيات	3.4
المصادر		
168	المصادر العربية	أولاً
171-168	المصادر الأجنبية	ثانياً
A-B	مستخلص الأطروحة باللغة الإنجليزية	

قائمة الجداول

رقم الصفحة	عنوان الجدول	رقم الجدول
18	العلاقة بين شكل وقيمة مقياس تسطح (تفلطح) منحى التوزيع الاحتمالي ومقدار التشتت المقابلة	1-2
21	بعض خصائص توزيع ليندلي Lindley	2-2
22	بعض خصائص توزيع رايلى Rayleigh	3-2
59	مكونات الشكل العام لتوزيعات متسلسلة القوى PSD	4-2
76	القيم الافتراضية للمعلمات المستعملة في تجارب المحاكاة	1-3
81	نتائج تقديرات طريقة ML لمعلمات التوزيعات الاحتمالية الأصلية والمقترحة عند حجوم عينات مختلفة ($n=25,50,75,100$) ولمجموعة القيم الافتراضية ($\alpha=0.3$, $\theta=0.1$, $q=1,2,3,6,8$, $\lambda =1,2,4,8$)	2-3
87	نتائج تقديرات طريقة ML لمعلمات التوزيعات الاحتمالية الأصلية والمقترحة عند حجوم عينات مختلفة ($n=25,50,75,100$) ولمجموعة القيم الافتراضية ($\alpha=0.6$, $\theta=0.2$, $q=1,2,3,6,8$, $\lambda =1,2,4,8$)	3-3
93	نتائج تقديرات طريقة ML لمعلمات التوزيعات الاحتمالية الأصلية والمقترحة عند حجوم عينات مختلفة ($n=25,50,75,100$) ولمجموعة القيم الافتراضية ($\alpha=0.4$, $\theta=0.4$, $q=1,2,3,6,8$, $\lambda =1,2,4,8$)	4-3
99	نتائج تقديرات طريقة ML لمعلمات التوزيعات الاحتمالية الأصلية والمقترحة عند حجوم عينات مختلفة ($n=25,50,75,100$) ولمجموعة القيم الافتراضية ($\alpha=3$, $\theta=1.5$, $q=1,2,3,6,8$, $\lambda =1,2,4,8$)	5-3
105	نتائج تقديرات ML لمعلمات التوزيعات الاحتمالية الأصلية والمقترحة عند	6-3

رقم الصفحة	عنوان الجدول	رقم الجدول
	حجوم عينات مختلفة (n=25,50,75,100) ولمجموعة القيم الافتراضية ($\alpha=5$, $\theta=2.5$, $q=1,2,3,6,8$, $\lambda =1,2,4,8$)	
111	نتائج تقديرات الامكان الأعظم ML لدوال المعولية للتوزيعات الاحتمالية المقترحة SLRP,SLR لأوقات حياة (اشتغال) مختلفة عند حجوم عينات مختلفة (n=25,50,75,100) ولمجموعة القيم الافتراضية ($\alpha=0.4$, $\theta=0.4$, $q=3,6,8$, $\lambda =1$)	7-3
117	نتائج تقديرات الامكان الأعظم ML لدالة المعولية للتوزيع الاحتمالي المقترح الثاني SLRP لأوقات حياة (اشتغال) مختلفة عند حجوم عينات مختلفة (n=25,50,75,100) ولمجموعة القيم الافتراضية ($\alpha=0.4$, $\theta=0.4$, $q=3,6,8$, $\lambda =2,4$)	8-3
123	نتائج تقديرات الامكان الأعظم ML لدوال المعولية للتوزيعات الاحتمالية المقترحة SLRP,SLR لأوقات حياة (اشتغال) مختلفة عند حجوم عينات مختلفة (n=25,50,75,100) ولمجموعة القيم الافتراضية ($\alpha=3$, $\theta=1.5$, $q=3,6,8$, $\lambda =1$)	9-3
129	نتائج تقديرات الامكان الأعظم ML لدالة المعولية للتوزيع الاحتمالي المقترح الثاني SLRP لأوقات حياة (اشتغال) مختلفة عند حجوم عينات مختلفة (n=25,50,75,100) ولمجموعة القيم الافتراضية ($\alpha=3$, $\theta=1.5$, $q=3,6,8$, $\lambda =2,4$)	10-3
133	نتائج تقديرات الامكان الأعظم ML لدوال المعولية للتوزيعات الاحتمالية	11-3

رقم الصفحة	عنوان الجدول	رقم الجدول
	المقترحة SLRP,SLR لأوقات حياة (اشتغال) مختلفة عند حجوم عينات مختلفة (n=25,50,75,100) ولمجموعة القيم الافتراضية $(\alpha=5 , \theta=2.5 , q=3,6,8, \lambda =1)$	
137	نتائج تقديرات الامكان الأعظم ML لدالة المعولية للتوزيع الاحتمالي المقترح الثاني SLRP لأوقات حياة (اشتغال) مختلفة عند حجوم عينات مختلفة (n=25,50,75,100) ولمجموعة القيم الافتراضية $(\alpha=5 , \theta=2.5 , q=3,6,8, \lambda =2,4)$	12-3
143	معدلات اوقات الاشتغال الأسبوعية ولكل ماكنة	13-3
145	عدد العطلات الأسبوعية ولكل ماكنة	14-3
146	نتائج المؤشرات الإحصائية للعينة ولكل ماكنة(أوقات الاشتغال)	15-3
146	نتائج المؤشرات الإحصائية للعينة ولكل ماكنة(عدد العطلات)	16-3
148	نتائج اختبار حسن المطابقة Kolmogorov–Smirnov (K–S) test	17-3
151	تقديرات معلمات التوزيعات المقترحة لأوقات اشتغال ماكنة النسيج الأولى t1	18-3
151	تقديرات معلمات التوزيعات المقترحة لأوقات اشتغال ماكنة النسيج الثانية t2	19-3
152	تقديرات معلمات التوزيعات المقترحة لأوقات اشتغال ماكنة النسيج الثالثة t3	20-3
152	تقديرات معلمات التوزيعات المقترحة لأوقات اشتغال ماكنة الإكمال t4	21-3
155	نتائج معايير المقارنة (logL,AIC,BIC) بين التوزيعات الاحتمالية	22-3

رقم الصفحة	عنوان الجدول	رقم الجدول
157	نتائج تقديرات دوال المعولية لكل ماكنة ومعولية الأنظمة RP,RS ولكل توزيع	23-3

قائمة الأشكال والمخططات

رقم الصفحة	عنوان الشكل	رقم الشكل
22	دالة الكثافة الاحتمالية pdf لتوزيع ليندلي Lindley	1-2
23	دالة الكثافة الاحتمالية pdf لتوزيع رايلي Rayleigh	2-2
38	دالة الكثافة الاحتمالية pdf لتوزيع ليندلي-رايلي المقطوع $SLR(\alpha, \theta, q)$ ولقيم افتراضية مختلفة	3-2
38	pdf للبيانات التجريبية للقيم الافتراضية $SLR(\alpha = 2, \theta = 0.3, q)$	(a)3-2
38	pdf للبيانات التجريبية للقيم الافتراضية $SLR(\alpha = 1, \theta = 0.2, q)$	(b)3-2
38	pdf للبيانات التجريبية للقيم الافتراضية $SLR(\alpha = 2, \theta = 0.8, q)$	(c)3-2
38	pdf للبيانات التجريبية للقيم الافتراضية $SLR(\alpha = 4, \theta = 0.6, q)$	(d)3-2
38	pdf للبيانات التجريبية للقيم الافتراضية $SLR(\alpha = 0.5, \theta = 0.5, q)$	(e)3-2
38	pdf للبيانات التجريبية للقيم الافتراضية $SLR(\alpha = 1.2, \theta = 0.6, q)$	(f)3-2
40	دالة التوزيع التراكمية cdf لتوزيع ليندلي-رايلي المقطوع $SLR(\alpha, \theta, q)$ ولقيم افتراضية مختلفة	4-2
40	cdf للبيانات التجريبية للقيم الافتراضية $SLR(\alpha = 2, \theta = 0.3, q)$	(a)4-2
40	cdf للبيانات التجريبية للقيم الافتراضية $SLR(\alpha = 1, \theta = 0.2, q)$	(b)4-2
40	cdf للبيانات التجريبية للقيم الافتراضية $SLR(\alpha = 2, \theta = 0.8, q)$	(c)4-2
40	cdf للبيانات التجريبية للقيم الافتراضية $SLR(\alpha = 4, \theta = 0.6, q)$	(d)4-2

40	$SLR(\alpha = 0.5, \theta = 0.5, q)$ للبيانات التجريبية للقيم الافتراضية cdf	(e)4-2
40	$SLR(\alpha = 1.2, \theta = 0.6, q)$ للبيانات التجريبية للقيم الافتراضية cdf	(f)4-2
53	دالة المعولية $R(.)$ لتوزيع ليندلي-رايلي المقطوع $SLR(\alpha, \theta, q)$ ولقيم افتراضية مختلفة	5-2
53	$SLR(\alpha = 2, \theta = 0.3, q)$ للبيانات التجريبية للقيم الافتراضية $R(.)$	(a)5-2
53	$SLR(\alpha = 1, \theta = 0.2, q)$ للبيانات التجريبية للقيم الافتراضية $R(.)$	(b)5-2
53	$SLR(\alpha = 2, \theta = 0.8, q)$ للبيانات التجريبية للقيم الافتراضية $R(.)$	(c)5-2
53	$SLR(\alpha = 4, \theta = 0.6, q)$ للبيانات التجريبية للقيم الافتراضية $R(.)$	(d)5-2
53	$SLR(\alpha = 0.5, \theta = 0.5, q)$ للبيانات التجريبية للقيم الافتراضية $R(.)$	(e)5-2
53	$SLR(\alpha = 1.2, \theta = 0.6, q)$ للبيانات التجريبية للقيم الافتراضية $R(.)$	(f)5-2
54	دالة معدل المخاطرة $h(.)$ لتوزيع ليندلي-رايلي المقطوع $SLR(\alpha, \theta, q)$ ولقيم افتراضية مختلفة	6-2
54	$SLR(\alpha = 2, \theta = 0.3, q)$ للبيانات التجريبية للقيم الافتراضية $h(.)$	(a)6-2
54	$SLR(\alpha = 0.5, \theta = 0.5, q)$ للبيانات التجريبية للقيم الافتراضية $h(.)$	(b)6-2
54	$SLR(\alpha = 4, \theta = 0.6, q)$ للبيانات التجريبية للقيم الافتراضية $h(.)$	(c)6-2
54	$SLR(\alpha = 1.2, \theta = 0.6, q)$ للبيانات التجريبية للقيم الافتراضية $h(.)$	(d)6-2
63	دالة الكثافة الاحتمالية pdf لتوزيع ليندلي-رايلي المقطوع ومنتسلسلة القوى (بواسون) $SLRP(\alpha, \theta, q, \lambda)$ ولقيم افتراضية مختلفة	7-2
63	$SLR(\alpha = 2, \theta = 0.3, q)$ للبيانات التجريبية للقيم الافتراضية pdf	(a)7-2
63	$SLR(\alpha = 1, \theta = 0.2, q)$ للبيانات التجريبية للقيم الافتراضية pdf	(b)7-2
63	$SLR(\alpha = 2, \theta = 0.8, q)$ للبيانات التجريبية للقيم الافتراضية pdf	(c)7-2
63	$SLR(\alpha = 4, \theta = 0.6, q)$ للبيانات التجريبية للقيم الافتراضية pdf	(d)7-2

63	pdf للبيانات التجريبية للقيم الافتراضية $SLR(\alpha = 0.5, \theta = 0.5, q)$	(e)7-2
63	pdf للبيانات التجريبية للقيم الافتراضية $SLR(\alpha = 1.2, \theta = 0.6, q)$	(f)7-2
64	دالة التوزيع التراكمية cdf لتوزيع ليندلي-رايلي المقطوع $SLRP(\alpha, \theta, q, \lambda)$ ولقيم افتراضية مختلفة	8-2
64	cdf للبيانات التجريبية للقيم الافتراضية $SLRP(\alpha = 2, \theta = 0.3, q = 6, \lambda)$	(a)8-2
64	cdf للبيانات التجريبية للقيم الافتراضية $SLRP(\alpha = 1, \theta = 0.2, q = 6, \lambda)$	(b)8-2
68	cdf للبيانات التجريبية للقيم الافتراضية $SLRP(\alpha = 2, \theta = 0.8, q = 6, \lambda)$	(c)8-2
64	cdf للبيانات التجريبية للقيم الافتراضية $SLRP(\alpha = 4, \theta = 0.6, q = 6, \lambda)$	(d)8-2
64	cdf للبيانات التجريبية للقيم الافتراضية $SLRP(\alpha = 0.5, \theta = 0.5, q = 6, \lambda)$	(e)8-2
64	cdf للبيانات التجريبية للقيم الافتراضية $SLRP(\alpha = 1.2, \theta = 0.6, q = 6, \lambda)$	(f)8-2
66	دالة المعولية $R(.)$ لتوزيع لندي-رايلي المقطوع ومتسلسلة القوى (بواسون) $SLRP(\alpha, \theta, q, \lambda)$ ولقيم افتراضية مختلفة	9-2
66	$R(.)$ للبيانات التجريبية للقيم الافتراضية $SLR(\alpha = 2, \theta = 0.3, q = 6, \lambda)$	(a)9-2
66	$R(.)$ للبيانات التجريبية للقيم الافتراضية $SLR(\alpha = 1, \theta = 0.2, q = 6, \lambda)$	(b)9-2
66	$R(.)$ للبيانات التجريبية للقيم الافتراضية $SLR(\alpha = 2, \theta = 0.8, q = 6, \lambda)$	(c)9-2
66	$R(.)$ للبيانات التجريبية للقيم الافتراضية $SLR(\alpha = 4, \theta = 0.6, q = 6, \lambda)$	(d)9-2
66	$R(.)$ للبيانات التجريبية للقيم الافتراضية $SLR(\alpha = 0.5, \theta = 0.5, q = 6, \lambda)$	(e)9-2
66	$R(.)$ للبيانات التجريبية للقيم الافتراضية $SLR(\alpha = 1.2, \theta = 0.6, q = 6, \lambda)$	(f)9-2
147	مخطط الصندوق box plot لانتشار البيانات ولكل ماكينة (اوقات الاشتغال lifetimes)	1-3
150	دوال الكثافة الاحتمالية pdfs للبيانات الحقيقية (الماكينة الأولى t1 في اعلى اليمين)	2-3

156	معايير المقارنة $\log L$ (من اعلى اليمين), BIC, AIC	3-3
159	دوال المعولية للتوزيعات الاحتمالية LR (من اعلى اليمين) SLRP,SLR	4-3
160	دوال معولية الأنظمة للتوزيعات الاحتمالية (نظام التوالي على اليمين)	5-3

قائمة بالمصطلحات والرموز المستعملة في الاطروحة

المصطلح او الرمز باللغة العربية	المصطلح او الرمز باللغة الأنكليزية	الرمز	ت
توزيع ليندلي رايلي	Lindley Rayleigh Distribution	LR	1
توزيع ليندلي ويبل	Lindley Weibull Distribution	LW	2
توزيع ليندلي اسي	Lindley Exponential Distribution	LE	3
مولد ليندلي	Lindley-Generator	L-G	4
ليندلي بواسون ذو القوة او الاس	Power Lindley Poisson	PLP	5
ليندلي لوغاريتم ذو القوة او الاس	Power Lindley Logarithmic	PLL	6
ليندلي هندسي ذو القوة او الاس	Power Lindley Geometric	PLG	7
ليندلي ثنائي الحدين ذو القوة او الاس	Power Lindley Binomial	PLB	8
توزيع ليندلي رايلي المقطوع	Slash Lindley Rayleigh Distribution	SLR	9
توزيع متسلسلة القوى	Power Series Distribution	PS	10
توزيع ليندلي رايلي المقطوع ومتسلسلة القوى	Slash Lindley Rayleigh and Power Series Distribution	SLRPS	11
توزيع ليندلي رايلي المقطوع بواسون	Slash Lindley Rayleigh and Poisson Distribution	SLRP	12
معلمة القياس في التوزيعين المقترحين	Scale Parameter	α	13
معلمة الشكل في التوزيعين المقترحين	Shape Parameter	θ	14
معلمة التفرطح في التوزيعين	Kurtosis Parameter	q	15

المقترحين			
معلمة توزيع متسلسلة القوى (معلمة المعدل لتوزيع بواسون المبتور)	Mean Parameter	λ	16
تقدير الامكان الأعظم	Maximum Likelihood Estimation	MLE	17
معدل متوسط مربع الخطأ	Average Mean Square Error	AMSE	18
الجذر التربيعي لمعدل متوسط مربع الخطأ	Root of Average Mean Square Error	RAMSE	19
معيار معلومات اكاكي	Akaike Information Criterion	AIC	20
معيار معلومات بيز	Bayesian Information Criterion	BIC	21
المتغير العشوائي لتوزيع ليندلي رايلي المقطوع	The Random Variable of Slash Lindley Rayleigh Distribution	Y_{SLR}	22
المتغير العشوائي لتوزيع ليندلي رايلي المقطوع ومتسلسلة القوى	The Random Variable of Slash Lindley Rayleigh and Power Series Distribution	Y_{SLRPS}	23
المتغير العشوائي لتوزيع ليندلي رايلي	The Random Variable of Lindley Rayleigh Distribution	X	24
المتغير العشوائي للتوزيع المنتظم	The Random Variable of Uniform Distribution	U	25
دالة كاما الكاملة	The Complete Gamma function	Γ	26
دالة كاما غير الكاملة (المنقوصة) العليا	The Upper Incomplete Gamma function	$\Gamma(,)$	27
دالة كاما غير الكاملة (المنقوصة) الدنيا	The Lower Incomplete Gamma function	$\gamma(,)$	28
اختبار احصاء كولموكوروف- سميرنوف لحسن المطابقة	Kolmogorov-Smirnov Statistic Test for Goodness of fit	K-S	29
دالة المعولية	Reliability Function	$R(,)$	30

دالة المخاطرة	Hazard (Failure Rate)Function	$h(.)$	31
تقدير الامكان الاعظم لدالة المعولية لنظام ربط التوالي	MLE of Reliability Function for Series System	$\hat{R}_s(t_1, t_2)$	32
تقدير الامكان الاعظم لدالة المعولية لنظام ربط التوازي	MLE of Reliability Function for Parallel System	$\hat{R}_p(t_3, t_4)$	33

الفصل الأول

الإطار العام للأطروحة

- المقدمة
- مشكلة الأطروحة
- هدف الأطروحة
- الاستعراض المرجعي

الفصل الأول

الإطار العام للأطروحة

1.1 المقدمة The Introduction

من المعلوم ان الفوائد العلمية والرياضية في تطوير او تكوين توزيعات احتمالية جديدة تكمن في تطبيقها في عدة مجالات مختلفة، ففي علم الاحصاء الرياضي والاحتمالات هنالك امكانية للحصول على بعض عوائل التوزيعات الاحتمالية عن طريق اضافة معلمات جديدة الى التوزيع الأساسي او الاصلي وامثلة ذلك كثيرة ومنها توزيع (Marshall – Olkin) ، (Marshall and Olkin ، (1997,34) والتوزيعات المحولة (Shaw and Buckly 2007,46) وتوزيعات Gamma-G لكل من الباحثين (Zografos and Balackrishnan 2009,50)، وفي الآونة الاخيرة قدم كل من (Cakmakyapan and Ozel 2017,14) عائلة من توزيعات Lindley-G (LG) والتي نحصل عليها باستعمال التكامل لدالة الكثافة الاحتمالية (pdf) المناظرة لتوزيع Lindley) Lindley (Ghitany et.al. 2008,23) ، (1958,32). ونقول هنا بان اغلب توزيعات Lindley-G (LG) إذ ان G تشير الى التوزيع المولد (Generator) والذي يمكن ان يأخذ احد التوزيعات الكلاسيكية مثل الأسّي، رايلي، ويبيل، او اي توزيع اخر من توزيعات وقت الحياة lifetime والتي تأخذ مسمى التوزيع الأساسي baseline. ان هذه الأمثلة من توزيعات وقت الحياة وتحديداً LR, LW, LE قد تم اقتراحها من اجل زيادة المرونة في توزيع Lindley بإضافة معلمات اخرى، وبالرغم من ذلك فان ذيل جهة اليمين لتوزيع LR الذي ركز عليه الباحث في بداية فكرته لم يكن ثقيلاً بما يكفي من اجل ان يتلائم او يتوافق مع بيانات من شأنها ان تبدي تفلطحاً عالياً high kurtosis وكذلك بيانات تتسم بوجود قيم او مشاهدات شاذة outlying observations، إذ من المعروف ان هكذا نوع من البيانات تبرز بشكل متكرر في الدراسات العملية وفي مجالات مختلفة مثل تحليل المعولية والبقاء، العلوم الأكتوارية والإدارة، البايوميتريّة، علم السكان، العلوم البيئية، وغيرها من المجالات الأخرى، فضلاً عن ذلك ان هنالك توزيعات لا تتوافق مع بيانات تتمتع بتنوع دالة معدل الفشل او معدل المخاطرة (hazard-rate function) مثل المتزايدة، المتناقصة، أحادية المنوال، bathtub، upside-down، (bathtub، upside-down) وللتغلب على هذه العوائق اقترح الباحث توزيعاً جديداً لوقت الحياة مكون من جزئين الأول هو توزيع ليندلي-رايلي المقطوع (SLR) Slash Lindley-Rayleigh بثلاثة معالم (α, θ, q) إذ ان

$\alpha > 0$ تمثل معلمة القياس، $\theta > 0$ تمثل معلمة الشكل، و $q > 0$ تمثل معلمة التفرطح. ويجب ان نذكر هنا ان التوزيع المقطوع (Slash) نعني به التوزيع الناتج عن قسمة توزيعين (او النسبة بينهما) وعليه يمكن عدّ ان الانموذج SLR امتداداً لتوزيع LR وينتج عن حاصل قسمة متغيرين عشوائيين مستقلين إذ ان المتغير في البسط يمثل توزيع LR، والمتغير في المقام يمثل التوزيع المنتظم المرفوع للقوة او الأس q (معلمة التفرطح) وهو حالة خاصة من توزيع $Beta(q,1)$. وكما سنرى لاحقاً بان التوزيع الجديد SLR الذي تم اشتقاق اهم خصائصه الإحصائية والرياضية (pdf, cdf, العزوم غير المركزية، معاملي الالتواء والتفرطح باستعمال العزوم المركزية، الوسط الهندسي، دالتي المعولية ومعدل المخاطرة، تقديرات الإمكان الأعظم MLE لمعالم التوزيع الاحتمالي) يمكن استعماله كبديل لتوزيع LR لنمذجة بيانات تبدي تفلطحاً عالياً او تظهر مشاهدات شاذة. اما في الجزء الأخير من الجانب النظري فقد اراد الباحث دراسة ومعرفة تأثير عدد المشاهدات (عدد توقيات او عطلات) على دالة المعولية لتوزيع SLR، وبشكل اكثر وضوحاً سنفترض ان N متغيراً عشوائياً متقطعاً يتبع احد توزيعات متسلسلة القوى (PS) Power Series بالمعلمة λ المبتورة عند النقطة صفراً (zero truncated distribution) وبرزها بواسون، الهندسي، اللوغاريتمي، ثنائي الحدين، ثنائي الحدين السالب. وباستعمال اسلوب التوزيعات المركبة Compounding Distributions Technique بين توزيع SLR وتوزيع متسلسلة القوى PS سنحصل على توزيع (المقترح الثاني) ليندلي-رايلي المقطوع ومتسلسلة القوى (SLRPSD) Slash Lindley-Rayleigh and Power Series Distribution بأربعة معالم $(\alpha, \theta, q, \lambda)$ إذ تم اشتقاق بعض الخصائص الإحصائية له وتحديداً pdf, cdf دالتي المعولية ومعدل المخاطرة، تقديرات الإمكان الأعظم MLE لمعالم التوزيع الاحتمالي. ونلفت الانتباه الى ان الباحث عمل مقارنة بين التوزيع الجديد بمقترحيه الأثنين وبعض توزيعات وقت الحياة ذات العلاقة بموضوع الأطروحة من بينها توزيع ليندلي وتوزيع رايلي وتوزيع ليندلي-رايلي، وعليه فقد تضمن موضوع الأطروحة أربعة فصول، خصص الأول منها للمقدمة، مشكلة الأطروحة، هدف الأطروحة، وخلفيات الموضوع (الدراسات السابقة او ما يسمى بالاستعراض المرجعي)، في حين تناول الثاني الجانب النظري الذي شمل عرضاً لبعض واهم المفاهيم الأساسية وتوزيعات الفشل المعلمية ذات العلاقة بموضوع الأطروحة، واشتقاق اغلب الخصائص الإحصائية والرياضية للتوزيع الجديد بمقترحيه الأول والثاني والتي تم ذكرها في هذه المقدمة فضلاً عن ايجاد تقديرات MLE، اما الفصل الثالث فقد

خصص للجانب التجريبي والتطبيقي والذي شمل دراسة المحاكاة وتطبيقاً على بيانات حقيقية لوقت الحياة lifetime، واخيراً جاء الفصل الرابع ليتم تخصيصه لعرض ابرز الاستنتاجات والتوصيات التي اسفرت عنها الأطروحة.

2.1 مشكلة الأطروحة The Dissertation Problem

ان تحليل بيانات وقت الحياة قد اصبح موضوعاً شائعاً في العديد من المجالات مثل العلوم الهندسية والطبية والبايولوجية والصناعية والاجتماعية، وهناك توزيعات احتمالية متنوعة متوفرة لدى الباحثين تؤدي دوراً مهماً في التنبؤ بالسلوك غير المؤكد للأحداث العشوائية كظهور مرض ما او فشل نظام معين من المكائن وغيرها، ومن هذه التوزيعات الأسي، كاما، وبيبل، واللوغاريتمي الطبيعي. ولكن بين الحين والآخر فان الباحثين يفشلون في اعطاء مطابقة او توافق fitting ملائم لبعض مجاميع البيانات او الظواهر المركبة والجديدة، واذا اردنا ان نكون اكثر دقة بشأن هذا الامر فان هنالك عوائل من التوزيعات مثل Gamma- G و Lindley-G على سبيل المثال وتوزيعات اخرى قد تم ذكرها في بداية المقدمة قد استعملت لمطابقة تلك البيانات والظواهر المركبة وتحديدًا تلك البيانات التي تظهر تفلطحاً عالياً فضلاً عن وفرة في وجود المشاهدات الشاذة، فضلاً عن وجود بيانات تتسم بان لها دالة معدل فشل (معدل مخاطرة) ذات انماط متنوعة قد تم ذكرها في المقدمة، وان هذه العوائل او التقييدات limitations عدها الباحث مشكلة البحث اذ ان توزيعات مثل LR,LW,LE قد تم اقتراحها لدى باحثيها بغرض زيادة المرونة في توزيع Lindley بإضافة باراميتز اخر (معلمات)، وبالرغم من ذلك فان ذيل جهة اليمين لهذه التوزيعات وتحديداً توزيع LR الذي ركز عليه الباحث في بداية فكرته لم يكن ثقيلاً بما يكفي من اجل ان يتلائم او يتوافق مع بيانات من شأنها ان تبدي تفلطحاً عالياً high kurtosis وكذلك بيانات تتسم بوجود قيم او مشاهدات شاذة Outliers.

أضافة إلى ذلك فإن اغلب البحوث والدراسات المتعلقة بتحليل المعولية للمكائن تفترض ان عدد العطلات لمكانة معينة او نظام معين من المكائن هو عدد ثابت، في حين ان واقع الحال يشير إلى عكس ذلك تماماً اذ ان عدد العطلات يمكن ان يكون متغيراً عشوائياً وبالتالي له سلوك عشوائي وتوزيع احتمالي وعليه سوف ينعكس ذلك على كفاءة ومعولية المكائن.

3.1 هدف الأطروحة The Dissertation Objective

يرى العديد من الباحثين أن هنالك ضرورة في ايجاد توزيعات احتمالية جديدة وتطويرها لما لها من أهمية في التطبيق العملي في مختلف المجالات ولاسيما تلك المتعلقة بتحليل بيانات وقت الحياة lifetime، ونتيجة للتطور ام التنوع الذي يحصل مع مرور الزمن في هذه المجالات سواء أكانت في المجال الاجتماعي ام الإداري ام الطبي ام الهندسي ام البيئي وغيرها من المجالات ،فانه بالمقابل سننتوق ظهور تنوع بالمشاكل والعوائق التي تحتاج الى معالجة للتقليل من الخسائر ويكون حينها التنبؤ للمستقبل اكثر دقة. واذا تكلمنا بشكل اكثر تحديداً فانه قد تواجهنا بعض الظواهر المركبة والأحداث العشوائية التي ينجم عنها بيانات حقيقية تبدي تفلطحاً عالياً والذي يعني وجود عدد من القيم الشاذة والتي بدورها تؤثر سلباً في المقاييس الإحصائية ومن ثم تؤثر في عملية التنبؤ، فضلاً عن ذلك ربما نجد بيانات لوقت الحياة تتصف بتوزيعاتها الاحتمالية بأن دالة معدل الفشل اللحظي (معدل المخاطرة) لها تبدي تنوعاً في الأنماط والأشكال فضلاً عن الأنماط الكلاسيكية المتعارف عليها (المتزايدة، الثابتة، الناقصة) ، ووفقاً لهذه الأفكار فانه يمكن تلخيص هدف البحث بالنقاط الآتية:

1. اشتقاق انموذج احتمالي جديد (كمقترح أول) له ثلاث صيغ متكافئة ل pdf سيتم تسميته توزيع ليندلي- رايلي المقطوع The Slash Lindley-Rayleigh Distribution (SLR) .
2. ان يكون التوزيع الجديد SLR اكثر مرونة عند استعماله في تحليل مجاميع بيانات وقت الحياة lifetime وبشكل خاص يمكن استعماله بديلاً عن توزيع LR لنمذجة بيانات تظهر او تتصف بان لها تفلطحاً (تسطحاً) عالياً high kurtosis وبيانات تحوي مشاهدات او قيم شاذة outliers وذلك بتأثير معلمة جديدة $q > 0$ تسمى معلمة التفرطح، فضلاً عن نمذجة بيانات لها توزيع احتمالي يتسم بتنوع في أنماط (اشكال) دالة معدل الفشل (معدل المخاطرة).
3. ايجاد الخصائص الإحصائية والرياضية للتوزيع المقترح واهمها التأكد من انه يمثل pdf وان صيغه الثلاثة تكون متكافئة والتي تظهر بدلالة كل من دالة كما غير الكاملة الدنيا ودالة كما غير الكاملة العليا والصيغة التكاملية.

4. تقدير معالم التوزيع الجديد (α, θ, q) (المقترح الأول) باستعمال طريقة تقديرالأمكان الأعظم MLE والتأكد من ان التوزيع المقترح يعطي مطابقة او ملائمة (توفيق fitting) افضل عند مقارنته

ببعض التوزيعات الاحتمالية التي تشكل منها باستعمال معايير مقارنة مختلفة وتحديدًا معيار معدل متوسط مربعات الخطأ (AMSE) ومعيار الجذر التربيعي لمعدل متوسط مربعات الخطأ (RAMSE) (الجانب التجريبي) ومعيار Akaike (AIC) ومعيار بيز (BIC).

5. هدف الباحث ايضاً دراسة تأثير عدد المشاهدات على المقترح الأول SLR من ناحية تقديرات معالم التوزيع وكذلك دالة المعولية بافتراض ان N متغيراً عشوائياً متقطعاً يتبع احد توزيعات متسلسلة القوى (PS) Power Series بالمعلمة λ (المبتورة عند النقطة صفر) إذ تم استعمال اسلوب التوزيعات المركبة Compounding Distributions Technique بين توزيع SLR وتوزيع متسلسلة القوى PS للحصول على توزيع (المقترح الثاني) والذي سيتم تسميته ليندلي-رايلي المقطوع ومتسلسلة القوى (SLRPSD) Slash Lindley-Rayleigh and Power Series Distribution بأربعة معالم $(\alpha, \theta, q, \lambda)$. وقد تم اشتقاق بعض الخصائص الإحصائية للمقترح الثاني وتحديدًا pdf, cdf، دالتي المعولية ومعدل المخاطرة، فضلاً عن ايجاد تقديرات الإمكان الأعظم MLE لمعالم التوزيع الاحتمالي.

4.1 الاستعراض المرجعي Literature Review

من المعلوم ان الفائدة الرياضية من تطوير واكتشاف التوزيعات الاحتمالية لزمن الفشل تكمن في تطبيقها في العديد من المجالات المختلفة. وان بعض عوائل هذه التوزيعات الاحتمالية يتم الحصول عليها بإضافة معالم جديدة للتوزيع الأساسي او ما يسمى اصطلاحاً baseline distribution، وغالباً ما يتم ذلك باستعمال اساليب مختلفة منها اسلوب المزج mixture بين توزيعين او اكثر بنسب معينة تسمى نسب او أوزان المزج (الخليط)، وكذلك هنالك اسلوب التوزيعات المركبة compounding distributions التي تنتج عن تركيب توزيعين، وهذان الأسلوبان واساليب اخرى تندرج ضمن الغرض نفسه وتتشابه بطريقة المعالجة الرياضية، لذلك قام الباحث باستعراض اهم خلفيات الموضوع والدراسات السابقة ذات العلاقة بموضوع البحث للاستفادة من عمل الباحثين السابقين من ناحية ايجاد الخصائص الإحصائية والاحتمالية والرياضية وتقديرات الإمكان الأعظم لمعالم التوزيعات التي أوجدوها فضلاً عن استعراض ما توصلوا اليه من نتائج واستنتاجات.

- في عام 2011م قام الباحثان ^[7] (Wagner Barreto-Souza و Alice Lemos Moris)

بتقديم فئة من توزيعات ويبيل ومتسلسلة القوى (WPS) والتي حصل عليها من تركيب توزيعي ويبيل ومتسلسلة القوى، ومن مزايا فئة التوزيعات الجديدة هذه ان لها أشكالاً متنوعة لدالة المخاطرة Hazard Function منها المتزايدة، المتناقصة، وكذلك bathtub، upside down bathtub، وقد حصلنا على بعض من الخصائص الإحصائية المهمة مثل العزوم والإحصاءات المرتبة وباستعمال خوارزمية EM ووجدنا ان هنالك مرونة اكبر يتمتع بها التوزيع المقترح من ناحية موافقته او ملائمة لبيانات زمن الفشل مقارنة بتوزيعات اخرى مثل ويبيل والتوزيع الأسّي ومتسلسلة القوى، وأدناه صيغة pdf لفئة التوزيعات الجديدة:

$$f(x) = \alpha\theta\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-(\beta x)^\alpha} \frac{c'(\theta e^{-(\beta x)^\alpha})}{c(\theta)}, \quad x > 0$$

- في عام 2013 م عمل الباحث ^[6] (Ali G.) على تقديم إعمام لتوزيع الـ Slash باستعمال

توزيع beta-normal وقد كان هذا التوزيع المعمم الجديد اكثر مرونة من توزيع الـ Slash العادي ويحتوي على توزيعات ليست فقط متماثلة ووحيدة المنوال بل ايضاً تحتوي على توزيعات غير متماثلة وثنائية المنوال، كما انه درس خصائص التوزيع المعمم الجديد وقدر معالمه باستعمال طريقة الإمكان الأعظم وطبق ذلك على بعض المجموعات من البيانات الحقيقية، وأدناه pdf للتوزيع الجديد الذي تم اعمامه:

$$f(x; \alpha, \beta, q) = \frac{q}{B(\alpha, \beta)} \int_0^1 [\phi(xt)]^{\alpha-1} [1 - \phi(xt)]^{\beta-1} \phi(xt) t^q dt$$

Where $-\infty < x < \infty$ and $\alpha, \beta, q > 0$

وان $\phi(\cdot)$ تمثل pdf للتوزيع الطبيعي القياسي.

- في عام 2014 م قدم الباحثون ^[5] (Koshkan Kus¹ و Mustafa C.K. و Ali A.G.) توزيعاً

أكثر عمومية لتوزيع Moyal وذلك عن طريق توزيع Beta-Moyal إذ عرفوا توزيعاً جديداً عن طريق ايجاد علاقة بين المتغير العشوائي الذي يتبع توزيع beta-Moyal مع المتغير العشوائي الذي يتبع التوزيع المنتظم المرفوع الى اس معين بالاستناد إلى فكرة توزيع الـ Slash ووجدوا بأن التوزيع الجديد والمسمى Beta-Moyal Slash هو اكثر عمومية من توزيعي Beta- و Moyal

Moyal وانه اكثر مرونة من ناحيتي التفرطح والالتواء مقارنة بهذين التوزيعين، فضلاً عن انهم درسوا بعض الخصائص الإحصائية والاحتمالية للتوزيع الجديد واشتقوا صيغاً لتقديرات الإمكان الأعظم لمعالم التوزيع الجديد وطبقوا ذلك عملياً على مجموعة من البيانات الحقيقية وأدناه صيغة pdf للتوزيع الجديد:

$$f(x; a, b, q) = b \int_0^1 t^q \left\{ -\frac{\gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} e^{-xt}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \right\}^{a-1} \left\{ \gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} e^{-xt}\right) \right\}^{b-1} \exp\left\{ \frac{-[xt + e^{-xt}]}{2} \right\} dt$$

إذ ان: $b = \frac{q}{\sqrt{2\pi} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^{b-1} B(a,b)}$ وأن $a, b, q > 0$ و $-\infty < x < \infty$

- في عام 2015 م درس ^[49] (Yuri A.I. و Hector W.G. و Hector V. و Heleno B.) احد انواع عائلة Weibull المقطوع وتحديدًا توزيع Rayleigh المقطوع والذي يمكن عدّه امتداداً لتوزيع Rayleigh إذ إنماز بمرونة اكبر فيما يخص تفلطح التوزيع وهذه الميزة جعلت هذا الامتداد للتوزيع الجديد اكثر ملائمة من إذ جودة المطابقة للمشاهدات والبيانات غير النمطية atypical data علماً ان الدراسة شملت اشتقاق بعض الخصائص الاحتمالية وتقديرات الإمكان الأعظم وتطبيقها على بيانات حقيقية والتي اظهرت ان توزيع Rayleigh المقطوع طور وحسن من النتائج ومن مطابقة البيانات الحقيقية مقارنة بتوزيع Rayleigh العادي وأدناه صيغة pdf للتوزيع الجديد:

$$f(t; \sigma, q) = \frac{q(2\sigma)^{q/2}}{t^{q+1}} \Gamma\left(\frac{q+2}{2}\right) F\left(\frac{t^2}{2\sigma}, \frac{q+2}{2}, 1\right)$$

إذ ان $\sigma > 0$ ، $q > 0$ ، و F تمثل cdf لتوزيع Gamma .

- في عام 2015 م ايضا نشر كل من ^[26] (Heleno و Yuri A.I. و Hugo S. Salinas) ورقة بحثية تضمنت توزيعاً احتمالياً جديداً لنمذجة بيانات موجبة ذات تفلطح عالي أسموه Slashed Exponentiated Rayleigh وهو امتداد لتوزيع Exponentiated Rayleigh وقد اعطوا دليلاً على ان التوزيع الاحتمالي للمتغير الجديد كان اكثر مرونة في نمذجة ومعالجة التفرطح للبيانات مقارنة بالتوزيع الاحتمالي Exponentiated Rayleigh ، كما قاموا بدراسة بعض الخصائص الاحتمالية وايجاد تقديرات الإمكان الأعظم لمعالم التوزيع الجديد

وطبقوا ذلك على بيانات حقيقية فقد اظهرت النتائج اداءً جيداً للتوزيع الجديد والمبينة صيغة pdf بالشكل الآتي:

$$f(t; \alpha, \lambda, q) = \frac{\alpha q}{\lambda^{q/2}} t^{-(q+1)} H(\lambda t^2; \alpha, q), t > 0$$

إذ ان $\alpha, \lambda, q > 0$ وان $H(x; \alpha, q)$ معرفة بالشكل:

$$H(x; \alpha, q) = \int_0^x u^{q/2} e^{-u} (1 - e^{-u})^{\alpha-1} du$$

- في عام 2015 م ايضا قدم كل من **(Mavis P. و Gayan W.L.)**^[22] فئة جديدة من توزيعات

وقت الحياة سمي Lindley Power Series وناقشوا فيها بعضاً من الخصائص متمثلة بدالتي البقاء والمخاطرة والسلوك التقاربي لـ pdf والعزوم فضلاً عن تقديرات MLE لمعالم التوزيع وطبقوا ذلك على حالة خاصة من هذه الفئة وتحديداً توزيع Lindley Logarithmic باستعمال محاكاة Monte-Carlo وكذلك على بيانات حقيقية فقد تبين لهما مدى كفاءة أداء هذه الفئة الجديدة من ناحية ملائمتها وجودة التوفيق لبيانات زمن الفشل مقارنة بالتوزيعات الناشئة منها، وأدناه صيغة pdf لتوزيع الفئة الجديدة :

$$f(x; \beta, \lambda) = \lambda \beta^2 (\beta + 1)^{-1} (1 + x) e^{-\beta x} \frac{C \left[\lambda \left(\frac{1 + \beta + \beta x}{\beta + 1} \right) e^{-\beta x} \right]}{C(\lambda)}, x > 0$$

- في عام 2016 م قدم الباحثون **(Jimmy R.G.)**^[19] و **Filidor V.** و **Diego I.G.**

و **(Hector W.G)** توزيعاً جديداً يُعد امتداداً لتوزيع Birnbaum-Saunders (BS) بالاستناد الى توزيع Slash المعدل (MS) وأن هذه العائلة الجديدة من توزيعات (BS) والتي تسمى Modified Slash Birnbaum- Saunders Distribution قد تم الحصول عليها باستبدال التوزيع الطبيعي العادي بحاصل قسمة متغيرين عشوائيين مستقلين احدهما في البسط والمتمثل بالتوزيع الطبيعي والمتغير الاخر في المقام والمتمثل بالتوزيع الأسّي (بمعلمة قيمتها 2) والمرفوع الى اس معين، إذ خلصوا الى أن التوزيع الناتج هو توزيع موسع او امتداد لتوزيع (BS) والذي يملك قيماً للتفلطح اكبر من توزيع (BS) وكذلك اكبر من توزيع (SBS) وقد اشتقوا صيغاً للعزوم وبعض الخصائص الاحتمالية والإحصائية للتوزيع الجديد مع ايجاد تقديرات للمعالم

بطريقتي العزوم والإمكان الأعظم وقد حصلوا على نتائج افضل عند تطبيقهم العملي باستعمال بيانات حقيقية وأدناه صيغة pdf للتوزيع المقترح:

$$f(t) = \frac{t^{-3/2} (t+\beta)^q}{\alpha\beta^{1/2}} \int_0^\infty u^q e^{-2u^q} \phi(ua_t(\alpha, \beta)) du, t > 0$$

Where $\phi(\cdot)$ is the pdf of the N(0,1) distribution.

- في عام 2017 م أقترح الباحثان (Sollei M. و Frans K.)^[21] توزيعاً اطلقاً عليه Beta Slashed Generalized Half-Normal Distribution والذي يتضمن بعض التوزيعات المهمة مثل Half-Normal و Slashed Half-Normal و Generalized Half-Normal Distribution وقد توصلنا الى صيغ صريحة لدالة التوزيع والدالة المميزة كذلك حصلنا على تقديرات الإمكان الأعظم لمعالم التوزيع المقترح عبر خوارزمية EM وتطبيق ذلك على بيانات حقيقية تخص الإجهاد Fatigue واستنتجنا ان الانموذج المقترح كان افضل من حيث النتائج مقارنة بالتوزيعات المذكورة أنفاً، وأدناه صورة التمثيل العشوائي (pdf) للتوزيع المقترح :

$$f(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha}{\sigma^{\alpha} B(a,b)} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{2\sigma^2\alpha}\right)^i \frac{B(c_i, b)}{\Gamma(i+1)} z^{\alpha(2i+1)-1}, z > 0$$

$$\text{and } c_i = \alpha(2i + 1) + q(a - 1) + 1$$

- في عام 2017م ايضا قدم الباحثان (Irshad M.R. و Maya R.)^[35] توزيعاً جديداً موسعاً معمماً لتوزيع Lindley إذ اشتقا مجموعة من الخصائص الإحصائية من بينها العزوم الشرطية ودالة البقاء وبعض مقاييس الأنتروبيا فضلاً عن تقديرات معالم التوزيع بطريقتي الإمكان الأعظم والعزوم فضلاً عن انهما طبقا ذلك عملياً على بيانات حقيقية لاختبار جودة التوفيق من إذ ملائمته أذ أبدى التوزيع المقترح أفضلية في جودة التوفيق (حسن المطابقة) مقارنة ببعض التوزيعات الكلاسيكية المعروفة، وفيما يأتي صيغة pdf للتوزيع المقترح والذي نتج عن استعمال اسلوب المزج mixture بين توزيعين كلاهما يتبع توزيع Gamma الأول $G(\alpha, \theta)$ والثاني $G(\alpha-1, \theta)$ بنسب او اوزان للمزج هما:

$$p_1 = \frac{\theta k}{\eta^\delta + \theta k} \text{ and } p_2 = \frac{\eta^\delta}{\eta^\delta + \theta k}$$

$$f(x; \theta, \alpha, k, \eta, \delta) = \frac{\theta^2}{\eta^\delta + \theta k} \left\{ \frac{k(\theta x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{\eta^\delta (\theta x)^{\alpha-2}}{\theta \Gamma(\alpha-1)} \right\} e^{-\theta x}, x > 0$$

إذ ان $\theta, \eta, \delta, k > 0$, $\alpha > 1$

- في عام 2018م قام كل [38] (Ahmad Z, Bhat A.H, Jan T.R., Rashid A.) وبتطوير

توزيع Ailamujia وذلك عن طريق تركيبه مع توزيع متسلسلة القوى واطلقوا عليه تسمية Ailamujia and Power Series Distribution وتوصلوا الى مجموعة من الخصائص الإحصائية والاحتمالية فضلاً عن تقديرات الإمكان الأعظم لمعالم التوزيع، وعن طريق تحليل هذا التوزيع إحصائياً ورسم مخططات هذه الخصائص وتطبيقه على بيانات حقيقية وجدوا بأنه أكثر جودة واداءً فيما يتعلق بمدى ملائمة لبيانات زمن الفشل، وقد أخذت صيغة pdf للتوزيع المقترح الشكل:

$$f(x; \beta, \lambda) = 4\lambda\beta^2 x e^{-2\beta x} \frac{C'[\lambda(1+\beta x)e^{-2\beta}]}{C(\lambda)}, x, \lambda, \beta > 0$$

- في عام 2018م ايضا قدم الباحث [41] (Said H.A.) فئة جديدة من توزيعات Lifetime عن

طريق تركيب فئة معممة من توزيعات Lindley مع عائلة من توزيعات متسلسلة القوى إذ احتوت الفئة الجديدة من التوزيعات عدة توزيعات جزئية او فرعية لزمن الفشل كحالات خاصة مثل PLB, PLG, PLL, PLP (بواسون، اللوغاريتمي، الهندسي، ثنائي الحدين) إذ كانت الفئة المقترحة أكثر مرونة في التعامل مع بيانات زمن الفشل مقارنة مع بعض توزيعات زمن الفشل الأخرى، وقد اثبت الباحث ذلك من تطبيق ما حصل عليه من خصائص إحصائية مثل العزوم ودالتي المعولية والمخاطرة فضلاً عن استعمال طريقة الإمكان الأعظم لتقدير معالم التوزيع المقترح وتنفيذ ذلك باستعمال المحاكاة أولاً ومن ثم على ثلاثة أنواع من بيانات زمن الفشل الحقيقية، وأدناه صيغة pdf لفئة التوزيع المقترح:

$$f(x) = \theta \frac{\beta^2}{\beta + \delta} (1 + \delta H(x, \varepsilon)) h(x; \varepsilon) e^{-\beta H(x; \varepsilon)} \frac{C'[\theta (\frac{\beta + \delta + \beta \delta H(x; \varepsilon)}{\beta + \delta}) e^{-\beta H(x; \varepsilon)}]}{C(\theta)}$$

إذ انه بالإمكان الحصول على عدة توزيعات خاصة تنتمي للفئة المقترحة اعتماداً على الاختيارات التي

تأخذها الدوال $C(.)$ و $H(.)$ علماً أن $h(.)$ تشير الى مشتقة $H(.)$.

- في عام 2018م أيضاً أقترح الباحثان [44] (Gomez O. و Selen Cakmakyapan) توزيعاً

احتمالياً لزمن الفشل Lindley-Rayleigh ودرسا بعضاً من خصائصه تضمنت العزوم العادية

والدالة المولدة للعزوم ومقاييس الأنتروبيا فضلاً عن تقديرات الإمكان الأعظم لمعالم التوزيع وطبقاً ذلك على بيانات حقيقة إذ أظهر التوزيع مرونة أكبر تجاه هذه البيانات مقارنة بتوزيعات قريبة منه، إذ كانت الصيغة العامة لـ pdf بالشكل:

$$f(x) = \frac{\theta^2 x}{(\theta + 1)\sigma^2} e^{-\frac{\theta x^2}{2\sigma^2}\left(1 + \frac{x^2}{2\sigma^2}\right)}, x > 0, \theta, \sigma > 0$$

- في عام 2020 م قام الباحثون ^[48] (Birdal S و Talha A. و Sukru A.) بدراسة توزيع Slash Maxwell والحصول على بعض الخصائص الاحتمالية منها العزوم ومقاييس الالتواء والتفرطح فضلاً عن تقديرات الإمكان الأعظم المعدلة لمعالم التوزيع والمسماة بطريقة Tiku للحصول على صيغ صريحة للخصائص المستخرجة كافة، مما اتاح لهم ايجاد بعض الخصائص التقاربية لمقدرات التوزيع والتي مكنتهم من عمل مقارنة بين أداء طريقتي الإمكان الأعظم والإمكان الأعظم المعدلة عن طريق استعمال محاكاة Monte-Carlo وقد ابدى التوزيع المدروس ملامحة وجوده توفيق أكبر للبيانات مقارنة بتوزيع Maxwell فضلاً عن انهم استنتجوا ان التوزيع المقترح كان مرناً بما يكفي لنمذجة البيانات التي تتصف بأنها ذات تفلطح مفرط والصيغة التالية تبين pdf للتوزيع المقترح :

$$f(z; \sigma, q) = \frac{2q}{\sigma^3 \Gamma(\frac{1}{2}) z^{q+1}} \int_0^{z^2} t^{\frac{q+3}{2}-1} e^{-\frac{t}{\sigma^2}} dt, z > 0$$

- في عام 2020 م أيضاً نشر الباحثان ^[27] (Weizhong Tian و Huihui Li) مقالة بحثية تضمنت توزيعاً جديداً أسمياه The Slashed Lomax Distribution وهو يعد من التوزيعات غير المتماثلة والذي يمكن استعماله لمطابقته وملائمته للبيانات ذات الذيل السميك-Thick Tailed إذ اكتشفا خصائص متعددة لهذا التوزيع مثل pdf وcdf ودالة المخاطرة و انتروبيا Renyi والعزوم ذات الرتبة r ومعامل الالتواء والتفرطح فضلاً عن انهما قاما بدراسة ما يسمى Slash Lomax Regression Model ثم قدرا معالم التوزيع الجديد باستعمال خوارزمية تعظيم التوقع الشرطي (ECM) واستعملا المحاكاة لتقييم أداء الطريقة المقترحة فضلاً عن انهما طبقا ذلك عملياً باستعمال بيانات حقيقية للتحقق من اهمية توزيع The Slashed Lomax Distribution وأدناه صيغة pdf له:

$$f(y; \alpha, \beta, \lambda) = \frac{2\lambda\alpha\beta^{2\lambda}}{y^{2\lambda+1}} \int_0^{\frac{y}{\beta}} \frac{w^{2\lambda}}{(1+w)^{\alpha+1}} dw, \text{ where}$$

$$B(x, y) = \int_0^{\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} dt \text{ is the incomplete beta function.}$$

- في عام 2020 م ايضا أقرح الباحثون ^[37] (Yolanda و Osvaldo V. و Neveka M.O.) (Yuri A.I. و M.G.) توزيعاً جديداً أسمه -The Confluent Hyper-geometric Slashed-Rayleigh فقد أمكن ملاحظة ان هذا التوزيع هو بديلاً لتوزيع Slashed-Rayleigh وقد اشتقوا العديد من الخصائص الاحتمالية والإحصائية للتوزيع الجديد مثل cdf ودالة Hazard Rate والعزوم كما استعملوا طريقتي العزوم والإمكان الأعظم لتقدير معالمه وطبقوا ذلك عملياً على نوعين من البيانات الحقيقية لبيان فائدته ومرونته في التعامل مع بيانات زمن الفشل ذات التفرطح العالي.

- في عام 2021م قام الباحثون ^[33] (Mila N. و Nurrohmah S. و Mario D.) بنشر بحث في مجلة IOP بينوا فيه بأن هنالك مشكلة عند استعمال توزيع Lindley في نمذجة البيانات ذات الالتواء الموجب ووحيدة المنوال الا وهي عدم قدرته على نمذجة البيانات التي لها قمة Peak بعيدة عن الصفر، وعليه اقترحوا تعديلاً مناسباً لزيادة مرونة هذا التوزيع وتحديدوا طريقة التركيب ما بين متغيرين عشوائيين بالاعتماد على cdf لهما اذ سمي الأول T ب Transformed والثاني X ب Transformer، وفي هذا البحث اختاروا توزيع Lindley ليكون Transformed والتوزيع الأسّي ليكون Transformer ورغم حداثة التوزيع الناتج الا انه كان قاصراً في نمذجة البيانات ذات الذيل الثقيل heavy-tailed مما أضرهم الى معالجة هذه المشكلة باستعمال فكرة توزيع ال Slash وفي الوقت نفسه يحافظون على خصائص توزيع Lindley-Exponential Slash ليكون اسم التوزيع الجديد Lindley-Exponential Distribution إذ استخرجوا اغلب الخصائص الإحصائية والاحتمالية له فضلاً عن حساب تقديرات MLE لمعامله باستعمال الطرق العددية، وقد أخذت صيغة pdf للتوزيع المقترح الشكل التالي:

$$g(y) = \frac{q\theta^2}{(\theta+1)\lambda} \int_0^1 \left[1 + \frac{yt}{\lambda}\right] e^{-\frac{\theta yt}{\lambda}} t^q dt, y, \theta, \lambda, q > 0$$

- في عام 2021م ايضا أقتح كل من **Hector و Yuri A.I. و Inmaculada B-C.**^[28] **Juan M.A و Yolanda M.G و W.G.** توزيعاً جديداً لزمن الفشل ذو ثلاثة معالم أسموه **Modified Slashed Generalized Rayleigh Family** ليكون ملائماً ومتوافقاً مع نوع بيانات زمن الفشل التي يكون لها تفلطح عالٍ إذ درسوا الخصائص الأساسية له مثل pdf ودالة Hazard Rate والعزوم فضلاً عن تقديرات mle لمعالمه ومن مزايا هذا التوزيع انه استطاعوا تسليط الضوء على مجموعة من عناصر (توزيعات) هذه العائلة مثل Rayleigh, Maxwell, Half-Normal ومربع كاي والتي أبدت مطابقة جيدة للتوزيعات التي تتصف منحنياتها بـ heavy tails وطبقوا ذلك عمليا عن طريق دراسة المحاكاة فضلاً عن استعمال بيانات حقيقية والتي أظهرت فائدة وأهمية ومرونة التوزيع المقترح، وفيما يأتي التمثيل العشوائي لـ pdf له :

$$f(t; \theta, \alpha, q) = \frac{2q\theta^{-\frac{q}{2}}}{\Gamma(\alpha + 1)t^{q+1}} I\left(\alpha + \frac{q}{2} + 1, \frac{2}{\theta^{\frac{q}{2}}t^q}, \frac{q}{2}, 1\right), t > 0$$

إذ أن I(...,...) معرفة بالشكل التالي:

$$I(\eta, a, r, s) = \int_0^\infty x^{\eta-1} e^{-ax^r - sx} dx$$

وفي ختام الاستعراض المرجعي نلاحظ أن ما تم استعراضه من دراسات وابحاث سابقة انه لم نجد فيها باحثين قد تناولوا موضوع نمذجة البيانات الموجبة وتحديد وقت الحياة lifetime عموماً و عائلة توزيعات المولدة لتوزيع ليندلي (L-G) Lindley- Generator التي تتسم منحنيات توزيعاتها الاحتمالية بانها ذات تفلطح عالي او مفرط high or excess kurtosis اي التوزيعات ذات الذيل الثقيل heavy tail والتي تتصف بامتلاكها مشاهدات او قيماً شاذة outliers، فضلاً عن نمذجة بيانات موجبة تبدي تنوع في دوال معدل الفشل (او المخاطرة).

كذلك لم نجد من تناول في موضوع تحليل المعولية مسالة افتراض ان عدد العطلات او التوقفات لماكنة معينة (او نظام معين) هي بحد ذاتها غير ثابتة اي متغيراً عشوائياً فضلاً عن وجود المتغير العشوائي لوقت الحياة اي وجود متغيرين عشوائيين في وقت واحد. وفي هذه الاطروحة تم اقتراح توزيع احتمالي جديد لوقت الحياة وعلى مرحلتين اي مقترحين يعالج الأول مشكلة التفرطح العالي ووجود القيم الشاذة بإدخال ما يسمى بمعلمة التفرطح q للتوزيع المقطوع بالقسمة slash distribution لنمذجة ومطابقة fitting هكذا نوع من البيانات وقد سمي اختصاراً SLR(α, θ, q). اما المقترح الآخر فهو فضلاً عن ما تم ذكره فانه يأخذ بعين الاعتبار ان عدد العطلات هي ايضاً متغيراً عشوائياً يتبع احد توزيعات متسلسلة القوى بإدخال المعلمة λ وسمي اختصاراً بفئة التوزيعات SLRPS($\alpha, \theta, q, \lambda$).

الفصل الثاني

الجانِب النظري

الفصل الثاني

الجانب النظري

1.2 التمهيد The Preface

يتناول هذا الفصل عرضاً لبعض المفاهيم والتعاريف الأساسية والمهمة التي لها علاقة بموضوع الاطروحة، فضلاً عن استعراض اهم الخصائص الإحصائية والرياضية لتوزيعات وقت الاشتغال lifetime والتي لها علاقة وثيقة ومباشرة بالتوزيع الاحتمالي الجديد. وقد تضمن هذا الفصل ايضا اشتقاق الخصائص الرياضية للتوزيع الجديد بشقيه المقترحين الاول توزيع ليندلي-رايلي المقطوع Slash Lindley-Rayleigh ذو ثلاثة معلمات (α, θ, q) إذ أن α معلمة القياس scale parameter، وتمثل θ معلمة الشكل shape parameter، اما q فتمثل معلمة التفرطح (او التسطح) kurtosis parameter، إذ تم اشتقاق دالة الكثافة الاحتمالية pdf بثلاث صيغ مختلفة ولكنها متكافئة اثنان منها بدلالة دالتي كما غير الكاملة الدنيا والعليا lower and upper incomplete gamma functions اما الثالثة فكانت بالصيغة او الصورة التكاملية. كما تم اشتقاق دالة التوزيع التراكمية cdf والعزوم غير المركزية (عن نقطة الأصل) ذات الرتبة r ومعاملي الالتواء والتفرطح والوسط الهندسي فضلاً عن ايجاد دالتي المعولية ومعدل الفشل (المخاطرة) reliability and failure rate(hazard) functions. بعد ذلك تم اشتقاق تقديرات معلمات توزيع SLR الثلاث بطريقة الامكان الأعظم (MLE) Maximum Likelihood Estimation. اما التوزيع المقترح الثاني فقد كان توزيع ليندلي-رايلي المقطوع ومتسلسلة القوى Slash Lindley-Rayleigh and Power Series (SLRPS) والمتضمن اضافة المعلمة λ التي تمثل معلمة احد توزيعات متسلسلة القوى الخاصة لمعرفة التأثير الحاصل على توزيع SLR على دالة المعولية في حال عدينا N متغيراً عشوائياً منقطعاً له توزيع احتمالي ممثلاً بأحد توزيعات متسلسلة القوى، إذ تم اشتقاق كل من pdf و cdf ودالتي المعولية والمخاطرة فضلاً عن ايجاد تقديرات الامكان الاعظم لمعلمات التوزيع $(\alpha, \theta, q, \lambda)$. SLRPS (λ)

2.2 بعض المفاهيم الأساسية The Some Principal Concepts

هنالك بعض المفاهيم الأساسية ذات علاقة مباشرة بموضوع الاطروحة والتي شملت تعاريف بأهم الدوال وخصائصها الإحصائية والرياضية والسلوك العشوائي لمتغيراتها والتي تتدرج ضمن دراسة وقت الحياة lifetime (او ما يسمى بزمن الفشل failure time) فضلاً عن تقديم تعاريف وخصائص عامة التي لها علاقة وثيقة بالتوزيع الجديد بمقترحيه الأول والثاني.

1.2.2 دالة الكثافة الاحتمالية للفشل

The Failure Probability Density Function

بما ان الوحدة او المركبة يمكن ان تفشل او تنتهي في اي لحظة زمنية فمن الطبيعي عدّ وقت اشتغال هذه الوحدة (المركبة) متغيراً عشوائياً بدالة توزيع $F(x)$ معينة إذ أن $F(x)$ تمثل احتمال فشل الوحدة قبل الزمن x ، فاذا كانت $f(x)$ تمثل دالة الكثافة الاحتمالية pdf المقابلة الى $F(x)$ فإنه يمكن تعريف $F(x)$ على انها:

احتمال فشل الوحدة (المركبة) خلال الفترة الزمنية $[x, x + \Delta x]$ حتى وان كانت Δx صغيرة وبشرط ان المركبة او الجهاز كان يعمل عند الزمن x لهذا يمكن كتابة $f(x)$ رياضيا وكما يأتي
(Olmos & et al. ,2014, 38, p. 972) :

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P_r(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \quad \dots (2.1)$$

وتتملك دالة الفشل $f(x)$ المميزات الآتية:

$$-1 \quad f(x) > 0 \text{ ولكل قيم } x \text{ إذ أن } x \in R$$

$$-2 \quad \text{بما أن } x \in R^+ \text{ لذا فإن } \int_0^{\infty} f(x) = 1$$

2.2.2 دالة المعولية The Reliability Function

يستعمل مصطلح المعول في سياق الكلام في حياتنا اليومية مثلا قد نقول صديق يعول او يعتمد عليه، جهاز يعتمد عليه، أخبار موثوق بها أو يعتمد عليها وكخلاصة لهذا المفهوم فإنه يعني شيئاً ما أو شخصاً ما نستطيع الاعتماد عليه، وفي بحوث اختبار امد الحياة يكون الاهتمام بالقياس الكمي

لمعولية وحدة او مركبة او جهاز ما، إذ تعرف المعولية لوحدة معينة (او نظام معين) بانها الاحتمال لان تنجز هذه الوحدة (النظام) عملاً بشكل فعال خلال فترة زمنية محددة على الاقل ومن دون عطل رئيس.

فاذا كان X متغيراً عشوائياً يمثل زمن الاشتغال لوحدة معينة فان معولية هذه الوحدة عند الزمن x تعطى بالشكل الآتي (Bhati, & et al., 2015, 10):

$$R(x) = P_r(X \geq x) = 1 - F(x) \quad \dots (2.2)$$

إذ أن: $R(x)$ هي دالة المعولية وقيمتها محصورة ضمن الفترة $[0,1]$.

$F(x)$ تمثل دالة التوزيع التجمعية cdf لزمن الفشل x .

ان دالة المعولية او البقاء لها الخصائص الآتية:

1- $R(\infty) = 0$ وذلك لان $F(\infty) = 1$ وكذلك بسبب ان الوحدة او الجهاز حتماً سيعطل وينتهي خلال مرحلة معينة من مراحل اشتغاله.

2- $R(0) = 1$ لان $F(0) = 0$ بمعنى ان الجهاز يعمل بشكل فعال عند الزمن $X = 0$ وباحتمال يساوي واحداً.

3- يتضح من الخاصتين أنفاً أن دالة المعولية هي دالة غير متزايدة non-increasing function.

4- ان هذه الدالة مستمرة من جهة اليسار left-continuous function .

3.2.2 دالة معدل المخاطرة (معدل الفشل)

The Hazard Rate Function

وهي الدالة التي نحصل عليها عن طريق النسبة بين دالة الفشل $f(x)$ الى دالة المعولية $R(x)$

بمعنى انها احتمال فشل الوحدة ضمن الفترة $[x, x + \Delta x]$ بشرط انها تشتغل عند الزمن x ويمكن كتابة الاحتمال المشروط هذا رياضياً

$$\begin{aligned} h(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P_r(x < X < x + \Delta x / X > x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x [1 - F(x)]} = \frac{f(x)}{1 - F(x)} = \frac{f(x)}{R(x)} \quad \dots (2.3) \end{aligned}$$

وتوجد ثلاثة اشكال أساسية لدالة المخاطرة $h(x)$ إذ تكون اما متزايدة او متناقصة او ثابتة،

وهناك أشكالاً أخرى مهمة يمكن مصادفتها في بعض الظواهر وفي مجالات مختلفة والتي تتعامل او

ترتبط بموضوع دراسة lifetime وغالباً ما تكون هذه الأشكال عبارة عن خليط او تركيبة composition من الأشكال الثلاثة التي ذكرناها ومن هذه الأشكال upside –down و bathtub و upside-down bathtub علماً أي سبب تسمية bathtub هو أن شكل دالة المخاطرة يأخذ شكل حوض الاستحمام كمقطع عرضي (Boikanyo , 2021,12,p.224)

مما تقدم يمكن القول بان السلوك العشوائي لزمن الفشل x يمكن ان يدرس عن طريق كل من الدوال الاربعة $f(x)$ ، $F(x)$ ، $R(x)$ ، $h(x)$ إذ يمكن الحصول على توزيع زمن الفشل x من العلاقة التي تربط هذه الدوال وكما يأتي (Gayan et al. , 2015, 22):

$$R(x) = 1 - F(x) , f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

$$h(x) = \frac{-d \ln(1 - F(X))}{dx}$$

$$\int_0^x h(t)dt = -d \int_0^x \ln(1 - F(t))$$

$$\int_0^x h(t)dt = - \ln(1 - F(x))$$

$$F(x) = 1 - e^{-\int_0^x h(t)dt}$$

$$f(x) = h(x)e^{-\int_0^x h(t)dt} \quad \dots (2.4)$$

4.2.2 الإحصاءات المرتبة The Order Statistics

نفرض أن (X_1, X_2, \dots, X_n) هي عينة عشوائية وتأخذ القيم الحقيقية $X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n$ فضلاً عن ان (X_1, X_2, \dots, X_n) هي متغيرات عشوائية مستقلة ومتماثلة ولها دالة كثافة احتمالية p.d.f يرمز لها $f(x)$ وبافتراض ان المتغيرات العشوائية تأخذ قيما مستمرة لذا فإن احتمال تساوي مشاهدتين هو صفر، ولذلك يمكننا ترتيب المشاهدات على شكل قيم مرتبة تصاعدياً order of magnitude أي أن $X_{(1)} < X_{(2)} < \dots < X_{(n)}$ (Broderick & et al. , 2018, 13,p.5) و (Frans & et al., 2017,21.p. 337) .

وهذه المتغيرات العشوائية هي ما تسمى بالإحصاءات المرتبة للعينة وان $X_{(r)}$ تمثل المفردة التي ترتيبها r أو الاحصاءة المرتبة التي ترتيبها r ، لذا فان احتمال تساوي مفردتين او اكثر من الاحصاءات المرتبة هو صفر. وبموجب الافتراضات المذكورة أنفاً فإنه في اختبارات امد الحياة lifetime يكون احتمال فشل مركبتين في وقت واحد هو صفر لذا ستكون cdf الى $X_{(r)}$ بالشكل:

$$G_r(x) = P_r(X_{(r)} \leq x) = P_r[\text{at least } r \text{ observations } \leq x] \quad \dots (2.5)$$

$$= \sum_{k=r}^n C_k^n [F(x)]^k [1 - F(x)]^{n-k} \quad \dots (2.6)$$

و بأشتقاق $G_r(x)$ سنحصل على pdf الى $X_{(r)}$ ونشير لها بـ $g_r(x)$

$$g_r(x) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} [F(x)]^{r-1} [1 - F(x)]^{n-r} f(x), -\infty < x < \infty \quad \dots (2.7)$$

5.2.2 الالتواء The Skewness

ان موضوع الالتواء يقترن بالتوزيعات التكرارية ومنحنياتها ويقصد به احياناً على انه نقص في تماثل التوزيع كما يعرف الالتواء بانه جنوح التوزيع نحو يمين خط التماثل او نحو يساره، او انه مقدار اختلاف منحنى التوزيع عن حالة التماثل، مع ملاحظة ان الهدف من دراسة الالتواء هو تكوين فكرة عن شكل وهياة منحنى التوزيع واتجاه تكس البيانات. وهناك مقاييس متعددة تبين لنا نوع الالتواء وقيمتها العددية. وعموماً فان مقاييس الالتواء على نوعين هما المقاييس المطلقة والنسبية، وسنستعمل في هذا الفصل احد المقاييس النسبية وتحديداً معامل الالتواء باستعمال العزوم المركزية والذي يحسب من الصيغة (المشهداني واخرون، 1، 1989، 274-278) :

$$K = \beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} \quad \dots (2.8)$$

6.2.2 التفرطح The Kurtosis

اقترح العالم Karl Pearson مقياس يبين مقدار تحدب او تسطح منحنى التوزيع اسماه تحدب المنحني Convexity of the curve او مقياس التفرطح ولذلك فان التفرطح يعرف بانه مقدار تسطح Flatness او تدبب Peakness لمنحنى التوزيع الاحتمالي ويحسب:

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} \quad \dots (2.9)$$

$$\lambda_2 = \beta_2 - 3 \quad \dots (2.10)$$

إذ أن λ_2 تسمى مقياس التفرطح بإفراط Excess Kurtosis للمقارنة بتفرطح التوزيع الطبيعي الذي قيمته تساوي 3 . والجدول الآتي يوضح العلاقة بين قيمة مقياس التفرطح للتوزيع الاحتمالي ودرجة التشتت التي تقابله (المشهداني واخرون، 1، 1989، 281-282).

جدول (1-2) يوضح العلاقة بين شكل وقيمة مقياس تسطح (تفرطح) منحنى التوزيع الاحتمالي

ومقدار درجة التشتت المقابلة

شكل المنحني	المقياس β_2	المقياس λ_2	درجة التشتت
-------------	-------------------	---------------------	-------------

منحنى توزيع مدبب	اكبر من 3	اكبر من الصفر	تشتت واطئ
منحنى توزيع متماثل	يساوي 3	يساوي الصفر	تشتت معتدل
منحنى توزيع مسطح	اقل من 3	اقل من الصفر	تشتت عالٍ

7.2.2 التوزيعات ذات الذيل الثقيل والخفيف

The Heavy and Light Tailed Distributions

عادةً ما يميز توزيعات زمن الفشل بأن منحنياتها ملتوية نحو اليمين وذات ذيول ثقيلة او خفيفة بشكل عام، وهنا نقدم بعض التعاريف والخصائص لمثل هكذا انواع من منحنيات التوزيعات.

1.7.2.2 التوزيعات ذات الذيل الثقيل The Heavy- Tailed Distributions

في نظرية الاحتمال تعرف التوزيعات ذات الذيل الثقيل (Asmussen,2003,8) على انها تلك التوزيعات الاحتمالية التي ذيولها Tails لا تكون محددة أسياً اي أن ذيولها تكون أثقل مقارنة بالتوزيع الأسي، بمعنى أن التوزيع ذو الذيل الثقيل يؤول الى الصفر بشكل أبطأ من ذيل التوزيع الأسي، إذ يوجد هناك كتل كبير تحت منحنى pdf وعليه فأن هكذا توزيعات تميل لامتلاكها قيم شاذة Outliers بمقادير عالية و كأتمثلة لهذا النوع من التوزيعات نجدها في:

Cauchy, Frechet, Lognormal, Pareto, Student`s t.

تعريف (1.2) يقال عن المتغير العشوائي غير السالب (او توزيعه) بأنه ذو ذيل ثقيل إذا كان:

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{P(X > x)}{e^{-\phi x}} = \infty, \text{ for all } \phi > 0 \quad \dots (2.11)$$

هذا الشرط يعني أن الذيل لدالة توزيع X يكون تقاربياً أثقل من أي توزيع أسي (Karl,1999, 31)

تعريف (2.2) يقال عن توزيع المتغير العشوائي X بدالة توزيع F بأنه ذو ذيل ثقيل (من اليمين) إذا

كانت الدالة المولدة للعزوم لـ X ($M_X(t)$) غير منتهية لجميع قيم $t > 0$:

$$E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} dF(x) = \infty, \quad \forall t > 0 \quad \dots (2.12)$$

وذلك يعني ضمناً أن:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{tx} P_r(X > x) = \infty, \quad \forall t > 0 \quad \dots (2.13)$$

وبشكل مكافئ يمكن اعادته بدلالة ذيل دالة التوزيع :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{tx} \bar{F}(x) = \infty, \forall t > 0 \quad \dots (2.14)$$

وتجدر الإشارة هنا الى أن هنالك بعض الفئات الفرعية او الجزئية subclasses للتوزيعات ذات

الذيل الثقيل نذكر منها (Sergey & et al., 2013,45) و (Sidney,2007,47):

1.1.7.2.2 The Fat-Tailed Distributions الذيل السميك

وهي تلك التوزيعات التي تبدي التواءاً او تسطحاً كبيراً وواسعاً قياساً بالتوزيع الأسي او التوزيع

الطبيعي، ويمكن التعبير عن هذا النوع رياضياً بالشكل:

$$P_r[X > x] \sim x^{-\alpha} \text{ as } x \rightarrow \infty, \alpha > 0 \quad \dots (2.15)$$

2.1.7.2.2 The Long-Tailed Distributions الذيل الطويل

يقال عن المتغير العشوائي غير السالب X (او دالة توزيعه) بأنه ذو ذيل طويل (من اليمين)

أذا:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(X > x+t)}{P(X > x)} = 1, \forall t > 0 \quad \dots (2.16)$$

او بشكل مكافئ

$$\bar{F}(x+t) = \bar{F}(x) \text{ as } x \rightarrow \infty \quad \dots (2.17)$$

والشرط المذكور أنفاً يمكن تفسيره وفق معنى واحد وهو أن الكمية داخل limit مساوية الى :

$$P_r[X > x+t / X > x] \quad \dots (2.18)$$

3.1.7.2.2 Sub-Exponential Distributions التوزيعات شبه الأسية

يعرف هذا النوع (Charles & et al, 1998,15) و (Chistykov,1964,17) بدلالة التقاف

convolution التوزيعات الاحتمالية، إذ لأي متغيرين عشوائيين X_1 و X_2 مستقلين ومتطابقين في

التوزيع ولهما دالة توزيع مشتركة F، فإن التقاف F مع نفسها (F^{*2}) تمثل مربع الألتفاف وباستعمال

تكامل Lebesgue-Stieltjes

$$P_r(X_1 + X_2 \leq x) = F^{*2}(x) = \int_0^x F(x-y) dF(y) \quad \dots (2.19)$$

مع ملاحظة انه يمكن كتابة الألتفاف النوني n-fold convolution عن طريق الاستقراء او

الاستنتاج الرياضي mathematical induction بواسطة القاعدة :

$$F^{*n}(x) = \int_0^x F(x-y) dF^{*(n-1)}(y) \quad \dots (2.10)$$

وهذا يعني ان F المعرفة على خط الأعداد الموجب هي sub-exponential بشرط أن :

$$\overline{F^{*2}}(x) \sim 2\overline{F}(x), \text{ as } x \rightarrow \infty \quad \dots (2.11)$$

وهذا يعني ضمناً انه ولأي $n \geq 1$ سيكون:

$$\overline{F^{*n}}(x) \sim n\overline{F}(x), \text{ as } x \rightarrow \infty \quad \dots (2.12)$$

2.7.2.2 التوزيعات ذات الذيل الخفيف The Light-Tailed Distributions

يقال عن المتغير العشوائي X (او دالة توزيعه) بأنه ذي ذيل خفيف اذا لم يكن ثقيلًا بمعنى أنه

أذا وجد على الأقل $\phi > 0$ بإذ أن :

$$P_r(X > x) \leq e^{-\phi x}, \text{ for large enough } x \quad \dots (2.13)$$

والتعريف المذكور أنفاً يبين أن ذيل التوزيع لـ X تكون محددة من اعلى تقاربياً من قبل التوزيع

الأسّي بمعنى اخر أن ذيل التوزيع يضمحل (يتضاءل) نحو الصفر اسياً او أسرع من التوزيع الأسّي.

كما يمكن إعادة كتابة التعريف أنفاً بدلالة الدالة المولدة للعزوم:

$$E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} dF(x) < \infty, \forall t > 0 \quad \dots (2.14)$$

3.2 توزيعات وقت الفشل المعلمية الأساسية

Distributions of The Principal Parametric Lifetime

ان عملية الحصول على توزيع وقت الحياة (او ما يسمى بزمن الفشل) الجديد بمقترحيه

الأول والثاني في هذا البحث سيتم أجزائها بالاعتماد على استعمال توزيعات وقت الفشل المعلمية وهي

بشكل عام (ليندلي - رايلي - متسلسلة القوى) والتي تُعد توزيعات أساسية في بناء التوزيع الجديد وكلّ

حسب معلماته ، لذا من الضروري اعطاء فكرة مختصرة عن كل توزيع اساسي مع ذكر اهم خصائصه

الإحصائية والرياضية، وهذا ما تناولته المباحث الفرعية الآتية.

1.3.2 توزيع ليندلي Lindley Distribution

في عام (1958) قدم توزيع Lindley (Ghitany & et al., 2008,23) في اطار التحليل

البيزي كإنموذج ومثالٍ مضادٍ للتحليل الاحصائي الائتماني (Akber & et al.,2018,4,p.89) ،

ويعتبر من التوزيعات التي يمكنها وصف زمن الفشل لاي عملية سواء أكانت في مجالات الهندسة ام

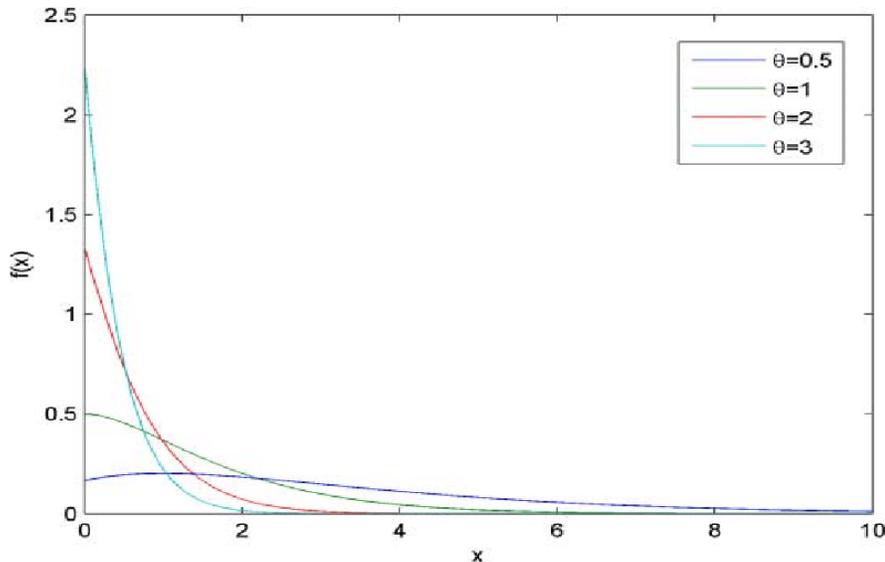
الطب ام البايولوجي، ويعد هذا التوزيع من التوزيعات التي تمتلك ذيلًا نحيفاً بسبب تناقصه اسياً كلما

زادت قيم X ، وأدناه جدول يوضح اهم الخصائص الاحصائية والاحتمالية لتوزيع Lindley. فضلاً عن الشكل البياني الذي يوضح دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الاحتمالي pdf .

(Sandeep & et al.,2020,42,p.366) و (Bakouch&.et al.,2012,9,p.77)

جدول (2-2) يبين بعض خصائص توزيع ليندلي Lindley

Support	$x \in [0, \infty)$
PDF	$\frac{\theta^2}{1 + \theta} (1 + x)e^{-\theta x}, \theta > 0$
CDF	$1 - \left[1 + \frac{\theta x}{1 + \theta}\right] e^{-\theta x}$
Skewness	$\frac{2(\theta^3 + 6\theta^2 + 6\theta + 2)}{(\theta^2 + 4\theta + 2)^{3/2}}$
Kurtosis	$\frac{3(3\theta^4 + 24\theta^3 + 44\theta^2 + 32\theta + 8)}{(\theta^2 + 4\theta + 2)^2}$
Reliability	$1 - F(X) = \left[1 + \frac{\theta x}{1 + \theta}\right] e^{-\theta x}$
Hazard Rate	$\frac{\theta^2(1 + x)}{1 + \theta(1 + x)}$



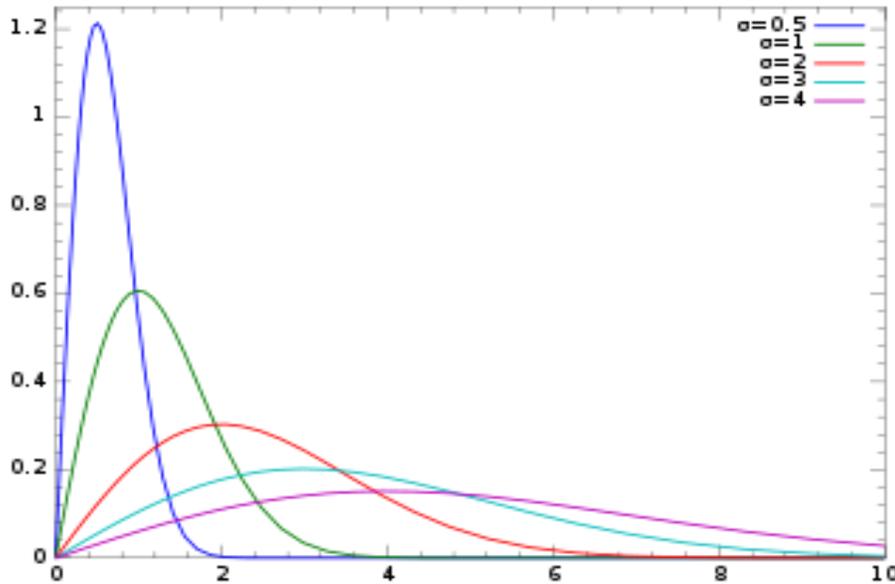
شكل (1-2) يبين دالة الكثافة الاحتمالية pdf لتوزيع ليندلي Lindley

2.3.2 توزيع رايلي Rayleigh Distribution

قدم Rayleigh توزيعه عام 1880 كحالة خاصة من توزيع Weibull كذلك يمكن عدّه حالة خاصة من توزيع χ^2 بدرجة حرية 2، ان هذا التوزيع يلعب دوراً كبيراً في نمذجة وتحليل بيانات زمن الفشل والمستعملة في تحليل البقاء والمعولية، ونظرية الاتصال، وعلم حركة المقذوفات والبحوث الطبية. والجدول الآتي يتضمن بعضاً من اهم خصائص توزيع Rayleigh الاحصائية مع شكل pdf (Afaq&et al.,2014,2) و (Merovci&et al.,2015,36).

جدول (2-3) يبين بعض خصائص توزيع رايلي Rayleigh

Support	$x \in [0, \infty)$
PDF	$\frac{x}{\alpha^2} e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}}, \alpha > 0(\text{scale parameter})$
CDF=F	$1 - e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}}$
Skewness	$\frac{2\sqrt{\pi} (\pi - 3)}{(4 - \pi)^{3/2}}$
EX-Kurtosis	$\frac{6\pi^2 - 24\pi + 16}{(4 - \pi)^2}$



شكل (2-2) يبين دالة الكثافة الاحتمالية pdf لتوزيع رايلي ($\sigma = \alpha$)

3.3.2 توزيعات متسلسلة القوى The Power Series Distributions

أن توزيعات متسلسلة القوى هي توزيعات متقطعة معرفة على \mathbb{N} (او على مجموعة جزئية منها) و تنشأ من متسلسلة القوى.

أن فئة هذه التوزيعات هي غاية في الأهمية بسبب أن اغلب التوزيعات الاحتمالية المتقطعة هي عبارة عن توزيعات متسلسلة القوى والتعريف الآتي يمثل التعريف الرياضي لمتسلسلة القوى مع عرض لبعض توزيعاتها (Rashid&et al.,2018,39) و (Rodrigo & et al.,2013.40):

تعريف (3.2) نفترض أن $a = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ تمثل متتابعة من الأعداد الحقيقية غير السالبة nonnegative وان a هي متتابعة المعاملات في متسلسلة القوى ، وإذا كان المجموع الجزئي The partial sum نو الرتبة $n \in \mathbb{N}$ يعطى وفق الصيغة :

$$g_n(\theta) = \sum_{k=0}^n a_k \theta^k , \quad \theta \in \mathbb{R} \quad \dots (2.15)$$

فأن متسلسلة القوى g تعرف على اساس انها $g(\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(\theta), \theta \in \mathbb{R}$ وبشرط ان

الغاية موجودة، إذ يشار اليها:

$$g(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \theta^n \quad (2.16)$$

مع ملاحظة ان المتسلسلة تتقارب عندما $\theta = 0$ وان $g(0) = a_0$ ، وبخلاف هذه الحالة التافهة trivial case فإننا نستذكر انه يوجد على الأقل $r \in [0, \infty)$ بإذ أن المتسلسلة تكون متقاربة مطلقاً لكل $-r < \theta < r$ وتكون متباعدة لكل $\theta > r$ او $\theta < -r$ ، وان العدد r يسمى بنصف قطر التقارب. ومن الان فصاعداً سنفترض ان $r > 0$. اذا كانت $r < \infty$ ، فان المتسلسلة ربما تتقارب (مطلقاً) او تتباعد الى ∞ عند نقطة النهاية r . وعند $-r$ فان المتسلسلة ربما تتقارب مطلقاً او تتقارب شرطاً او تتباعد.

تعريف (4.2) ان الشكل العام لتوزيعات متسلسلة القوى يعتمد على ان نجعل θ مقيدة على الفترة $[0, r)$ وهذه الفترة تمثل فضاء المعلمة. وعلى فرض ان N متغيراً عشوائياً يأخذ قيماً في \mathbb{N} ، فان N ستتبع توزيع متسلسلة القوى مقترناً بالدالة g (او بشكل مكافئ مقترناً بالمتتابعة a) وبالمعلمة $\theta \in [0, r)$ اذا امتلكت N الدالة الاحتمالية f_θ والمعطاة بالشكل الآتي :

$$f_\theta(n) = \frac{a_n \theta^n}{g(\theta)} , n \in \mathbb{N} \quad (2.17)$$

ولأثبت ان f_θ تكون صالحة للدالة الاحتمالية من النوع المنقطع، نلاحظ ان $a_n \theta^n$ هي غير سالبة لكل $n \in \mathbb{N}$ ، وبالتعريف ستمثل $g(\theta)$ الثابت العياري normalizing constant للمتتابعة $(a_n \theta^n ; n \in \mathbb{N})$. مع ملاحظة انه عندما $\theta = 0$ فان التوزيع ببساطة سيمثل توزيع الكتلة النقطي عند 0 بمعنى $f_0(0) = 1$ ، اما دالة التوزيع التراكمية F_θ فانها تعطى وفق الصيغة:

$$F_\theta(n) = \frac{g_n(\theta)}{g(\theta)}, n \in \mathbb{N} \quad \dots (2.18)$$

ويمكن اثباتها مباشرة من تعريف cdf اي ان $F_\theta(n) = \sum_{k=0}^n f_\theta(k)$ لكل $n \in \mathbb{N}$.
والجدير بالذكر ان كلاً من f_θ و F_θ و المجاميع الجزئية تكون اكثر فائدةً عندما تعطى متسلسلة القوى بالشكل او الصيغة المغلقة closed form .
وفيما يلي نذكر بعض اهم التوزيعات الخاصة لمتسلسلة القوى :

(i) توزيع بواسون Poisson Distribution: يُعد توزيع بواسون بمعلمة المعدل $\lambda \in [0, \infty)$ من توزيعات متسلسلة القوى نسبة للدالة $g(\lambda) = e^\lambda, \forall \lambda \in [0, \infty)$ وبتعويضها بصيغة الشكل العام واختيار $a_n = \frac{1}{n!}$

(ii) التوزيع الهندسي The Geometric Distribution: ان التوزيع الهندسي والمعروف على \mathbb{N} بمعلمة حالة النجاح $p \in (0,1]$ هو احد توزيعات متسلسلة القوى نسبة للدالة التي يجب ان تأخذ الشكل التالي $g(\theta) = 1/(1 - \theta), \theta \in [0,1)$ إذ أن $\theta = 1 - p$ وعليه فان pmf للتوزيع الهندسي سيكون :

$$f(n) = (1 - p)^n p = (1 - \theta) \theta^n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \dots (2.19)$$

(iii) توزيع ثنائي الحدين The Binomial Distribution : ان توزيع ثنائي الحدين بمعلمة المحاولة $n \in \mathbb{N}$ ومعلمة النجاح $p \in [0,1)$ ينتمي الى توزيعات متسلسلة القوى نسبة للدالة $g(\theta) = (1 + \theta)^n, \forall \theta \in [0, \infty)$ إذ أن $\theta = p/(1 - p)$ ، ويمكن اثبات ذلك :

$$f(k) = C_k^n p^k (1 - p)^{n-k} = (1 - p)^n C_k^n \left(\frac{p}{1 - p} \right)^k \\ = \frac{1}{(1 + \theta)^n} C_k^n \theta^k, k \in \{0,1, \dots, n\} \quad \dots (2.20)$$

(iv) توزيع ثنائي الحدين السالب The Negative Binomial Distribution: ان توزيع ثنائي الحدين السالب والمعروف على \mathbb{N} بمعلمة التوقف $k \in (0, \infty)$ ومعلمة النجاح $p \in (0,1]$ هو من

ضمن توزيعات متسلسلة القوى نسبة للدالة $g(\theta) = 1 / (1 - \theta)^k$, $\theta \in [0,1)$ إذ أن $\theta = 1 - p$ ويمكن بيان ذلك عن طريق تعريف pmf:

$$f(n) = C_{k-1}^{n+k-1} p^k (1 - p)^n = (1 - \theta)^k C_{k-1}^{n+k-1} \theta^n, \forall n \in \mathbb{N} \quad \dots (2.21)$$

(v) التوزيع اللوغاريتمي The Logarithmic Distribution: ينتمي التوزيع اللوغاريتمي ذو المعلمة $p \in [0,1)$ الى توزيعات متسلسلة القوى ايضا نسبة للدالة التي ستمثل الثابت العياري $g(p) = -\ln(1 - p)$, $\forall p \in [0,1)$ ويمكن ان نثبت ذلك عن طريق التعريف مباشرة:

$$f(n) = \frac{1}{-\ln(1-p)} \frac{1}{n} p^n, \forall n \in \mathbb{N} \quad \dots (2.22)$$

4.2 توزيع جديد لوقت الحياة ليندلي - رايلي المقطوع

A New Lifetime Distribution Slash Lindley- Rayleigh (SLR)

يظهر لدينا توزيع ليندلي - رايلي المقطوع (المقترح الأول) كامتداد لتوزيع ليندلي - رايلي ويتم الحصول عليه من حاصل قسمة (نسبة) متغيرين عشوائيين مستقلين، وبشكل اكثر تحديداً من قسمة توزيع ليندلي - رايلي (البسط) على التوزيع المنتظم المرفوع الى قوة او اس معين (المقام). في الآونة الاخيرة قدم كل من (Cakmakyapan and Ozel, 2017,14) عائلة من توزيعات Lindley-G والتي نحصل عليها باستعمال التكامل لدالة الكثافة الاحتمالية المناظرة لتوزيع Lindley وبشكل اكثر وضوحاً نقول ان المتغير العشوائي X يمتلك توزيع Lindley-G (LG) اذا كانت دالة التوزيع التراكمي (CDF) معطاة بالشكل:

$$F_{LG}(x; \theta, v) = \int_0^{-\ln(1-G(x,v))} \frac{\theta^2}{1+\theta} (1+t) \exp(-\theta t) dt \quad \dots (2.23)$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{\theta}{1+\theta} \ln[1 - G(x, v)]\right) [1 - G(x, v)]^\theta \quad \dots (2.24)$$

قبل البدء بإيجاد الصيغة الاحتمالية pdf لتوزيع ليندلي - رايلي المقطوع سوف نقوم بأثبات الصيغة (2.24) فضلاً عن ايجاد pdf المناظرة لها وكما يأتي:

ان الشكل العام لتوزيع Lindley-G للمتغير العشوائي X هو الذي يمتلك CDF معطاة بالصيغة أدناه إذ أن G يشير الى Generator او التوزيع المولد المناظر لتوزيع Lindley:

$$F_{LG}(x; \theta, v) = \int_0^{-\ln(1-G(x,v))} \frac{\theta^2}{1+\theta} (1+t) \exp(-\theta t) dt$$

$$= \frac{\theta^2}{1+\theta} \left[\int_0^{-\ln(1-G(x,v))} e^{-\theta t} dt + \int_0^{-\ln(1-G(x,v))} t e^{-\theta t} dt \right] \dots (2.25)$$

بالنسبة الى تكامل الحد الاول سيكون

$$\begin{aligned} \int_0^{-\ln(1-G(x,v))} e^{-\theta t} dt &= -\frac{1}{\theta} e^{-\theta t} \Big|_0^{-\ln(1-G(x,v))} \\ &= \frac{1}{\theta} (1 - (1-G)^\theta) \end{aligned} \dots (2.26)$$

اما بالنسبة الى تكامل الحد الثاني فيمكن ايجاده باستعمال طريقة التكامل بالتجزئة وكما يأتي:

$$\text{let } dv = e^{-\theta t}, u = t$$

$$v = -\frac{1}{\theta} e^{-\theta t}, du = dt$$

$$\begin{aligned} \int_0^{-\ln(1-G(x,v))} t e^{-\theta t} dt &= -\frac{1}{\theta} t e^{-\theta t} \Big|_0^{-\ln(1-G(x,v))} + \frac{1}{\theta} \int_0^{-\ln(1-G(x,v))} e^{-\theta t} dt \\ &= \frac{1}{\theta} \ln(1-G(x,v)) (1-G(x,v))^\theta + \frac{1}{\theta^2} [1 - (1-G(x,v))^\theta] \\ &= \frac{1}{\theta^2} [1 - (1-G)^\theta (1 - \theta \ln(1-G))] \end{aligned} \dots (2.27)$$

بوضع (2.26) و (2.27) في العلاقة (2.25) نحصل على:

$$\begin{aligned} &= \frac{\theta^2}{1+\theta} \left[\frac{1}{\theta} (1 - (1-G)^\theta) + \frac{1}{\theta^2} [1 - (1-G)^\theta (1 - \theta \ln(1-G))] \right] \\ &= \frac{1}{1+\theta} [1 + \theta - (1-G)^\theta (1 - \theta \ln(1-G) + \theta)] \end{aligned}$$

وبعد أخذ القواسم المشتركة نحصل على الصيغة (2.24) المطلوب اثباتها:

$$F_{LG}(x; \theta, v) = 1 - \left[1 - \frac{\theta}{1+\theta} \ln(1-G(x,v)) \right] (1-G(x,v))^\theta$$

وبمفاضلة دالة التوزيع F_{LG} نحصل على pdf للمتغير العشوائي X :

$$f_{LG}(x; \theta, v) = - \left\{ \begin{aligned} &\left[1 - \frac{\theta}{1+\theta} \ln(1-G) \right] \theta (1-G)^{\theta-1} (-g) \\ &+ (1-G)^\theta \left(-\frac{\theta}{1+\theta} \frac{-g}{1-G} \right) \end{aligned} \right\} \dots (2.28)$$

وبالتبسيط واخذ القواسم المشتركة :

$$= - \left\{ \left[1 - \frac{\theta}{1+\theta} \ln(1-G) \right] \theta - \frac{\theta}{1+\theta} \right\} (-g)(1-G)^{\theta-1} \quad \dots (2.29)$$

$$= g \left[\frac{\theta^2}{1+\theta} - \frac{\theta^2}{1+\theta} \ln(1-G) \right] (1-G)^{\theta-1} \quad \dots (2.30)$$

$$f_{LG}(x; \theta, v) = \frac{\theta^2}{1+\theta} g(x, v) [1 - \ln(1 - G(x, v))] [1 - G(x, v)]^{\theta-1} \quad \dots (2.31)$$

إذ أن $G(x, v)$ تمثل CDF للتوزيع الاساسي و ان $g(x, v)$ تشير الى pdf للتوزيع الاساسي وتشير v الى متجه معلمات التوزيع لـ G . وكحالة خاصة اذا كانت G تمثل cdf لتوزيع رايلي بالمعلمة α في المعادلة (2.24) فان دالة الكثافة في العلاقة (2.31) ستمثل عائلة من توزيعات (Lindley – Rayleigh) بمعنى ان المتغير العشوائي X سيتبع توزيع LR كما مبين في الصيغة الآتية:

$$X \sim LR(\alpha, \theta)$$

$$f_X(x; \theta, \alpha) = \frac{\theta^2}{\alpha^2(1+\theta)} x \left[1 + \frac{x^2}{2\alpha^2} \right] e^{-\theta \left(\frac{x^2}{2\alpha^2} \right)}, \quad x > 0 \quad \dots (2.32)$$

إذ أن $\alpha > 0$ تمثل معلمة القياس، $\theta > 0$ تمثل معلمة الشكل كذلك يمكن اثبات ان الدالة المعطاة في (2.32) هي pdf وكما يأتي:

ان $f(x)$ في العلاقة (2.32) التي تمثل pdf لتوزيع LR تم الحصول عليها بتطبيق العلاقة (2.31) المثبتة انفاً وذلك عندما تمثل $G(x, v)$ دالة التوزيع التراكمية cdf للتوزيع الاساسي Rayleigh ومن ثم فان $g(x, v)$ تمثل pdf له:

$$X \sim Ray(\alpha) \rightarrow g(x, \alpha) = \frac{x}{\alpha^2} e^{-x^2/2\alpha^2}, \quad \alpha > 0$$

$$\rightarrow G(x, \alpha) = 1 - e^{-x^2/2\alpha^2}$$

وبالتعويض في العلاقة (2.31):

$$f_{LR}(x; \theta, \alpha) = \frac{\theta^2}{(1+\theta)} \left(\frac{x}{\alpha^2} \right) e^{-x^2/2\alpha^2} \left[1 - \ln e^{-x^2/2\alpha^2} \right] \left[e^{-x^2/2\alpha^2} \right]^{\theta-1} \quad \dots (2.33)$$

$$= \frac{\theta^2}{\alpha^2(1+\theta)} x e^{-x^2/2\alpha^2} \left[1 + \frac{x^2}{2\alpha^2} \right] \left[e^{-(\theta-1)(x^2/2\alpha^2)} \right] \quad \dots (2.34)$$

$$f_{LR}(x; \theta, \alpha) = \frac{\theta^2}{(1+\theta)} \frac{x}{\alpha^2} \left[1 + \frac{x^2}{2\alpha^2} \right] \left[e^{-\theta(x^2/2\alpha^2)} \right]$$

والعلاقة الأخيرة تمثل pdf لتوزيع LR المعطى في (2.32) ولإثبات ان $f_{LR}(x; \theta, \alpha)$ هي pdf:

$$\frac{\theta^2}{(1+\theta)} \left[\int_0^{\infty} \frac{x}{\alpha^2} e^{-\theta(x^2/2\alpha^2)} dx + \int_0^{\infty} \frac{x}{\alpha^2} \left(\frac{x^2}{2\alpha^2} \right) e^{-\theta(x^2/2\alpha^2)} dx \right] \quad \dots (2.35)$$

بالنسبة لتكامل الحد الاول سنرمز له بالرمز I :

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x}{\alpha^2} e^{-\theta(x^2/2\alpha^2)} dx = -\frac{1}{\theta} e^{-\theta(x^2/2\alpha^2)} = 0 + \frac{1}{\theta} = \frac{1}{\theta} \quad \dots (2.36)$$

اما تكامل الحد الثاني والذي سنرمز له بالرمز II فسوف نستعمل طريقة التكامل بالتجزئة:

$$II = \int_0^{\infty} \frac{x}{\alpha^2} \left(\frac{x^2}{2\alpha^2} \right) e^{-\theta(x^2/2\alpha^2)} dx$$

let $u = \frac{x^2}{2\alpha^2}$	$dv = \frac{x}{\alpha^2} e^{-\theta(x^2/2\alpha^2)}$
$du = \frac{x}{\alpha^2} dx$	$v = -\frac{1}{\theta} e^{-\theta(x^2/2\alpha^2)}$

$$\begin{aligned} II &= -\frac{1}{\theta} \frac{x^2}{2\alpha^2} e^{-\theta(x^2/2\alpha^2)} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{\theta} \int_0^{\infty} \frac{x}{\alpha^2} e^{-\theta(x^2/2\alpha^2)} dx \\ &= (0 + 0) + \frac{1}{\theta} \left(\frac{1}{\theta} \right) = \frac{1}{\theta^2} \quad \dots (2.37) \end{aligned}$$

بالتعويض عن (2.36) و (2.37) في (2.35) ينتج ان:

$$\int_0^{\infty} f_{LR}(x; \theta, \alpha) dx = \frac{\theta^2}{(1+\theta)} \left[\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \right] = \frac{\theta^2}{(1+\theta)} \frac{1+\theta}{\theta^2} = 1$$

وبذلك نكون قد اثبتنا ان توزيع LR هو pdf .

ان توزيع ليندلي - رايلي قد تم اقتراحه في الاساس لزيادة مرونة توزيع ليندلي وذلك بإضافة معلمة واحدة بعد أن توزيع رايلي هو التوزيع الاساسي ولكن اذا نظرنا الى مخطط pdf لتوزيع ليندلي - رايلي LR نجد ان ذيل (Tail) منحنى التوزيع الاحتمالي من جهة اليمين ليس ثقيلاً بما يكفي ليتوافق او يستوعب قيم البيانات ذات معامل تفرطح (تسطح) عالٍ (High Kurtosis) وكذلك ان يتوافق ويتكيف مع القيم الشاذة (Outliers) وهنا نقدم توزيع احتمالي يُعد امتداداً لتوزيع LR والذي سنسميه توزيع ليندلي - رايلي المقطوع Slash Lindley-Rayleigh (SLR) والذي ينتج عن حاصل

القسمه بين متغيرين عشوائيين مستقلين إذ أن المتغير العشوائي في البسط يمثل توزيع LR اما المتغير العشوائي في المقام فانه يمثل التوزيع المنتظم ذا القوة (الاس) (Power of a Uniform) وسيكون التوزيع الاحتمالي الناتج (SLR) بديلاً جيداً عن توزيع LR بالنسبة الى البيانات التي تظهر تقرطحاً او تسطحاً عالياً. ومن المهم ان نذكر هنا بان عملية الحصول على التوزيع الاحتمالي (SLR) ستتم بطريقة مشابهة لتلك التي استعمالها كل من (Gomez and Venegas,25) و (Gomes et al., 2007, 24) إذ اشتقوا التوزيع البيضوي المقطوع (Slash-elliptical) من حاصل قسمه متغيرين عشوائيين مستقلين إذ متغير البسط هو التوزيع البيضوي ومتغير المقام هو التوزيع المنتظم ذو القوة (الأس) والذي ينتج عنه توزيع ذو ذيل اثل من التوزيع الطبيعي والتوزيع البيضوي. ان الفائدة او الميزة الاساسية من اتباع هذا الاجراء هو ان بعض التوزيعات الاحتمالية المتماثلة يمكن تعديلها وتحسينها بسهولة لتدعم الزيادة في معامل التقرطح Kurtosis. وفيما يأتي نستعرض دالة الكثافة الاحتمالية pdf ودالة التوزيع التراكمية cdf لتوزيع (SLR) وكذلك اهم الخصائص الاحصائية والرياضية عن طريق تقديم بعض التعاريف والقضايا المقترحة والنتائج مع الاثبات.

تعريف 2-5 ليكن X متغيراً عشوائياً يتبع توزيع $LR(\alpha, \theta)$ والمعرف بالعلاقة (2.47)، وليكن U متغيراً عشوائياً يتبع توزيعاً منتظماً ومعرفاً على الفترة $(0,1)$ فيقال بان المتغير العشوائي Y يمتلك توزيع SLR ومعرفاً بالشكل $SLR(\alpha, \theta, q)$ بإذ أن Y هو عبارة عن:

$$Y = \frac{X}{U^{1/q}}, \quad q > 0 \quad \dots (2.38)$$

إذ أن U, X مستقلان .

القضية المقترحة (1.2): اشتقاق الصيغة الاولى pdf للمقترح الاول SLR

ليكن Y يتبع توزيع $SLR(\alpha, \theta, q)$ ، فأن pdf له تعطى بالشكل:

$$f_Y(y; \alpha, \theta, q) = \frac{\theta^2}{\alpha^2(1+\theta)} y \int_0^1 t^{2/q} \left[1 + \frac{y^2 t^{2/q}}{2\alpha^2} \right] \exp \left[-\theta \left(\frac{y^2 t^{2/q}}{2\alpha^2} \right) \right] dt \dots (2.39)$$

إذ أن $\alpha > 0$ هي معلمة القياس و $\theta > 0$ هي معلمة الشكل للتوزيع وان $q > 0$ تمثل معلمة

التقرطح Kurtosis Parameter .

الأثبات: يمكن ايجاد توزيع المتغير العشوائي Y باستعمال طريقة تحويل المتغيرات

$$Y = \frac{X}{U^{1/q}} \quad \text{Transformation of Variables} \quad \text{إذ أن:}$$

وان $X \sim LR(\alpha, \theta)$ و $U \sim (0,1)$ وكلاهما مستقلان، ودالة الكثافة المشتركة j.p.d.f لهما هي

$$\therefore f(x, u) = \begin{cases} \frac{\theta^2}{(1+\theta)} \left(\frac{x}{\alpha^2}\right) \left[1 + \frac{x^2}{2\alpha^2}\right] \exp\left[-\theta\left(\frac{x^2}{2\alpha^2}\right)\right] & \dots (2.40) \\ 0 & o/w \end{cases}$$

إذ أن $x > 0$, $0 < u < 1$

$$\text{let } Y = \frac{X}{U^{1/q}} \quad \& \quad T = U \quad , \text{ or}$$

$$\begin{aligned} Y = XU^{-1/q} & \rightarrow X = YU^{1/q} \rightarrow X = YT^{1/q} \\ T = U & \rightarrow U = T \rightarrow U = T \end{aligned}$$

وبحساب قيمة *Jacobian* إذ أن :

$$\|J\| = \left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial t} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} t^{1/q} & y \frac{1}{q} t^{\frac{1}{q}-1} \\ 0 & 1 \end{array} \right\| = t^{1/q} \quad \dots (2.41)$$

$$\therefore f(y, t) = \frac{\theta^2}{(1+\theta)\alpha^2} y t^{1/q} \left[1 + \frac{y^2 t^{2/q}}{2\alpha^2}\right] e^{-\theta\left(\frac{y^2 t^{2/q}}{2\alpha^2}\right)} \cdot t^{1/q} \quad \dots (2.42)$$

where , $y > 0$, $0 < t < 1$

وبتكامل الدالة الاحتمالية المشتركة نسبة الى المتغير T نحصل على الدالة الاحتمالية الهامشية

للمتغير العشوائي Y التي تمثل دالة الكثافة الاحتمالية pdf للمتغير Y

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_0^1 f(y, t) dt \\ &= \frac{\theta^2}{\alpha^2(1+\theta)} y \int_0^1 t^{1/q} \left[1 + \frac{y^2 t^{2/q}}{2\alpha^2}\right] e^{-\theta\left(\frac{y^2 t^{2/q}}{2\alpha^2}\right)} \cdot t^{1/q} dt \quad \dots (2.43) \end{aligned}$$

$$f_Y(y, \alpha, \theta, q) = \frac{\theta^2}{\alpha^2(1+\theta)} y \int_0^1 t^{2/q} \left[1 + \frac{y^2 t^{2/q}}{2\alpha^2}\right] e^{-\theta\left(\frac{y^2 t^{2/q}}{2\alpha^2}\right)} dt , y > 0$$

نتيجة (1.2): اشتقاق الصيغة الثانية pdf للمقترح الاول SLR

ليكن Y يتبع توزيع $SLR(\alpha, \theta, q)$ فان:

$$f_Y(y; \alpha, \theta, q) = \frac{q(2\alpha^2)^{q/2}}{(1+\theta)\theta^{q/2}y^{q+1}} \left[\theta \gamma\left(\frac{q}{2} + 1, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right) + \gamma\left(\frac{q}{2} + 2, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right) \right] , y > 0 \quad \dots (2.44)$$

Lower Incomplete Gamma γ تشير الى دالة Gamma غير الكاملة الدنيا Function والمعروفة بالشكل العام الآتي:

$$\gamma(s, z) = \int_0^z t^{s-1} e^{-t} dt \quad \dots (2.44a)$$

اما الشكل العام لدالة كما غير الكاملة العليا (Upper Incomplete Gamma Function) فتعطى بالصيغة الآتية:

$$\Gamma(s, z) = \int_z^\infty t^{s-1} e^{-t} dt \quad \dots (2.44b)$$

الأثبات: بأجراء عملية التكامل في المعادلة رقم (2.39) :

$$f_Y(y; \alpha, \theta, q) = \frac{\theta^2}{\alpha^2(1+\theta)} y \int_0^1 t^{2/q} \left[1 + \frac{y^2 t^{2/q}}{2\alpha^2} \right] e^{-\theta \left(\frac{y^2 t^{2/q}}{2\alpha^2} \right)} dt$$

$$\text{let } w = \frac{\theta y^2 t^{2/q}}{2\alpha^2} \rightarrow t^{2/q} = \frac{2\alpha^2}{\theta y^2} w$$

$$t = \left(\frac{2\alpha^2}{\theta y^2} \right)^{q/2} w^{q/2} \rightarrow dt = \left(\frac{2\alpha^2}{\theta y^2} \right)^{q/2} \frac{q}{2} w^{q/2-1} dw$$

$$f_Y(y; \alpha, \theta, q) = \frac{\theta^2}{\alpha^2(1+\theta)} y \int_0^{\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}} \left(\frac{2\alpha^2}{\theta y^2} \right) w \left[1 + \frac{w}{\theta} \right] e^{-w} \left(\frac{2\alpha^2}{\theta y^2} \right)^{q/2} \frac{q}{2} w^{q/2-1} dw \quad \dots (2.45)$$

$$= \frac{q(2\alpha^2)^{q/2}}{(1+\theta)\theta^{q/2-1}y^{q+1}} \left[\int_0^{\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}} w^{q/2} e^{-w} dw + \frac{1}{\theta} \int_0^{\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}} w^{q/2+1} e^{-w} dw \right] \quad \dots (2.45a)$$

وباستعمال دالة كما المنقوصة (غير الكاملة) الدنيا والمعروفة بالمعادلة (2.44a) نحصل على:

$$f_Y(y; \alpha, \theta, q) = \frac{q(2\alpha^2)^{q/2}}{(1+\theta)\theta^{q/2}y^{q+1}} \left[\theta \gamma \left(\frac{q}{2} + 1, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2} \right) + \gamma \left(\frac{q}{2} + 2, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2} \right) \right]$$

نتيجة (2.2): اشتقاق الصيغة الثالثة pdf للمقترح الاول SLR

إذا كان Y متغيراً عشوائياً يتبع توزيع $SLR(\alpha, \theta, q)$ فان:

$$f_Y(y; \alpha, \theta, q) = \frac{q^2(2\alpha^2)^{q/2}}{2(1+\theta)\theta^{q/2}y^{q+1}} \left(1 + \theta + \frac{q}{2} \right) \left[\Gamma \left(\frac{q}{2} \right) - \Gamma \left(\frac{q}{2}, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2} \right) \right] - \frac{q}{(1+\theta)y} \left[1 + \theta + \frac{q}{2} + \frac{\theta y^2}{2\alpha^2} \right] \exp \left[-\frac{\theta y^2}{2\alpha^2} \right], y > 0 \quad \dots (2.46)$$

الأثبات: لأثبات هذه النتيجة نستعرض بعض الخصائص والعلاقات المتعلقة بدالة كاما ودالتي كاما غير الكاملة العليا والدنيا (Chaudhry & et al., 1994,16):

$$1. \Gamma(a + 1) = a\Gamma(a) \quad \dots (2.46a)$$

$$2. \gamma(a, z) = \Gamma(a) - \Gamma(a, z), \quad a \neq 0, -1, -2, \dots \quad \dots (2.46b)$$

$$3. \Gamma(a + 1, z) = a\Gamma(a, z) + z^a e^{-z} \quad \dots (2.46c)$$

وان الخاصية (3) والمعطاة في (2.46c) مهمة جداً لذا سيتم اثباتها وكما يأتي:

بأجراء عملية التفاضل للطرفين بالنسبة الى z

$$\frac{d}{dz} (z^a e^{-z}) = -z^a e^{-z} + a z^{a-1} e^{-z} \quad \dots (2.46d)$$

ثم نجري عملية التكامل للطرفين للطرفين من z الى ∞ لنحصل على :

$$\int \frac{d}{dz} (z^a e^{-z}) dz = a \int_z^{\infty} z^{a-1} e^{-z} dz - \int_z^{\infty} z^a e^{-z} dz$$

وذلك باستعمال مفهوم dummy variable

$$z^a e^{-z} = a\Gamma(a, z) - \Gamma(a + 1, z) \quad \dots (2.46e)$$

$$\therefore \Gamma(a + 1, z) = a\Gamma(a, z) + z^a e^{-z}$$

كذلك يمكن تعميم هذه العلاقات التكرارية فعلى سبيل المثال :

$$1. \gamma(a + 1, z) = \Gamma(a + 1) - \Gamma(a + 1, z) \quad \dots (2.47)$$

$$2. \gamma(a + 2, z) = \Gamma(a + 2) - \Gamma(a + 2, z) \quad \dots (2.48)$$

$$3. \Gamma(a + 2, z) = (a + 1)\Gamma(a + 1, z) + z^{a+1} e^{-z} \quad \dots (2.49)$$

والعلاقات المذكورة أنفاً سنستفيد منها في اثبات النتيجة (2.2) وكما يأتي:

بالرجوع الى النتيجة (1.2) فانه لدينا

$$\begin{aligned} \gamma\left(\frac{q}{2} + 1, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right) &= \Gamma\left(\frac{q}{2} + 1\right) - \Gamma\left(\frac{q}{2} + 1, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right) = \frac{q}{2} \Gamma\left(\frac{q}{2}\right) - \left(\frac{q}{2} \Gamma\left(\frac{q}{2}, z\right) + z^{\frac{q}{2}} e^{-z}\right) \\ &= \frac{q}{2} \left(\Gamma\left(\frac{q}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{q}{2}, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right)\right) - \left(\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right)^{\frac{q}{2}} e^{-\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}} \end{aligned}$$

فقد استعمالنا هنا $a = \frac{q}{2}$, $z = \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}$

$$\therefore \gamma\left(\frac{q}{2} + 1, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right) = \frac{q}{2} \left(\Gamma\left(\frac{q}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{q}{2}, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right)\right) - \frac{\theta^{\frac{q}{2}} y^{\frac{q}{2}}}{(2\alpha^2)^{\frac{q}{2}}} e^{-\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}} \quad \dots (2.50)$$

كذلك لدينا:

$$\begin{aligned} \gamma\left(\frac{q}{2} + 2, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right) &= \Gamma\left(\frac{q}{2} + 2\right) - \Gamma\left(\frac{q}{2} + 2, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right) \\ &= \left(\frac{q}{2} + 1\right)\frac{q}{2}\Gamma\left(\frac{q}{2}\right) - \left(\frac{q}{2} + 1\right)\Gamma\left(\frac{q}{2} + 1, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right) - \left(\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right)^{\frac{q}{2}+1} e^{-\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}} \dots (2.51) \end{aligned}$$

وهنا عوضنا عن $a = \frac{q}{2} + 1$ $z = \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}$

$$\begin{aligned} &= \frac{q}{2}\left(\frac{q}{2} + 1\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right) - \left(\frac{q}{2} + 1\right)\left[\frac{q}{2}\Gamma\left(\frac{q}{2}, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right) + \left(\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right)^{\frac{q}{2}} e^{-\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}}\right] \\ &- \frac{\theta^{\frac{q}{2}+1} y^{q+2}}{(2\alpha^2)^{\frac{q}{2}+1}} \cdot e^{-\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}} \dots (2.52) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{q}{2}\left(\frac{q}{2} + 1\right)\left(\Gamma\left(\frac{q}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{q}{2}, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right)\right) - \left(\frac{q}{2} + 1\right)\frac{\theta^{\frac{q}{2}} y^q}{(2\alpha^2)^{\frac{q}{2}}} e^{-\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}} - \frac{\theta^{\frac{q}{2}+1} y^{q+2}}{(2\alpha^2)^{\frac{q}{2}+1}} \cdot e^{-\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}} \\ &\dots (2.53) \end{aligned}$$

وبوضع العلاقتين (2.50) و(2.53) في النتيجة (1.2) اي العلاقة (2.44) نحصل على:

$$\begin{aligned} f_y(y) &= \frac{q(2\alpha^2)^{q/2}}{(1+\theta)\theta^{q/2} y^{q+1}} \left\{ \theta \left[\frac{q}{2} \left(\Gamma\left(\frac{q}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{q}{2}, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right) \right) - \frac{\theta^{q/2} y^q}{(2\alpha^2)^{q/2}} e^{-\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}} \right] + \frac{q}{2} \left(\frac{q}{2} + \right. \right. \\ &1) \left. \left(\Gamma\left(\frac{q}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{q}{2}, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right) \right) - \left(\frac{q}{2} + 1 \right) \frac{\theta^{q/2} y^q}{(2\alpha^2)^{q/2}} e^{-\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}} - \frac{\theta^{q/2+1} y^{q+2}}{(2\alpha^2)^{q/2+1}} \cdot e^{-\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}} \right\} \\ &\dots (2.54) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y(y) &= \frac{q(2\alpha^2)^{q/2}}{(1+\theta)\theta^{q/2} y^{q+1}} \left[\left(1 + \theta + \frac{q}{2} \right) \frac{q}{2} \left(\Gamma\left(\frac{q}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{q}{2}, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right) \right) \right. \\ &\left. - \left(1 + \theta + \frac{q}{2} + \frac{\theta y^2}{2\alpha^2} \right) \frac{\theta^{q/2} y^q}{(2\alpha^2)^{q/2}} e^{-\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}} \right] \dots (2.55) \end{aligned}$$

وبالاختصار والتبسيط نحصل على العلاقة (2.46) وبذلك يكون قد تم اثبات النتيجة (2.2).

$$\begin{aligned} \therefore f_y(y, \alpha, \theta, q) &= \frac{q^2(2\alpha^2)^{q/2}}{2(1+\theta)\theta^{q/2} y^{q+1}} \left(1 + \theta + \frac{q}{2} \right) \left[\Gamma\left(\frac{q}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{q}{2}, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right) \right] \\ &- \frac{q}{(1+\theta)y} \left(1 + \theta + \frac{q}{2} + \frac{\theta y^2}{2\alpha^2} \right) e^{-\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}}, y > 0 \end{aligned}$$

ان سبب تحويل شكل الدالة الاحتمالية من النتيجة (1.2) الى الشكل في النتيجة (2.2) اي كتابتها بدلالة Gamma غير الكاملة العليا بدلاً من كتابتها بدلالة دالة Gamma غير الكاملة الدنيا هو ان اكثر جداول دالة Gamma غير الكاملة مكتوبة بدلالة دالة كاما غير الكاملة العليا اي انها اكثر شيوعاً واستعمالاً.

نتيجة (3.2): اشتقاق صيغة pdf خاصة للمقترح الاول SLR

ليكن $(Y/U=u)$ متغيراً عشوائياً له توزيع $LR(u^{\frac{-2}{q}} \alpha, \theta)$ إذ أن U متغيراً عشوائياً يتوزع توزيعاً منتظماً على الفترة $(0,1)$ فإن $Y \sim SLR(\alpha, \theta, q)$

الاثبات: ان هذه النتيجة لها اهمية خاصة كونها ستستعمل في عملية تقدير معلمات توزيع SLR بطريقة MLE والتي سيأتي ذكرها لاحقاً لذا من المهم ان يتم اثباتها وكما يأتي :

$$if (Y/U = u) \sim LR\left(u^{\frac{-2}{q}} \alpha, \theta\right) \rightarrow$$

$$f_{Y/U}\left(y; u^{\frac{-2}{q}} \alpha, \theta\right) = \frac{\theta^2}{u^{\frac{-2}{q}} \alpha^2 (1+\theta)} y \left[1 + \frac{y^2}{2u^{\frac{-2}{q}} \alpha^2}\right] \exp\left[-\theta \left(\frac{y^2}{2u^{\frac{-2}{q}} \alpha^2}\right)\right] \dots (2.56)$$

$$f_{Y/U}\left(y; u^{\frac{-2}{q}} \alpha, \theta\right) = \frac{\theta^2}{(1+\theta)} \left(\frac{yu^{\frac{2}{q}}}{\alpha^2}\right) \left[1 + \frac{y^2 u^{\frac{2}{q}}}{2\alpha^2}\right] \exp\left[-\theta \left(\frac{y^2 u^{\frac{2}{q}}}{2\alpha^2}\right)\right] \dots (2.56a)$$

$$f_Y(y; \alpha, \theta, q) = \int_0^1 f_{Y/U}\left(y; u^{\frac{-2}{q}} \alpha, \theta\right) f_U(u) du \dots (2.56b)$$

$$f_Y(y; \alpha, \theta, q) = \frac{\theta^2}{\alpha^2 (1+\theta)} y \int_0^1 u^{\frac{2}{q}} \left[1 + \frac{y^2 u^{\frac{2}{q}}}{2\alpha^2}\right] \exp\left[-\theta \left(\frac{y^2 u^{\frac{2}{q}}}{2\alpha^2}\right)\right] du \dots (2.56c)$$

$$f_Y(y; \alpha, \theta, q) = \frac{\theta^2}{\alpha^2 (1+\theta)} y \int_0^1 u^{\frac{2}{q}} \left[1 + \frac{y^2 u^{\frac{2}{q}}}{2\alpha^2}\right] \exp\left[-\theta \left(\frac{y^2 u^{\frac{2}{q}}}{2\alpha^2}\right)\right] du \dots (2.57)$$

فاذا اتبعنا التحويل المستعمل نفسه في اثبات النتيجة (1.2) وتحديداً $w = \theta \left(\frac{y^2 u^{\frac{2}{q}}}{2\alpha^2}\right)$

يجاد الجاكوبيان وحساب التكامل نسبة الى المتغير u على الفترة $(0,1)$ سوف نجد بان الدالة الاحتمالية الهامشية للمتغير Y بالشكل:

$$f_Y(y; \alpha, \theta, q) = \frac{q (2\alpha^2)^{\frac{q}{2}}}{(1+\theta)\theta^{\frac{q}{2}} y^{q+1}} \left[\theta \gamma\left(\frac{q}{2} + 1, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right) + \gamma\left(\frac{q}{2} + 2, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right)\right]$$

اي انها مكافئة للصيغة المكتوبة بدلالة دالة Gamma غير الكاملة الدنيا المعطاة في النتيجة

$$(1.2) \text{ والمتمثلة بالصورة او العلاقة (2.44) بمعنى أن: } Y \sim \text{SLR}(\alpha, \theta, q)$$

1.4.2 اثبات خاصية pdf لتوزيع SLR(α,θ,q) للصيغة الأولى

لدينا الصورة الأولى للتوزيع الاحتمالي SLR(α,θ,q) المعطاة في القضية المقترحة (1.2)

والمتمثلة بالعلاقة (2.39) الآتية:

$$f_Y(y; \alpha, \theta, q) = \frac{\theta^2}{\alpha^2 (\theta + 1)} y \int_0^1 t^{2/q} \left[1 + \frac{y^2 t^{2/q}}{2\alpha^2} \right] e^{-\theta \left(\frac{y^2 t^{2/q}}{2\alpha^2} \right)} dt$$

وسيتم اثبات انها دالة كثافة احتمالية pdf وذلك بتكامل الدالة $f_Y(\cdot)$ أنفاً نسبة الى المتغير

العشوائي Y وكما يأتي:

$$\int_0^\infty f_Y(y; \alpha, \theta, q) dy = \int_0^\infty \left\{ \frac{\theta^2}{\alpha^2 (\theta + 1)} y \int_0^1 t^{2/q} \left[1 + \frac{y^2 t^{2/q}}{2\alpha^2} \right] e^{-\theta \left(\frac{y^2 t^{2/q}}{2\alpha^2} \right)} dt \right\} dy \dots (2.58)$$

وبأعادة ترتيب التكاملين المذكورين أنفاً وأجراء تعديل مكافئ لشكل الدالة الكاملة فسيكون ذلك

مساوياً الى: (سنسمي التكامل بالطرف الأيسر I)

$$I = \frac{\sqrt{2} \theta^2}{\alpha(\theta + 1)} \int_0^1 t^{1/q} \left\{ \int_0^\infty \frac{yt^{1/q}}{\sqrt{2}\alpha} \left[1 + \left(\frac{yt^{1/q}}{\sqrt{2}\alpha} \right)^2 \right] e^{-\theta \left(\frac{yt^{1/q}}{\sqrt{2}\alpha} \right)^2} dy \right\} dt \dots (2.58a)$$

وباستعمال التعويض الآتي وتوزيع التكامل الداخلي على الحدين:

$$\begin{aligned} \text{let } W &= \theta \left(\frac{yt^{1/q}}{\sqrt{2}\alpha} \right)^2 \xrightarrow{\text{yields}} \left(\frac{w}{\theta} \right)^{1/2} = \frac{yt^{1/q}}{\sqrt{2}\alpha} \xrightarrow{\text{yields}} \\ y &= \frac{\sqrt{2}\alpha}{t^{1/q}} \left(\frac{w}{\theta} \right)^{1/2} \xrightarrow{\text{yields}} dy = \frac{\sqrt{2}\alpha}{t^{1/q}} \frac{1}{2} \left(\frac{w}{\theta} \right)^{-1/2} \frac{1}{\theta} dw \\ I &= \frac{\sqrt{2}\theta^2}{\alpha(\theta + 1)} \int_0^1 t^{1/q} \left[\int_0^\infty \left(\frac{w}{\theta} \right)^{1/2} e^{-w} \frac{\sqrt{2}\alpha}{t^{1/q}} \frac{1}{2} \left(\frac{w}{\theta} \right)^{-1/2} \frac{1}{\theta} dw \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\infty \left(\frac{w}{\theta} \right)^{3/2} e^{-w} \frac{\sqrt{2}\alpha}{t^{1/q}} \frac{1}{2} \left(\frac{w}{\theta} \right)^{-1/2} \frac{1}{\theta} dw \right] \dots (2.58b) \end{aligned}$$

وبأجراء بعض الاختصارات والتبسيط ينتج أن:

$$I = \frac{\sqrt{2}\theta^2}{\alpha(\theta + 1)} \frac{\sqrt{2}\alpha}{2\theta} \int_0^1 \left[\int_0^\infty e^{-w} dw + \frac{1}{\theta} \int_0^\infty w e^{-w} dw \right] dt \dots (2.58c)$$

أن قيمة التكامل في الحد الأول تساوي 1 ويحل بشكل مباشر اما تكامل الحد الثاني فيمكن استعمال طريقة التكامل بالتجزئة لإيجاد قيمته، كذلك يمكن حل كلا التكاملين في الحدين أنفاً بمشابهتهما بتوزيع Gamma وتطبيق بعض خصائصه باعتبارهما لوصفهما حالات خاصة منه:

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} f_Y(y; \alpha, \theta, q) dy &= \frac{\theta}{(\theta + 1)} \int_0^1 \left[\Gamma(1) + \frac{1}{\theta} \Gamma(2) \right] dt \\ &= \frac{\theta}{(\theta + 1)} \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{\theta} \right) dt = \frac{\theta}{(\theta + 1)} \frac{(\theta + 1)}{\theta} = 1\end{aligned}$$

ومنها ينتج أن $\int_0^{\infty} f_Y(y; \alpha, \theta, q) dy = 1$ وبذلك نكون قد اثبتنا أن توزيع $SLR(\alpha, \theta, q)$ في الصيغة الأولى هو pdf .

2.4.2 أثبات خاصية pdf لتوزيع $SLR(\alpha, \theta, q)$ للصيغة الثانية

لدينا الصيغة الثانية للتوزيع الاحتمالي $SLR(\alpha, \theta, q)$ المعطاة في النتيجة (1.2) والمتمثلة

بالعلاقة (2.44):

$$f_Y(y; \alpha, \theta, q) = \frac{q(2\alpha^2)^{q/2}}{(1 + \theta)\theta^{q/2}y^{q+1}} \left[\theta \gamma\left(\frac{q}{2} + 1, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right) + \gamma\left(\frac{q}{2} + 2, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right) \right]$$

إذ أن:

$$\gamma\left(\frac{q}{2} + 1, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right) = \int_0^{\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}} t^{\frac{q}{2}} e^{-t} dt \quad \dots (2.59a)$$

$$\gamma\left(\frac{q}{2} + 2, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right) = \int_0^{\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}} t^{\frac{q}{2}+1} e^{-t} dt \quad \dots (2.59b)$$

وسيتم اثبات أن $I = f_Y(\cdot)$ في الصيغة الثانية أنفاً بانها دالة كثافة احتمالية pdf وذلك

بتكاملها نسبة الى المتغير العشوائي Y وكما يأتي:

$$\begin{aligned}I &= \frac{q(2\alpha^2)^{q/2}}{(1 + \theta)\theta^{q/2}} \left[\theta \int_0^{\infty} y^{-q-1} \gamma\left(\frac{q}{2} + 1, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right) dy \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\infty} y^{-q-1} \gamma\left(\frac{q}{2} + 2, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right) dy \right] \quad \dots (2.60)\end{aligned}$$

سوف نقوم بحساب قيمة التكاملين في الحدين من العلاقة (2.60) كل على حده:

$$\begin{aligned} \text{let } I_1 &= \int_0^{\infty} y^{-q-1} \gamma \left(\frac{q}{2} + 1, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2} \right) dy \\ &= \int_0^{\infty} y^{-q-1} \left[\int_0^{\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}} t^{\frac{q}{2}} e^{-t} dt \right] dy \quad \dots (2.60a) \end{aligned}$$

وباستعمال طريقة التكامل بالتجزئة والاستفادة من قاعدة Leibnitz والتي تتدرج ضمن قاعدة

الاشتقاق تحت علامة التكامل ونصها في التعريف الآتي (Chaudhry & et al., 1994,16):

تعريف (6.2) Leibnitz Rule: ليكن لدينا التكامل الآتي:

$$I = \int_{u_1(b)}^{u_2(b)} f(t, b) dt \quad \dots (2.60b)$$

إذ أن b بارميتر فأن :

$$\frac{\partial I}{\partial b} = \int_{u_1(b)}^{u_2(b)} \frac{\partial f(t, b)}{\partial b} dt + f(u_2(b), b) \frac{\partial u_2}{\partial b} - f(u_1(b), b) \frac{\partial u_1}{\partial b} \quad \dots (2.60c)$$

$$\text{let } u = \int_0^{\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}} t^{\frac{q}{2}} e^{-t} dt \xrightarrow{\text{yields}} du = \left(\frac{\theta y^2}{2\alpha^2} \right)^{q/2} e^{-\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}} \frac{\theta y}{\alpha^2} dy$$

$$dv = y^{-q-1} dy \xrightarrow{\text{yields}} v = -\frac{1}{q} y^{-q}$$

$$I_1 = -\frac{1}{q} y^{-q} \left[\int_0^{\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}} t^{\frac{q}{2}} e^{-t} dt \right] \Bigg|_0^{\infty} + \frac{1}{q} \int_0^{\infty} y^{-q} \left(\frac{\theta y^2}{2\alpha^2} \right)^{q/2} e^{-\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}} \frac{\theta y}{\alpha^2} dy \dots (2.60d)$$

أن قيمة الحد الأول من العلاقة (2.60d) مساوية للصفر باستعمال خصائص limit للتكاملات

المعتلة Improper Integrals فضلاً عن أن دالة (.) γ معرفة فقط للقيم الموجبة وعليه :

$$I_1 = \frac{1}{q} \left(\frac{\theta}{2\alpha^2} \right)^{q/2} \int_0^{\infty} \frac{\theta}{\alpha^2} y e^{-\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}} dy$$

$$= \frac{1}{q} \left(\frac{\theta}{2\alpha} \right)^{q/2} \left[-e^{-\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}} \right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{q} \left(\frac{\theta}{2} \right)^{q/2} (0 + 1)$$

$$I_1 = \frac{1}{q} \left(\frac{\theta}{2\alpha^2} \right)^{q/2} \quad \dots (2.60e)$$

أما بالنسبة لتكامل الحد الثاني من العلاقة (2.60):

$$I_2 = \int_0^{\infty} y^{-q-1} \gamma\left(\frac{q}{2} + 2, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right) dy$$

$$= \int_0^{\infty} y^{-q-1} \left[\int_0^{\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}} t^{\frac{q}{2}+1} e^{-t} dt \right] dy \quad \dots (2.60f)$$

وباستعمال طريقة التكامل بالتجزئة والخصائص المتبعة في إيجاد I_1 :

$$\text{let } u = \int_0^{\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}} t^{\frac{q}{2}+1} e^{-t} dt \xrightarrow{\text{yields}} du = \left(\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right)^{\frac{q}{2}+1} e^{-\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}} \frac{\theta y}{\alpha^2} dy$$

$$dv = y^{-q-1} dy \xrightarrow{\text{yields}} v = -\frac{1}{q} y^{-q}$$

$$I_2 = -\frac{1}{q} y^{-q} \left[\int_0^{\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}} t^{\frac{q}{2}+1} e^{-t} dt \right] \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{q} \int_0^{\infty} y^{-q} \left(\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right)^{\frac{q}{2}+1} e^{-\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}} \frac{\theta y}{\alpha^2} dy \quad (2.60g)$$

وبما أن الحد الأول مساوي للصفر كما مر في I_1 فسيكون:

$$I_2 = \frac{2}{q} \left(\frac{\theta}{2\alpha^2}\right)^{\frac{q}{2}+2} \int_0^{\infty} y^3 e^{-\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}} dy \quad \dots (2.60h)$$

والآن نستعمل التعويض الآتي:

$$\text{let } z = \frac{\theta y^2}{2\alpha^2} \xrightarrow{\text{yields}} y = \sqrt{\frac{2\alpha^2}{\theta}} z^{1/2} \xrightarrow{\text{yields}} dy = \sqrt{\frac{2\alpha^2}{\theta}} \frac{1}{2} z^{-1/2} dz$$

$$I_2 = \frac{2}{q} \left(\frac{\theta}{2\alpha^2}\right)^{\frac{q}{2}+2} \int_0^{\infty} \left(\frac{2\alpha^2}{\theta}\right)^{3/2} z^{3/2} e^{-z} \sqrt{\frac{2\alpha^2}{\theta}} \frac{1}{2} z^{-1/2} dz$$

$$= \frac{2}{q} \left(\frac{\theta}{2\alpha^2}\right)^{\frac{q}{2}+2} \left(\frac{2\alpha^2}{\theta}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\infty} z e^{-z} dz$$

$$= \frac{1}{q} \left(\frac{\theta}{2\alpha^2}\right)^{\frac{q}{2}} \Gamma(2)$$

$$I_2 = \frac{1}{q} \left(\frac{\theta}{2\alpha^2}\right)^{\frac{q}{2}} \quad \dots (2.60i)$$

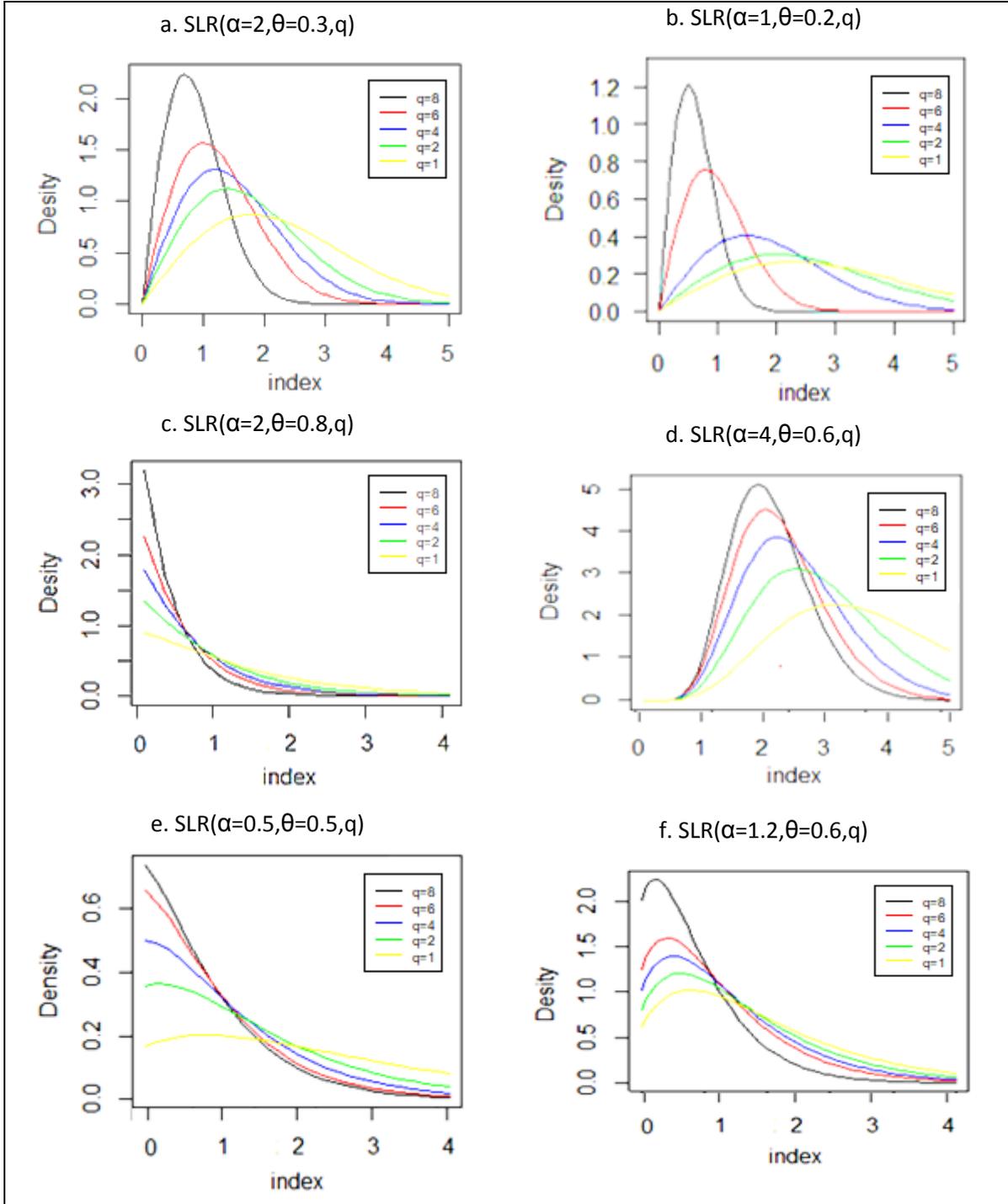
وبتعويض قيمة كل من I_1 و I_2 اي تعويض العلاقتين (2.60e) و (2.60i) في العلاقة (2.60)

نحصل على:

$$\int_0^{\infty} f_Y(\cdot) dy = \frac{q(2\alpha^2)^{q/2}}{(1+\theta)\theta^{q/2}} \left[\theta \frac{1}{q} \left(\frac{\theta}{2\alpha^2}\right)^{\frac{q}{2}} + \frac{1}{q} \left(\frac{\theta}{2\alpha^2}\right)^{\frac{q}{2}} \right]$$

$$= \frac{q(2\alpha^2)^{q/2}}{(1+\theta)\theta^{q/2}} \frac{1}{q} \left(\frac{\theta}{2\alpha^2}\right)^{q/2} (1 + \theta) = 1 \quad \dots (2.60j)$$

وعليه فإن $\int_0^{\infty} f_Y(y; \alpha, \theta, q) dy = 1$ وبهذا تكون الصيغة الثانية لتوزيع SLR (α, θ, q) هي أيضاً pdf .



شكل (2-3) يوضح دالة الكثافة الاحتمالية pdf لتوزيع SLR ولقيم افتراضية مختلفة

المصدر: من عمل الباحث.

5.2 خصائص توزيع ليندلي-رايلي المقطوع SLRD

في هذا المبحث سيقوم الباحث باشتقاق اهم الخصائص الإحصائية والرياضية لتوزيع SLR إذ سيتم تناولها على شكل نتائج Corollaries او قضايا مقترحة Propositions.

نتيجة (4.2): اشتقاق دالة التوزيع التراكمي CDF لتوزيع SLR

ليكن Y متغيراً عشوائياً يتبع توزيع $SLR(\alpha, \theta, q)$ فإن دالة التوزيع التراكمي Cumulative Distribution Function (CDF) له تعطى بالصيغة الآتية:

$$F_Y(y; \alpha, \theta, q) = 1 - \frac{q(2\alpha^2)^{\frac{q}{2}}}{2(1+\theta)\theta^{\frac{q}{2}}y^q} \left(1 + \theta + \frac{q}{2}\right) \left[\Gamma\left(\frac{q}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{q}{2}, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right)\right] + \frac{q}{2(1+\theta)} e^{-\theta\left(\frac{y^2}{2\alpha^2}\right)}, \quad y > 0 \quad \dots (2.61)$$

الأثبات: نستذكر معا بأن $\Gamma(a, z)$ معرفة على جميع القيم الحقيقية التي تأخذها بشرط ان $a \neq 0, -1, -2, \dots$: F_Y بحساب

$$F_Y(y; \alpha, \theta, q) = \int_0^y f(t; \alpha, \theta, q) dt = 1 - \int_y^\infty f(t, \alpha, \theta, q) dt \quad \dots (2.61a)$$

$$F_Y(y, \alpha, \theta, q) = 1 - \int_y^\infty \frac{q^2(2\alpha^2)^{\frac{q}{2}}}{2(\theta+1)\theta^{\frac{q}{2}}t^{q+1}} \left[1 + \theta + \frac{q}{2}\right] \left[\Gamma\left(\frac{q}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{q}{2}, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right)\right] dt + \frac{q}{(1+\theta)} \int_y^\infty \frac{1}{t} \left(1 + \theta + \frac{q}{2} + \theta \frac{t^2}{2\alpha^2}\right) e^{-\theta\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right)} dt \quad \dots (2.61b)$$

بالنسبة للتكامل الاول والذي سنرمز له I_1 فان جميع المقادير ثابتة ما عدا t^{q+1} وعليه:

$$I_1 = \int_y^\infty t^{-q-1} dt = -\frac{1}{q} t^{-q} \Big|_y^\infty = \frac{1}{qy^q} \quad \dots (2.61c)$$

اما التكامل الثاني والذي سنرمز له I_2 فكما قلنا ان قيمة $\Gamma(a, z)$ مساوية للصفر عندما $a = 0, -1, -2, \dots$ وعليه:

$$I_2 = \int_y^\infty \frac{1}{t} \left(1 + \theta + \frac{q}{2} + \theta \frac{t^2}{2\alpha^2}\right) e^{-\theta\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right)} dt = \left(1 + \theta + \frac{q}{2}\right) \int_y^\infty t^{-1} e^{-\theta\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right)} dt + \int_y^\infty \frac{\theta}{2\alpha^2} t e^{-\theta\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right)} dt \quad \dots (2.61d)$$

وباستعمال التعويض الآتي بالنسبة للتكامل في الحد الأول من I_2 اي في العلاقة (2.61d):

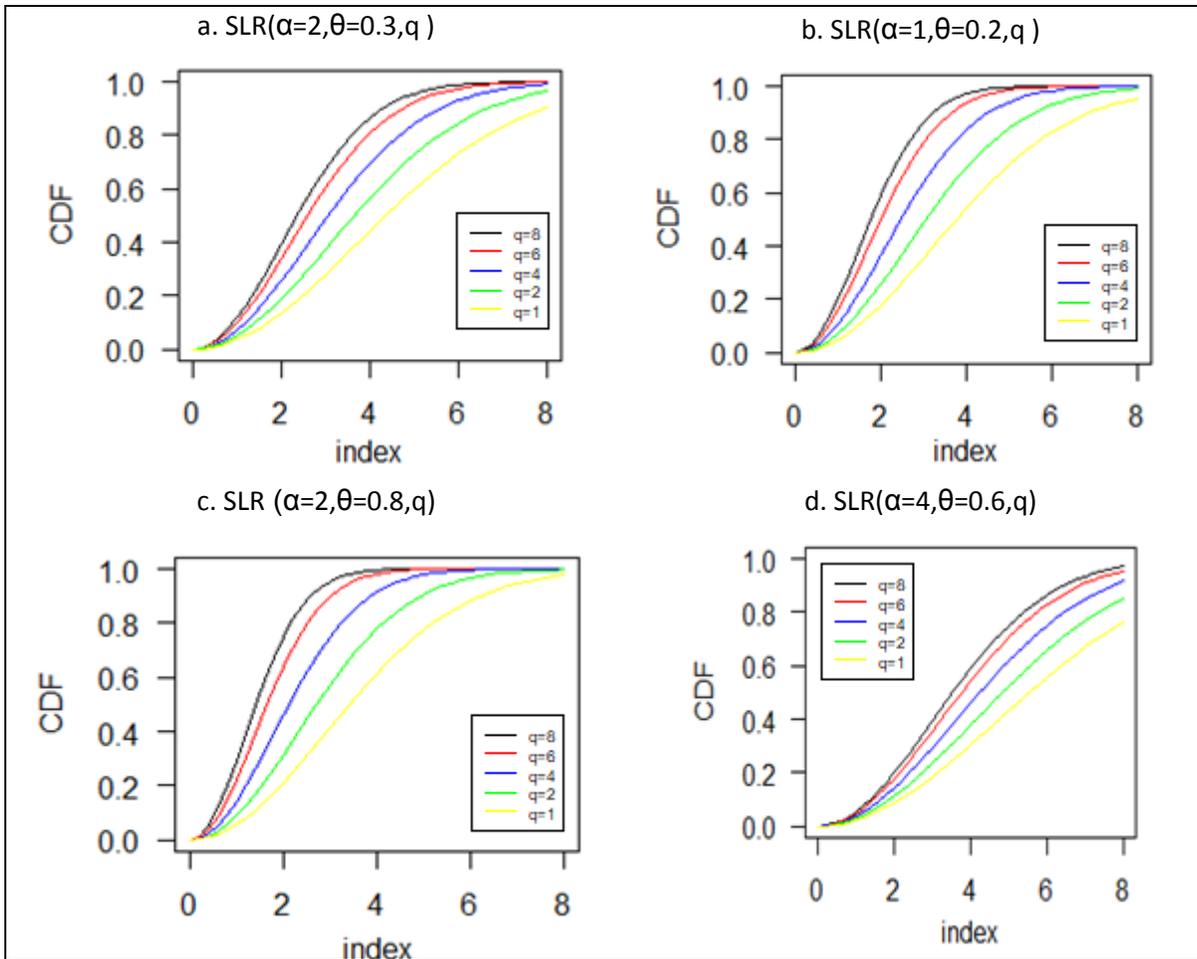
$$\text{let } w = \theta \left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right) \rightarrow t^2 = \frac{2\alpha^2}{\theta} w \rightarrow t = \sqrt{\frac{2\alpha^2}{\theta}} \sqrt{w} \rightarrow dt = \sqrt{\frac{2\alpha^2}{\theta}} \frac{1}{2\sqrt{w}} dw$$

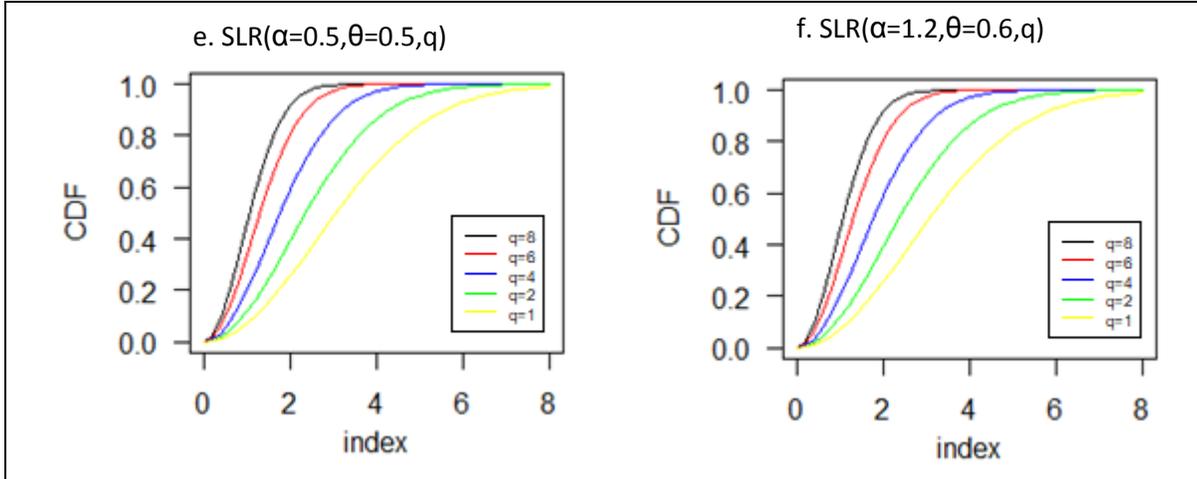
$$I_2 = \left(1 + \theta + \frac{q}{2}\right) \int_{\theta\left(\frac{y^2}{2\alpha^2}\right)}^\infty \left(\frac{2\alpha^2}{\theta}\right)^{-\frac{1}{2}} w^{-\frac{1}{2}} e^{-w} \left(\frac{2\alpha^2}{\theta}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} w^{-\frac{1}{2}} dw$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \left(-e^{-\theta \left(\frac{t^2}{2\alpha^2} \right)} \right) \Big|_y^\infty \\
 & = \left(1 + \theta + \frac{q}{2} \right) \frac{1}{2} \int_{\theta \left(\frac{y^2}{2} \right)}^\infty w^{-1} e^{-w} dw + \frac{1}{2} e^{-\theta \left(\frac{y^2}{2\alpha^2} \right)} \\
 & I_2 = \frac{1}{2} \left(1 + \theta + \frac{q}{2} \right) \Gamma \left(0, \theta \frac{y^2}{2\alpha^2} \right) + \frac{1}{2} e^{-\theta \left(\frac{y^2}{2\alpha^2} \right)} = \frac{1}{2} e^{-\theta \left(\frac{y^2}{2\alpha^2} \right)} \quad \dots (2.61e)
 \end{aligned}$$

وبوضع (2.61c) و (2.61e) في (2.61b) نجد ان:

$$F_Y(y) = 1 - \frac{q(2\alpha^2)^{\frac{q}{2}}}{2(1+\theta)\theta^2 y^q} \left(1 + \theta + \frac{q}{2} \right) \left[\Gamma \left(\frac{q}{2} \right) - \Gamma \left(\frac{q}{2}, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2} \right) \right] + \frac{q}{2(1+\theta)} e^{-\theta \left(\frac{y^2}{2\alpha^2} \right)}, y > 0$$





شكل (2-4) يوضح دالة التوزيع التراكمية cdf لتوزيع SLR ولقيم افتراضية مختلفة

المصدر: من عمل الباحث

حالة خاصة: نلاحظ انه عندما $q \rightarrow \infty$ فان توزيع $SLR(\alpha, \theta, q)$ يتقارب من توزيع LR ويمكن

اثبات ذلك بالأستناد الى النتيجة (1.2) وكما يأتي:

$$f_Y(y; \alpha, \theta, q) = \frac{\theta^2}{\alpha^2(1+\theta)} y \int_0^1 t^{\frac{2}{q}} \left[1 + \frac{y^2 t^{\frac{2}{q}}}{2\alpha^2} \right] \exp \left[-\theta \left(\frac{y^2 t^{\frac{2}{q}}}{2\alpha^2} \right) \right] dt$$

$$\lim_{q \rightarrow \infty} f_Y(y; \alpha, \theta, q) = \frac{\theta^2}{\alpha^2(1+\theta)} y \left[1 + \frac{y^2}{2\alpha^2} \right] \exp \left[-\theta \left(\frac{y^2}{2\alpha^2} \right) \right], \quad y > 0$$

... (2.61f)

والذي يمثل توزيع $LR(\alpha, \theta)$ ، وباستبدال المتغير y بالمتغير x سيكون:

$$\lim_{q \rightarrow \infty} f_Y(y; \alpha, \theta, q) = \frac{\theta^2}{\alpha^2(1+\theta)} x \left[1 + \frac{x^2}{2\alpha^2} \right] \exp \left[-\theta \left(\frac{x^2}{2\alpha^2} \right) \right], \quad x > 0$$

1.5.2 العزوم The Moments

يمكن كتابة او صياغة عزوم توزيع SLR في صيغة او شكل مغلق (Closed Form) بدلالة

دالة كاما ولانجاز ذلك سنعطي صيغة صريحة لعزوم توزيع LR عن طريق اثبات التمهيدي أدناه:

تمهيدي (1.2) Lemm : العزوم ذات الرتبة r لتوزيع LR

a ليكن X متغيرا عشوائيا له توزيع $LR(\alpha, \theta)$ فإن :

$$E(X^r) = \frac{r(2\alpha^2)^{\frac{r}{2}}}{4\theta^{\frac{r}{2}}} \left(2 + \frac{r}{\theta+1} \right) \Gamma\left(\frac{r}{2}\right), \quad r = 1, 2, \dots \quad \dots (2.62)$$

الاثبات: لدينا توزيع $LR(\alpha, \theta)$ والمعطى بالعلاقة (2.47) :

$$f_X(x, \alpha, \theta) = \frac{\theta^2}{\alpha^2(\theta + 1)} x \left[1 + \frac{x^2}{2\alpha^2} \right] \cdot e^{-\theta \left(\frac{x^2}{2\alpha^2} \right)}, \quad x > 0$$

$$E(X^r) = \frac{\theta^2}{\alpha^2(\theta+1)} \int_0^\infty x^{r+1} \left(1 + \frac{x^2}{2\alpha^2} \right) e^{-\theta \left(\frac{x^2}{2\alpha^2} \right)} dx \quad \dots (2.62a)$$

$$\text{put } w = \theta \frac{x^2}{2\alpha^2} \rightarrow x = \left(\frac{2\alpha^2}{\theta} \right)^{\frac{1}{2}} w^{\frac{1}{2}}$$

$$\rightarrow dx = \left(\frac{2\alpha^2}{\theta} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} w^{-\frac{1}{2}} dw$$

$$\therefore E(X^r) = \frac{\theta^2}{\alpha^2(\theta + 1)} \int_0^\infty \left[\left(\frac{2\alpha^2}{\theta} \right)^{\frac{1}{2}} w^{\frac{1}{2}} \right]^{r+1} \left(1 + \frac{w}{\theta} \right) e^{-w} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{2\alpha^2}{\theta} \right)^{\frac{1}{2}} w^{-\frac{1}{2}} dw$$

$$= \frac{\theta^2}{2\alpha^2(\theta+1)} \left(\frac{2\alpha^2}{\theta} \right)^{\frac{r}{2}+1} \cdot \int_0^\infty w^{\frac{r}{2}} \left(1 + \frac{w}{\theta} \right) e^{-w} dw \quad \dots (2.62b)$$

وباستعمال المفهوم العام لدالة Gamma وتحديداً $\Gamma(a + 1) = a\Gamma(a)$ سيكون لدينا:

$$= \frac{\theta (2\alpha^2)^{\frac{r}{2}}}{(\theta + 1)\theta^{\frac{r}{2}}} \left[\int_0^\infty w^{\frac{r}{2}} e^{-w} dw + \frac{1}{\theta} \int_0^\infty w^{\frac{r}{2}+1} e^{-w} dw \right]$$

$$= \frac{\theta (2\alpha^2)^{\frac{r}{2}}}{(\theta+1)\theta^{\frac{r}{2}}} \left[\Gamma\left(\frac{r}{2} + 1\right) + \frac{1}{\theta} \Gamma\left(\frac{r}{2} + 2\right) \right] \quad \dots (2.62c)$$

$$= \frac{\theta (2\alpha^2)^{\frac{r}{2}}}{(\theta + 1)\theta^{\frac{r}{2}}} \left[\frac{r}{2} \Gamma\left(\frac{r}{2}\right) + \frac{1}{\theta} \frac{r}{2} \left(\frac{r}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{r}{2}\right) \right]$$

$$= \frac{\theta (2\alpha^2)^{\frac{r}{2}}}{(\theta + 1)\theta^{\frac{r}{2}}} \frac{r}{2} \Gamma\left(\frac{r}{2}\right) \left[1 + \frac{1}{\theta} \left(\frac{r}{2} + 1\right) \right]$$

$$= \frac{r \theta (2\alpha^2)^{\frac{r}{2}}}{2(\theta + 1)\theta^{\frac{r}{2}}} \left[\frac{2(\theta + 1) + r}{2\theta} \right] \Gamma\left(\frac{r}{2}\right)$$

$$\therefore E(X^r) = \frac{r(2\alpha^2)^{\frac{r}{2}}}{4 \theta^{\frac{r}{2}}} \left(2 + \frac{r}{\theta + 1} \right) \Gamma\left(\frac{r}{2}\right)$$

وهذه الصيغة الناتجة تمثل الشكل العام لأيجاد العزوم ذات الرتبة r عن نقطة الأصل لتوزيع LR .

القضية المقترحة (2.2) Proposition: العزوم ذات الرتبة r لتوزيع SLR

ليكن $Y \sim SLR(\theta, q)$ فإن :

$$E(Y^r) = \frac{r(2\alpha^2)^{\frac{r}{2}}}{4\theta^{\frac{r}{2}}} \left(2 + \frac{r}{\theta+1}\right) \frac{q}{q-r} \Gamma\left(\frac{r}{2}\right), \forall r < q, r = 1, 2, \dots \quad \dots (2.63)$$

الآثبات : لدينا من التعريف (5.2) والمعطى بالعلاقة (2.48):

$$Y = \frac{X}{U^{1/q}}, \quad q > 0$$

وبما ان كل من X و U متغيران عشوائيان مستقلان فسيكون:

$$E(Y^r) = E(X^r) \cdot E\left(U^{-\frac{r}{q}}\right) \quad \dots (2.63a)$$

ولقد تم حساب $E(X^r)$ عن طريق العلاقة (2.62) وعليه يكفي ان نجد قيمة $E\left(U^{-\frac{r}{q}}\right)$ إذ أن:

$$U \sim Uni(0,1)$$

$$\therefore E\left(U^{-\frac{r}{q}}\right) = \int_0^1 u^{-\frac{r}{q}} du = \frac{u^{-\frac{r}{q}+1}}{-\frac{r}{q}+1} \Big|_0^1$$

$$E\left(U^{-\frac{r}{q}}\right) = \frac{q}{q-r}, \quad r < q \quad \dots (2.63b)$$

وبتعويض (2.63b) في (2.63a) واستعمال العلاقة (2.62) نجد ان العزوم الرائية عن الصفر:

$$E(Y^r) = \frac{r(2\alpha^2)^{\frac{r}{2}}}{4\theta^{\frac{r}{2}}} \left(2 + \frac{r}{\theta+1}\right) \frac{q}{q-r} \Gamma\left(\frac{r}{2}\right), \quad r < q$$

نتيجة 5.2: الوسط الحسابي والتباين ومعامل الاختلاف لتوزيع SLR

ليكن $Y \sim SLR(\alpha, \theta, q)$ فإن كل من الوسط الحسابي Mean والتباين Variance للمتغير

العشوائي Y يمكن ان يعطى بالصيغتين الآتيتين:

$$\mu_Y = E(Y) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha^2 \pi}{2\theta}} \left(2 + \frac{1}{\theta+1}\right) \frac{q}{q-1}, \quad \forall q > 1 \quad \dots (2.64)$$

$$Var(Y) = \frac{q\alpha^2}{2\theta} \left[\frac{2}{q-2} \left(2 + \frac{2}{\theta+1}\right) - \frac{q\pi}{4(q-1)^2} \left(2 + \frac{1}{\theta+1}\right)^2 \right], \quad \forall q > 2 \quad (2.65)$$

الآثبات: لإيجاد متوسط التوزيع نعوض عن $r=1$ في الصيغة او العلاقة (2.63) الخاصة بإيجاد

$E(Y^r)$ للحصول على العزم الاول والذي يمثل الوسط الحسابي للتوزيع:

$$\mu_Y = E(Y) = \frac{(2\alpha^2)^{\frac{1}{2}}}{4\theta^{\frac{1}{2}}} \left(2 + \frac{1}{\theta+1}\right) \frac{q}{q-1} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \quad \dots (2.65a)$$

وإذ أن $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

$$\mu_Y = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha^2 \pi}{2\theta}} \left(2 + \frac{1}{\theta + 1}\right) \frac{q}{q-1}, \quad q > 1$$

وعندما $r=2$ فنحصل على العزم الثاني $E(Y^2)$

$$\therefore E(Y^2) = \frac{2(2\alpha^2)}{4\theta} \left(2 + \frac{2}{\theta + 1}\right) \frac{q}{q-2} \Gamma(1)$$

$$\therefore E(Y^2) = \frac{\alpha^2}{\theta} \left(2 + \frac{2}{\theta + 1}\right) \frac{q}{q-2}, \quad q > 2 \quad \dots (2.65b)$$

وعليه فإن قيمة $Var(Y) = \sigma^2$ ستكون :

$$Var(Y) = E(Y^2) - \mu_Y^2$$

$$Var(Y) = \frac{\alpha^2}{\theta} \left(2 + \frac{2}{\theta + 1}\right) \frac{q}{q-2} - \frac{1}{4} \left(\frac{\alpha^2 \pi}{2\theta}\right) \left(2 + \frac{1}{\theta + 1}\right)^2 \frac{q^2}{(q-1)^2} \quad \dots (2.65c)$$

$$Var(Y) = \frac{q\alpha^2}{2\theta} \left[\left(2 + \frac{2}{\theta + 1}\right) \frac{2}{q-2} - \frac{q\pi}{4(q-1)^2} \left(2 + \frac{1}{\theta + 1}\right)^2 \right]$$

$$Var(Y) = \frac{q\alpha^2}{2\theta} \left[\frac{2}{q-2} \left(2 + \frac{2}{\theta + 1}\right) - \frac{q\pi}{4(q-1)^2} \left(2 + \frac{1}{\theta + 1}\right)^2 \right], \quad q > 2$$

يمكن حساب قيمة معامل الاختلاف Coefficient of Variation لتوزيع SLR إذ يتم الحصول عليه مباشرة من النتيجة (5.2) وذلك بقسمة الانحراف المعياري اي الجذر التربيعي للتباين المحسوب بالعلاقة (2.65) على قيمة الوسط الحسابي المعطى بالعلاقة (2.64) وكما يأتي:

$$C.V. = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{\sqrt{\frac{q\alpha^2}{2\theta} \left[\frac{2}{q-2} \left(2 + \frac{2}{\theta + 1}\right) - \frac{q\pi}{4(q-1)^2} \left(2 + \frac{1}{\theta + 1}\right)^2 \right]}}{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha^2 \pi}{2\theta}} \left(2 + \frac{1}{\theta + 1}\right) \frac{q}{q-1}} \quad \dots (2.65d)$$

$$C.V. = 2 \sqrt{\frac{q}{\pi}} \frac{\sqrt{\left[\frac{2}{q-2} \left(2 + \frac{2}{\theta + 1}\right) - \frac{q\pi}{4(q-1)^2} \left(2 + \frac{1}{\theta + 1}\right)^2 \right]}}{\left(2 + \frac{1}{\theta + 1}\right) \frac{q}{q-1}} \quad \dots (2.65e)$$

نتيجة 6.2: معامل الالتواء لتوزيع SLR

ليكن $Y \sim SLR(\alpha, \theta, q)$ و $q > 3$ فان الجذر التربيعي لمعامل الالتواء لهذا التوزيع

skewness coefficient يعطى بالصيغة:

$$\sqrt{\beta_1} = \frac{\frac{3\sqrt{\pi}}{q-3} \left(2 + \frac{3}{\theta + 1}\right) - \frac{3q\sqrt{\pi}}{(q-1)(q-2)} \left(2 + \frac{1}{\theta + 1}\right) \left(2 + \frac{2}{\theta + 1}\right) + \frac{q^2 \pi^{\frac{3}{2}}}{4(q-1)^3} \left(2 + \frac{1}{\theta + 1}\right)^3}{\sqrt{q} \left[\frac{2}{q-2} \left(2 + \frac{2}{\theta + 1}\right) - \frac{q\pi}{4(q-1)^2} \left(2 + \frac{1}{\theta + 1}\right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

... (2.66)

الإثبات: كما نعلم فان معامل الالتواء بطريقة العزوم المركزية (العزوم عن الوسط الحسابي) يمكن

حسابه حسب الصيغة الآتية حيث β_1 تمل معامل الالتواء ان والمعرفة بالعلاقة (2.8):

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}$$

إذ أن μ_2 يمثل العزم المركزي الثاني (عن المتوسط) اي ان $\mu_2 = \sigma_Y^2$ اما μ_3 فيشير الى العزم

المركزي الثالث (عن المتوسط) بمعنى ان:

$$\beta_1 = \frac{[E(Y-E(Y))^3]^2}{[E(Y-E(Y))^2]^3} \quad \dots (2.66a)$$

$$\beta_1 = \frac{[E(Y-\mu_Y)^3]^2}{[E(Y-\mu_Y)^2]^3} \quad \dots (2.63b)$$

$$\beta_1 = \frac{[E(Y-\mu_Y)^3]^2}{[Var(Y)]^3} \quad \dots (2.66c)$$

ولتسهيل العملية الحسابية سنثبت ان:

$$\sqrt{\beta_1} = \frac{E(Y-\mu_Y)^3}{[Var(Y)]^{\frac{3}{2}}} \quad \dots (2.66d)$$

نجد اولاً $E(Y - \mu_Y)^3$ إذ أن:

$$E(Y - \mu_Y)^3 = E(Y^3) - 3\mu_Y E(Y^2) + 2\mu_Y^3 \quad \dots (2.66e)$$

وبما ان العزمين الاول والثاني عن الصفر قد تم حسابهما لذا سنحسب فقط العزم الثالث عن الصفر

اي $E(Y^3)$ عن طريق الصيغة العامة لاجاد عزوم التوزيع من الرتبة r و المعرفة عن طريق

العلاقة (2.63)، وهنا لدينا $r=3$ وعليه:

$$E(Y^3) = \frac{3(2\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}{4\theta^{\frac{3}{2}}} \left(2 + \frac{3}{\theta + 1}\right) \frac{q}{q-3} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$E(Y^3) = \frac{3\sqrt{\pi}(2\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}{8\theta^{\frac{3}{2}}} \left(2 + \frac{3}{\theta+1}\right) \frac{q}{q-3} \quad , q > 3 \quad \dots (2.66g)$$

علما ان $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ ، ويتسمية الرموز d_3, d_2, d_1 للحدود الثلاثة والتعويض بما يساويها في

العلاقة (2.66e) سيكون لدينا :

$$d_1 = E(Y^3) = \frac{3\sqrt{\pi}(2\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}{8\theta^{\frac{3}{2}}} \left(2 + \frac{3}{\theta + 1}\right) \frac{q}{q-3} \quad \dots (2.66h)$$

$$d_2 = 3 \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha^2 \pi}{2\theta}} \left(2 + \frac{1}{\theta + 1}\right) \frac{q}{q-1} \cdot \frac{\alpha^2}{\theta} \left(2 + \frac{2}{\theta + 1}\right) \frac{q}{q-2} \quad \dots (2.66i)$$

$$d_3 = 2 \frac{1}{8} \left(\frac{\alpha^2 \pi}{2\theta}\right)^{\frac{3}{2}} \left(2 + \frac{1}{\theta + 1}\right)^3 \frac{q^3}{(q-1)^3} \quad \dots (2.66j)$$

$$E(Y - \mu_Y)^3 = d_1 - d_2 + d_3 \quad \dots (2.66k)$$

وبقسمة هذا المقدار في العلاقة (2.66k) على $(\sigma_Y^2)^{3/2} = [\text{Var}(Y)]^{3/2}$ إذ أن قيمة $\text{Var}(Y)$ قد تم حسابها من العلاقة (2.65) سابقاً سنحصل على صيغة جذر معامل الالتواء لتوزيع SLR والممثلة بالعلاقة (2.66d) أي أن:

$$\sqrt{\beta_1} = \frac{d_1 - d_2 + d_3}{\left(\frac{q\alpha^2}{2\theta}\right)^{\frac{3}{2}} \left[\frac{2}{q-2} \left(2 + \frac{2}{\theta + 1}\right) - \frac{q\pi}{4(q-1)^2} \left(2 + \frac{1}{\theta + 1}\right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \quad \dots (2.66l)$$

وبإجراء بعض الاختصارات والتبسيط على العلاقة (2.66l) نحصل على الصيغة النهائية:

$$= \frac{\frac{3\sqrt{\pi}}{q-3} \left(2 + \frac{3}{\theta + 1}\right) - \frac{3q\sqrt{\pi}}{(q-1)(q-2)} \left(2 + \frac{1}{\theta + 1}\right) \left(2 + \frac{2}{\theta + 1}\right) + \frac{q^2 \pi^{\frac{3}{2}}}{4(q-1)^3} \left(2 + \frac{1}{\theta + 1}\right)^3}{\sqrt{q} \left[\frac{2}{q-2} \left(2 + \frac{2}{\theta + 1}\right) - \frac{q\pi}{4(q-1)^2} \left(2 + \frac{1}{\theta + 1}\right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

نتيجة (7.2): معامل التفرطح (التسطح) لتوزيع SLR

ليكن $Y \sim \text{SLR}(\alpha, \theta, q)$ و $\forall q > 4$ فإن معامل التفرطح (التسطح) لهذا التوزيع kurtosis coefficient حيث أن β_2 تمثل معامل التفرطح يعطى بالصيغة:

$$\beta_2 = \frac{L_1 - L_2 + L_3 - L_4}{q \left[\frac{2}{q-2} \left(2 + \frac{2}{\theta + 1}\right) - \frac{q\pi}{4(q-1)^2} \left(2 + \frac{1}{\theta + 1}\right)^2 \right]^2} \quad \dots (2.67)$$

$$L_1 = \frac{4}{q-4} \left(2 + \frac{4}{\theta + 1}\right) \quad \dots (2.67a)$$

$$L_2 = \frac{6q\pi}{(q-1)(q-3)} \left(2 + \frac{1}{\theta + 1}\right) \left(2 + \frac{3}{\theta + 1}\right) \quad \dots (2.67b)$$

$$L_3 = \frac{3q^2 \pi}{(q-1)^2 (q-2)} \left(2 + \frac{1}{\theta + 1}\right)^2 \left(2 + \frac{2}{\theta + 1}\right) \quad \dots (2.67c)$$

$$L_4 = \frac{3q^3 \pi}{16 (q-1)^4} \left(2 + \frac{1}{\theta + 1}\right)^4 \quad \dots (2.67d)$$

الاثبات : من المعلوم ان معامل التفرطح بطريقة العزوم المركزية (عن الوسط الحسابي) يمكن حسابه حسب الصيغة الآتية والمعرفة مسبقاً بالعلاقة (2.9) :

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$$

إذ أن: μ_2 يمثل العزم المركزي الثاني اي ان $\mu_2 = \sigma_Y^2$ اما μ_4 فيشير الى العزم المركزي الرابع بمعنى ان:

$$\beta_2 = \frac{E(Y-E(Y))^4}{[E(Y-E(Y))^2]^2} \quad \dots (2.67e)$$

$$\beta_2 = \frac{E(Y-\mu_Y)^4}{[Var(Y)]^2} \quad \dots (2.67f)$$

نجد أولاً $E(Y - \mu_Y)^4$

$$E(Y - \mu_Y)^4 = E(Y^4) - 4\mu_Y E(Y^3) + 6\mu_Y^2 E(Y^2) - 3\mu_Y^4 \quad \dots (2.67g)$$

وبما ان العزوم من الرتب الاولى والثانية والثالثة عن الصفر قد تم حسابها سابقاً لذا نحتاج فقط ان نجد قيمة العزم المركزي الرابع عن الصفر اي $E(Y^4)$ عن طريق التعويض عن $r = 4$ في الصيغة العامة ليجاد عزوم التوزيع من الرتبة r والمعطاة بالعلاقة (2.63) :

$$E(Y^4) = \frac{(2\alpha^2)^2}{\theta^2} \left(2 + \frac{4}{\theta + 1}\right) \frac{q}{q-4} \Gamma(2)$$

$$E(Y^4) = \frac{(2\alpha^2)^2}{\theta^2} \left(2 + \frac{4}{\theta+1}\right) \frac{q}{q-4}, \quad q > 4 \quad \dots (2.67h)$$

وبتعويض هذه العلاقة بالعلاقة (2.67g) التي سنجزئها ونرمز لحدودها الأربعة بالرموز S_1, S_2, S_3, S_4 سوف نحصل على:

$$S_1 = E(Y^4) = \frac{(2\alpha^2)^2}{\theta^2} \left(2 + \frac{4}{\theta+1}\right) \frac{q}{q-4} \quad \dots (2.67i)$$

$$S_2 = 4\mu_Y E(Y^3) = 4 \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha^2 \pi}{2\theta}} \left(2 + \frac{1}{\theta+1}\right) \frac{q}{q-1} \cdot \frac{3\sqrt{\pi}(2\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}{8\theta^{\frac{3}{2}}} \left(2 + \frac{3}{\theta+1}\right) \frac{q}{q-3} \quad \dots (2.67j)$$

$$S_3 = 6\mu_Y^2 E(Y^2) = 6 \frac{1}{4} \frac{\alpha^2 \pi}{2\theta} \left(2 + \frac{1}{\theta+1}\right)^2 \frac{q^2}{(q-1)^2} \cdot \frac{\alpha^2}{\theta} \left(2 + \frac{2}{\theta+1}\right) \frac{q}{q-2} \quad \dots (2.67k)$$

$$S_4 = 3\mu_Y^4 = 3 \frac{1}{16} \left(\frac{\alpha^2 \pi}{2\theta}\right)^2 \left(2 + \frac{1}{\theta+1}\right)^4 \frac{q^4}{(q-1)^4} \quad \dots (2.67l)$$

$$E(Y - \mu_Y)^4 = S_1 - S_2 + S_3 - S_4 \quad \dots (2.67m)$$

وبتعويض هذه المقادير الأربعة أنفاً المبينة في العلاقة (2.67m) ومن ثم قسمة هذه العلاقة على قيمة $[Var(Y)]^2$ واختصار بعض المقادير سنجد β_2 المبينة في العلاقة (2.67) ضمن النتيجة (7.2) وكما يأتي:

$$\beta_2 = \frac{S_1 - S_2 + S_3 - S_4}{\left(\frac{q\alpha^2}{2\theta}\right)^2 \left[\frac{2}{q-2} \left(2 + \frac{2}{\theta+1}\right) - \frac{q\pi}{4(q-1)^2} \left(2 + \frac{1}{\theta+1}\right)^2 \right]^2} \quad \dots (2.67n)$$

$$\beta_2 = \frac{L_1 - L_2 + L_3 - L_4}{q \left[\frac{2}{q-2} \left(2 + \frac{2}{\theta+1}\right) - \frac{q\pi}{4(q-1)^2} \left(2 + \frac{1}{\theta+1}\right)^2 \right]^2}$$

نتيجة (8.2): الوسط الهندسي لتوزيع SLR

ليكن $Y \sim SLR(\alpha, \theta, q)$ فان قيمة الوسط الهندسي Geometric Mean لهذا التوزيع يعطى بالصيغة الآتية:

$$G. M. = EXP \left\{ \frac{1}{2} \left[\ln \left(\frac{2\alpha^2}{\theta} \right) - \tau + \frac{1}{\theta+1} \right] + \frac{1}{q} \right\} \quad \dots (2.68)$$

الاثبات : يعرف الوسط الهندسي للتوزيع الاحتمالي على أنه الدالة الأسية للقيمة المتوقعة للوغاريتم الطبيعي للمتغير العشوائي Y بعبارة اخرى فهو يمثل (Feng & et al., 2017, 17) :

$$G. M. = EXP[E[\ln(Y)]] \quad \dots (2.68a)$$

وبما ان $Y = \frac{X}{U^q}$ فإنه سنحسب اولاً $E[\ln(Y)]$ وكما يأتي:

$$E[\ln(Y)] = E \left(\ln \frac{X}{U^q} \right) = E(\ln X) - \frac{1}{q} E(\ln(U)) \quad \dots (2.68b)$$

وعليه سنقوم بايجاد قيمة كل من $E(\ln X)$ و $E(\ln(U))$ إذ أن $X \sim LR(\alpha, \theta)$ وان $U \sim (0,1)$:

$$E(\ln X) = \frac{\theta^2}{\alpha^2(\theta+1)} \left[\int_0^\infty x \ln x e^{-\theta\left(\frac{x^2}{2\alpha^2}\right)} dx + \frac{1}{2\alpha} \int_0^\infty x^3 \ln x e^{-\theta\left(\frac{x^2}{2\alpha^2}\right)} dx \right] \quad \dots (2.68c)$$

نجد اولاً قيمة تكامل الحد الاول والذي سنسميه I_1 :

$$I_1 = \int_0^\infty x \ln x e^{-\theta\left(\frac{x^2}{2\alpha^2}\right)} dx \quad \dots (2.68d)$$

ومن ثم نجد قيمة تكامل الحد الثاني 2 :

$$I_2 = \frac{1}{2\alpha^2} \int_0^\infty x^3 \ln x e^{-\theta\left(\frac{x^2}{2\alpha^2}\right)} dx \quad \dots (2.68e)$$

وباستعمال التعويض:

$$w = \frac{\theta x^2}{2\alpha^2} \rightarrow x^2 = \frac{2\alpha^2}{\theta} w \rightarrow x = \left(\frac{2\alpha^2}{\theta}\right)^{\frac{1}{2}} w^{\frac{1}{2}} \rightarrow dx = \left(\frac{2\alpha^2}{\theta}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} w^{-\frac{1}{2}} dw$$

$$I_1 = \int_0^\infty \left(\frac{2\alpha^2}{\theta}\right)^{\frac{1}{2}} w^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{2} \ln\left(\frac{2\alpha^2}{\theta}\right) + \frac{1}{2} \ln w \right] e^{-w} \cdot \left(\frac{2\alpha^2}{\theta}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} w^{-\frac{1}{2}} dw$$

$$I_1 = \frac{\alpha^2}{\theta} \left[\frac{1}{2} \ln\left(\frac{2\alpha^2}{\theta}\right) \int_0^\infty e^{-w} dw + \frac{1}{2} \int_0^\infty \ln w e^{-w} dw \right] \quad \dots (2.68f)$$

$$I_1 = \frac{\alpha^2}{2\theta} \left[\ln\left(\frac{2\alpha^2}{\theta}\right) + \psi(1) \right] \quad \dots (2.68g)$$

إذ أن التكامل الاول في العلاقة (2.68f) قيمته = 1، اما التكامل الثاني فيمثل دالة digamma والتي تساوي $\psi(1)$ إذ أن $\psi(1) = -\tau$ وان τ يمثل ثابت Euler - Mascheroni وقيمته $\tau = 0.5772156649 \dots$ وهنا نرى انه من المفيد ان نتطرق الى تعريف وبعض خصائص الدالة digamma للمضي قدماً بعملية الاثبات .

من المعلوم ان دالة Gamma تعرف بالشكل الآتي :

$$\Gamma(P) = \int_0^\infty x^{P-1} e^{-x} dx \quad \dots (2.68h)$$

وباشتقاق هذه الدالة نسبة الى P :

$$[\Gamma(P)]' = \frac{d\Gamma(P)}{dP} = \int_0^\infty x^{P-1} \ln x e^{-x} dx \quad \dots (2.68i)$$

وبقسمة $[\Gamma(P)]'$ على $\Gamma(P)$:

$$\frac{[\Gamma(P)]'}{\Gamma(P)} = \frac{d \ln \Gamma(P)}{dP} = \frac{1}{\Gamma(P)} \int_0^\infty x^{P-1} \ln x e^{-x} dx \quad \dots (2.68j)$$

إذ أن $\frac{d \ln \Gamma(P)}{dP} = \psi(P)$ يمثل دالة digamma عند القيمة P .

$$\psi(P) = \frac{1}{\Gamma(P)} \int_0^\infty x^{P-1} \ln x e^{-x} dx \quad \dots (2.69)$$

وباشتقاق العلاقة (2.69) مرة ثانية نسبة الى P :

$$\psi(P)[\Gamma(P)]' + \Gamma(P) \psi'(P) = \int_0^\infty x^{P-1} (\ln x)^2 e^{-x} dx \quad \dots (2.69a)$$

وبقسمة طرفي هذه العلاقة على $\Gamma(P)$:

$$\Gamma(P) \left[\frac{\psi(P)[\Gamma(P)]'}{\Gamma(P)} + \frac{\Gamma(P) \psi'(P)}{\Gamma(P)} \right] = \int_0^\infty x^{P-1} (\ln x)^2 e^{-x} dx$$

$$\Gamma(P)[\psi^2(P) + \dot{\psi}(P)] = \int_0^{\infty} x^{P-1} (\ln x)^2 e^{-x} dx \quad \dots (2.69b)$$

والان لو كانت P=1 فإن العلاقتين (2.69) و (2.69b) تصبحان:

$$\psi(1) = \int_0^{\infty} \ln x e^{-x} dx = -\tau = 0.577215 \quad \dots (2.69c)$$

وهذه القيمة العددية τ يمكن الحصول عليها من جداول خاصة تسمى digamma-table والمحسوبة باستعمال إحدى الطرائق العددية كطريقة Simpson في التكامل العددي كذلك فإن العلاقة (2.69b) تصبح:

$$\psi^2(1) + \dot{\psi}(1) = \int_0^{\infty} (\ln x)^2 e^{-x} dx \quad \dots (2.69d)$$

إذ أن $\dot{\psi}(1) = \frac{\pi^2}{6}$ وهذه القيمة يمكننا الحصول عليها من جدول خاص يسمى trigamma table و المحسوبة ايضاً عن طريق التكامل العددي وعند التعويض عن P=2 فإن العلاقة (2.69) سوف تصبح:

$$\psi(2) = \int_0^{\infty} x \ln x e^{-x} dx \quad \dots (2.69e)$$

وباستعمال جدول digamma نجد ايضاً ان:

$$\psi(2) = \psi(1) + 1 \quad \dots (2.69f)$$

وبناءً على ما سبق يمكن ان نجد ما يأتي:

$$\psi(1) = -\tau$$

$$\psi(2) = \psi(1) + 1 = -\tau + 1$$

$$\psi(3) = \psi(2) + \frac{1}{2} = -\tau + 1 + \frac{1}{2}$$

$$\psi(4) = \psi(3) + \frac{1}{3} = -\tau + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

$$\psi(5) = \psi(4) + \frac{1}{4} = -\tau + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \quad \dots (2.70)$$

وهكذا نستمر اذا ما اردنا استخراج قيم $\psi(\cdot)$ لبقية الأعداد.

ولاستكمال العلاقة (2.68c) نجد الان قيمة تكامل الحد الثاني منها I_2 :

$$I_2 = \frac{1}{2\alpha^2} \int_0^{\infty} x^3 \ln x e^{-\theta\left(\frac{x^2}{2\alpha^2}\right)} dx$$

وباستعمال التعويض نفسه:

$$w = \theta \frac{x^2}{2\alpha^2} \rightarrow x = \left(\frac{2\alpha^2}{\theta}\right)^{\frac{1}{2}} w^{\frac{1}{2}} \rightarrow dx = \left(\frac{2\alpha^2}{\theta}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} w^{-\frac{1}{2}} dw$$

$$I_2 = \frac{1}{2\alpha^2} \int_0^\infty \left[\left(\frac{2\alpha^2}{\theta}\right)^{\frac{3}{2}} w^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2} \left(\ln\left(\frac{2\alpha^2}{\theta}\right) + \ln w \right) e^{-w} \cdot \left(\frac{2\alpha^2}{\theta}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} w^{-\frac{1}{2}} dw \right]$$

$$I_2 = \frac{1}{8\alpha^2} \left(\frac{2\alpha^2}{\theta}\right)^2 \left[\ln\left(\frac{2\alpha^2}{\theta}\right) \int_0^\infty w e^{-w} dw + \int_0^\infty w \ln w e^{-w} dw \right] \quad \dots (2.70a)$$

وإذ أن:

$$\int_0^\infty w e^{-w} dw = \Gamma(2) = 1 \quad \dots (2.70b)$$

وكذلك عن طريق ما بيناه في تعريف وخصائص دالة gamma و digamma function فإن :

$$\int_0^\infty w \ln w e^{-w} dw = \psi(2) = \psi(1) + 1 = -\tau + 1 \quad \dots (2.70c)$$

$$I_2 = \frac{\alpha^2}{2\theta^2} \left[\ln\left(\frac{2\alpha^2}{\theta}\right) + \psi(2) \right] \quad \dots (2.70d)$$

وبالتعويض عن قيمتي I_1 , I_2 الممثلتين بالعلاقين (2.68g), (2.70d) في العلاقة (2.68c):

$$E(\ln X) = \frac{\theta^2}{\alpha^2(\theta+1)} \left[\frac{\alpha^2}{2\theta} \left(\ln\left(\frac{2\alpha^2}{\theta}\right) + \psi(1) \right) + \frac{\alpha^2}{2\theta^2} \left(\ln\left(\frac{2\alpha^2}{\theta}\right) + \psi(2) \right) \right]$$

$$E(\ln X) = \frac{1}{2(\theta+1)} \left[\theta \ln\left(\frac{2\alpha^2}{\theta}\right) + \theta \psi(1) + \ln\left(\frac{2\alpha^2}{\theta}\right) + \psi(2) \right] \quad \dots (2.70e)$$

$$E(\ln X) = \frac{1}{2(\theta+1)} \left[(\theta + 1) \ln\left(\frac{2\alpha^2}{\theta}\right) + (\theta + 1) \psi(1) + 1 \right]$$

$$\therefore E(\ln X) = \frac{1}{2} \left[\ln\left(\frac{2\alpha^2}{\theta}\right) + \psi(1) + \frac{1}{\theta+1} \right] \quad \dots (2.70f)$$

$$E(\ln X) = \frac{1}{2} \left[\ln\left(\frac{2\alpha^2}{\theta}\right) - \tau + \frac{2}{\theta+2} \right] \quad \dots (2.70g)$$

كذلك لدينا :

$$E(\ln(U)) = \int_0^1 \ln u \, du \quad \dots (2.70h)$$

وباستعمال طريقة التكامل بالتجزئة:

$$\begin{array}{l} u^* = \ln u \\ du^* = \frac{1}{u} du \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} dv = du \\ v = u \end{array} \right.$$

$$E(\ln(U)) = u \ln u \Big|_0^1 - \int_0^1 du = 0 - 1 = -1$$

$$E(\ln(U)) = -1 \quad \dots (2.70i)$$

وبتعويض (2.70g) و (2.70i) في العلاقة (2.68b) نجد ان:

$$E(\ln Y) = \frac{1}{2} \left[\ln \left(\frac{2\alpha^2}{\theta} \right) - \tau + \frac{1}{\theta+1} \right] + \frac{1}{q} \quad \dots (2.70j)$$

وبالتعويض عن $E(\ln Y)$ في صيغة الوسط الهندسي المعطاة بالعلاقة (2.68a) نجد ان :

$$G.M. = EXP \left\{ \frac{1}{2} \left[\ln \left(\frac{2\alpha^2}{\theta} \right) - \tau + \frac{1}{\theta+1} \right] + \frac{1}{q} \right\}$$

2.5.2 دالتي المعولية ومعدل المخاطرة لتوزيع SLR

The Reliability and Hazard Rate Functions for SLR Distribution

هنالك مقياسان مهمان من مقاييس المعولية هما دالة المعولية ودالة معدل المخاطرة (الفشل اللحظي) وهما أساسيان في مجالات اختبار وقت الحياة lifetime او ما يسمى احيانا بوقت او زمن الفشل failure time، إذ تعرف دالة المعولية للمتغير العشوائي Y على انها :

$$R_Y(y) = 1 - F_Y(y) \quad \dots (2.71)$$

و ان $F_Y(y)$ تمثل cdf للمتغير العشوائي Y المبينة بالعلاقة (2.61) .

اما دالة معدل الفشل اللحظي أو ما تسمى بدالة Hazard فانها تعرف على اساس انها:

$$h_Y(y) = \frac{f_Y(y)}{1-F_Y(y)} = \frac{f_Y(y)}{R_Y(y)} \quad \dots (2.71a)$$

نتيجة (9.2): اشتقاق دالتي المعولية ومعدل المخاطرة لتوزيع SLR

ليكن $Y \sim SLR(\alpha, \theta, q)$ فان دالتي المعولية ومعدل المخاطرة (الفشل اللحظي) يمكن الحصول عليهما عن طريق تطبيق الصيغتين الآتيتين :

$$R_Y(y) = \frac{q(2\alpha^2)^{q/2}}{2(1+\theta)\theta^{q/2}y^q} \left(1 + \theta + \frac{q}{2} \right) \left[\Gamma \left(\frac{q}{2} \right) - \Gamma \left(\frac{q}{2}, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2} \right) \right] - \frac{q}{2(1+\theta)} \exp \left[-\theta \left(\frac{y^2}{2\alpha^2} \right) \right], y > 0 \quad \dots (2.72)$$

$$h_Y(y) = \frac{\frac{q(2\alpha^2)^{q/2} \left(1 + \theta + \frac{q}{2} \right) \left[\Gamma \left(\frac{q}{2} \right) - \Gamma \left(\frac{q}{2}, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2} \right) \right] - \frac{2}{y} \left(1 + \theta + \frac{q}{2} + \frac{\theta y^2}{2\alpha^2} \right) e^{-\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}}}{\frac{(2\alpha^2)^{q/2} \left(1 + \theta + \frac{q}{2} \right) \left[\Gamma \left(\frac{q}{2} \right) - \Gamma \left(\frac{q}{2}, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2} \right) \right] - e^{-\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}}}{\theta^{q/2}y^q}} \quad \dots (2.73)$$

الاثبات: ان اثبات هذه النتيجة يمكن الحصول عليه مباشرة عن طريق استعمال النتيجة (1.2) و (4.2) التي تخص ايجاد $F_Y(y), f_Y(y)$ اي العلاقتين (2.44) و (2.61) على الترتيب وكما يأتي:

$$R_Y(y) = 1 - F_Y(y)$$

$$R_Y(y) = \frac{q(2\alpha^2)^{q/2}}{2(1+\theta)\theta^{q/2}y^q} \left(1 + \theta + \frac{q}{2}\right) \left[\Gamma\left(\frac{q}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{q}{2}, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right) \right] - \frac{q}{2(1+\theta)} \exp\left[-\theta\left(\frac{y^2}{2\alpha^2}\right)\right], y > 0$$

اما لإيجاد دالة معدل الفشل (Hazard Rate) :

$$h_Y(y) = \frac{f_Y(y)}{R_Y(y)}$$

ولتسهيل الحسابات سنقوم أولاً بتجزئة البسط $f_Y(y)$ الى الحدين T_2, T_1 وتجزئة المقام $R_Y(y)$ الى الحدين T_4, T_3 وكما يأتي:

$$T_1 = \frac{q^2(2\alpha^2)^{q/2}}{2(1+\theta)\theta^{q/2}y^{q+1}} \left(1 + \theta + \frac{q}{2}\right) \left[\Gamma\left(\frac{q}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{q}{2}, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right) \right] \quad \dots (2.73a)$$

$$T_2 = \frac{q}{(1+\theta)y} \left[1 + \theta + \frac{q}{2} + \theta\left(\frac{y^2}{2\alpha^2}\right) \right] e^{-\theta\frac{y^2}{2\alpha^2}} \quad \dots (2.73b)$$

$$T_3 = \frac{q(2\alpha^2)^{q/2}}{2(1+\theta)\theta^{q/2}y^q} \left(1 + \theta + \frac{q}{2}\right) \left[\Gamma\left(\frac{q}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{q}{2}, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right) \right] \quad \dots (2.73c)$$

$$T_4 = \frac{q}{2(1+\theta)} \exp\left[-\theta\left(\frac{y^2}{2\alpha^2}\right)\right] \quad \dots (2.73d)$$

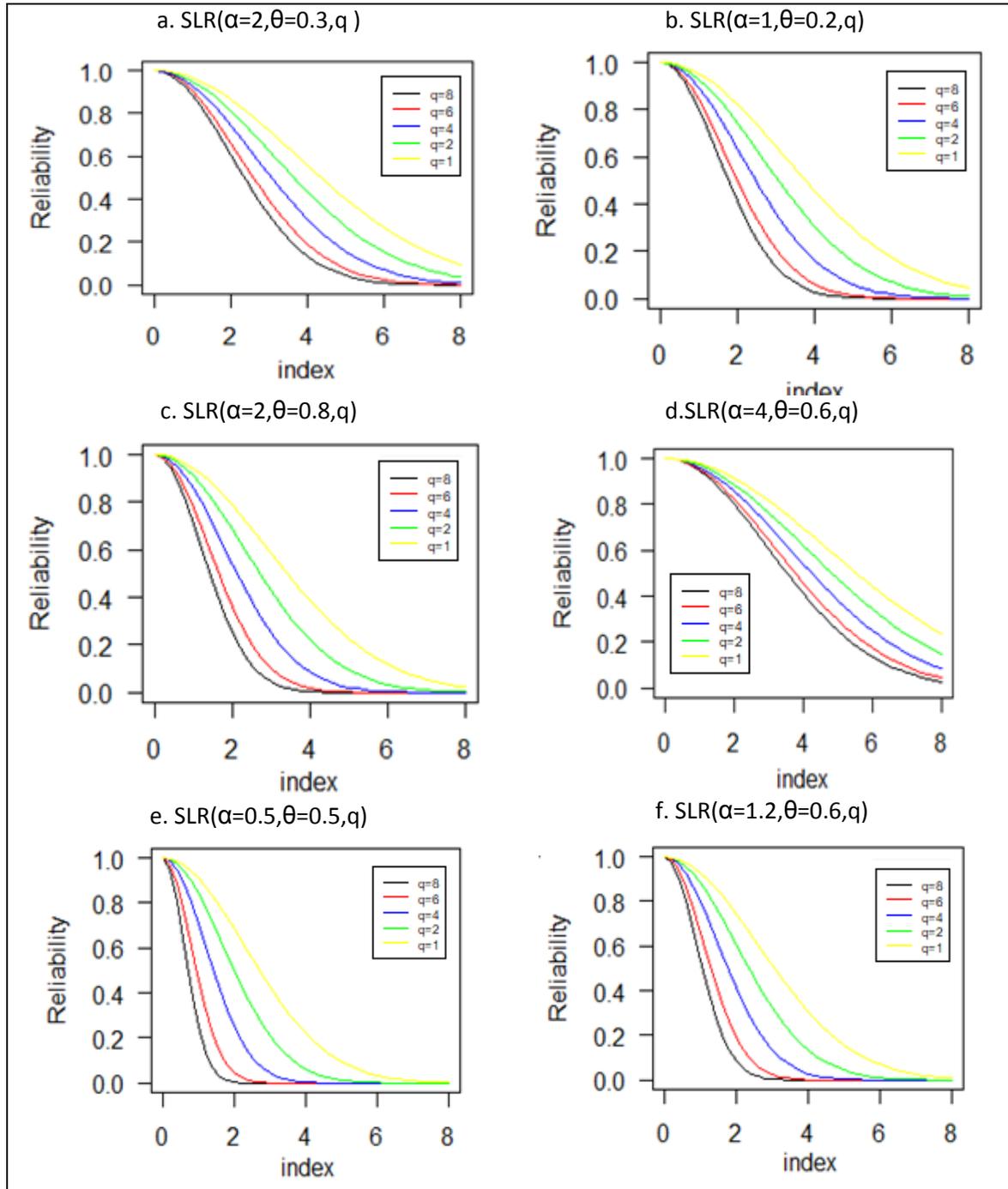
وبتعويض العلاقات الأربعة المذكورة أنفاً في العلاقة (2.71a) التي تمثل تعريف $h_Y(y)$ ينتج لدينا:

$$h_Y(y) = \frac{T_1 - T_2}{T_3 - T_4} \quad \dots (2.73e)$$

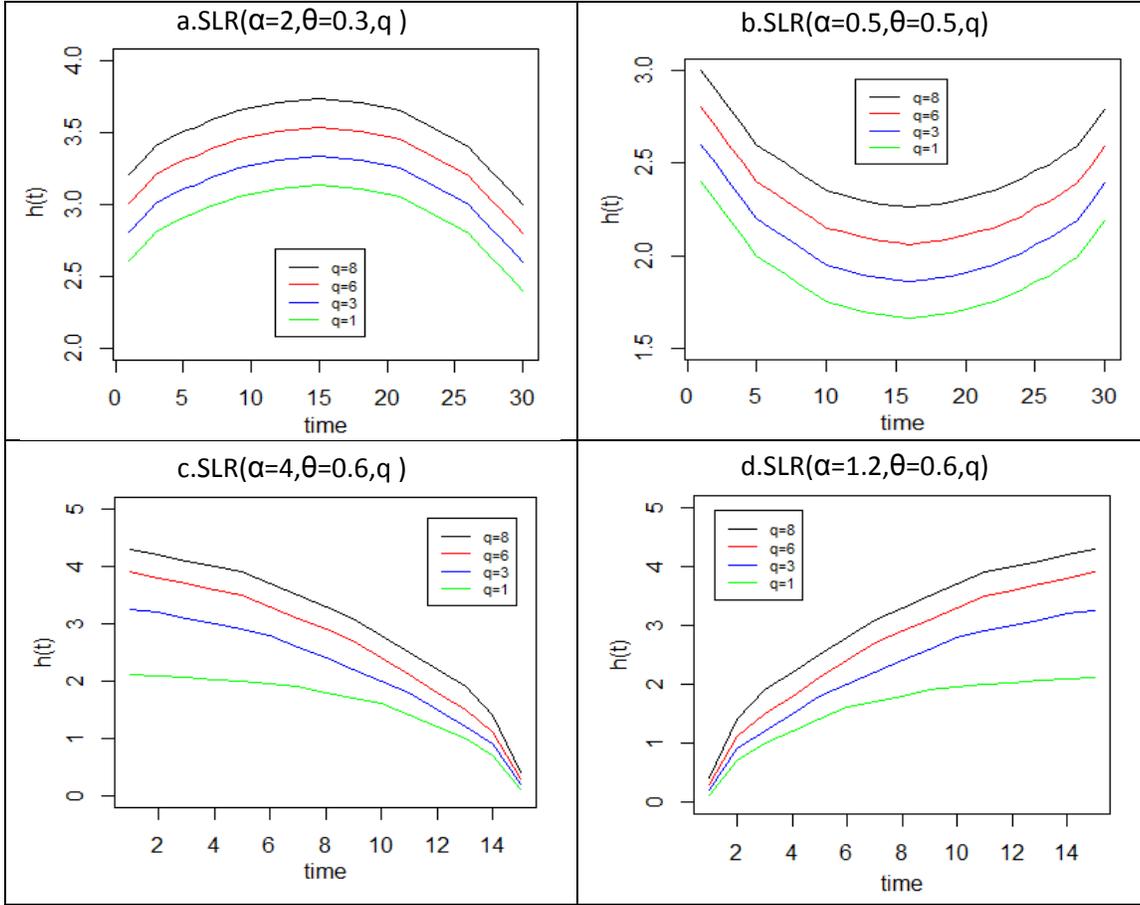
وبعد اختصار بعض المقادير نحصل على الشكل النهائي لصيغة $h_Y(y)$:

$$h_Y(y) = \frac{\frac{q(2\alpha^2)^{q/2}(1+\theta+\frac{q}{2})}{\theta^{q/2}y^{q+1}} \left[\Gamma\left(\frac{q}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{q}{2}, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right) \right] - \frac{2}{y} \left[1 + \theta + \frac{q}{2} + \theta\left(\frac{y^2}{2\alpha^2}\right) \right] e^{-\theta\frac{y^2}{2\alpha^2}}}{\frac{(2\alpha^2)^{q/2}(1+\theta+\frac{q}{2})}{\theta^{q/2}y^q} \left[\Gamma\left(\frac{q}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{q}{2}, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right) \right] - e^{-\theta\frac{y^2}{2\alpha^2}}}, y > 0$$

ونلاحظ بأن الدالتين $h_Y(y)$, $R_Y(y)$ قد ظهرتا على شكل صيغة مغلقة closed form بدلالة دالة Gamma غير الكاملة العليا Upper Incomplete Gamma Function.



شكل (2-5) يوضح دالة المعولية لتوزيع SLR ولقيم افتراضية مختلفة المصدر: من عمل الباحث



شكل (2-6) يوضح دالة المخاطرة لتوزيع SLR ولقيم أفتراضية مختلفة

المصدر: من عمل الباحث

3.5.2 تقدير معالم توزيع ليندلي-رايلي المقطوع (SLR)

في هذا المبحث سنحاول ايجاد تقديرات معالم التوزيع الاحتمالي SLR باستعمال طريقة

الامكان الاعظم MLE .

1.3.5.2 طريقة تقدير الامكان الأعظم Maximum Likelihood Estimation Method

نفترض ان لدينا عينة عشوائية Y_1, \dots, \dots, Y_n بحجم n مسحوبة من مجتمع يمتلك توزيع

SLR(α, θ, q) وبافتراض ايضا ان معالم التوزيع الثلاثة مجهولة وان y_1, \dots, \dots, y_n تمثل القيم

المشاهدة المقابلة للمتغير العشوائي Y ، وعليه فان دالة الامكان لهذه العينة هي :

$$L(\alpha, \theta, q) = \prod_{i=1}^n f_Y(y, \alpha, \theta, q) \quad \dots (2.74)$$

وان اللوغاريتم الطبيعي لدالة الامكان الاعظم يمكن كتابته بالشكل الآتي:

$$\ln L(\alpha, \theta, q) = \ln[\prod_{i=1}^n f_Y(y, \alpha, \theta, q)] \quad \dots (2.75a)$$

وكما رأينا فان هنالك اكثر من صورة لكتابة pdf للمتغير العشوائي Y يمكن استعمالها ولكن لتسهيل العملية الحسابية فاننا سنستعمل الصورة الآتية المأخوذة من النتيجة (3.2) وتحديداً العلاقة (2.57) والتي يمكن اعادة كتابتها بالشكل:

$$f_Y(y; \alpha, \theta, q) = \int_0^1 f_{Y/U}(y, u^{-1/q} \alpha, \theta) f_U(u) du$$

$$f_Y(y; \alpha, \theta, q) = \frac{\theta^2}{\alpha^2(1+\theta)} y \int_0^1 u^{2/q} \left[1 + \frac{y^2 u^{2/q}}{2\alpha^2} \right] e^{-\theta \left(\frac{y^2 u^{2/q}}{2\alpha^2} \right)} du$$

ان جميع صور pdf للمتغير العشوائي Y بالغة الصعوبة في تقدير معاملات توزيع SLR وكلها تحتاج الى استعمال طرائق عددية متقدمة مثل طريقة Newton-Raphson او طريقة النقطة الثابتة fixed point، كذلك يمكن استعمال اسلوب المحاكاة عند تقدير المعلمات. وعليه سنحاول كتابة الدالة الاحتمالية $\gamma(y)$ أنفاً بالشكل الآتي:

$$f_Y(y, \alpha, \theta, q) = \frac{\sqrt{2}}{\alpha} \frac{\theta^2}{(1+\theta)} \int_0^1 u^{1/q} \left[\frac{yu^{1/q}}{\sqrt{2}\alpha} \right] \left[1 + \left(\frac{yu^{1/q}}{\sqrt{2}\alpha} \right)^2 \right] e^{-\theta \left(\frac{yu^{1/q}}{\sqrt{2}\alpha} \right)^2} du \quad \dots (2.75b)$$

ولنسمي ما يلي

$$t_i = \frac{y_i u^{1/q}}{\sqrt{2}\alpha}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad \dots (2.75c)$$

$$G(y_i) = G(y; \alpha, \theta, q) = \int_0^1 u^{1/q} t_i (1 + t_i^2) e^{-\theta(t_i^2)} du \quad \dots (2.75d)$$

وعليه فان اللوغاريتم الطبيعي لدالة الامكان ستكون:

$$\ln L(\alpha, \theta, q) = \frac{n}{2} \ln 2 - n \ln \alpha + 2n \ln \theta - n \ln(1 + \theta) + \sum_{i=1}^n \ln[G(y_i)] \quad \dots (2.76)$$

ان تقديرات الامكان الاعظم قد تم الحصول عليها باستعمال التفاضلات الجزئية للعلاقة (2.76)

بالنسبة الى المعلمات المجهولة (α, θ, q) ومن ثم حل منظومة المعادلات المناظرة وهي كما يأتي:

$$\sum_{i=1}^n \frac{G_1(y_i)}{G(y_i)} = \frac{n}{\alpha} \quad \dots (2.76a)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{G_2(y_i)}{G(y_i)} = \frac{n}{1+\theta} - \frac{2n}{\theta} \quad \dots (2.76b)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{G_3(y_i)}{G(y_i)} = 0 \quad \dots (2.76c)$$

إذ أن:

$$G_1(y_i) = \frac{\partial G(y_i)}{\partial \alpha} \quad \dots (2.76d)$$

$$G_2(y_i) = \frac{\partial G(y_i)}{\partial \theta} \quad \dots (2.76e)$$

$$G_3(y_i) = \frac{\partial G(y_i)}{\partial q} \quad \dots (2.76f)$$

علماً أن:

$$t_i = \frac{y_i u^{1/q}}{\sqrt{2} \alpha}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

وقد كان الشكل النهائي لكل من $G_3(y_i)$, $G_2(y_i)$, $G_1(y_i)$ كما موضح في العلاقات

الثلاثة الآتية التي سيتم اثباتها لاحقاً:

$$G_1(y_i) = \frac{1}{\sqrt{2} \alpha} \int_0^1 u^{1/q} t_i [t_i^2 (2\theta t_i^2 + 2\theta - 3) - 1] e^{-\theta(t_i^2)} du \quad \dots (2.76g)$$

$$G_2(y_i) = - \int_0^1 u^{1/q} t_i^3 (1 + t_i^2) e^{-\theta(t_i^2)} du \quad \dots (2.76h)$$

$$G_3(y_i) = \frac{2}{q^2} \int_0^1 \ln(u) u^{1/q} t_i [t_i^2 (\theta t_i^2 + \theta - 2) - 1] e^{-\theta(t_i^2)} du \quad \dots (2.76i)$$

إذ أن :

$$G(y_i) = \int_0^1 u^{1/q} t_i (1 + t_i^2) e^{-\theta(t_i^2)} du$$

ولإثبات العلاقات $G_3(y_i)$, $G_2(y_i)$, $G_1(y_i)$ والتي تمثل التفاضل الجزئي للمعلمات q, θ, α

على الترتيب فسوف نستعمل قاعدة السلسلة Chain Rule كلما تطلبت الحاجة إليها وكما يأتي:

$$G_1(y_i) = \frac{\partial G(y_i)}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^1 u^{1/q} t_i (1 + t_i^2) e^{-\theta(t_i^2)} du = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \alpha} G_1^*(y_i) du$$

$$\therefore G_1(y_i) = \int_0^1 \frac{\partial G_1^*(y_i)}{\partial \alpha} du \quad \dots (2.77)$$

إذ أن:

$$G_1^*(y_i) = u^{1/q} t_i (1 + t_i^2) e^{-\theta(t_i^2)} \quad \dots (2.77a)$$

$$t_i = \frac{y_i u^{1/q}}{\sqrt{2} \alpha}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

ويتطبيق قاعدة السلسلة سيكون:

$$\frac{\partial G_1^*(y_i)}{\partial \alpha} = \frac{\partial G_1^*(y_i)}{\partial t_i} \cdot \frac{\partial t_i}{\partial \alpha} \quad \dots (2.77b)$$

$$\frac{\partial G_1^*(y_i)}{\partial t_i} = u^{1/q} [t_i (1 + t_i^2) e^{-\theta(t_i^2)} (-2\theta t_i) + e^{-\theta(t_i^2)} (t_i (2t_i) + (1 + t_i^2))] \quad \dots (2.77c)$$

$$= u^{1/q} \{-2\theta t_i^2 (1 + t_i^2) + 2t_i^2 + 1 + t_i^2\} e^{-\theta(t_i^2)} \quad \dots (2.77d)$$

$$= u^{1/q} \{-2\theta t_i^2 (1 + t_i^2) + 3t_i^2 + 1\} e^{-\theta(t_i^2)} \quad \dots (2.77e)$$

$$\frac{\partial t_i}{\partial \alpha} = -\frac{y_i u^{1/q}}{\sqrt{2} \alpha^2} \quad \dots (2.77f)$$

وبوضع (2.77e) و (2.77f) في (2.77b) ومن ثم وضع (2.77b) في (2.77) نحصل على:

$$G_1(y_i) = \int_0^1 u^{1/q} [t_i^2 (-2\theta t_i^2 - 2\theta + 3) + 1] \left[-\frac{y_i u^{1/q}}{\sqrt{2} \alpha \cdot \alpha} \right] e^{-\theta(t_i^2)} du \quad \dots (2.77g)$$

$$\therefore G_1(y_i) = \frac{1}{\sqrt{2} \alpha} \int_0^1 u^{1/q} t_i [t_i^2 (2\theta t_i^2 + 2\theta - 3) - 1] e^{-\theta(t_i^2)} du$$

أما لإيجاد $G_2(y_i)$ فإن:

$$G_2(y_i) = \frac{\partial G(y_i)}{\partial \theta} = \int_0^1 u^{1/q} t_i e^{-\theta(t_i^2)} \cdot (-t_i^2) du \quad \dots (2.78)$$

$$G_2(y_i) = - \int_0^1 u^{1/q} t_i^3 (1 + t_i^2) \cdot e^{-\theta(t_i^2)} du$$

ولإيجاد $G_3(y_i)$ إذ أن:

$$\begin{aligned} G_3(y_i) &= \frac{\partial G(y_i)}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q} \int_0^1 u^{1/q} t_i (1 + t_i^2) \cdot e^{-\theta(t_i^2)} du \\ &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial q} [u^{1/q} t_i (1 + t_i^2) \cdot e^{-\theta(t_i^2)}] du \\ &= \int_0^1 \left[u^{1/q} \frac{\partial H}{\partial q} + H \cdot u^{1/q} \left(-\frac{1}{q^2} \right) \ln u \right] du \quad \dots (2.79) \end{aligned}$$

إذ أن:

$$H = t_i(1 + t_i^2).e^{-\theta(t_i^2)} \quad \dots (2.79a)$$

وباستعمال قاعدة السلسلة:

$$\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\partial H}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial q} \quad \dots (2.79b)$$

مع ملاحظة أن $\frac{\partial H}{\partial t}$ يستخرج بطريقة مشابهة لـ $\frac{\partial G_1^*(y_i)}{\partial t_i}$ ، اي ان:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = [t_i^2(-2\theta t_i^2 - 2\theta + 3) + 1]e^{-\theta(t_i^2)} \quad \dots (2.79c)$$

$$\frac{\partial t}{\partial q} = \frac{y_i u^{1/q}}{\sqrt{2} \alpha} \left(-\frac{1}{q^2}\right) \ln u = -\frac{t_i}{q^2} \ln u \quad \dots (2.79d)$$

وبتعويض العلاقاتين (2.79c) و (2.79d) في العلاقة (2.79b) نحصل على:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q} &= [t_i^2(-2\theta t_i^2 - 2\theta + 3) + 1]e^{-\theta(t_i^2)} \left(\frac{-t_i}{q^2}\right) \ln u \\ \frac{\partial H}{\partial q} &= \ln u \frac{t_i}{q^2} [t_i^2(2\theta t_i^2 + 2\theta - 3) - 1]e^{-\theta(t_i^2)} \quad \dots (2.79e) \end{aligned}$$

وبتعويض العلاقة (2.79e) بالعلاقة (2.79) ينتج ان:

$$\begin{aligned} G_3(y_i) &= \int_0^1 \left\{ u^{1/q} \ln u \frac{t_i}{q^2} [t_i^2(2\theta t_i^2 + 2\theta - 3) - 1]e^{-\theta(t_i^2)} \right. \\ &\quad \left. + t_i(1 + t_i^2)e^{-\theta(t_i^2)} u^{1/q} \left(-\frac{1}{q^2}\right) \ln u \right\} du \quad \dots (2.79f) \end{aligned}$$

$$G_3(y_i) = \frac{1}{q^2} \int_0^1 \ln(u) u^{1/q} t_i \{ t_i^2(2\theta t_i^2 + 2\theta - 3) - 1 - (1 + t_i^2) \} e^{-\theta(t_i^2)} du \quad \dots (2.79g)$$

$$\therefore G_3(y_i) = \frac{2}{q^2} \int_0^1 \ln(u) u^{1/q} t_i [t_i^2(\theta t_i^2 + \theta - 2) - 1] e^{-\theta(t_i^2)} du$$

6.2 توزيع ليندلي- رايلي المقطوع ومتسلسلة القوى (SLRPSD)

أرتأى الباحث دراسة تأثير عدد التوقفات او عدد العطلات (المشاهدات) على سلوك التوزيع الاحتمالي المقترح الأول SLR فيما لو افترضنا أن هذا العدد بحد ذاته متغيراً عشوائياً وبشكل اكثر تحديداً أفترض أن N هو نفسه متغيراً عشوائياً وله سلوك احتمالي ومعرفة مدى تأثير ذلك في التوزيع المقترح SLR عن طريق ايجاد بعض الخصائص الاحتمالية والاحصائية وتحديداً مثل دوال $h(\cdot)$, $R(\cdot)$, cdf, pdf، وقد تم عمل ذلك عن طريق استعمال أسلوب التوزيعات المركبة Compounding

Distributions ما بين التوزيع المقترح SLR وتوزيع المتغير العشوائي N والحصول على توزيع جديد اخر (المقترح الثاني) والذي سنطلق عليه تسمية توزيع ليندلي- رايلي المقطوع ومتسلسلة القوى Slash Lindley-Rayleigh and Power Series Distribution (SLRPSD). وفيما يأتي عرضاً لهذه الفكرة:

لنفترض ان Y_1, \dots, Y_N هي متغيرات عشوائية مستقلة ومتطابقة التوزيع إذ تتبع توزيع SLR بدالة كثافة احتمالية pdf معطاة بالصيغة الآتية والمعرفة سابقاً بالعلاقة (2.46):

$$f_Y(y; \alpha, \theta, q) = \frac{q^2(2\alpha^2)^{q/2}}{2(1+\theta)\theta^{q/2}y^{q+1}} \left(1 + \theta + \frac{q}{2}\right) \left[\Gamma\left(\frac{q}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{q}{2}, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right) \right] - \frac{q}{(1+\theta)y} \left[1 + \theta + \frac{q}{2} + \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right] e^{-\theta\left(\frac{y^2}{2\alpha^2}\right)}, \quad y > 0$$

او احدى الصيغ المكافئة له وتحديدًا المعرفة بالعلاقة (2.39):

$$f_Y(y; \alpha, \theta, q) = \frac{\theta^2}{\alpha^2(1+\theta)} y \int_0^1 t^{2/q} \left[1 + \frac{y^2 t^{2/q}}{2\alpha^2}\right] e^{-\theta\left(\frac{y^2 t^{2/q}}{2\alpha^2}\right)} dt$$

إذ أن $\alpha > 0$ تمثل معلمة القياس ، $\theta > 0$ تمثل معلمة الشكل ، $q > 0$ تمثل معلمة التقترح للتوزيع . اما N فهو متغير عشوائي متقطع يتبع توزيع متسلسلة القوى وتحديدًا توزيع متسلسلة القوى المبتر عند القيمة صفرًا (zero-truncated distribution) بدالة كتلة احتمالية pmf معطاة بالشكل:

$$P(N = n) = \frac{a_n \lambda^n}{c(\lambda)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad \dots (2.80)$$

إذ أن a_n يعتمد على n فقط وان :

$$C(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda^n \quad \dots (2.80a)$$

علما ان $\lambda > 0$ بإذ أن $C(\lambda)$ تكون محددة او منتهية finite.

والجدول الآتي يوضح بعضا من توزيعات متسلسلة القوى:

جدول (4-2) يبين مكونات الشكل العام لتوزيعات متسلسلة القوى PSD

Distribution	a_n	$C(\lambda)$	$C'(\lambda)$	λ
Poisson	$(n!)^{-1}$	$e^\lambda - 1$	e^λ	$(0, \infty)$

Logarithmic	n^{-1}	$-\ln(1 - \lambda)$	$(1 - \lambda)^{-1}$	$(0,1)$
Geometric	1	$\lambda(1 - \lambda)^{-1}$	$(1 - \lambda)^{-2}$	$(0,1)$
Binomial	$\binom{m}{n}$	$(\lambda+1)^m - 1$	$m(\lambda+1)^{m-1}$	$(0, \infty)$

والان على فرض ان $Y_{(1)} = \min\{Y_i\}_{i=1}^n$ تشير الى الاحصاء المرتبة الاصغر smallest order

statistic فان دالة التوزيع التراكمي cdf للمتغير $Y_{(1)}/N = n$ يمكن كتابته بالشكل :

$$F_{Y_{(1)}/N=n} = 1 - [\bar{F}(y)]^n \quad \dots (2.80b)$$

إذ أن $F(y)$ تمثل cdf لتوزيع SLR والمعرفة بالعلاقة (2.61) .

وان $\bar{F}(y)$ هي مكملتها (دالة البقاء او المعولية $(R(y))$:

$$F_Y(y; \alpha, \theta, q) = 1 - \frac{q(2\alpha^2)^{\frac{q}{2}}}{2(1+\theta)\theta^{\frac{q}{2}}y^q} \left(1 + \theta + \frac{q}{2}\right) \left[\Gamma\left(\frac{q}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{q}{2}, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right) \right] + \frac{q}{2(1+\theta)} e^{-\theta\left(\frac{y^2}{2\alpha^2}\right)}, \quad y > 0$$

وعليه فان دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة j.p.d.f تعطى كما يأتي :

$$P(Y_{(1)} \leq y, N = n) = \frac{a_n \lambda^n}{c(\lambda)} * \left\{ 1 - \left[\frac{q(2\alpha^2)^{q/2}}{2(1+\theta)\theta^{q/2}y^q} \left(1 + \theta + \frac{q}{2}\right) \left[\Gamma\left(\frac{q}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{q}{2}, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right) \right] - \frac{q}{2(1+\theta)} e^{-\theta\left(\frac{y^2}{2\alpha^2}\right)} \right]^n \right\} \quad \dots (2.81)$$

وعليه فان فئة دالة التوزيع التراكمية cdf لتوزيع ليندلي - رايلي المقطوع ومتسلسلة القوى يمكن

تعريفه على اساس انه يمثل cdf الهامشية (The Marginal Distribution) للمتغير $Y_{(1)}$ بمعنى

$$F(y) = \sum_{n=1}^{\infty} P(Y_{(1)} \leq y, N = n) \quad \dots (2.81a)$$

$$F(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \lambda^n}{c(\lambda)} * \left\{ 1 - \left[\frac{q(2\alpha^2)^{q/2}}{2(1+\theta)\theta^{q/2}y^q} \left(1 + \theta + \frac{q}{2}\right) \left[\Gamma\left(\frac{q}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{q}{2}, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right) \right] - \frac{q}{2(1+\theta)} e^{-\theta\left(\frac{y^2}{2\alpha^2}\right)} \right]^n \right\} \quad \dots (2.81b)$$

$$= 1 - \frac{C \left\{ \lambda \left[\frac{q(2\alpha^2)^{q/2}}{2(1+\theta)\theta^{q/2}y^q} \left(1 + \theta + \frac{q}{2}\right) \left[\Gamma\left(\frac{q}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{q}{2}, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right) \right] - \frac{q}{2(1+\theta)} e^{-\theta\left(\frac{y^2}{2\alpha^2}\right)} \right] \right\}}{C(\lambda)}$$

... (2.82)

ان $F(y)$ أنفاً تمثل cdf لـ نموذج توزيع الحياة الاحتمالي الجديد (المقترح الثاني) (SLRPSD) وفي الفقرة القادمة سنناقش بعض خصائص توزيعات SLRPS منها دالة الكثافة الاحتمالية pdf ودالتي المعولية (البقاء) ومعدل الفشل اللحظي (معدل المخاطرة).

7.2 بعض أهم خصائص توزيع SLRPS

Some Important Properties of SLRPS

نتناول في هذا المبحث اشتقاق ثلاث خصائص لتوزيع المقترح الثاني SLRPS وهي دالة الكثافة الاحتمالية ودالة المعولية ودالة معدل الفشل او المخاطرة pdf, $R(\cdot)$, $h(\cdot)$ على الترتيب، فضلاً عن استعمال طريقة MLE لاشتقاق تقديرات معلمات التوزيع الاحتمالي SLRPS.

1.7.2 اشتقاق دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع SLRPS

ان pdf لتوزيع SLRPS يتم الحصول عليها بتفاضل دالة التوزيع cdf والمعطاة بالعلاقة

(2.82) ولتسهيل الكتابة سنستعمل الرمز $C(\lambda R_{YSLR}(y))$ ليمثل بسط هذه العلاقة وكما يأتي:

$$f(y) = F'(y) \quad \dots (2.82a)$$

$$= - \frac{C'(\lambda R_{YSLR}(y))}{C(\lambda)} \lambda R'(y) \quad \dots (2.82b)$$

إذ أن:

$$R'(y) = b \left(\frac{- \left[\Gamma \left(\frac{q}{2}, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2} \right) \right]'}{y^q} - \frac{q}{y^{q+1}} \left(\Gamma \left(\frac{q}{2} \right) - \Gamma \left(\frac{q}{2}, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2} \right) \right) \right) + \frac{q\theta}{2\alpha^2(1+\theta)} y e^{-\theta \left(\frac{y^2}{2\alpha^2} \right)} \quad \dots (2.82c)$$

$$b = \frac{q(2\alpha^2)^{q/2} (1+\theta + \frac{q}{2})}{2(1+\theta)\theta^{q/2}} \quad \text{وذلك بافتراض أن:}$$

والآن نقوم بتبسيط العلاقة (2.82c) ومن ثم تجزئة حدودها الى ما يأتي:

$$K_1 = \frac{q^2(2\alpha^2)^{q/2}}{2(1+\theta)\theta^{q/2}y^{q+1}} \left(1 + \theta + \frac{q}{2} \right) \left[\Gamma \left(\frac{q}{2} \right) - \Gamma \left(\frac{q}{2}, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2} \right) \right] \quad \dots (2.82d)$$

$$K_2 = \frac{\left[\Gamma\left(\frac{q}{2}, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right) \right]'}{y^q} \frac{q(2\alpha^2)^{q/2} \left(1 + \theta + \frac{q}{2}\right)}{2(1 + \theta)\theta^{q/2}} \quad \dots (2.82e)$$

$$K_3 = \frac{q\theta}{2\alpha^2(1 + \theta)} y e^{-\theta\left(\frac{y^2}{2\alpha^2}\right)} \quad \dots (2.82f)$$

وبتعويض العلاقات الثلاثة أنفاً في العلاقة (2.82b) يكون لدينا:

$$f(y) = \lambda (K_1 + K_2 - K_3) \frac{C'(\cdot)}{C(\lambda)} \quad \dots (2.82g)$$

$$C'(\cdot) = C' \left\{ \lambda \left[\frac{q(2\alpha^2)^{q/2}}{2(1 + \theta)\theta^{q/2} y^q} \left(1 + \theta + \frac{q}{2}\right) \left[\Gamma\left(\frac{q}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{q}{2}, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right) \right] - \frac{q}{2(1 + \theta)} e^{-\theta\left(\frac{y^2}{2\alpha^2}\right)} \right] \right\} \quad \dots (2.82h)$$

ولإيجاد $\left[\Gamma\left(\frac{q}{2}, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right) \right]'$ نستعمل قاعدة لايبنتز Leibnitz Rule والتي سبق ذكرها في التعريف (6.2) ووفقاً لهذا التعريف سيكون لدينا هنا:

$$I = \Gamma\left(\frac{q}{2}, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right) = \int_{\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}}^{\infty} t^{\frac{q}{2}-1} e^{-t} dt \quad \dots (2.83)$$

وإذا ما طبقنا القاعدة (2.83) والتي يكون فيها:

$$u_1(b) = \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}, \quad u_2(b) = \infty, \quad b = y$$

$$\frac{\partial I}{\partial y} = \left[\Gamma\left(\frac{q}{2}, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right) \right]' = \frac{\partial}{\partial y} \int_{\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}}^{\infty} t^{\frac{q}{2}-1} e^{-t} dt \quad \dots (2.83a)$$

سيكون الحد الاول قيمته= صفراً والحد الثاني ايضاً قيمته = صفراً ما عدا الحد الثالث اي ان :

$$\frac{\partial I}{\partial y} = \left[\Gamma\left(\frac{q}{2}, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right) \right]' = 0 + 0 - \left(\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right)^{\frac{q}{2}-1} e^{-\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}} \cdot \frac{\theta y}{\alpha^2}$$

$$\left[\Gamma\left(\frac{q}{2}, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right) \right]' = -\frac{\theta y}{\alpha^2} \left(\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right)^{\frac{q}{2}-1} e^{-\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}} \quad \dots (2.83b)$$

وبالتعويض عن هذه النتيجة في معادلة 2 المتمثلة بالعلاقة (2.82e) فأنها ستصبح :

$$K_2 = -\frac{q(2\alpha^2)^{\frac{q}{2}} \left(1 + \theta + \frac{q}{2}\right)}{2(1 + \theta)\theta^{\frac{q}{2}} y^q} * \frac{\theta y}{\alpha^2} \left(\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right)^{\frac{q}{2}-1} e^{-\theta\left(\frac{y^2}{2\alpha^2}\right)}$$

$$K_2^* = -\frac{q\theta\left(1 + \theta + \frac{q}{2}\right)}{2(1 + \theta)y} e^{-\theta\left(\frac{y^2}{2\alpha^2}\right)} \quad \dots (2.83c)$$

وبالتعويض عن K_2^* في معادلة $f(y)$ والمعطاة بالعلاقة (2.82g) نحصل على:

$$f(y) = \lambda[K_1 - K_2^* - K_3] \frac{C'(\cdot)}{C(\lambda)} \quad \dots (2.83d)$$

وباختصار بعض المقادير وأخذ القواسم المشتركة ينتج ان :

$$f(y) = \lambda \left\{ \frac{q^2 (2\alpha^2)^{\frac{q}{2}} (1 + \theta + \frac{q}{2})}{2(1 + \theta)\theta^{\frac{q}{2}} y^{q+1}} \left[\Gamma\left(\frac{q}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{q}{2}, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right) \right] - \frac{q}{(1 + \theta)y} \left(1 + \theta + \frac{q}{2} + \theta \frac{y^2}{2\alpha^2} \right) e^{-\theta\frac{y^2}{2\alpha^2}} \right\} \frac{C'(\cdot)}{C(\lambda)} \quad \dots (2.84)$$

يمكن التأكد من أن الدالة $f_{YSLRPS}(y)$ في العلاقة (2.84) أنفاً هي دالة كثافة احتمالية pdf وذلك بأعادة كتابتها بالصيغة الآتية:

$$f_{YSLRPS}(y) = \lambda f_{YSLR}(y) \cdot \frac{C'(\lambda R_{YSLR}(y))}{C(\lambda)} \quad \dots (2.85)$$

وبأجراء عملية التكامل نسبة الى المتغير العشوائي Y الذي يتبع توزيع SLRPS :

$$\int_0^\infty f_{YSLRPS}(y) dy = \int_0^\infty \lambda f_{YSLR}(y) \frac{C'[\lambda(1 - F_{YSLR}(y))]}{C(\lambda)} dy \quad \dots (2.85a)$$

$$= -\frac{1}{C(\lambda)} C[\lambda(1 - F_{YSLR}(y))] \Big|_0^\infty \quad \dots (2.85b)$$

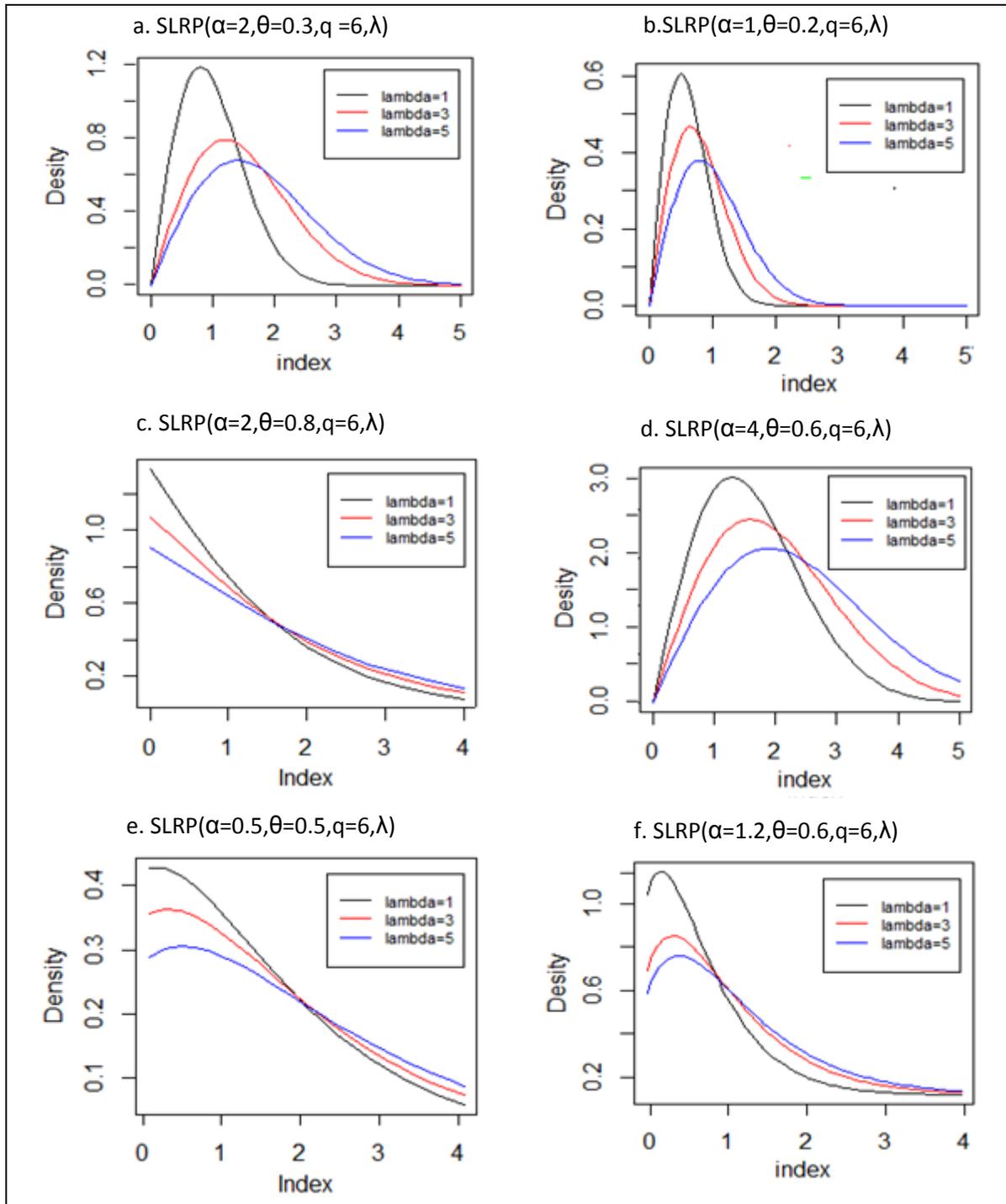
$$= -\frac{1}{C(\lambda)} C(\lambda R_{YSLR}(y)) \Big|_0^\infty \quad \dots (2.85c)$$

وبما ان دالة المعولية هي دالة تناقصية decreasing function أي أن :

$R(0) = 1, R(\infty) = 0$ وأن $C(0) = 0$ حسب تعريف $C(\cdot)$ لذلك سيكون لدينا:

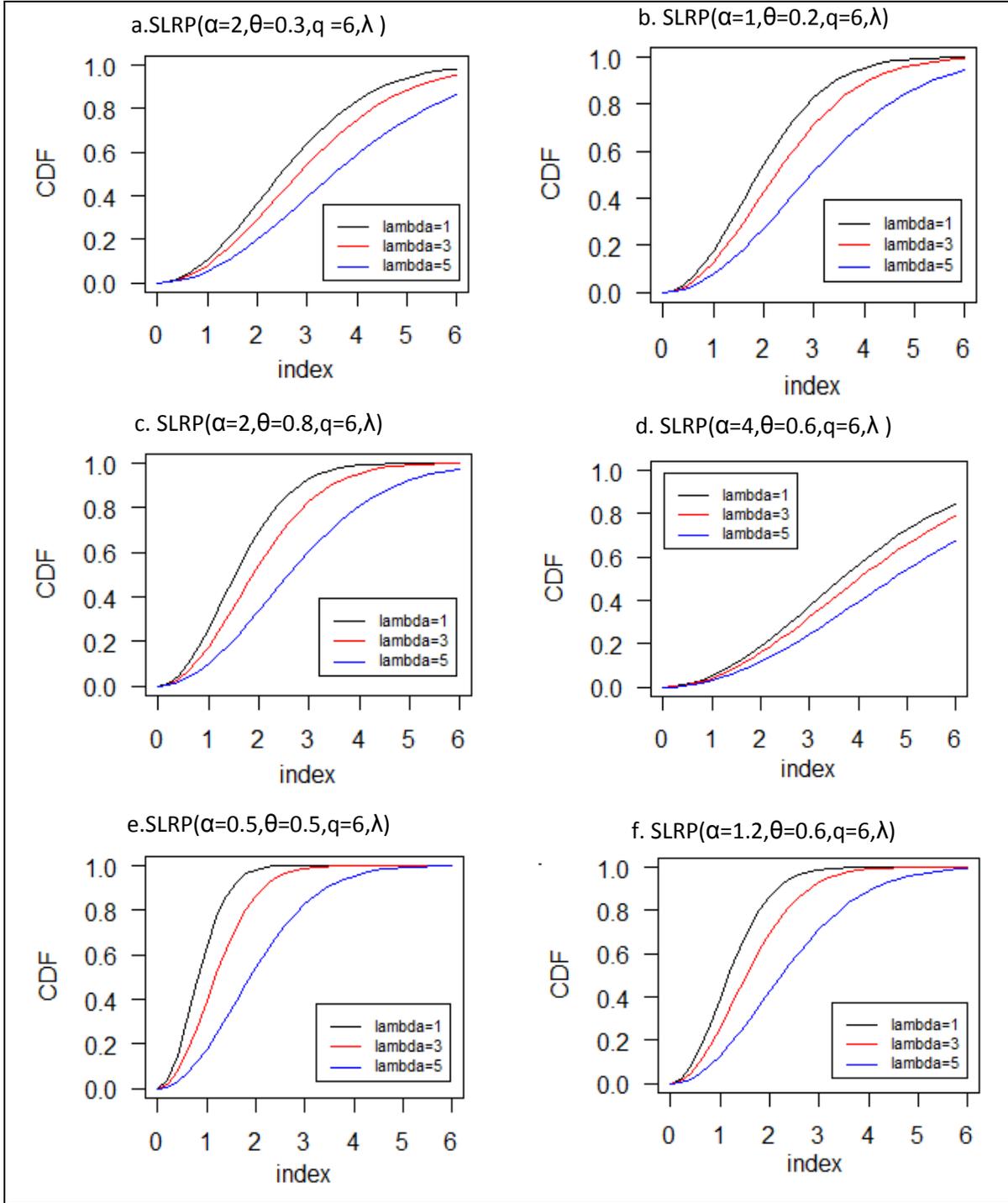
$$\int_0^\infty f_{YSLRPS}(y) dy = -\frac{1}{C(\lambda)} [0 - C(\lambda)] = 1 \quad \dots (2.85d)$$

وبذلك نكون قد تأكدنا من أن $f_{YSLRPS}(y)$ هي pdf .



شكل (7-2) يوضح دالة الكثافة الاحتمالية pdf لتوزيع SLRP ولقيم افتراضية مختلفة

المصدر: من عمل الباحث



شكل (8-2) يوضح دالة التوزيع التراكمية cdf لتوزيع SLRP ولقيم افتراضية مختلفة

المصدر: من عمل الباحث

2.7.2 دالة المعولية لتوزيع SLRPS

ان دالة المعولية (البقاء) The Reliability (Survival) Function يمكن استخراجها من العلاقة (2.82) التي تمثل cdf للمتغير Y الذي يتبع توزيع SLRPS اذ ان:

$$R(y) = S(y) = 1 - F(y) = \frac{C(\lambda R_{YSLR}(y))}{C(\lambda)}$$

$$R(y) = \frac{C(\lambda \left\{ \frac{q(2\alpha^2)^{\frac{q}{2}}(1+\theta+\frac{q}{2})}{2(1+\theta)\theta^{\frac{q}{2}}y^q} \left[\Gamma\left(\frac{q}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{q}{2}, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right) \right] - \frac{q}{2(1+\theta)} e^{-\theta\frac{y^2}{2\alpha^2}} \right\})}{C(\lambda)} \dots (2.86)$$

3.7.2 دالة المخاطرة (معدل الفشل اللحظي) لتوزيع SLRPS

ان دالة معدل المخاطرة (دالة الأخفاق) The Hazard Rate function لتوزيع SLRPS يمكن الحصول عليها من الصيغة الآتية:

$$h_{YSLRPS}(y) = \frac{f_{YSLRPS}(y)}{1 - F_{YSLRPS}(y)} = \frac{f_{YSLRPS}(y)}{R_{YSLRPS}(y)}$$

اي بقسمة العلاقة (2.84) او الصيغة المكافئة لها في العلاقة (2.85) على العلاقة (2.86) :

$$h_{YSLRPS}(y) = \frac{\lambda f_{YSLR}(y) \cdot \frac{C'(\lambda R_{YSLR}(y))}{C(\lambda)}}{\frac{C(\lambda R_{YSLR}(y))}{C(\lambda)}} = \lambda f_{YSLR}(y) \frac{C'(\lambda R_{YSLR}(y))}{C(\lambda R_{YSLR}(y))} \dots (2.87)$$

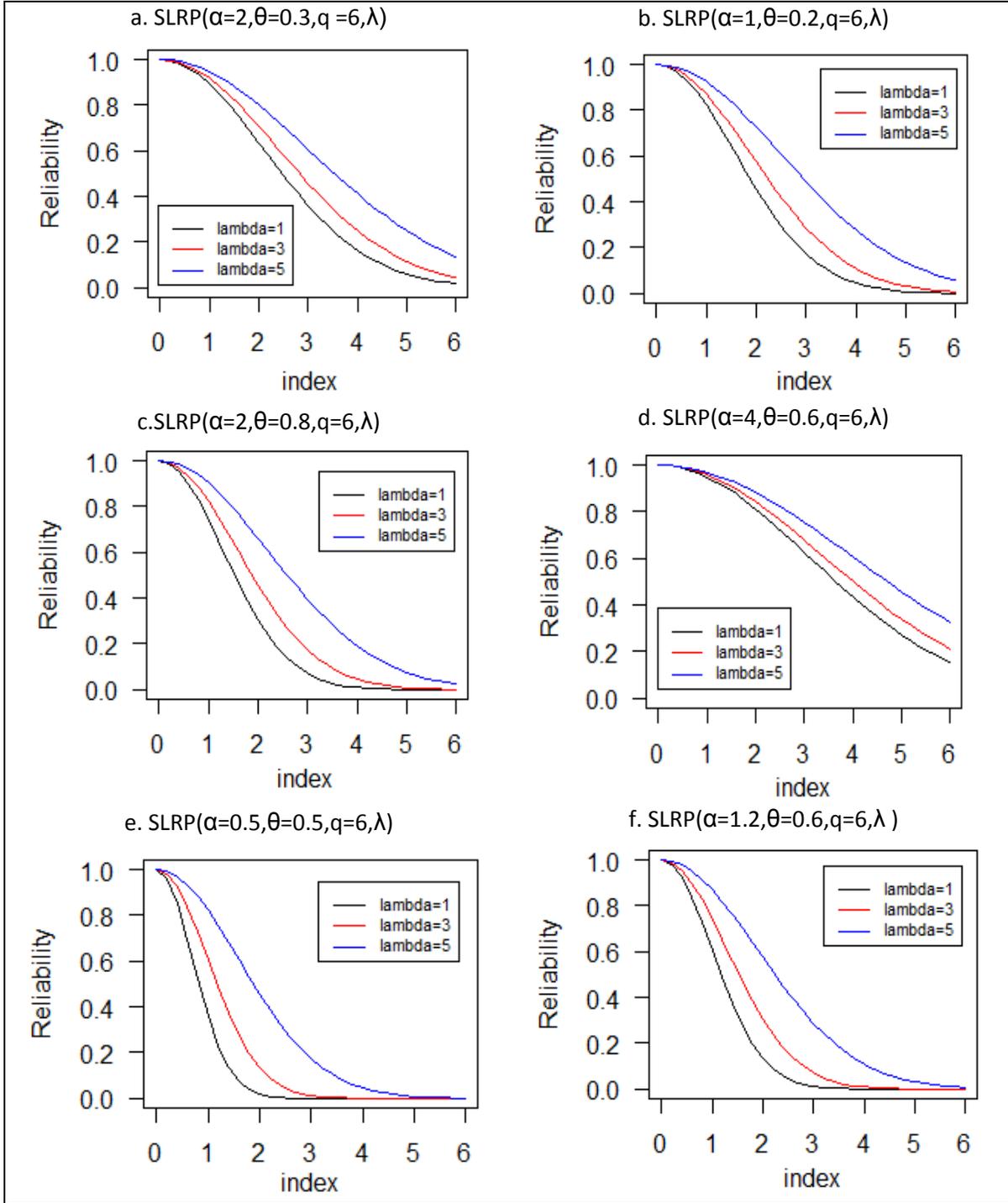
إذ أن $R_{YSLR}(y)$ تمثل دالة المعولية لتوزيع SLR والمعرفة سابقاً بالعلاقة (2.72) وللاختصار

سنرمز $(.) = (\lambda R_{YSLR}(y))$

$$. = \lambda \left\{ \frac{q(2\alpha^2)^{\frac{q}{2}}(1+\theta+\frac{q}{2})}{2(1+\theta)\theta^{\frac{q}{2}}y^q} \left[\Gamma\left(\frac{q}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{q}{2}, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right) \right] - \frac{q}{2(1+\theta)} e^{-\theta\left(\frac{y^2}{2\alpha^2}\right)} \right\}$$

... (2.87a)

$$(.) = (\lambda R_{YSLR}(y)) \dots (2.87b)$$



شكل (9-2) يوضح دالة المعولية لتوزيع SLRP ولقيم افتراضية مختلفة

المصدر: من عمل الباحث

القضية المقترحة (3.2) Proposition العلاقة بين توزيعي SLR و SLRPS

نستعرض هنا قضية مقترحة أو ما تسمى بمقترح رياضي proposition لدالة الكثافة الاحتمالية

للمتغير العشوائي Y الذي يتبع توزيع $SLRPS(\alpha, \theta, q, \lambda)$ والتي نصها الآتي:

ان غاية (limit) توزيع $SLRPSD(\alpha, \theta, q, \lambda)$ عندما $\lambda \rightarrow 0$ سوف ينتج عنه توزيع

$$. SLR(\alpha, \theta, q)$$

الأثبات: بما ان $C(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda^n$ فانه عند التعويض عنها في معادلة $F(y)$ لتوزيع

$SLRPSD(\alpha, \theta, q, \lambda)$ المعطاة في العلاقة (2.82) يكون لدينا :

$$F(y) = 1 - \frac{C(\lambda) \left\{ \frac{q (2\alpha^2)^{\frac{q}{2}} (1 + \theta + \frac{q}{2})}{2(1 + \theta)\theta^{\frac{q}{2}} y^q} \left[\Gamma\left(\frac{q}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{q}{2}, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right) \right] - \frac{q}{2(1 + \theta)} e^{-\theta \frac{y^2}{2\alpha^2}} \right\}}{C(\lambda)}$$

وبما أن غاية الثابت هو الثابت نفسه في الحد الأول، اما الحد الثاني فنستعمل قاعدة هوبيتال

L' Hopital Rule وكما يأتي:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} F(y) = 1 - \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n (\lambda R_{YSLR}(y))^n}{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda^n} \quad \dots (2.88)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} F(y) = 1 - \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (\lambda R_{YSLR}(y))^{n-1}}{\sum_{n=1}^{\infty} n a_n \lambda^{n-1}} R_{YSLR}(y) \quad \dots (2.88a)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} F(y) = 1 - \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{a_1 R_{YSLR}(y)}{a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n \lambda^{n-1}} - \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\sum_{n=2}^{\infty} n a_n \lambda^{n-1} (\lambda R_{YSLR}(y))^{n-1}}{a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a \lambda^{n-1}} R_{YSLR}(y) \quad \dots (2.88b)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} F(y) = 1 - R_{YSLR}(y) = F_{YSLR}(y) \quad \dots (2.88c)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} F(y) = 1 - \frac{q (2\alpha^2)^{\frac{q}{2}} (1 + \theta + \frac{q}{2})}{2(1 + \theta)\theta^{\frac{q}{2}} y^q} \left[\Gamma\left(\frac{q}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{q}{2}, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right) \right] + \frac{q}{2(1 + \theta)} e^{-\theta \frac{y^2}{2\alpha^2}}$$

والتي تمثل cdf لتوزيع $SLR(\alpha, \theta, q)$.

4.7.2 تقديرات الإمكان الأعظم لمعاملات توزيع SLRPS

لدينا pdf لتوزيع SLRPS المعرفة سابقاً بحسب العلاقة (2.85) :

$$f_{YSLRPO}(y; \alpha, \theta, q, \lambda) = \lambda f_{YSLR}(y; \alpha, \theta, q) \cdot \frac{\hat{C}(\lambda R_Y(y; \alpha, \theta, q))}{C(\lambda)}$$

إذ أن: $f_{YSLR}(y; \alpha, \theta, q)$ تمثل pdf لتوزيع SLR .

$R_Y(y; \alpha, \theta, q)$ تمثل دالة المعولية لتوزيع SLR .

$$\therefore L_Y(y; \alpha, \theta, q, \lambda) = \prod_{i=1}^n f_{Y_i}(y; \alpha, \theta, q, \lambda) = \prod_{i=1}^n \lambda f_{Y_i}(y; \alpha, \theta, q) \frac{\hat{C}(\lambda R_Y(y; \alpha, \theta, q))}{C(\lambda)} \quad \dots (2.89)$$

$$\ln L(\alpha, \theta, q, \lambda) = n \ln \lambda + \frac{n}{2} \ln 2 - n \ln \alpha + 2n \ln \theta - n \ln(1 + \theta) + \sum_{i=1}^n \ln[G(y_i)] + \sum_{i=1}^n \ln[\hat{C}(\lambda R_Y(\alpha, \theta, q))] - n \ln C(\lambda) \quad \dots (2.90)$$

ولدينا من العلاقة (2.72) ضمن النتيجة (9.2):

$$R_Y(\alpha, \theta, q) = \frac{q(2\alpha^2)^{\frac{q}{2}}}{2(1+\theta)\theta^{\frac{q}{2}}y^q} \left(1 + \theta + \frac{q}{2}\right) \left[\Gamma\left(\frac{q}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{q}{2}, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right)\right] - \frac{q}{2(1+\theta)} e^{-\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}}$$

ولإيجاد المشتقات الجزئية للحد ما قبل الاخير الموجود في معادلة $\ln L(\alpha, \theta, q, \lambda)$ والذي

سنفرضه Q ومن ثم نقوم بما يأتي:

$$\text{Let } Q = \sum_{i=1}^n \ln \hat{C}(\lambda R_Y(\alpha, \theta, q)) \quad \dots (2.91)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n \frac{C''(\lambda R_Y(\alpha, \theta, q))}{\hat{C}(\lambda R_Y(\alpha, \theta, q))} \cdot \lambda \frac{\partial R_Y(\alpha, \theta, q)}{\partial \alpha} \quad \dots (2.91a)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^n \frac{C''(\lambda R_Y(\alpha, \theta, q))}{\hat{C}(\lambda R_Y(\alpha, \theta, q))} \cdot \lambda \frac{\partial R_Y(\alpha, \theta, q)}{\partial \theta} \quad \dots (2.91b)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = \sum_{i=1}^n \frac{C''(\lambda R_Y(\alpha, \theta, q))}{\hat{C}(\lambda R_Y(\alpha, \theta, q))} \cdot \lambda \frac{\partial R_Y(\alpha, \theta, q)}{\partial q} \quad \dots (2.91c)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^n \frac{C''(\lambda R_Y(\alpha, \theta, q))}{\hat{C}(\lambda R_Y(\alpha, \theta, q))} \cdot R_Y(\alpha, \theta, q) \quad \dots (2.91d)$$

نجد $\frac{\partial R}{\partial \alpha}$ وكما يأتي :

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha} = L \left[(2\alpha^2)^{\frac{q}{2}} \frac{-\partial \Gamma\left(\frac{q}{2}, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right)}{\partial \alpha} + \left[\Gamma\left(\frac{q}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{q}{2}, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right) \right] \frac{q}{2} (2\alpha^2)^{\frac{q}{2}-1} \cdot 4\alpha \right] - \frac{q}{2(1+\theta)} e^{-\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}} \cdot \frac{\theta y^2}{2} \left(\frac{2}{\alpha^3}\right) \quad \dots (2.92)$$

وسنطبق قاعدة Leibnitz اي التفاضل تحت علامة التكامل لدالة gamma غير الكاملة العليا

علماً أننا قمنا بإعطاء بعض المقادير الرموز الآتية للاختصار:

$$L = \frac{q(1+\theta+\frac{q}{2})}{2(1+\theta)\theta^{\frac{q}{2}}y^q} \quad \dots (2.92a)$$

$$\Gamma = \left[\Gamma\left(\frac{q}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{q}{2}, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right) \right] \quad \dots (2.92b)$$

$$\Gamma\left(\frac{q}{2}, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right) = \int_{\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}}^{\infty} t^{\frac{q}{2}-1} e^{-t} dt \quad \dots (2.93)$$

$$\frac{\partial \Gamma\left(\frac{q}{2}, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right)}{\partial \alpha} = -\left(\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right)^{\frac{q}{2}-1} e^{-\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}} \frac{\theta y^2}{2} \left(\frac{-2}{\alpha^3}\right) = \frac{2}{\alpha} \left(\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right)^{\frac{q}{2}} e^{-\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}} \quad \dots (2.93a)$$

وبالتعويض عن العلاقة (2.93a) في (2.92) نجد ان:

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha} = L \left[-(2\alpha^2)^{\frac{q}{2}} \frac{2}{\alpha} \left(\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right)^{\frac{q}{2}} e^{-\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}} + 2q\alpha(2\alpha^2)^{\frac{q}{2}-1} \Gamma \right] - \frac{q\theta y^2}{2(1+\theta)\alpha^3} e^{-\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}} \quad \dots (2.93b)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha} = L \left[-\frac{2\theta^{\frac{q}{2}}}{\alpha} y^q e^{-\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}} + 2q\alpha(2\alpha^2)^{\frac{q}{2}-1} \left[\Gamma\left(\frac{q}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{q}{2}, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right) \right] \right] - \frac{q\theta y^2}{2(1+\theta)\alpha^3} e^{-\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}} \quad \dots (2.94)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \theta} = \frac{q(2\alpha^2)^{\frac{q}{2}}}{2y^q} \left[\frac{(1+\theta+\frac{q}{2})}{(1+\theta)\theta^{\frac{q}{2}}} \cdot \frac{-\partial\Gamma(\frac{q}{2}, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2})}{\partial\theta} + \Gamma \frac{(1+\theta)\theta^{\frac{q}{2}} - (1+\theta+\frac{q}{2})((1+\theta)^{\frac{q}{2}}\theta^{\frac{q}{2}-1} + \theta^{\frac{q}{2}})}{(1+\theta)^2\theta^{\frac{q}{2}}} \right] - \frac{q}{2} \left[\frac{(1+\theta)e^{-\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}}(-\frac{y^2}{2\alpha^2}) - e^{-\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}}}{(1+\theta)^2} \right] \quad \dots (2.95)$$

كذلك نجد $\frac{\partial R}{\partial \theta}$ ولإيجاد $\frac{\partial\Gamma(\frac{q}{2}, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2})}{\partial\theta}$

$$\Gamma\left(\frac{q}{2}, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right) = \int_{\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}}^{\infty} t^{\frac{q}{2}-1} e^{-t} dt \quad \dots (2.96)$$

$$\frac{\partial\Gamma\left(\frac{q}{2}, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right)}{\partial\theta} = -\left(\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right)^{\frac{q}{2}-1} e^{-\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}} \cdot \frac{y^2}{2\alpha^2} = -\theta^{\frac{q}{2}-1} \left(\frac{y^2}{2\alpha^2}\right)^{\frac{q}{2}} e^{-\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}} \quad \dots (2.96a)$$

وبالتعويض عن (2.96a) واختصار بعض المقادير في (2.95) وافترض ما يأتي نجد ان:

$$m = \frac{q(2\alpha^2)^{\frac{q}{2}}}{2y^q} \quad \dots (2.96b)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \theta} = m \left[\frac{(1+\theta+\frac{q}{2})}{\theta(1+\theta)} \left(\frac{y^2}{2\alpha^2}\right)^{\frac{q}{2}} e^{-\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}} + \Gamma \frac{(1+\theta) - (1+\theta+\frac{q}{2})\left(\frac{q(1+\theta)}{2\theta} + 1\right)}{(1+\theta)^2} \right] + \frac{q}{2(1+\theta)^2} \left[\frac{(1+\theta)y^2}{2\alpha^2} + 1 \right] e^{-\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}} \quad \dots (2.97)$$

ثم نجد $\frac{\partial R}{\partial q}$ وفق التجزئة الآتية:

$$\frac{\partial R}{\partial q} = \frac{\partial R_1}{\partial q} - \frac{\partial R_2}{\partial q} \quad \dots (2.98)$$

إذ أن:

$$R_1 = \frac{q(2\alpha^2)^{\frac{q}{2}} \left(1+\theta+\frac{q}{2}\right)}{2(1+\theta)\theta^{\frac{q}{2}} y^q} \left[\Gamma\left(\frac{q}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{q}{2}, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right) \right] \quad \dots (2.99)$$

$$R_2 = \frac{q}{2(1+\theta)} e^{-\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}} \rightarrow \frac{\partial R_2}{\partial q} = \frac{1}{2(1+\theta)} e^{-\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}} \quad \dots (2.100)$$

والآن نجد $\frac{\partial R_1}{\partial q}$ وكما يأتي:

$$\ln R_1 = \ln q + \frac{q}{2} \ln(2\alpha^2) + \ln\left(1 + \theta + \frac{q}{2}\right) - \ln 2 - \ln(1 + \theta) - \frac{q}{2} \ln(1 + \theta) - q \ln y + \ln \left[\Gamma\left(\frac{q}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{q}{2}, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right) \right] \quad \dots (2.101)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln R_1}{\partial q} &= \frac{1}{R_1} \frac{\partial R_1}{\partial q} \\ &= \frac{1}{q} + \frac{\ln(2\alpha^2)}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{1 + \theta + \frac{q}{2}} - \frac{\ln(1 + \theta)}{2} - \ln y + \frac{\left[\Gamma\left(\frac{q}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{q}{2}, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right) \right]'}{\left[\Gamma\left(\frac{q}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{q}{2}, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right) \right]} \end{aligned} \quad \dots (2.102)$$

$$\frac{\partial R_1}{\partial q} = R_1 \left\{ \frac{1}{q} + \frac{\ln(2\alpha^2)}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{1 + \theta + \frac{q}{2}} - \frac{\ln(1 + \theta)}{2} - \ln y + \frac{[\Gamma]'}{\Gamma} \right\} \quad \dots (2.103)$$

والآن نجد $\left[\Gamma\left(\frac{q}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{q}{2}, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right) \right]'$ نسبة الى q إذ أن :

$$\left[\Gamma\left(\frac{q}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{q}{2}, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right) \right]' = \left[\Gamma\left(\frac{q}{2}\right) \right]' - \left[\Gamma\left(\frac{q}{2}, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right) \right]' \quad \dots (2.104)$$

لدينا :

$$\Gamma\left(\frac{q}{2}\right) = \int_0^\infty t^{\frac{q}{2}-1} e^{-t} dt \quad \dots (2.104a)$$

وباستعمال قاعدة Leibnitz (الاشتقاق تحت علامة التكامل):

$$\left[\Gamma\left(\frac{q}{2}\right) \right]' = \frac{d\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}{dq} = \frac{1}{2} \int_0^\infty t^{\frac{q}{2}-1} \ln t e^{-t} dt \quad \dots (2.104b)$$

$$\frac{d \ln \Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}{dq} = \frac{\left[\Gamma\left(\frac{q}{2}\right) \right]'}{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)} = \frac{1}{2\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)} \int_0^\infty t^{\frac{q}{2}-1} \ln t e^{-t} dt = \psi\left(\frac{q}{2}\right) \quad \dots (2.104c)$$

وذلك من تعريف digamma ، وعليه نعوض العلاقة (2.104c) في العلاقة (2.104b)

لنحصل على:

$$\left[\Gamma\left(\frac{q}{2}\right) \right]' = \psi\left(\frac{q}{2}\right) \Gamma\left(\frac{q}{2}\right) \quad \dots (2.105)$$

$$\Gamma\left(\frac{q}{2}, \frac{\theta y^2}{2\alpha}\right) = \int_{\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}}^{\infty} t^{\frac{q}{2}-1} e^{-t} dt \quad \dots (2.106)$$

وباستعمال قاعدة الاشتقاق تحت علامة التكامل نسبة الى q للعلاقة (2.106):

$$\left[\Gamma\left(\frac{q}{2}, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right) \right]' = \frac{\partial \Gamma\left(\frac{q}{2}, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right)}{\partial q} = \frac{1}{2} \int_{\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}}^{\infty} t^{\frac{q}{2}-1} \ln t e^{-t} dt \quad \dots (2.107)$$

وبوضع (2.105) و (2.107) في (2.104) ينتج ان:

$$\left[\Gamma\left(\frac{q}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{q}{2}, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right) \right]' = \psi\left(\frac{q}{2}\right) \Gamma\left(\frac{q}{2}\right) - \frac{1}{2} \int_{\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}}^{\infty} t^{\frac{q}{2}-1} \ln t e^{-t} dt \quad \dots (2.108)$$

وبتسمية (2.108) ب A وتعويضها في (2.103) نجد ان:

$$\frac{\partial R_1}{\partial q} = R_1 \left\{ \frac{1}{q} + \frac{\ln(2\alpha^2)}{2} + \frac{1}{2(1+\theta+\frac{q}{2})} - \frac{\ln(1+\theta)}{2} - \ln y + \frac{A}{\Gamma} \right\} \quad \dots (2.109)$$

وبتعويض العلاقة (2.109) في العلاقة (2.98) نحصل على:

$$\frac{\partial R}{\partial q} = R_1 \left\{ \frac{1}{q} + \frac{\ln(2\alpha^2)}{2} + \frac{1}{2(1+\theta+\frac{q}{2})} - \frac{\ln(1+\theta)}{2} - \ln y + \frac{A}{\left[\Gamma\left(\frac{q}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{q}{2}, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right) \right]} \right\} - \frac{1}{2(1+\theta)} e^{-\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}} \quad \dots (2.110)$$

وبهذا تكون منظومة المعادلات غير الخطية المستعملة في إيجاد تقديرات الإمكان الأعظم

لمعلمات التوزيع الاحتمالي SLRPS $(\alpha, \theta, q, \lambda)$ والتي ستحل باستعمال إحدى الطرائق العددية وفقاً

لما يأتي:

$$\frac{\partial \ln L(\alpha, \theta, q, \lambda)}{\partial \alpha} = 0 \quad \xrightarrow{\text{yields}}$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{G_1(y_i)}{G(y_i)} + \lambda \sum_{i=1}^n \frac{C''(\lambda R_Y)}{C'(\lambda R_Y)} \frac{q \left(1 + \theta + \frac{q}{2}\right)}{2(1+\theta)\theta^{\frac{q}{2}} y^q} *$$

$$\left[-\frac{2\theta^{\frac{q}{2}}}{\alpha} y^q e^{-\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}} + 2q\alpha(2\alpha^2)^{\frac{q}{2}-1} \left[\Gamma\left(\frac{q}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{q}{2}, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right) \right] \right]$$

$$-\frac{q\theta y^2}{2(1+\theta)\alpha^3} e^{-\frac{\theta y^2}{2\alpha}} - \frac{n}{\alpha} = 0 \quad \dots (2.111)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(\alpha, \theta, q, \lambda)}{\partial \theta} = 0 \quad \xrightarrow{\text{yields}} \\ \sum_{i=1}^n \frac{G_2(y_i)}{G(y_i)} + \lambda \sum_{i=1}^n \frac{C''(\lambda R_Y)}{C'(\lambda R_Y)} \left\{ \frac{q(2\alpha^2)^{\frac{q}{2}}}{2 y_i^q} \left[\frac{(1+\theta + \frac{q}{2}) y_i^q}{\theta(1+\theta)} e^{-\frac{\theta y^2}{2\alpha}} \right. \right. \\ \left. \left. + \left[\Gamma\left(\frac{q}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{q}{2}, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right) \right] \cdot \frac{(1+\theta) - (1+\theta + \frac{q}{2}) \left(\frac{q(1+\theta)}{2\theta} + 1\right)}{(1+\theta)^2} \right] \right\} \\ + \frac{q}{2(1+\theta)^2} \left[\frac{(1+\theta)y^2}{2\alpha^2} + 1 \right] e^{-\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}} \left\{ -\frac{n}{1+\theta} + \frac{2n}{\theta} = 0 \quad \dots (2.112) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(\alpha, \theta, q, \lambda)}{\partial q} = 0 \quad \xrightarrow{\text{yields}} \\ \sum_{i=1}^n \frac{G_3(y_i)}{G(y_i)} + \lambda \sum_{i=1}^n \frac{C''(\lambda R_Y)}{C'(\lambda R_Y)} \cdot \left\{ R_1 \left[\frac{1}{q} + \frac{\ln(2\alpha)}{2} + \frac{1}{2(1+\theta + \frac{q}{2})} - \frac{\ln(1+\theta)}{2} \right. \right. \\ \left. \left. - \ln y_i + \frac{A}{\left[\Gamma\left(\frac{q}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{q}{2}, \frac{\theta y^2}{2\alpha^2}\right) \right]} \right] \right\} - \frac{1}{2(1+\theta)} e^{-\frac{\theta y^2}{2\alpha^2}} = 0 \quad \dots (2.113) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(\alpha, \theta, q, \lambda)}{\partial \lambda} = 0 \quad \xrightarrow{\text{yields}} \\ \sum_{i=1}^n \frac{C''(\lambda R_Y)}{C'(\lambda R_Y)} \cdot R_Y(\alpha, \theta, q) - \frac{nC'(\lambda)}{C(\lambda)} + \frac{n}{\lambda} = 0 \quad \dots (2.114) \end{aligned}$$

لقد تم استخدام معايير المقارنة في الجانب التجريبي والتطبيقي لبيان افضلية التوزيعين المقترحين من حيث التطابق ونمذجة بيانات اوقات الفشل التي تتسم بالنفرطح العالي او المفرط وهي:

$$AMSE(\hat{\alpha}_k) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (\alpha - \hat{\alpha}_k)^2, AMSE(\hat{\theta}_k) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (\theta - \hat{\theta}_k)^2$$

$$AMSE(\hat{q}_k) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (q - \hat{q}_k)^2, AMSE(\hat{\lambda}_k) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (\lambda - \hat{\lambda}_k)^2$$

$$AMSE(\hat{R}_k) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (R - \hat{R}_k)^2, RAMSE(\hat{R}_k) = \sqrt{\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (R - \hat{R}_k)^2}$$

الفصل الثالث

الجانِب التجريبي والنظيقي

الفصل الثالث

الجانب التجريبي والتطبيقي

1.3 التمهيد The Preface

سنجزأ هذا الفصل الى مبحثين يتضمن الاول الجانب التجريبي اما الأخر فسيتضمن الجانب التطبيقي. ففي الجانب التجريبي سنعرض فكرة عامة مختصرة عن اسلوب المحاكاة (Simulation) وطريقة توليد البيانات المستعملة في تقدير معالم ودالة المعولية للإنموذجين المقترحين الاول والثاني $SLR(\alpha, \theta, q)$ و $SLRPS(\alpha, \theta, q, \lambda)$ على الترتيب إذ أن طريقة التقدير المستعملة هي MLEE ، وتتم المقارنة بين المقترحين و التوزيعات الاساسية الناشئة منها لتحديد الافضل منها باستعمال معياري اقل متوسط مربعات للخطأ $Least\ Mean\ (AMSE)Square\ Error$. والجذر التربيعي لمتوسط مربعات الخطأ (RAMSE) اما الجانب التطبيقي فسيتضمن تطبيقاً عملياً باستعمال بيانات حقيقية للإنموذجين المقترحين.

2.3 الجانب التجريبي/ المحاكاة The Empirical Part (The Simulation)

1.2.3 المفهوم العام للمحاكاة The General Concept of Simulation

يمكن تعريف المحاكاة بصورة عامة على انها نسخ او تقليد (Imitation) لسلوك نظام حقيقي عن طريق بناء نموذج يمثل هذا النظام ثم اختباره بحيث أن إنموذج المحاكاة هذا سيمثل سلوك النظام الحقيقي المطلوب نسخه او تقليده عن طريق دراسة التفاعلات الحاصلة بين مكونات ذلك النظام والتي تكون مخرجاته (Outcomes) ممثلة بمقاييس تظهر أداء ذلك النظام. وفي علم الإحصاء الرياضي والاحتمالات فان المحاكاة تستعمل توليد البيانات اصطناعيا من اجل اختبار فرضية او طريقة احصائية في ظل افتراضات معينة يجب اختبارها وتأكيدها.

ايضا يمكن عدّ المحاكاة بانها طريقة لنمذجة أحداث عشوائية أو نمذجة توزيع احتمالي معين بحيث ان مخرجاتها تكون متلائمة بشكل قريب جدا من مخرجات الواقع الحقيقي، ومن ذلك نفهم بأنها أسلوب عددي لتنفيذ تجارب على الحاسب الإلكتروني وبطريقة معينة وعالية الدقة.

2.2.3 طريقة مونت كارلو Monte-Carlo Method

ان طريقة مونت كارلو او تجارب مونت كارلو هي تجارب حاسوبية تتضمن معاينة عشوائية من توزيعات احتمالية وبشكل متكرر للحصول على نتائج عديدة. ان محاكاة مونت كارلو تستعمل توليد الأعداد العشوائية (RNG) Random Numbers Generation لإنتاج بيانات من أنموذج رياضي، وان عملية توليد الأعداد العشوائية هي عبارة عن أنتاج بيانات تكون مشاهداتها مستقلة ومتطابقة أو متماثلة التوزيع ومسحوبة من توزيع معين، ولذا فإنها طريقة لتقييم عمليات أو أنظمة باستعمال قيم احتمالية بالاعتماد على المعاينة المتكررة من توليد الأعداد عشوائياً .

3.2.3 وصف تجربة المحاكاة Description of the Simulation Experiment

تم توليد بيانات عشوائية باستعمال أربعة أحجام مختلفة (100,75,50,25) بغرض تقدير معالم التوزيعين المقترحين $SLR(\alpha, \theta, q)$ و $SLRPS(\alpha, \theta, q, \lambda)$ ، فضلاً عن تقدير دالة المعولية لكل منهما وذلك باستعمال طريقة محاكاة مونت كارلو Mont Carlo، إذ تم كتابة و تنفيذ برنامج المحاكاة الحاسبة الإلكترونية باستعمال لغة R (R-Language) ، علماً أنه قد تم تكرار كل تجربة 1000 مرة ($K = 1000$) ولقيم أفتراضية مختلفة من معالم التوزيعين المقترحين $SLR(\alpha, \theta, q)$ و $SLRPS(\alpha, \theta, q, \lambda)$ إذ أن $\alpha > 0$ تمثل معلمة القياس و $\theta > 0$ تمثل معلمة الشكل و $q > 0$ تمثل معلمة التفرطح (التسطح) في التوزيعين المقترحين.

اما $\lambda > 0$ في المقترح الثاني فإنه تجدر الإشارة هنا الى أنها تمثل معلمة أحد توزيعات متسلسلة القوى المذكورة مسبقاً في الفصلين الأول والثاني ، وهنا نلفت الانتباه الى أن الباحث وقع اختياره في الجانبين التجريبي والتطبيقي على توزيع بواسون المبتور عند النقطة صفراً وبذلك ستمثل $\lambda > 0$ المعدل في توزيع بواسون المبتور (معدل عدد العطلات اوالتوقفات لماكنة معينة) ، مع ملاحظة أنه كان من الممكن اختيار أيّاً من توزيعات متسلسلة القوى الأخرى ،وعلى سبيل المثال لا الحصر لو كان الاختيار لتوزيع ثنائي الحدين المبتور فإن $0 < \lambda < 1$ في هذه الحالة ستمثل احتمال حالات النجاح (احتمال عطل أو توقف الماكنة).

لقد تم استعمال بعض المقاييس أو المعايير الإحصائية في هذا الفصل مثل متوسط مربع الخطأ (Mean square Error) AMSE وكذلك الجذر التربيعي لمتوسط مربع الخطأ (The RAMSE)

Square Root of Mean Square Error) لمقارنة النتائج التي نحصل عليها إذ تكون الأفضلية بالنتائج (التقديرات) لتلك التي تقابل أو تملك القيمة الأصغر أو الأقل لهذه المقاييس أو المعايير الإحصائية ، وأن الصيغ الرياضية لهذه المقاييس يمكن أن تعطى كما يأتي:

• معدل متوسط مربع الخطأ (AMSE)

$$AMSE(\hat{\alpha}) = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R (\alpha_i^{\hat{}} - \alpha)^2 \quad \dots (3.1)$$

• الجذر التربيعي لمعدل متوسط مربع الخطأ (RAMSE)

$$RAMSE(\hat{\alpha}) = \sqrt{\frac{1}{R} \sum_{i=1}^R (\alpha_i^{\hat{}} - \alpha)^2} \quad \dots (3.2)$$

وهذه الصيغ قد كتبت بدلالة المعلمة α وهي تنطبق على بقية المعلمات، إذ أن R تمثل عدد التكرارات (Replications) لكل تجربة والتي تساوي 1000 تكرار، وكما ذكرنا فإن نتائج المحاكاة قد تم الحصول عليها باستعمال برنامج نفذ بلغة R (R- Language)، أما أستعرض هذه النتائج فسيبين لاحقاً ضمن جداول خاصة .

3.3 مراحل تجارب المحاكاة Stages of the simulation experiments

1.3.3 المرحلة الأولى The first stage

المرحلة الأولى في تجارب المحاكاة هي مرحلة اختيار وتحديد القيم الافتراضية لمعلمت التوزيعات المدروسة واحجام العينات، وقد تم اختيارها كما هو مبين في الجدول (1-3) ادناه:

جدول (1-3) يبين القيم الافتراضية للمعلمت المستعملة في تجارب المحاكاة

α	θ	q	λ	α	θ	q	λ	α	θ	q	λ
0.3	0.1	1	1	0.6	0.2	1	1	0.4	0.4	1	1
		2	2			2	2			2	2
		3	4			3	4			3	4
		6	8			6	8			6	8
		8				8				8	
α	θ	q	λ	α	θ						
3	1.5	1	1	5	2.5						

		2	2								
		3	4								
		6	8								
		8									

وان احجام العينات التي تم اختيارها هي $(n = 25, 50, 75, 100)$.

2.3.3 المرحلة الثانية The second stage

في هذه المرحلة يتم توليد المتغيرات العشوائية المدروسة وفقاً لقيم المعلمات الافتراضية المحددة في الجدول (1-3) واحجام العينات المذكورة انفاً، اذ يمكن تلخيص خطوات توليد المتغيرات العشوائية المدروسة كما يأتي (Jorda,2010,,30) و (Jimmy & et al., 2017,29) و (Boikanyo,2021,11) وبالأستفادة من :

Development Core Team (2016) R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna . <http://www.R-project.org/>

1. توليد المتغير العشوائي z الذي يتبع توزيع ليندلي بمعلمة القياس α وفقاً لطريقة (Monte Carlo) وبأسلوب (Accept-Reject):

أ. توليد متغير عشوائي يتبع التوزيع المنتظم المستمر $U \sim Uniform(0,1)$

ب. استعمال طريقة التحويل العكسي (Inverse Transformation Method) للحصول على بيانات متغير يتبع التوزيع الاسي وليكن x بمعلمة القياس α كما يأتي:

$$x = F^{-1}(u)$$

$$u = 1 - e^{-\alpha x}$$

$$x = -\frac{1}{\alpha} \ln(1 - u)$$

ج. توليد المتغير العشوائي y الذي يتبع توزيع كما بطريقة التحويل العكسي ووفق الخطوات الآتية:

- توليد متغيرات عشوائية تتبع التوزيع المنتظم المستمر u_j بحيث ان $j = 1, 2$

- استعمال طريقة التحويل العكسي للحصول على بيانات متغير يتبع توزيع كما $v = \sum_{j=1}^2 x_j$

بمعلمتي الشكل والقياس المطلوبتين وهي كل من $\theta = 2$ و α على الترتيب وكما يأتي:

$$v = F^{-1}(1 - u_j)$$

$$u_j = e^{-\alpha v}$$

$$v = \text{Ln}(1 - u_j)$$

$$v = -\frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^2 \text{Ln}(1 - u_j)$$

د. يتم اختيار مشاهدات المتغير z بالاعتماد على القاعدة الآتية، إذا كانت $u_j \leq \frac{\alpha}{\alpha+1}$ عندها فإن

$$z_i = x_i, \text{ وخلافاً لذلك فإن } z_i = v_i.$$

2. توليد المتغير العشوائي s الذي يتبع توزيع رايلي بالمعلمة α وفق الخطوات الآتية:

أ- توليد المتغير u الذي يتبع التوزيع المنتظم المستمر

ب- تحويل المتغير العشوائي المنتظم باستعمال طريقة التحويل المعكوس لإيجاد المتغير العشوائي

الذي يتبع توزيع رايلي كما يأتي:

$$u = F(s)$$

$$u = 1 - e^{-\left(\frac{s^2}{2\alpha^2}\right)}$$

$$s = F^{-1}(u)$$

$$s = \alpha [-2 \text{Ln}(1 - u)]^{\frac{1}{2}}$$

3. توليد المتغير العشوائي d الذي يتبع توزيع ليندلي رايلي بالمعلمتين θ, α وفق الخطوات الآتية:

أ- توليد المتغير u الذي يتبع التوزيع المنتظم المستمر

ب- تحويل المتغير العشوائي المنتظم باستعمال طريقة التحويل المعكوس لإيجاد المتغير العشوائي

الذي يتبع توزيع LR كما يأتي:

$$u = F(d)$$

$$u = 1 - \left(1 + \frac{\theta d^2}{2(\theta + 1)\alpha^2}\right) e^{-\frac{\theta d^2}{2\alpha^2}}$$

$$d = F^{-1}(u)$$

ومن الممكن إيجاد المعكوس أنفاً بواسطة الإيعازات المتوفرة في مكتبات لغة R.

4. يمكن إيجاد المتغير العشوائي y الذي يتبع توزيع SLR بالمعلمات q, θ, α وذلك عن طريق

إيجاد المتغير العشوائي w وفقاً للصيغة:

$$w = \sqrt{2\alpha} z, z \sim \text{Lindley}(\alpha)$$

عندها فإن:

$$y = w u^{-\frac{1}{q}}$$

5. توليد المتغير العشوائي g الذي يتبع توزيع SLRP بالمعلمات $\lambda, q, \theta, \alpha$ وفق الخطوات الآتية:

أ- توليد المتغير u الذي يتبع التوزيع المنتظم المستمر

ب- تحويل المتغير العشوائي المنتظم باستعمال طريقة التحويل المعكوس لإيجاد المتغير العشوائي

الذي يتبع توزيع SLRP كما يأتي

$$u = F(g)$$

اذ ان $F(g)$ هي دالة الكثافة التجميعية لتوزيع SLRP المعرفة في الصيغة (2.82)

$$g = F^{-1}(u)$$

يمكن إيجاد التحويل أنفاً بواسطة الايعازات المتوفرة في مكتبات لغة R.

3.3.3 المرحلة الثالثة The third stage

هذه المرحلة تمثل مرحلة تقدير معلمات ودوال المعولية للتوزيعات التي تم توليدها في المرحلة الثانية

وباستعمال طريقة الإمكان الأعظم وفقاً لما تم تناوله في الجانب النظري، وحسب التفاصيل الآتية:

1. مقدر معلمة القياس لتوزيع رايلي والمعرفة بصيغة pdf له في الجدول (2-2).

2. مقدر معلمة القياس لتوزيع ليندلي والمعرفة بصيغة pdf له في الجدول (1-2).

3. مقدرات معلمتي القياس والشكل θ, α على الترتيب لتوزيع ليندلي - رايلي LR والمعرفة بصيغة pdf

له في العلاقة (2.32).

4. تقديرات معلمات القياس والشكل والتفرطح q, θ, α على الترتيب لتوزيع SLR المعطى في الصيغة

(2.75b) المكافئة للصيغتين (2.39) و (2.57)، ووفقاً للمعادلة (2.76) ومكوناتها وباستعمال الدالة

(optim) المتوفرة ضمن مكتبات لغة R، فضلاً عن إيجاد مقدر دالة المعولية لتوزيع SLR وفقاً

للمعادلة (2.72).

5. تقديرات المعلمات $\lambda, q, \theta, \alpha$ لتوزيع SLRP المعطى في الصيغة (2.84) ، ووفقاً للمعادلة (2.90) وصيغ التقديرات المعطاة بالعلاقات (2.111),(2.112),(2.113),(2.114) على الترتيب، ويفضل استعمال الدالة (optim) المتوفرة ضمن مكتبات لغة R، فضلاً عن ايجاد مقدر دالة المعولية لتوزيع SLRP وفقاً للمعادلة (2.86) .

6. تم تكرار الخطوات في المرحلتين الثانية والثالثة ($K = 1000, k = 1, 2, \dots, K$) لكل تجربة، اذ ان المقدرات النهائية التي تمثل التقديرات المختلفة هي عبارة عن معدل المقدرات التي تم الحصول عليها من الخطوات السابقة وكما يأتي:

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_{k=1}^K \hat{\alpha}_k}{K}, \hat{\theta} = \frac{\sum_{k=1}^K \hat{\theta}_k}{K}, \hat{q} = \frac{\sum_{k=1}^K \hat{q}_k}{K}, \hat{\lambda} = \frac{\sum_{k=1}^K \hat{\lambda}_k}{K}, \hat{R} = \frac{\sum_{k=1}^K \hat{R}_k}{K}$$

4.3.3 المرحلة الرابعة The fourth stage

المرحلة الرابعة من تجارب المحاكاة هي مرحلة المقارنة بين مقدرات المعلمات ودوال المعولية للمتغيرات المختلفة، ويتم ذلك باستعمال المقياس الاحصائي AMSE معدل متوسط مربعات الخطأ والمقياس الاحصائي RAMSE اذ ان:

$$AMSE(\hat{\alpha}_k) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (\alpha - \hat{\alpha}_k)^2, AMSE(\hat{\theta}_k) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (\theta - \hat{\theta}_k)^2$$

$$AMSE(\hat{q}_k) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (q - \hat{q}_k)^2, AMSE(\hat{\lambda}_k) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (\lambda - \hat{\lambda}_k)^2$$

$$AMSE(\hat{R}_k) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (R - \hat{R}_k)^2, AMSE(\hat{R}_k) = \sqrt{\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (R - \hat{R}_k)^2}$$

4.3 تحليل نتائج تجربة المحاكاة

Analysis of the Simulation Experiment Results

تم استعمال طريقة تقدير الامكان الأعظم MLEE لتقدير معالم التوزيعين المقترحين SLRP,SLR فضلاً عن تقدير معالم التوزيعات الأصلية (الأساسية) الناشئة منها L, R, LR بغرض مقارنتها وبيان الأفضلية بينها، وقد تم استعمال لغة R (R-language) لكتابة برنامج لتنفيذ هذه الطريقة وباستعمال القيم الافتراضية المبينة في جدول (1-3).

أن جميع النتائج قد تم وضعها ضمن الجداول المبينة أدناه فضلاً عن إجراء تحليل لتلك النتائج
ويحسب كل جدول وكما يأتي:

جدول (2-3) يبين نتائج تقديرات طريقة الامكان الأعظم MLE لمعاملات التوزيعات الاحتمالية الأصلية والمقترحة عند حجوم عينات مختلفة (n=25,50,75,100) ولمجموعة القيم الافتراضية (الاختيارية) ($\alpha=0.3$, $\theta=0.1$, $q=1,2,3,6,8$, $\lambda=1,2,4,8$)

n=25

Dist.	λ	q	$\hat{\alpha}$	AMSE	$\hat{\theta}$	AMSE	\hat{q}	AMSE	$\hat{\lambda}$	AMSE
R			0.33752	3.25E-03	-	-	-	-	-	-
L	-	-	0.33602	3.09E-03	-	-	-	-	-	-
LR			0.26542	2.96E-03	0.09488	2.02E-04	-	-	-	-
SLR	-	1	0.26715	2.83E-03	0.09514	1.98E-04	0.75428	1.02E-01	-	-
		2	0.26879	2.68E-03	0.09538	1.92E-04	1.72971	1.13E-01	-	-
		3	0.27035	2.55E-03	0.09561	1.90E-04	2.67565	1.43E-01	-	-
		6	0.32816	2.42E-03	0.09583	1.80E-04	5.57834	2.06E-01	-	-
		8	0.32676	2.31E-03	0.09604	1.74E-04	7.40968	3.58E-01	-	-
SLRP	1	1	0.27435	2.68E-03	0.09543	1.94E-04	0.76657	9.56E-02	0.74522	1.03E-02
		2	0.27564	2.55E-03	0.09566	1.87E-04	1.74322	1.05E-01	1.25988	1.13E-02
		3	0.28378	2.30E-03	0.09622	1.79E-04	2.69187	1.30E-01	1.26507	1.25E-02
		6	0.30759	2.19E-03	0.10355	1.74E-04	5.59943	1.88E-01	1.27038	1.37E-02
		8	0.30424	2.04E-03	0.10317	1.68E-04	7.43920	3.24E-01	0.72422	1.51E-02
	2	1	0.27272	2.55E-03	0.09570	1.89E-04	0.77824	8.96E-02	1.74267	1.05E-02
		2	0.27408	2.43E-03	0.09592	1.83E-04	1.75606	9.77E-02	2.26248	1.26E-02
		3	0.28114	2.12E-03	0.09675	1.74E-04	2.70727	1.20E-01	1.73228	1.51E-02
		6	0.31167	1.94E-03	0.10266	1.67E-04	5.61946	1.71E-01	1.72692	1.82E-02
		8	0.30706	1.73E-03	0.10174	1.60E-04	7.46724	2.93E-01	2.27854	2.18E-02
	4	1	0.27097	2.43E-03	0.09596	1.85E-04	0.78933	8.42E-02	4.25990	1.07E-02
		2	0.27243	2.32E-03	0.09616	1.80E-04	1.76826	9.14E-02	4.26510	1.39E-02
		3	0.27807	1.98E-03	0.09721	1.70E-04	2.72191	1.11E-01	3.72960	1.81E-02
		6	0.31795	1.75E-03	0.10173	1.62E-04	5.63848	1.57E-01	3.72419	2.36E-02
		8	0.31177	1.63E-03	0.10105	1.57E-04	7.49388	2.65E-01	4.28133	3.06E-02
	8	1	0.26912	2.32E-03	0.09620	1.81E-04	0.79986	7.94E-02	8.26250	1.09E-02
		2	0.27067	2.22E-03	0.09639	1.76E-04	1.77985	8.56E-02	8.26775	1.53E-02
		3	0.2745	1.88E-03	0.09760	1.66E-04	2.73581	1.03E-01	7.72689	2.14E-02
		6	0.32394	1.66E-03	0.10112	1.59E-04	5.65656	1.44E-01	7.72143	3.00E-02
		8	0.3214	1.59E-03	0.10063	1.54E-04	7.51918	2.40E-01	8.28414	4.20E-02

n=50

<i>Dist.</i>	λ	q	$\hat{\alpha}$	<i>AMSE</i>	$\hat{\theta}$	<i>AMSE</i>	\hat{q}	<i>AMSE</i>	$\hat{\lambda}$	<i>AMSE</i>
R			0.32814	1.98E-03	-	-	-	-	-	-
L	-	-	0.32701	1.87E-03	-	-	-	-	-	-
LR			0.27407	1.80E-03	0.09590	1.29E-04	-	-	-	-
SLR	-	1	0.27536	1.72E-03	0.09611	1.27E-04	0.77885	7.77E-02	-	-
		2	0.27659	1.64E-03	0.09630	1.22E-04	1.75674	8.60E-02	-	-
		3	0.27776	1.56E-03	0.09649	1.21E-04	2.70808	1.10E-01	-	-
		6	0.32112	1.48E-03	0.09666	1.14E-04	5.62051	1.60E-01	-	-
		8	0.32007	1.42E-03	0.09683	1.11E-04	7.46871	2.81E-01	-	-
SLRP	1	1	0.27684	1.64E-03	0.09634	1.24E-04	0.78991	7.25E-02	0.76121	9.05E-03
		2	0.27800	1.56E-03	0.09652	1.20E-04	1.76890	7.98E-02	1.24357	9.95E-03
		3	0.28088	1.42E-03	0.09698	1.14E-04	2.72268	9.97E-02	1.24844	1.09E-02
		6	0.31795	1.35E-03	0.10284	1.11E-04	5.63948	1.46E-01	1.25341	1.20E-02
		8	0.31605	1.27E-03	0.10254	1.07E-04	7.49528	2.53E-01	0.74152	1.32E-02
	2	1	0.27823	1.56E-03	0.09656	1.21E-04	0.80041	6.78E-02	1.75882	9.23E-03
		2	0.27932	1.49E-03	0.09673	1.17E-04	1.78046	7.42E-02	2.24601	1.11E-02
		3	0.28355	1.32E-03	0.09740	1.11E-04	2.73655	9.20E-02	1.74907	1.33E-02
		6	0.31347	1.21E-03	0.10213	1.07E-04	5.65751	1.33E-01	1.74406	1.60E-02
		8	0.30883	1.09E-03	0.10139	1.02E-04	7.52051	2.29E-01	2.26106	1.91E-02
	4	1	0.27954	1.49E-03	0.09677	1.18E-04	0.81039	6.35E-02	4.24359	9.42E-03
		2	0.28056	1.43E-03	0.09693	1.14E-04	1.79143	6.92E-02	4.24847	1.22E-02
		3	0.28586	1.24E-03	0.09777	1.08E-04	2.74972	8.50E-02	3.74657	1.59E-02
		6	0.30875	1.10E-03	0.10138	1.03E-04	5.67463	1.21E-01	3.74150	2.07E-02
		8	0.30530	1.04E-03	0.10084	9.97E-05	7.54449	2.07E-01	4.26367	2.69E-02
	8	1	0.28076	1.43E-03	0.09696	1.16E-04	0.81987	5.97E-02	8.24603	9.61E-03
		2	0.28173	1.37E-03	0.09711	1.12E-04	1.80186	6.47E-02	8.25095	1.34E-02
		3	0.28784	1.18E-03	0.09808	1.06E-04	2.76223	7.87E-02	7.74403	1.88E-02
		6	0.30569	1.05E-03	0.10090	1.01E-04	5.69090	1.11E-01	7.73891	2.64E-02
		8	0.30318	1.01E-03	0.10050	9.79E-05	7.56726	1.87E-01	8.26631	3.69E-02

n=75

<i>Dist.</i>	λ	q	$\hat{\alpha}$	<i>AMSE</i>	$\hat{\theta}$	<i>AMSE</i>	\hat{q}	<i>AMSE</i>	$\hat{\lambda}$	<i>AMSE</i>
R			0.32111	1.22E-03	-	-	-	-	-	-
L	-	-	0.32026	1.15E-03	-	-	-	-	-	-
LR			0.28055	1.11E-03	0.09672	3.79E-05	-	-	-	-
SLR	-	1	0.28152	1.06E-03	0.09689	3.68E-05	0.87837	2.49E-02	-	-
		2	0.28245	1.01E-03	0.09704	3.49E-05	1.86621	2.72E-02	-	-
		3	0.28332	9.68E-04	0.09719	3.45E-05	2.83945	3.41E-02	-	-
		6	0.31584	9.25E-04	0.09733	3.15E-05	5.79128	4.81E-02	-	-
		8	0.31505	8.86E-04	0.09746	2.99E-05	7.70779	8.26E-02	-	-
SLRP	1	1	0.28263	1.02E-03	0.09707	3.55E-05	0.88445	2.34E-02	0.79879	6.43E-03
		2	0.28350	9.70E-04	0.09722	3.37E-05	1.87290	2.54E-02	1.20524	7.07E-03
		3	0.28566	8.91E-04	0.09758	3.15E-05	2.84747	3.10E-02	1.20934	7.77E-03
		6	0.31347	8.52E-04	0.10227	2.99E-05	5.80172	4.40E-02	1.21353	8.55E-03
		8	0.31204	8.03E-04	0.10203	2.82E-05	7.72240	7.47E-02	0.78220	9.41E-03
	2	1	0.28367	9.73E-04	0.09725	3.43E-05	0.89023	2.20E-02	1.79677	6.55E-03
		2	0.28449	9.31E-04	0.09739	3.26E-05	1.87925	2.38E-02	2.20729	7.87E-03
		3	0.28767	8.33E-04	0.09792	3.01E-05	2.85510	2.87E-02	1.78856	9.44E-03
		6	0.31010	7.71E-04	0.10170	2.83E-05	5.81163	4.03E-02	1.78433	1.13E-02
		8	0.30662	7.04E-04	0.10112	2.63E-05	7.73628	6.76E-02	2.21998	1.36E-02
	4	1	0.28465	9.34E-04	0.09741	3.31E-05	0.89572	2.07E-02	4.20526	6.69E-03
		2	0.28542	8.95E-04	0.09754	3.15E-05	1.88529	2.23E-02	4.20936	8.69E-03
		3	0.28939	7.88E-04	0.09821	2.90E-05	2.86235	2.67E-02	3.78645	1.13E-02
		6	0.30656	7.10E-04	0.10111	2.69E-05	5.82105	3.70E-02	3.78218	1.47E-02
		8	0.30397	6.71E-04	0.10067	2.54E-05	7.74947	6.13E-02	4.22218	1.91E-02
	8	1	0.28557	8.99E-04	0.09757	3.20E-05	0.90093	1.96E-02	8.20731	6.82E-03
		2	0.28629	8.63E-04	0.09769	3.05E-05	1.89102	2.10E-02	8.21146	9.55E-03
		3	0.29088	7.53E-04	0.09846	2.79E-05	2.86923	2.49E-02	7.78431	1.34E-02
		6	0.30427	6.80E-04	0.10072	2.60E-05	5.83000	3.40E-02	7.78000	1.87E-02
		8	0.30238	6.55E-04	0.10040	2.46E-05	7.76200	5.57E-02	8.22440	2.62E-02

n=100

Dist.	λ	q	$\hat{\alpha}$	AMSE	$\hat{\theta}$	AMSE	\hat{q}	AMSE	$\hat{\lambda}$	AMSE
R	-	-	0.31583	7.39E-04	-	-	-	-	-	-
L	-	-	0.31520	6.88E-04	-	-	-	-	-	-
LR	-	-	0.28541	6.64E-04	0.09738	1.04E-05	-	-	-	-
SLR	-	1	0.28614	6.40E-04	0.09751	9.93E-06	0.95743	5.10E-03	-	-
		2	0.28683	6.11E-04	0.09763	9.14E-06	1.95317	5.32E-03	-	-
		3	0.28749	5.84E-04	0.09775	8.99E-06	2.94381	6.14E-03	-	-
		6	0.31188	5.59E-04	0.09786	7.70E-06	5.92695	7.73E-03	-	-
		8	0.31129	5.36E-04	0.09797	7.04E-06	7.89773	1.18E-02	-	-
SLRP	1	1	0.28697	6.12E-04	0.09766	9.38E-06	0.95956	4.89E-03	0.81528	5.41E-03
		2	0.28762	5.86E-04	0.09778	8.63E-06	1.95551	5.08E-03	1.18841	5.96E-03
		3	0.28924	5.41E-04	0.09807	7.74E-06	2.94662	5.70E-03	1.19218	6.55E-03
		6	0.31010	5.18E-04	0.10182	7.08E-06	5.93060	7.21E-03	1.19602	7.21E-03
		8	0.30903	4.90E-04	0.10162	6.40E-06	7.90284	1.08E-02	0.80006	7.93E-03
	2	1	0.28775	5.88E-04	0.09780	8.86E-06	0.96158	4.70E-03	1.81344	5.52E-03
		2	0.28837	5.63E-04	0.09791	8.15E-06	1.95774	4.86E-03	2.19029	6.63E-03
		3	0.29075	5.08E-04	0.09834	7.20E-06	2.94929	5.41E-03	1.80590	7.95E-03
		6	0.30757	4.73E-04	0.10136	6.46E-06	5.93407	6.74E-03	1.80202	9.54E-03
		8	0.30497	4.35E-04	0.10089	5.72E-06	7.90770	9.96E-03	2.20194	1.15E-02
	4	1	0.28849	5.66E-04	0.09793	8.38E-06	0.96350	4.52E-03	4.18843	5.63E-03
		2	0.28906	5.43E-04	0.09803	7.70E-06	1.95985	4.66E-03	4.19220	7.33E-03
		3	0.29204	4.83E-04	0.09857	6.73E-06	2.95182	5.14E-03	3.80396	9.52E-03
		6	0.30492	4.39E-04	0.10088	5.94E-06	5.93737	6.32E-03	3.80004	1.24E-02
		8	0.30298	4.16E-04	0.10054	5.35E-06	7.91231	9.18E-03	4.20396	1.61E-02
	8	1	0.28918	5.46E-04	0.09806	7.93E-06	0.96533	4.36E-03	8.19031	5.75E-03
		2	0.28972	5.25E-04	0.09815	7.28E-06	1.96186	4.47E-03	8.19412	8.05E-03
		3	0.29316	4.63E-04	0.09877	6.32E-06	2.95423	4.89E-03	7.80200	1.13E-02
		6	0.30320	4.22E-04	0.10058	5.58E-06	5.94050	5.94E-03	7.79804	1.58E-02
		8	0.30179	4.06E-04	0.10032	5.06E-06	7.91670	8.47E-03	8.20600	2.21E-02

نلاحظ من الجدول (2-3) أنه قد تم استعمال القيم الافتراضية (الاختيارية) الأولية للمعلمات الأربعة ($\alpha = 0.3, \theta = 0.1, q = 1,2,3,6,8, \lambda = 1,2,4,8$) لإيجاد تقديرات الامكان الأعظم لمعلمات التوزيعات الاحتمالية الأصلية رايلي، ليندلي، ليندلي-رايلي (R, L, LR) والتوزيعين الاحتماليين المقترحين ليندلي-رايلي المقطوع SLR (الأول) وتوزيع ليندلي-رايلي المقطوع بواسون

SLRP (الثاني) إذ تم اختيار توزيع بواسون المبتور ذو المعلمة λ (معدل التوزيع) ليمثل احد توزيعات متسلسة القوى التي تم ذكرها في الجانب النظري، ولقد تم استعمال المؤشر الإحصائي معدل متوسط مربع الخطأ (AMSE) للمقارنة بين التقديرات وتحديد الأفضلية بين التوزيعات الأصلية والمقترحة وبالاعتماد على أحجام عينة مختلفة وكما يأتي:

• **عند حجم عينة $n=25$** اظهرت النتائج افضلية للتوزيعين المقترحين الأول والثاني SLRP,SLR في تقديرات MLE للمعلمات مقارنة بالتوزيعات الأصلية ولجميع القيم الاختيارية لمعلمة التفرطح q والمعلمة λ (المعدل) وعلى سبيل المثال عند $q=8$ ، $\lambda = 1$ يتضح أن قيم AMSE لتوزيع المقترح الأول SLR :

$$AMSE(\hat{\alpha}) = 2.31E - 03 , AMSE(\hat{\theta}) = 1.74E - 04 , AMSE(\hat{q}) = 3.58E - 01$$

ولتوزيع المقترح الثاني SLRP:

$$MSE(\hat{\alpha}) = 2.04E - 03 , AMSE(\hat{\theta}) = 1.68E - 04 , AMSE(\hat{q}) = 3.24E - 01$$

$$MSE(\hat{\lambda}) = 1.51E - 02$$

• **عند حجم عينة $n=50$** اظهرت النتائج افضلية للتوزيعين المقترحين الأول والثاني SLRP,SLR في تقديرات MLE للمعلمات مقارنة بالتوزيعات الأصلية ولجميع القيم الاختيارية لمعلمة التفرطح q والمعلمة λ (المعدل) وعلى سبيل المثال عند $q=8$ ، $\lambda = 1$ يتضح أن قيم AMSE لتوزيع المقترح الأول SLR :

$$MSE(\hat{\alpha}) = 1.42E - 03 , MSE(\hat{\theta}) = 1.11E - 04 , MSE(\hat{q}) = 2.81E - 01$$

ولتوزيع المقترح الثاني SLRP:

$$MSE(\hat{\alpha}) = 1.27E - 03 , MSE(\hat{\theta}) = 1.07E - 04 , MSE(\hat{q}) = 2.53E - 01$$

$$AMSE(\hat{\lambda}) = 1.32E - 02$$

• **عند حجم عينة $n=75$** اظهرت النتائج افضلية للتوزيعين المقترحين الأول والثاني SLRP,SLR في تقديرات MLE للمعلمات مقارنة بالتوزيعات الأصلية ولجميع القيم الاختيارية لمعلمة التفرطح q والمعلمة λ (المعدل) وعلى سبيل المثال عند $q=8$ ، $\lambda = 1$ يتضح أن قيم AMSE لتوزيع المقترح الأول SLR :

$$AMSE(\hat{\alpha}) = 8.86E - 04 , AMSE(\hat{\theta}) = 2.99E - 05 , AMSE(\hat{q}) = 8.26E - 02$$

ولتوزيع المقترح الثاني SLRP:

$$AMSE(\hat{\alpha}) = 8.03E - 04 , AMSE(\hat{\theta}) = 2.82E - 05 , AMSE(\hat{q}) = 7.47E - 02$$

$$AMSE(\hat{\lambda}) = 9.41E - 03$$

• عند حجم عينة $n=100$ اظهرت النتائج افضلية للتوزيعين المقترحين الأول والثاني SLRP,SLR في تقديرات MLE للمعلمات مقارنة بالتوزيعات الأصلية ولجميع القيم الاختيارية لمعلمة التفرطح q والمعلمة λ (المعدل) وعلى سبيل المثال عند $q=8$ ، $\lambda = 1$ يتضح أن قيم $AMSE$ لتوزيع المقترح الأول SLR :

$$AMSE(\hat{\alpha}) = 5.36E - 04 , AMSE(\hat{\theta}) = 7.04E - 06 , AMSE(\hat{q}) = 1.18E - 02$$

ولتوزيع المقترح الثاني SLRP:

$$MASE(\hat{\alpha}) = 4.90E - 04 , MASE(\hat{\theta}) = 6.40E - 06 , AMSE(\hat{q}) = 1.08E - 02$$

$$AMSE(\hat{\lambda}) = 7.93E - 03$$

مما تقدم يمكن القول أن التوزيعين المقترحين كان لهما الأفضلية في ايجاد تقديرات MLE للمعلمات مقارنة بالتوزيعات الأصلية ويمكن ملاحظة ذلك ايضاً عند بقية القيم الافتراضية الأولية الأخرى، كما يتبين ايضاً أن قيمة $AMSE$ تقل عند زيادة حجم العينة و هو المأمول والمتوقع في جميع التجارب الإحصائية.

جدول (3-3) يبين نتائج تقديرات طريقة الامكان الأعظم MLE لمعاملات التوزيعات الاحتمالية الأصلية والمقترحة عند حجوم عينات مختلفة (n=25,50,75,100) ولمجموعة القيم الافتراضية (الاختيارية) ($\alpha=0.6$, $\theta=0.2$, $q=1,2,3,6,8$, $\lambda =1,2,4,8$)

n=25

Dist.	λ	q	$\hat{\alpha}$	AMSE	$\hat{\theta}$	AMSE	\hat{q}	AMSE	$\hat{\lambda}$	AMSE
R	-	-	0.64886	5.64E-03	-	-	-	-	-	-
L	-	-	0.64691	5.27E-03	-	-	-	-	-	-
LR	-	-	0.55497	5.06E-03	0.28646	6.83E-04	-	-	-	-
SLR	-	1	0.55722	4.84E-03	0.28714	6.62E-04	0.68848	1.63E-01	-	-
		2	0.55936	4.59E-03	0.28778	6.34E-04	1.65733	1.80E-01	-	-
		3	0.56139	4.36E-03	0.28839	6.22E-04	2.58879	2.28E-01	-	-
		6	0.63668	4.15E-03	0.28897	5.85E-04	5.46543	3.30E-01	-	-
		8	0.63484	3.95E-03	0.28952	5.62E-04	7.25160	5.75E-01	-	-
SLRP	1	1	0.55979	4.59E-03	0.28791	6.38E-04	0.70406	1.53E-01	1.21225	7.15E-03
		2	0.56180	4.36E-03	0.28851	6.12E-04	1.67446	1.67E-01	0.78351	7.86E-03
		3	0.56680	3.96E-03	0.29002	5.73E-04	2.60935	2.08E-01	0.77918	8.65E-03
		6	0.63118	3.76E-03	0.30937	5.50E-04	5.49216	3.01E-01	0.77476	9.52E-03
		8	0.62787	3.52E-03	0.30838	5.24E-04	7.28902	5.19E-01	1.22974	1.05E-02
	2	1	0.56220	4.36E-03	0.28863	6.16E-04	0.71885	1.43E-01	1.78563	7.29E-03
		2	0.56409	4.16E-03	0.28920	5.92E-04	1.69074	1.56E-01	2.21866	8.75E-03
		3	0.57145	3.65E-03	0.29141	5.45E-04	2.62889	1.92E-01	1.77697	1.05E-02
		6	0.62338	3.34E-03	0.30703	5.13E-04	5.51755	2.75E-01	1.77251	1.26E-02
		8	0.61533	3.00E-03	0.30461	4.78E-04	7.32457	4.70E-01	2.23204	1.51E-02
	4	1	0.56447	4.17E-03	0.28932	5.96E-04	0.73291	1.34E-01	4.21651	7.44E-03
		2	0.56625	3.98E-03	0.28985	5.74E-04	1.70620	1.46E-01	4.22084	9.67E-03
		3	0.57544	3.43E-03	0.29262	5.23E-04	2.64744	1.78E-01	3.77474	1.26E-02
		6	0.61520	3.03E-03	0.30457	4.84E-04	5.54167	2.51E-01	3.77023	1.63E-02
		8	0.60920	2.84E-03	0.30277	4.62E-04	7.35834	4.25E-01	4.23436	2.12E-02
	8	1	0.56660	3.99E-03	0.28996	5.78E-04	0.74627	1.27E-01	8.21868	7.59E-03
		2	0.56827	3.82E-03	0.29046	5.57E-04	1.72089	1.37E-01	8.22305	1.06E-02
		3	0.57888	3.25E-03	0.29365	5.05E-04	2.66507	1.65E-01	7.77249	1.49E-02
		6	0.60988	2.88E-03	0.30297	4.68E-04	5.56459	2.31E-01	7.76794	2.08E-02
		8	0.60552	2.76E-03	0.30166	4.52E-04	7.39043	3.86E-01	8.23670	2.92E-02

n=50

<i>Dist.</i>	λ	q	$\hat{\alpha}$	<i>AMSE</i>	$\hat{\theta}$	<i>AMSE</i>	\hat{q}	<i>AMSE</i>	$\hat{\lambda}$	<i>AMSE</i>
R			0.63665	3.60E-03	-	-	-	-	-	-
L	-	-	0.63518	3.34E-03	-	-	-	-	-	-
LR			0.56623	3.22E-03	0.28917	4.61E-04	-	-	-	-
SLR	-	1	0.56792	3.09E-03	0.28971	4.48E-04	0.71963	1.22E-01	-	-
		2	0.56952	2.94E-03	0.29022	4.29E-04	1.69160	1.35E-01	-	-
		3	0.57104	2.81E-03	0.29071	4.22E-04	2.62991	1.74E-01	-	-
		6	0.62751	2.68E-03	0.29118	3.97E-04	5.51889	2.54E-01	-	-
		8	0.62613	2.56E-03	0.29162	3.81E-04	7.32644	4.49E-01	-	-
SLRP	1	1	0.56984	2.95E-03	0.29033	4.32E-04	0.73365	1.14E-01	1.18548	5.46E-03
		2	0.57135	2.81E-03	0.29081	4.15E-04	1.70702	1.26E-01	0.81081	6.01E-03
		3	0.57510	2.58E-03	0.29201	3.89E-04	2.64842	1.58E-01	0.80703	6.61E-03
		6	0.62338	2.47E-03	0.30750	3.74E-04	5.54294	2.31E-01	0.80317	7.27E-03
		8	0.62091	2.32E-03	0.30671	3.57E-04	7.36012	4.05E-01	1.20077	7.99E-03
	2	1	0.57165	2.82E-03	0.29091	4.18E-04	0.74697	1.06E-01	1.81267	5.57E-03
		2	0.57307	2.70E-03	0.29136	4.02E-04	1.72166	1.17E-01	2.19108	6.68E-03
		3	0.57858	2.41E-03	0.29313	3.71E-04	2.66600	1.45E-01	1.80510	8.02E-03
		6	0.61754	2.23E-03	0.30562	3.51E-04	5.56580	2.11E-01	1.80120	9.62E-03
		8	0.61150	2.03E-03	0.30369	3.28E-04	7.39212	3.65E-01	2.20277	1.15E-02
	4	1	0.57335	2.71E-03	0.29145	4.05E-04	0.75962	9.94E-02	4.18920	5.68E-03
		2	0.57468	2.59E-03	0.29188	3.90E-04	1.73558	1.09E-01	4.19299	7.39E-03
		3	0.58158	2.28E-03	0.29409	3.57E-04	2.68270	1.34E-01	3.80315	9.60E-03
		6	0.61140	2.05E-03	0.30366	3.32E-04	5.58751	1.92E-01	3.79922	1.25E-02
		8	0.60690	1.93E-03	0.30221	3.17E-04	7.42251	3.30E-01	4.20480	1.62E-02
	8	1	0.57495	2.60E-03	0.29197	3.93E-04	0.77164	9.33E-02	8.19110	5.80E-03
		2	0.57620	2.50E-03	0.29237	3.79E-04	1.74880	1.01E-01	8.19492	8.11E-03
		3	0.58416	2.17E-03	0.29492	3.46E-04	2.69856	1.24E-01	7.80118	1.14E-02
		6	0.60741	1.96E-03	0.30238	3.22E-04	5.60813	1.76E-01	7.79721	1.59E-02
		8	0.60414	1.88E-03	0.30133	3.11E-04	7.45138	2.99E-01	8.20685	2.23E-02

n=75

<i>Dist.</i>	λ	q	$\hat{\alpha}$	<i>AMSE</i>	$\hat{\theta}$	<i>AMSE</i>	\hat{q}	<i>AMSE</i>	$\hat{\lambda}$	<i>AMSE</i>
R			0.62748	2.21E-03	-	-	-	-	-	-
L	-	-	0.62638	2.02E-03	-	-	-	-	-	-
LR			0.57467	1.95E-03	0.29133	1.75E-04	-	-	-	-
SLR	-	1	0.57594	1.88E-03	0.29177	1.68E-04	0.84580	3.82E-02	-	-
		2	0.57714	1.79E-03	0.29218	1.59E-04	1.83038	4.19E-02	-	-
		3	0.57828	1.71E-03	0.29257	1.56E-04	2.79645	5.29E-02	-	-
		6	0.62063	1.64E-03	0.29294	1.43E-04	5.73539	7.56E-02	-	-
		8	0.61960	1.57E-03	0.29329	1.36E-04	7.62954	1.31E-01	-	-
SLRP	1	1	0.57738	1.80E-03	0.29226	1.61E-04	0.85351	3.57E-02	1.17215	4.70E-03
		2	0.57851	1.72E-03	0.29265	1.53E-04	1.83886	3.90E-02	0.82441	5.17E-03
		3	0.58132	1.59E-03	0.29361	1.41E-04	2.80663	4.81E-02	0.82090	5.69E-03
		6	0.61754	1.52E-03	0.30600	1.33E-04	5.74862	6.90E-02	0.81732	6.26E-03
		8	0.61568	1.43E-03	0.30536	1.25E-04	7.64807	1.18E-01	1.18634	6.89E-03
	2	1	0.57874	1.73E-03	0.29273	1.54E-04	0.86083	3.35E-02	1.82613	4.80E-03
		2	0.57980	1.65E-03	0.29309	1.46E-04	1.84692	3.64E-02	2.17734	5.76E-03
		3	0.58394	1.49E-03	0.29451	1.32E-04	2.81630	4.44E-02	1.81911	6.91E-03
		6	0.61315	1.39E-03	0.30450	1.23E-04	5.76119	6.31E-02	1.81549	8.29E-03
		8	0.60862	1.27E-03	0.30295	1.12E-04	7.66566	1.07E-01	2.18820	9.95E-03
	4	1	0.58001	1.66E-03	0.29316	1.48E-04	0.86779	3.15E-02	4.17561	4.89E-03
		2	0.58101	1.59E-03	0.29350	1.41E-04	1.85457	3.40E-02	4.17912	6.36E-03
		3	0.58619	1.42E-03	0.29527	1.26E-04	2.82548	4.12E-02	3.81730	8.27E-03
		6	0.60855	1.29E-03	0.30292	1.14E-04	5.77313	5.77E-02	3.81365	1.08E-02
		8	0.60517	1.22E-03	0.30177	1.07E-04	7.68238	9.69E-02	4.19008	1.40E-02
	8	1	0.58121	1.60E-03	0.29357	1.42E-04	0.87440	2.97E-02	8.17736	4.99E-03
		2	0.58215	1.54E-03	0.29389	1.36E-04	1.86184	3.19E-02	8.18091	6.99E-03
		3	0.58812	1.36E-03	0.29594	1.20E-04	2.83421	3.83E-02	7.81547	9.78E-03
		6	0.60556	1.23E-03	0.30190	1.09E-04	5.78447	5.30E-02	7.81178	1.37E-02
		8	0.60310	1.19E-03	0.30106	1.04E-04	7.69826	8.78E-02	8.19198	1.92E-02

n=100

Dist.	λ	q	$\hat{\alpha}$	AMSE	$\hat{\theta}$	AMSE	\hat{q}	AMSE	$\hat{\lambda}$	AMSE
R	-	-	0.62061	1.36E-03	-	-	-	-	-	-
L	-	-	0.61979	1.22E-03	-	-	-	-	-	-
LR	-	-	0.58100	1.18E-03	0.29307	9.24E-05	-	-	-	-
SLR	-	1	0.58195	1.14E-03	0.29341	8.88E-05	0.94603	7.55E-03	-	-
		2	0.58286	1.09E-03	0.29374	8.36E-05	1.94063	7.93E-03	-	-
		3	0.58371	1.04E-03	0.29406	8.18E-05	2.92876	9.25E-03	-	-
		6	0.61547	9.97E-04	0.29435	7.41E-05	5.90739	1.18E-02	-	-
		8	0.61470	9.56E-04	0.29464	6.99E-05	7.87034	1.84E-02	-	-
SLRP	1	1	0.58304	1.09E-03	0.29381	8.45E-05	0.94873	7.22E-03	1.15148	3.64E-03
		2	0.58388	1.04E-03	0.29412	7.97E-05	1.94360	7.55E-03	0.84549	4.01E-03
		3	0.58599	9.69E-04	0.29489	7.29E-05	2.93232	8.56E-03	0.84240	4.41E-03
		6	0.61315	9.29E-04	0.30480	6.86E-05	5.91202	1.10E-02	0.83925	4.85E-03
		8	0.61176	8.80E-04	0.30429	6.38E-05	7.87682	1.68E-02	1.16396	5.33E-03
	2	1	0.58405	1.05E-03	0.29418	8.07E-05	0.95129	6.92E-03	1.84701	3.71E-03
		2	0.58485	1.01E-03	0.29447	7.61E-05	1.94642	7.20E-03	2.15605	4.46E-03
		3	0.58795	9.15E-04	0.29560	6.82E-05	2.93570	8.09E-03	1.84083	5.35E-03
		6	0.60986	8.55E-04	0.30360	6.27E-05	5.91642	1.02E-02	1.83764	6.42E-03
		8	0.60647	7.90E-04	0.30236	5.69E-05	7.88298	1.54E-02	2.16560	7.70E-03
	4	1	0.58501	1.01E-03	0.29453	7.72E-05	0.95373	6.65E-03	4.15452	3.79E-03
		2	0.58576	9.72E-04	0.29480	7.29E-05	1.94910	6.88E-03	4.15761	4.93E-03
		3	0.58964	8.72E-04	0.29622	6.45E-05	2.93892	7.67E-03	3.83923	6.40E-03
		6	0.60641	7.99E-04	0.30234	5.81E-05	5.92060	9.58E-03	3.83602	8.33E-03
		8	0.60388	7.59E-04	0.30142	5.41E-05	7.88883	1.42E-02	4.16726	1.08E-02
	8	1	0.58591	9.78E-04	0.29486	7.39E-05	0.95604	6.40E-03	8.15607	3.87E-03
		2	0.58661	9.41E-04	0.29512	6.99E-05	1.95164	6.59E-03	8.15919	5.41E-03
		3	0.59109	8.39E-04	0.29675	6.15E-05	2.94197	7.28E-03	7.83763	7.58E-03
		6	0.60417	7.70E-04	0.30152	5.54E-05	5.92457	8.97E-03	7.83438	1.06E-02
		8	0.60233	7.42E-04	0.30085	5.23E-05	7.89439	1.31E-02	8.16893	1.48E-02

نلاحظ من الجدول (3-3) أنه قد تم استعمال القيم الافتراضية (الاختيارية) الأولية للمعلمات الأربعة ($\alpha = 0.6, \theta = 0.2, q = 1,2,3,6,8, \lambda = 1,2,4,8$) لإيجاد تقديرات الامكان الأعظم لمعلمات التوزيعات الاحتمالية الأصلية رايلى ، ليندلي ، ليندلي-رايلى (R, L ,LR) والتوزيعين الاحتماليين المقترحين ليندلي-رايلى المقطوع SLR (الأول) وتوزيع ليندلي-رايلى المقطوع بواسون

SLRP (الثاني) إذ تم اختيار توزيع بواسون المبتور ذو المعلمة λ (معدل التوزيع) ليمثل احد توزيعات متسلسة القوى التي تم ذكرها في الجانب النظري ، ولقد تم استعمال المؤشر الأحصائي معدل متوسط مربع الخطأ (AMSE) للمقارنة بين التقديرات وتحديد الأفضلية بين التوزيعات الأصلية والمقترحة وبالاعتماد على أحجام عينة مختلفة وكما يأتي:

• **عند حجم عينة $n=25$** اظهرت النتائج افضلية للتوزيعين المقترحين الأول والثاني SLRP,SLR في تقديرات MLE للمعلمات مقارنة بالتوزيعات الأصلية ولجميع القيم الاختيارية لمعلمة التقترح q والمعلمة λ (المعدل) وعلى سبيل المثال عند $q=8$ ، $\lambda = 1$ يتضح أن قيم AMSE لتوزيع المقترح الأول SLR :

$$AMSE(\hat{\alpha}) = 3.95E - 03 , AMSE(\hat{\theta}) = 5.62E - 04 , AMSE(\hat{q}) = 5.75E - 01$$

ولتوزيع المقترح الثاني SLRP:

$$AMSE(\hat{\alpha}) = 3.52E - 03 , AMSE(\hat{\theta}) = 5.24E - 04 , AMSE(\hat{q}) = 5.19E - 01$$

$$AMSE(\hat{\lambda}) = 1.05E - 02$$

• **عند حجم عينة $n=50$** اظهرت النتائج افضلية للتوزيعين المقترحين الأول والثاني SLRP,SLR في تقديرات MLE للمعلمات مقارنة بالتوزيعات الأصلية ولجميع القيم الاختيارية لمعلمة التقترح q والمعلمة λ (المعدل) وعلى سبيل المثال عند $q=8$ ، $\lambda = 1$ يتضح أن قيم AMSE لتوزيع المقترح الأول SLR :

$$AMSE(\hat{\alpha}) = 2.56E - 03 , AMSE(\hat{\theta}) = 3.81E - 04 , AMSE(\hat{q}) = 4.49E - 01$$

ولتوزيع المقترح الثاني SLRP:

$$AMSE(\hat{\alpha}) = 2.32E - 03 , AMSE(\hat{\theta}) = 3.57E - 04 , AMSE(\hat{q}) = 4.05E - 01$$

$$AMSE(\hat{\lambda}) = 7.99E - 03$$

• **عند حجم عينة $n=75$** اظهرت النتائج افضلية للتوزيعين المقترحين الأول والثاني SLRP,SLR في تقديرات MLE للمعلمات مقارنة بالتوزيعات الأصلية ولجميع القيم الاختيارية لمعلمة التقترح q والمعلمة λ (المعدل) وعلى سبيل المثال عند $q=8$ ، $\lambda = 1$ يتضح أن قيم AMSE لتوزيع المقترح الأول SLR :

$$AMSE(\hat{\alpha}) = 1.57E - 03 , AMSE(\hat{\theta}) = 1.36E - 04 , AMSE(\hat{q}) = 1.31E - 01$$

ولتوزيع المقترح الثاني SLRP:

$$AMSE(\hat{\alpha}) = 1.43E - 03 , AMSE(\hat{\theta}) = 1.25E - 04 , AMSE(\hat{q}) = 1.18E - 01$$

$$AMSE(\hat{\lambda}) = 6.89E - 03$$

• عند حجم عينة $n=100$ اظهرت النتائج افضلية للتوزيعين المقترحين الأول والثاني SLRP,SLR في تقديرات MLE للمعلمات مقارنة بالتوزيعات الأصلية ولجميع القيم الاختيارية لمعلمة التفرطح q والمعلمة λ (المعدل) وعلى سبيل المثال عند $q=8$ ، $\lambda = 1$ يتضح أن قيم $AMSE$ لتوزيع المقترح الأول SLR :

$$AMSE(\hat{\alpha}) = 9.56E - 04 , AMSE(\hat{\theta}) = 6.99E - 05 , AMSE(\hat{q}) = 1.84E - 02$$

ولتوزيع المقترح الثاني SLRP:

$$AMSE(\hat{\alpha}) = 8.80E - 04 , AMSE(\hat{\theta}) = 6.38E - 05 , AMSE(\hat{q}) = 1.68E - 02$$

$$AMSE(\hat{\lambda}) = 5.33E - 03$$

مما تقدم يمكن القول أن التوزيعين المقترحين كان لهما الأفضلية في ايجاد تقديرات MLE ويمكن ملاحظة ذلك أيضاً عند بقية القيم الافتراضية الأولية الأخرى، كما يتبين أيضاً أن قيمة $AMSE$ تقل عند زيادة حجم العينة و هو المأمول والمتوقع في جميع التجارب الإحصائية.

جدول (4-3) يبين نتائج تقديرات طريقة الامكان الأعظم MLE لمعاملات التوزيعات الاحتمالية الأصلية والمقترحة عند حجوم عينات مختلفة (n=25,50,75,100) ولمجموعة القيم الافتراضية (الاختيارية) ($\alpha=0.4$, $\theta=0.4$, $q=1,2,3,6,8$, $\lambda =1,2,4,8$)

n=25

Dist.	λ	q	$\hat{\alpha}$	AMSE	$\hat{\theta}$	AMSE	\hat{q}	AMSE	$\hat{\lambda}$	AMSE
R	-	-	0.31248	1.28E-02	-	-	-	-	-	-
L			0.31598	1.18E-02	-	-	-	-	-	-
LR			0.31934	1.12E-02	0.38446	9.32E-04	-	-	-	-
SLR	-	1	0.32337	1.06E-02	0.38524	9.03E-04	0.72442	1.35E-01	-	-
		2	0.32721	9.87E-03	0.38598	8.67E-04	1.69686	1.48E-01	-	-
		3	0.46915	9.24E-03	0.41332	8.50E-04	2.63623	1.86E-01	-	-
		6	0.46570	8.66E-03	0.38734	8.00E-04	5.52710	2.65E-01	-	-
		8	0.46241	8.14E-03	0.38798	7.70E-04	7.33795	4.57E-01	-	-
SLRP	1	1	0.32797	9.82E-03	0.38612	8.71E-04	0.73820	1.27E-01	0.22588	9.51E-02
		2	0.33157	9.20E-03	0.38682	8.37E-04	1.71202	1.38E-01	1.78961	1.05E-01
		3	0.45947	8.01E-03	0.41146	7.83E-04	2.65442	1.69E-01	1.80540	1.15E-01
		6	0.45584	7.50E-03	0.41076	7.53E-04	5.55075	2.42E-01	1.82151	1.27E-01
		8	0.44993	6.81E-03	0.40962	7.17E-04	7.37105	4.13E-01	0.16206	1.39E-01
	2	1	0.33229	9.16E-03	0.38696	8.41E-04	0.75129	1.19E-01	2.78187	9.70E-02
		2	0.33568	8.61E-03	0.38761	8.10E-04	1.72642	1.29E-01	1.20250	1.16E-01
		3	0.45115	7.11E-03	0.40985	7.44E-04	2.67170	1.57E-01	2.81345	1.40E-01
		6	0.44188	6.22E-03	0.40807	7.01E-04	5.57321	2.22E-01	2.82972	1.68E-01
		8	0.42746	5.22E-03	0.40529	6.54E-04	7.40250	3.74E-01	1.15368	2.01E-01
	4	1	0.33636	8.58E-03	0.38774	8.14E-04	0.76372	1.12E-01	3.21032	9.90E-02
		2	0.33954	8.08E-03	0.38835	7.85E-04	1.74010	1.21E-01	3.19452	1.29E-01
		3	0.44399	6.43E-03	0.40847	7.14E-04	2.68812	1.46E-01	4.82159	1.67E-01
		6	0.42722	5.26E-03	0.40524	6.61E-04	5.59455	2.03E-01	4.83802	2.17E-01
		8	0.41648	4.75E-03	0.40317	6.32E-04	7.43237	3.39E-01	3.14522	2.83E-01
	8	1	0.34017	8.07E-03	0.38847	7.90E-04	0.77554	1.06E-01	8.79758	1.01E-01
		2	0.34317	7.62E-03	0.38905	7.62E-04	1.75309	1.14E-01	8.81353	1.41E-01
		3	0.43783	5.92E-03	0.40729	6.90E-04	2.70371	1.36E-01	8.82980	1.98E-01
		6	0.41770	4.84E-03	0.40341	6.40E-04	5.61482	1.87E-01	8.84640	2.77E-01
		8	0.40989	4.55E-03	0.40190	6.19E-04	7.46075	3.08E-01	7.13667	3.88E-01

n=50

<i>Dist.</i>	λ	q	$\hat{\alpha}$	<i>AMSE</i>	$\hat{\theta}$	<i>AMSE</i>	\hat{q}	<i>AMSE</i>	$\hat{\lambda}$	<i>AMSE</i>
R			0.33436	7.48E-03	-	-	-	-	-	-
L	-	-	0.33699	6.88E-03	-	-	-	-	-	-
LR			0.33951	6.52E-03	0.38757	6.54E-04	-	-	-	-
SLR	-	1	0.34253	6.16E-03	0.38819	6.35E-04	0.75198	1.11E-01	-	-
		2	0.34540	5.77E-03	0.38878	6.10E-04	1.72718	1.22E-01	-	-
		3	0.45187	5.41E-03	0.38934	6.00E-04	2.67261	1.52E-01	-	-
		6	0.44927	5.08E-03	0.38987	5.65E-04	5.57439	2.14E-01	-	-
		8	0.44681	4.78E-03	0.39038	5.45E-04	7.40415	3.66E-01	-	-
SLRP	1	1	0.34598	5.74E-03	0.38890	6.14E-04	0.76438	1.05E-01	0.45216	4.76E-02
		2	0.34868	5.39E-03	0.38945	5.91E-04	1.74082	1.14E-01	1.55880	5.24E-02
		3	0.44460	4.72E-03	0.39083	5.55E-04	2.68898	1.38E-01	1.56997	5.76E-02
		6	0.44188	4.43E-03	0.40861	5.35E-04	5.59567	1.96E-01	1.58137	6.34E-02
		8	0.43745	4.04E-03	0.40770	5.11E-04	7.43394	3.31E-01	0.40700	6.97E-02
	2	1	0.34922	5.37E-03	0.38956	5.94E-04	0.77616	9.86E-02	2.55332	4.86E-02
		2	0.35176	5.06E-03	0.39009	5.73E-04	1.75378	1.06E-01	1.43561	5.83E-02
		3	0.43836	4.22E-03	0.39212	5.30E-04	2.70453	1.28E-01	2.57567	7.00E-02
		6	0.43141	3.71E-03	0.40646	5.02E-04	5.61589	1.79E-01	2.58719	8.40E-02
		8	0.42060	3.16E-03	0.40423	4.71E-04	7.46225	3.00E-01	1.40107	1.01E-01
	4	1	0.35227	5.05E-03	0.39019	5.77E-04	0.78735	9.32E-02	3.44115	4.96E-02
		2	0.35465	4.76E-03	0.39068	5.57E-04	1.76609	1.00E-01	3.42997	6.44E-02
		3	0.43299	3.83E-03	0.39322	5.11E-04	2.71930	1.20E-01	4.58143	8.38E-02
		6	0.42042	3.18E-03	0.40420	4.76E-04	5.63510	1.65E-01	4.59306	1.09E-01
		8	0.41236	2.89E-03	0.40254	4.56E-04	7.48913	2.72E-01	3.39508	1.42E-01
	8	1	0.35513	4.76E-03	0.39078	5.61E-04	0.79798	8.82E-02	8.56444	5.06E-02
		2	0.35737	4.50E-03	0.39124	5.42E-04	1.77778	9.42E-02	8.57573	7.08E-02
		3	0.42837	3.55E-03	0.39417	4.95E-04	2.73334	1.11E-01	8.58724	9.91E-02
		6	0.41327	2.94E-03	0.40273	4.62E-04	5.65334	1.52E-01	8.59899	1.39E-01
		8	0.40741	2.77E-03	0.40152	4.47E-04	7.51468	2.48E-01	7.38903	1.94E-01

n=75

<i>Dist.</i>	λ	q	$\hat{\alpha}$	<i>AMSE</i>	$\hat{\theta}$	<i>AMSE</i>	\hat{q}	<i>AMSE</i>	$\hat{\lambda}$	<i>AMSE</i>
R			0.35077	4.15E-03	-	-	-	-	-	-
L	-	-	0.35274	3.63E-03	-	-	-	-	-	-
LR			0.35463	3.45E-03	0.39005	4.16E-04	-	-	-	-
SLR	-	1	0.35690	3.26E-03	0.39055	4.04E-04	0.86359	3.42E-02	-	-
		2	0.35905	3.05E-03	0.39102	3.88E-04	1.84995	3.70E-02	-	-
		3	0.43890	2.86E-03	0.39147	3.82E-04	2.81994	4.56E-02	-	-
		6	0.43695	2.69E-03	0.39190	3.59E-04	5.76592	6.32E-02	-	-
		8	0.43511	2.53E-03	0.39230	3.46E-04	7.67228	1.06E-01	-	-
SLRP	1	1	0.35948	3.04E-03	0.39112	3.91E-04	0.87041	3.22E-02	1.31475	1.57E-02
		2	0.36151	2.85E-03	0.39156	3.76E-04	1.85745	3.47E-02	0.67895	1.73E-02
		3	0.43345	2.51E-03	0.39267	3.54E-04	2.82894	4.17E-02	0.67253	1.90E-02
		6	0.43141	2.35E-03	0.40689	3.41E-04	5.77762	5.80E-02	0.66598	2.09E-02
		8	0.42809	2.15E-03	0.40616	3.25E-04	7.68867	9.65E-02	1.34070	2.30E-02
	2	1	0.36192	2.85E-03	0.39165	3.79E-04	0.87689	3.04E-02	1.68210	1.60E-02
		2	0.36382	2.68E-03	0.39207	3.65E-04	1.86458	3.26E-02	2.32426	1.92E-02
		3	0.42877	2.25E-03	0.39369	3.38E-04	2.83749	3.88E-02	1.66926	2.31E-02
		6	0.42356	1.99E-03	0.40516	3.20E-04	5.78874	5.33E-02	1.66264	2.77E-02
		8	0.41545	1.70E-03	0.40339	3.01E-04	7.70424	8.76E-02	2.34411	3.33E-02
	4	1	0.36420	2.68E-03	0.39215	3.68E-04	0.88304	2.88E-02	4.32108	1.64E-02
		2	0.36599	2.53E-03	0.39254	3.54E-04	1.87135	3.07E-02	4.32750	2.13E-02
		3	0.42474	2.05E-03	0.39458	3.26E-04	2.84562	3.62E-02	3.66595	2.76E-02
		6	0.41531	1.72E-03	0.40336	3.04E-04	5.79930	4.91E-02	3.65927	3.59E-02
		8	0.40927	1.56E-03	0.40203	2.91E-04	7.71902	7.96E-02	4.34755	4.67E-02
	8	1	0.36635	2.53E-03	0.39262	3.57E-04	0.88889	2.74E-02	7.67571	1.67E-02
		2	0.36803	2.39E-03	0.39299	3.45E-04	1.87778	2.90E-02	7.66922	2.34E-02
		3	0.42128	1.90E-03	0.39534	3.16E-04	2.85334	3.39E-02	7.66261	3.27E-02
		6	0.40995	1.59E-03	0.40218	2.95E-04	5.80934	4.53E-02	7.65586	4.58E-02
		8	0.40556	1.50E-03	0.40122	2.85E-04	7.73307	7.25E-02	8.35102	6.41E-02

n=100

Dist.	λ	q	$\hat{\alpha}$	AMSE	$\hat{\theta}$	AMSE	\hat{q}	AMSE	$\hat{\lambda}$	AMSE
R	-	-	0.36308	2.43E-03	-	-	-	-	-	-
L	-	-	0.36455	2.05E-03	-	-	-	-	-	-
LR	-	-	0.36597	1.95E-03	0.39204	1.82E-04	-	-	-	-
SLR	-	1	0.36767	1.85E-03	0.39244	1.75E-04	0.95226	7.06E-03	-	-
		2	0.36929	1.73E-03	0.39282	1.67E-04	1.94748	7.33E-03	-	-
		3	0.42917	1.63E-03	0.39318	1.64E-04	2.93698	8.36E-03	-	-
		6	0.42772	1.53E-03	0.39352	1.52E-04	5.91807	1.03E-02	-	-
		8	0.42633	1.44E-03	0.39384	1.45E-04	7.88530	1.54E-02	-	-
SLRP	1	1	0.36961	1.73E-03	0.39289	1.69E-04	0.95464	6.79E-03	1.25471	1.03E-02
		2	0.37113	1.63E-03	0.39325	1.61E-04	1.95011	7.02E-03	0.74019	1.13E-02
		3	0.42509	1.44E-03	0.39413	1.49E-04	2.94013	7.79E-03	0.73500	1.25E-02
		6	0.42356	1.35E-03	0.40551	1.42E-04	5.92217	9.67E-03	0.72970	1.37E-02
		8	0.42106	1.24E-03	0.40493	1.34E-04	7.89103	1.42E-02	1.27571	1.51E-02
	2	1	0.37144	1.63E-03	0.39332	1.62E-04	0.95691	6.54E-03	1.74274	1.05E-02
		2	0.37286	1.53E-03	0.39366	1.55E-04	1.95260	6.73E-03	2.26241	1.26E-02
		3	0.42158	1.30E-03	0.39495	1.42E-04	2.94312	7.41E-03	1.73235	1.51E-02
		6	0.41767	1.16E-03	0.40413	1.32E-04	5.92606	9.07E-03	1.72699	1.81E-02
		8	0.41159	1.00E-03	0.40271	1.22E-04	7.89648	1.31E-02	2.27847	2.18E-02
	4	1	0.37315	1.54E-03	0.39372	1.56E-04	0.95907	6.32E-03	4.25983	1.07E-02
		2	0.37449	1.45E-03	0.39404	1.50E-04	1.95497	6.47E-03	4.26503	1.39E-02
		3	0.41856	1.19E-03	0.39566	1.35E-04	2.94597	7.06E-03	3.72967	1.81E-02
		6	0.41148	1.01E-03	0.40269	1.24E-04	5.92976	8.53E-03	3.72426	2.35E-02
		8	0.40695	9.28E-04	0.40163	1.18E-04	7.90166	1.21E-02	4.28125	3.06E-02
	8	1	0.37476	1.45E-03	0.39410	1.51E-04	0.96111	6.11E-03	7.73757	1.09E-02
		2	0.37602	1.38E-03	0.39439	1.45E-04	1.95722	6.23E-03	7.73232	1.53E-02
		3	0.41596	1.11E-03	0.39627	1.30E-04	2.94867	6.75E-03	7.72697	2.14E-02
		6	0.40747	9.45E-04	0.40175	1.20E-04	5.93327	8.04E-03	7.72151	3.00E-02
		8	0.40417	8.93E-04	0.40098	1.15E-04	7.90658	1.12E-02	8.28406	4.20E-02

نلاحظ من الجدول (3-4) أنه قد تم استعمال القيم الافتراضية (الاختيارية) الأولية للمعلمات الأربعة ($\alpha = 0.4, \theta = 0.4, q = 1,2,3,6,8, \lambda = 1,2,4,8$) لأيجاد تقديرات الأماكن الأعظم لمعلمات التوزيعات الاحتمالية الأصلية رايلي، ليندلي، ليندلي-رايلي (R, L, LR) والتوزيعين الاحتماليين المقترحين ليندلي-رايلي المقطوع SLR (الأول) وتوزيع ليندلي-رايلي المقطوع بواسون

SLRP (الثاني) إذ تم اختيار توزيع بواسون المبتور ذو المعلمة λ (معدل التوزيع) ليمثل احد توزيعات متسلسة القوى التي تم ذكرها في الجانب النظري، ونشير الى أن الحالة المدروسة هنا يظهر فيها تساوي بقيمتي معلمي القياس والشكل. ولقد تم استعمال المؤشر الإحصائي معدل متوسط مربع الخطأ (AMSE) للمقارنة بين التقديرات وتحديد الأفضلية بين التوزيعات الأصلية والمقترحة وبالاعتماد على أحجام عينة مختلفة وكما يأتي:

• **عند حجم عينة $n=25$** اظهرت النتائج افضلية للتوزيعين المقترحين الأول والثاني SLRP,SLR في تقديرات MLE للمعلمات مقارنة بالتوزيعات الأصلية ولجميع القيم الاختيارية لمعلمة التفرطح q والمعلمة λ (المعدل) وعلى سبيل المثال عند $q=8$ ، $\lambda = 1$ يتضح أن قيم AMSE لتوزيع المقترح الأول SLR :

$$AMSE(\hat{\alpha}) = 3.95E - 03 , AMSE(\hat{\theta}) = 5.62E - 04 , AMSE(\hat{q}) = 5.75E - 01$$

ولتوزيع المقترح الثاني SLRP:

$$AMSE(\hat{\alpha}) = 3.52E - 03 , AMSE(\hat{\theta}) = 5.24E - 04 , AMSE(\hat{q}) = 5.19E - 01$$

$$AMSE(\hat{\lambda}) = 1.05E - 02$$

• **عند حجم عينة $n=50$** اظهرت النتائج افضلية للتوزيعين المقترحين الأول والثاني SLRP,SLR في تقديرات MLE للمعلمات مقارنة بالتوزيعات الأصلية ولجميع القيم الاختيارية لمعلمة التفرطح q والمعلمة λ (المعدل) وعلى سبيل المثال عند $q=8$ ، $\lambda = 1$ يتضح أن قيم AMSE لتوزيع المقترح الأول SLR :

$$AMSE(\hat{\alpha}) = 8.14E - 03 , AMSE(\hat{\theta}) = 7.70E - 04 , AMSE(\hat{q}) = 4.57E - 01$$

ولتوزيع المقترح الثاني SLRP:

$$AMSE(\hat{\alpha}) = 6.81E - 03 , AMSE(\hat{\theta}) = 7.17E - 04 , AMSE(\hat{q}) = 4.13E - 01$$

$$AMSE(\hat{\lambda}) = 1.39E - 01$$

• **عند حجم عينة $n=75$** اظهرت النتائج افضلية للتوزيعين المقترحين الأول والثاني SLRP,SLR في تقديرات MLE للمعلمات مقارنة بالتوزيعات الأصلية ولجميع القيم الاختيارية لمعلمة التفرطح q والمعلمة λ (المعدل) وعلى سبيل المثال عند $q=8$ ، $\lambda = 1$ يتضح أن قيم AMSE لتوزيع المقترح الأول SLR :

$$AMSE(\hat{\alpha}) = 2.53E - 03 , AMSE(\hat{\theta}) = 3.46E - 04 , AMSE(\hat{q}) = 1.06E - 01$$

ولتوزيع المقترح الثاني SLRP:

$$AMSE(\hat{\alpha}) = 2.15E - 03 , AMSE(\hat{\theta}) = 3.25E - 04 , AMSE(\hat{q}) = 9.65E - 02$$

$$AMSE(\hat{\lambda}) = 2.30E - 02$$

• عند حجم عينة $n=100$ اظهرت النتائج افضلية للتوزيعين المقترحين الأول والثاني SLRP,SLR

في تقديرات MLE للمعلمات مقارنة بالتوزيعات الأصلية ولجميع القيم الاختيارية لمعلمة التفرطح q والمعلمة λ (المعدل) وعلى سبيل المثال عند $q=8$ ، $\lambda = 1$ يتضح أن قيم AMSE لتوزيع

المقترح الأول SLR :

$$AMSE(\hat{\alpha}) = 1.44E - 03 , AMSE(\hat{\theta}) = 1.45E - 04 , AMSE(\hat{q}) = 1.54E - 02$$

ولتوزيع المقترح الثاني SLRP:

$$AMSE(\hat{\alpha}) = 1.24E - 03 , AMSE(\hat{\theta}) = 1.34E - 04 , AMSE(\hat{q}) = 1.42E - 02$$

$$AMSE(\hat{\lambda}) = 1.51E - 02$$

مما تقدم يمكن القول أن التوزيعين المقترحين كان لهما الأفضلية في ايجاد تقديرات MLE ويمكن ملاحظة ذلك ايضاً عند بقية القيم الافتراضية الأولية الأخرى، كما يتبين ايضاً أن قيمة AMSE تقل عند زيادة حجم العينة و هو المأمول والمتوقع في جميع التجارب الإحصائية.

جدول (5-3) يبين نتائج تقديرات طريقة الامكان الأعظم MLE لمعاملات التوزيعات الاحتمالية الأصلية والمقترحة عند حجوم عينات مختلفة (n=25,50,75,100) ولمجموعة القيم الافتراضية (الاختيارية) $(\alpha=3, \theta=1.5, q=1,2,3,6,8, \lambda=1,2,4,8)$

n=25

Dist.	λ	q	$\hat{\alpha}$	AMSE	$\hat{\theta}$	AMSE	\hat{q}	AMSE	$\hat{\lambda}$	AMSE
R	-	-	3.14019	2.78E-02	-	-	-	-	-	-
L	-	-	3.13458	2.57E-02	-	-	-	-	-	-
LR	-	-	3.12920	2.41E-02	1.48022	1.34E-03	-	-	-	-
SLR	-	1	3.12274	2.25E-02	1.48121	1.30E-03	0.74186	1.05E-01	-	-
		2	3.11660	2.08E-02	1.51785	1.24E-03	1.71605	1.17E-01	-	-
		3	2.88923	1.93E-02	1.48304	1.21E-03	2.65926	1.49E-01	-	-
		6	2.89477	1.79E-02	1.51611	1.14E-03	5.55703	2.16E-01	-	-
		8	2.90003	1.66E-02	1.51531	1.09E-03	7.37984	3.79E-01	-	-
SLRP	1	1	3.11537	2.06E-02	1.48234	1.24E-03	0.75477	9.84E-02	0.94525	4.76E-04
		2	3.10961	1.91E-02	1.51678	1.19E-03	1.73024	1.08E-01	1.05585	5.23E-04
		3	2.90474	1.62E-02	1.48542	1.11E-03	2.67629	1.35E-01	1.05697	5.76E-04
		6	2.91055	1.49E-02	1.48631	1.06E-03	5.57918	1.97E-01	1.05811	6.33E-04
		8	2.92002	1.33E-02	1.48776	1.01E-03	7.41085	3.42E-01	0.94073	6.97E-04
	2	1	3.10845	1.90E-02	1.48340	1.20E-03	0.76703	9.21E-02	2.05530	4.85E-04
		2	3.10303	1.77E-02	1.51577	1.15E-03	1.74373	1.01E-01	1.94359	5.82E-04
		3	2.91807	1.39E-02	1.48746	1.05E-03	2.69248	1.25E-01	2.05754	6.99E-04
		6	2.93291	1.17E-02	1.48973	9.81E-04	5.60022	1.79E-01	2.05869	8.39E-04
		8	2.95601	9.19E-03	1.49327	9.09E-04	7.44031	3.09E-01	1.94014	1.01E-03
	4	1	3.10195	1.75E-02	1.48439	1.16E-03	0.77868	8.63E-02	3.94415	4.95E-04
		2	3.09685	1.63E-02	1.51483	1.11E-03	1.75654	9.40E-02	4.05697	6.44E-04
		3	2.92954	1.22E-02	1.48921	1.00E-03	2.70785	1.15E-01	3.94189	8.37E-04
		6	2.95639	9.24E-03	1.49332	9.18E-04	5.62021	1.64E-01	3.94073	1.09E-03
		8	2.97361	8.01E-03	1.49596	8.74E-04	7.46829	2.79E-01	4.06046	1.41E-03
	8	1	3.09583	1.63E-02	1.48533	1.12E-03	0.78974	8.12E-02	7.94359	5.05E-04
		2	3.09104	1.52E-02	1.51394	1.08E-03	1.76872	8.79E-02	7.94246	7.07E-04
		3	2.93941	1.09E-02	1.49072	9.63E-04	2.72246	1.07E-01	8.05869	9.90E-04
		6	2.97166	8.18E-03	1.49566	8.86E-04	5.63920	1.50E-01	8.05987	1.39E-03
		8	2.98416	7.53E-03	1.49758	8.55E-04	7.49488	2.53E-01	7.93894	1.94E-03

n=50

<i>Dist.</i>	λ	q	$\hat{\alpha}$	<i>AMSE</i>	$\hat{\theta}$	<i>AMSE</i>	\hat{q}	<i>AMSE</i>	$\hat{\lambda}$	<i>AMSE</i>
R			3.10514	1.67E-02	-	-	-	-	-	-
L	-	-	3.10094	1.54E-02	-	-	-	-	-	-
LR			3.09690	1.45E-02	1.48418	9.17E-04	-	-	-	-
SLR	-	1	3.09205	1.36E-02	1.48497	8.87E-04	0.76767	8.15E-02	-	-
		2	3.08745	1.27E-02	1.48572	8.50E-04	1.74444	9.05E-02	-	-
		3	2.91692	1.18E-02	1.48643	8.33E-04	2.69333	1.16E-01	-	-
		6	2.92107	1.10E-02	1.48711	7.84E-04	5.60133	1.70E-01	-	-
		8	2.92502	1.03E-02	1.48776	7.54E-04	7.44186	3.01E-01	-	-
SLRP	1	1	3.08653	1.26E-02	1.48587	8.54E-04	0.77929	7.59E-02	0.96225	2.26E-04
		2	3.08220	1.17E-02	1.48658	8.20E-04	1.75722	8.38E-02	1.03851	2.49E-04
		3	2.92855	1.00E-02	1.48833	7.66E-04	2.70866	1.05E-01	1.03928	2.74E-04
		6	2.93291	9.33E-03	1.51096	7.36E-04	5.62126	1.55E-01	1.04006	3.01E-04
		8	2.94002	8.37E-03	1.50980	7.00E-04	7.46977	2.71E-01	0.95914	3.31E-04
	2	1	3.08134	1.16E-02	1.48672	8.25E-04	0.79033	7.08E-02	1.96187	2.31E-04
		2	3.07727	1.09E-02	1.48738	7.93E-04	1.76936	7.78E-02	2.03889	2.77E-04
		3	2.93855	8.74E-03	1.48997	7.27E-04	2.72323	9.70E-02	1.96033	3.32E-04
		6	2.94969	7.49E-03	1.50822	6.84E-04	5.64020	1.41E-01	1.95954	3.99E-04
		8	2.96701	6.09E-03	1.50539	6.37E-04	7.49628	2.45E-01	2.04127	4.78E-04
	4	1	3.07646	1.08E-02	1.48751	7.98E-04	0.80081	6.63E-02	4.03851	2.35E-04
		2	3.07264	1.01E-02	1.48814	7.68E-04	1.78089	7.24E-02	3.96072	3.06E-04
		3	2.94716	7.78E-03	1.49137	6.97E-04	2.73707	8.94E-02	4.04007	3.98E-04
		6	2.96730	6.13E-03	1.50534	6.43E-04	5.65819	1.29E-01	4.04087	5.17E-04
		8	2.98021	5.42E-03	1.50323	6.14E-04	7.52146	2.21E-01	3.95831	6.72E-04
	8	1	3.07187	1.01E-02	1.48826	7.73E-04	0.81077	6.21E-02	8.03890	2.40E-04
		2	3.06828	9.48E-03	1.48885	7.45E-04	1.79185	6.76E-02	8.03967	3.36E-04
		3	2.95456	7.06E-03	1.49258	6.72E-04	2.75022	8.27E-02	7.95953	4.71E-04
		6	2.97874	5.53E-03	1.50347	6.22E-04	5.67528	1.18E-01	7.95872	6.59E-04
		8	2.98812	5.15E-03	1.50194	6.01E-04	7.54539	2.00E-01	8.04210	9.22E-04

n=75

<i>Dist.</i>	λ	q	$\hat{\alpha}$	<i>AMSE</i>	$\hat{\theta}$	<i>AMSE</i>	\hat{q}	<i>AMSE</i>	$\hat{\lambda}$	<i>AMSE</i>
R			3.07886	9.22E-03	-	-	-	-	-	-
L	-	-	3.07570	8.21E-03	-	-	-	-	-	-
LR			3.07267	7.73E-03	1.48734	5.80E-04	-	-	-	-
SLR	-	1	3.06904	7.25E-03	1.48797	5.61E-04	0.87222	2.77E-02	-	-
		2	3.06559	6.74E-03	1.48858	5.38E-04	1.85944	3.01E-02	-	-
		3	2.93769	6.28E-03	1.48915	5.27E-04	2.83133	3.75E-02	-	-
		6	2.94081	5.85E-03	1.48969	4.95E-04	5.78073	5.26E-02	-	-
		8	2.94377	5.47E-03	1.49020	4.76E-04	7.69302	8.97E-02	-	-
SLRP	1	1	3.06490	6.70E-03	1.48870	5.41E-04	0.87861	2.60E-02	0.98665	2.83E-05
		2	3.06165	6.25E-03	1.48926	5.19E-04	1.86647	2.82E-02	1.01361	3.11E-05
		3	2.94641	5.37E-03	1.49067	4.85E-04	2.83976	3.42E-02	1.01389	3.42E-05
		6	2.94969	5.00E-03	1.50876	4.66E-04	5.79169	4.82E-02	1.01416	3.76E-05
		8	2.95501	4.49E-03	1.50784	4.43E-04	7.70837	8.12E-02	0.98555	4.14E-05
	2	1	3.06100	6.22E-03	1.48937	5.22E-04	0.88468	2.45E-02	1.98652	2.88E-05
		2	3.05795	5.81E-03	1.48990	5.02E-04	1.87315	2.64E-02	2.01375	3.46E-05
		3	2.95392	4.70E-03	1.49197	4.61E-04	2.84778	3.17E-02	1.98597	4.15E-05
		6	2.96226	4.05E-03	1.50657	4.34E-04	5.80211	4.41E-02	1.98569	4.98E-05
		8	2.97526	3.32E-03	1.50431	4.04E-04	7.72295	7.35E-02	2.01459	5.98E-05
	4	1	3.05734	5.79E-03	1.49001	5.05E-04	0.89045	2.31E-02	4.01362	2.94E-05
		2	3.05448	5.42E-03	1.49051	4.86E-04	1.87949	2.48E-02	3.98611	3.82E-05
		3	2.96037	4.20E-03	1.49310	4.42E-04	2.85539	2.95E-02	4.01417	4.97E-05
		6	2.97547	3.35E-03	1.50427	4.09E-04	5.81200	4.05E-02	4.01445	6.46E-05
		8	2.98515	2.97E-03	1.50259	3.90E-04	7.73681	6.67E-02	3.98526	8.40E-05
	8	1	3.05390	5.41E-03	1.49061	4.90E-04	0.89592	2.19E-02	8.01375	3.00E-05
		2	3.05121	5.08E-03	1.49108	4.72E-04	1.88552	2.33E-02	8.01403	4.20E-05
		3	2.96592	3.82E-03	1.49406	4.27E-04	2.86262	2.75E-02	7.98569	5.88E-05
		6	2.98406	3.03E-03	1.50278	3.96E-04	5.82140	3.73E-02	7.98541	8.24E-05
		8	2.99109	2.83E-03	1.50155	3.82E-04	7.74997	6.06E-02	8.01489	1.15E-04

n=100

Dist.	λ	q	$\hat{\alpha}$	AMSE	$\hat{\theta}$	AMSE	\hat{q}	AMSE	$\hat{\lambda}$	AMSE
R	-	-	3.05914	5.36E-03	-	-	-	-	-	-
L	-	-	3.05678	4.66E-03	-	-	-	-	-	-
LR	-	-	3.05451	4.39E-03	1.48987	3.27E-04	-	-	-	-
SLR	-	1	3.05178	4.14E-03	1.49038	3.16E-04	0.95528	5.56E-03	-	-
		2	3.04919	3.85E-03	1.49086	3.02E-04	1.95080	5.79E-03	-	-
		3	2.95327	3.59E-03	1.49132	2.96E-04	2.94097	6.66E-03	-	-
		6	2.95560	3.36E-03	1.49175	2.76E-04	5.92326	8.33E-03	-	-
		8	2.95782	3.15E-03	1.49216	2.65E-04	7.89256	1.27E-02	-	-
SLRP	1	1	3.04867	3.84E-03	1.49096	3.04E-04	0.95751	5.33E-03	0.98979	1.66E-05
		2	3.04624	3.58E-03	1.49141	2.91E-04	1.95326	5.53E-03	1.01042	1.82E-05
		3	2.95981	3.11E-03	1.49253	2.71E-04	2.94392	6.18E-03	1.01063	2.00E-05
		6	2.96226	2.90E-03	1.50701	2.59E-04	5.92709	7.78E-03	1.01084	2.20E-05
		8	2.96626	2.62E-03	1.50627	2.46E-04	7.89793	1.16E-02	0.98894	2.42E-05
	2	1	3.04575	3.57E-03	1.49150	2.93E-04	0.95964	5.12E-03	1.98968	1.69E-05
		2	3.04347	3.34E-03	1.49192	2.81E-04	1.95560	5.29E-03	2.01052	2.03E-05
		3	2.96544	2.74E-03	1.49358	2.57E-04	2.94672	5.86E-03	1.98927	2.43E-05
		6	2.97170	2.38E-03	1.50526	2.41E-04	5.93074	7.27E-03	1.98905	2.92E-05
		8	2.98144	1.99E-03	1.50345	2.24E-04	7.90303	1.07E-02	2.01117	3.50E-05
	4	1	3.04301	3.33E-03	1.49201	2.83E-04	0.96166	4.93E-03	4.01042	1.72E-05
		2	3.04086	3.13E-03	1.49241	2.72E-04	1.95782	5.07E-03	3.98937	2.24E-05
		3	2.97028	2.47E-03	1.49448	2.46E-04	2.94939	5.57E-03	4.01084	2.91E-05
		6	2.98160	2.01E-03	1.50342	2.27E-04	5.93420	6.82E-03	4.01106	3.79E-05
		8	2.98887	1.80E-03	1.50207	2.15E-04	7.90788	9.85E-03	3.98872	4.92E-05
	8	1	3.04043	3.13E-03	1.49249	2.74E-04	0.96357	4.76E-03	8.01052	1.76E-05
		2	3.03841	2.94E-03	1.49286	2.63E-04	1.95993	4.87E-03	8.01073	2.46E-05
		3	2.97444	2.26E-03	1.49525	2.37E-04	2.9	5.31E-03	7.98905	3.45E-05
		6	2.98804	1.83E-03	1.50222	2.19E-04	5.93749	6.41E-03	7.98883	4.82E-05
		8	2.99332	1.72E-03	1.50124	2.10E-04	7.91249	9.10E-03	8.01139	6.75E-05

نلاحظ من الجدول (3-5) أنه قد تم استعمال القيم الافتراضية (الاختيارية) الأولية للمعلمات الأربعة ($\alpha = 3, \theta = 1.5, q = 1,2,3,6,8, \lambda = 1,2,4,8$) لأيجاد تقديرات الأماكن الأعظم لمعلمات التوزيعات الاحتمالية الأصلية رابلي ، ليندلي ، ليندلي-رابلي (R, L ,LR) والتوزيعين الاحتماليين المقترحين ليندلي-رابلي المقطوع SLR (الأول) وتوزيع ليندلي-رابلي المقطوع بواسون SLRP (الثاني)

إذ تم اختيار توزيع بواسون المبتور ذو المعلمة λ (معدل التوزيع) ليمثل احد توزيعات متسلسة القوى التي تم ذكرها في الجانب النظري، ونشير الى أن الحالة المدروسة هنا يظهر فيها تساوي بقيمتي معلمتي القياس والشكل. ولقد تم استعمال المؤشر الإحصائي متوسط معدل مربع الخطأ (AMSE) للمقارنة بين التقديرات وتحديد الأفضلية بين التوزيعات الأصلية والمقترحة وبالاعتماد على أحجام عينة مختلفة وكما يأتي:

• **عند حجم عينة n=25** اظهرت النتائج افضلية للتوزيعين المقترحين الأول والثاني SLRP,SLR في تقديرات MLE للمعلمات مقارنة بالتوزيعات الأصلية ولجميع القيم الاختيارية لمعلمة التقترح q والمعلمة λ (المعدل) وعلى سبيل المثال عند $q=8$ ، $\lambda = 1$ يتضح أن قيم AMSE لتوزيع المقترح الأول SLR :

$$AMSE(\hat{\alpha}) = 1.66E - 02 , AMSE(\hat{\theta}) = 1.09E - 03 , AMSE(\hat{q}) = 3.79E - 01$$

ولتوزيع المقترح الثاني SLRP:

$$AMSE(\hat{\alpha}) = 1.33E - 02 , AMSE(\hat{\theta}) = 1.01E - 03 , AMSE(\hat{q}) = 3.42E - 01$$

$$AMSE(\hat{\lambda}) = 6.97E - 04$$

• **عند حجم عينة n=50** اظهرت النتائج افضلية للتوزيعين المقترحين الأول والثاني SLRP,SLR في تقديرات MLE للمعلمات مقارنة بالتوزيعات الأصلية ولجميع القيم الاختيارية لمعلمة التقترح q والمعلمة λ (المعدل) وعلى سبيل المثال عند $q=8$ ، $\lambda = 1$ يتضح أن قيم AMSE لتوزيع المقترح الأول SLR :

$$AMSE(\hat{\alpha}) = 1.03E - 02 , AMSE(\hat{\theta}) = 7.54E - 04 , AMSE(\hat{q}) = 3.01E - 01$$

ولتوزيع المقترح الثاني SLRP:

$$AMSE(\hat{\alpha}) = 8.37E - 03 , AMSE(\hat{\theta}) = 7.00E - 04 , AMSE(\hat{q}) = 2.71E - 01$$

$$AMSE(\hat{\lambda}) = 3.31E - 04$$

• **عند حجم عينة n=75** اظهرت النتائج افضلية للتوزيعين المقترحين الأول والثاني SLRP,SLR في تقديرات MLE للمعلمات مقارنة بالتوزيعات الأصلية ولجميع القيم الاختيارية لمعلمة التقترح q والمعلمة λ (المعدل) وعلى سبيل المثال عند $q=8$ ، $\lambda = 1$ يتضح أن قيم AMSE لتوزيع المقترح الأول SLR :

$$AMSE(\hat{\alpha}) = 5.47E - 03 , AMSE(\hat{\theta}) = 4.76E - 04 , AMSE(\hat{q}) = 8.97E - 02$$

ولتوزيع المقترح الثاني SLRP:

$$AMSE(\hat{\alpha}) = 4.49E - 03 , AMSE(\hat{\theta}) = 4.43E - 04 , AMSE(\hat{q}) = 8.12E - 02$$

$$AMSE(\hat{\lambda}) = 4.14E - 05$$

• عند حجم عينة $n=100$ اظهرت النتائج افضلية للتوزيعين المقترحين الأول والثاني SLRP,SLR

في تقديرات MLE للمعلمات مقارنة بالتوزيعات الأصلية ولجميع القيم الاختيارية لمعلمة التفرطح

q والمعلمة λ (المعدل) وعلى سبيل المثال عند $q=8$ ، $\lambda = 1$ يتضح أن قيم AMSE لتوزيع

المقترح الأول SLR :

$$AMSE(\hat{\alpha}) = 3.15E - 03 , AMSE(\hat{\theta}) = 2.65E - 04 , AMSE(\hat{q}) = 1.27E - 02$$

ولتوزيع المقترح الثاني SLRP:

$$AMSE(\hat{\alpha}) = 2.62E - 03 , AMSE(\hat{\theta}) = 2.46E - 04 , AMSE(\hat{q}) = 1.16E - 02$$

$$AMSE(\hat{\lambda}) = 2.42E - 05$$

مما تقدم يمكن القول أن التوزيعين المقترحين كان لهما الأفضلية في ايجاد تقديرات MLE ويمكن

ملاحظة ذلك ايضاً عند بقية القيم الافتراضية الأولية الأخرى، كما يتبين ايضاً أن قيمة AMSE تقل

عند زيادة حجم العينة و هو المأمول والمتوقع في جميع التجارب الإحصائية.

جدول (6-3) يبين نتائج تقديرات طريقة الامكان الأعظم MLE لمعاملات التوزيعات الاحتمالية الأصلية والمقترحة عند حجوم عينات مختلفة (n=25,50,75,100) ولمجموعة القيم الافتراضية (الاختيارية) $(\alpha=5, \theta=2.5, q=1,2,3,6,8, \lambda=1,2,4,8)$.

n=25

Dist.	λ	q	$\hat{\alpha}$	AMSE	$\hat{\theta}$	AMSE	\hat{q}	AMSE	$\hat{\lambda}$	AMSE
R			0.86938	1.69E-02	-	-	-	-	-	-
L	-	-	1.85632	1.91E-02	-	-	-	-	-	-
LR			3.82758	2.54E-02	1.48022	1.34E-03	-	-	-	-
SLR	-	1	7.77585	3.82E-02	1.48121	1.30E-03	0.74985	9.88E-02	-	-
		2	0.87591	1.55E-02	1.51785	1.24E-03	1.72484	1.09E-01	-	-
		3	1.86350	1.75E-02	1.48304	1.21E-03	2.66980	1.39E-01	-	-
		6	3.83620	2.26E-02	1.51611	1.14E-03	5.57074	2.01E-01	-	-
		8	7.78706	3.44E-02	1.51531	1.09E-03	7.39904	3.53E-01	-	-
SLRP	1	1	0.88211	1.43E-02	1.48234	1.24E-03	0.76236	9.23E-02	0.73587	1.11E-02
		2	1.87033	1.60E-02	1.51678	1.19E-03	1.73859	1.01E-01	1.26941	1.22E-02
		3	3.84439	2.06E-02	1.48542	1.11E-03	2.68631	1.26E-01	1.27480	1.34E-02
		6	7.79771	3.10E-02	1.48631	1.06E-03	5.59221	1.83E-01	1.28029	1.47E-02
		8	0.88801	1.32E-02	1.48776	1.01E-03	7.42909	3.18E-01	0.71410	1.62E-02
	2	1	1.87681	1.47E-02	1.48340	1.20E-03	0.77424	8.63E-02	1.73323	1.13E-02
		2	3.85217	1.87E-02	1.51577	1.15E-03	1.75166	9.43E-02	2.27210	1.36E-02
		3	7.80782	2.80E-02	1.48746	1.05E-03	2.70200	1.16E-01	1.72245	1.63E-02
		6	0.86938	1.69E-02	1.48973	9.81E-04	5.61260	1.67E-01	1.71690	1.95E-02
		8	1.85632	1.91E-02	1.49327	9.09E-04	7.45763	2.87E-01	2.28876	2.34E-02
	4	1	3.82758	2.54E-02	1.48439	1.16E-03	0.78553	8.10E-02	4.26944	1.15E-02
		2	7.77585	3.82E-02	1.51483	1.11E-03	1.76408	8.80E-02	3.72518	1.50E-02
		3	0.87591	1.55E-02	1.48921	1.00E-03	2.71690	1.08E-01	4.28032	1.95E-02
		6	1.86350	1.75E-02	1.49332	9.18E-04	5.63197	1.53E-01	4.28593	2.53E-02
		8	3.83620	2.26E-02	1.49596	8.74E-04	7.48475	2.60E-01	3.70835	3.29E-02
	8	1	7.78706	3.44E-02	1.48533	1.12E-03	0.79625	7.62E-02	8.27213	1.18E-02
		2	0.88211	1.43E-02	1.51394	1.08E-03	1.77588	8.24E-02	8.27757	1.65E-02
		3	1.87033	1.60E-02	1.49072	9.63E-04	2.73105	9.98E-02	7.71688	2.30E-02
		6	3.84439	2.06E-02	1.49566	8.86E-04	5.65037	1.40E-01	7.71121	3.22E-02
		8	7.79771	3.10E-02	1.49758	8.55E-04	7.51051	2.35E-01	8.29456	4.51E-02

n=50

<i>Dist.</i>	λ	q	$\hat{\alpha}$	<i>AMSE</i>	$\hat{\theta}$	<i>AMSE</i>	\hat{q}	<i>AMSE</i>	$\hat{\lambda}$	<i>AMSE</i>
R			5.15097	3.02E-02	-	-	-	-	-	-
L	-	-	5.14493	2.75E-02	-	-	-	-	-	-
LR			5.13913	2.58E-02	1.48418	9.17E-04	-	-	-	-
SLR	-	1	5.13218	2.40E-02	1.48497	8.87E-04	0.77487	7.63E-02	-	-
		2	5.12557	2.21E-02	1.48572	8.50E-04	1.75235	8.46E-02	-	-
		3	4.88071	2.04E-02	1.48643	8.33E-04	2.70282	1.09E-01	-	-
		6	4.88668	1.89E-02	1.48711	7.84E-04	5.61367	1.59E-01	-	-
		8	4.89234	1.75E-02	1.48776	7.54E-04	7.45914	2.80E-01	-	-
SLRP	1	1	5.12424	2.19E-02	1.48587	8.54E-04	0.78612	7.11E-02	0.84852	3.64E-03
		2	5.11803	2.02E-02	1.48658	8.20E-04	1.76473	7.84E-02	1.15451	4.01E-03
		3	4.89741	1.69E-02	1.48833	7.66E-04	2.71768	9.84E-02	1.15760	4.41E-03
		6	4.90367	1.56E-02	1.51096	7.36E-04	5.63298	1.44E-01	1.16075	4.85E-03
		8	4.91387	1.37E-02	1.50980	7.00E-04	7.48618	2.52E-01	0.83604	5.33E-03
	2	1	5.11679	2.01E-02	1.48672	8.25E-04	0.79682	6.64E-02	1.84701	3.71E-03
		2	5.11095	1.86E-02	1.48738	7.93E-04	1.77650	7.28E-02	2.15605	4.46E-03
		3	4.91177	1.44E-02	1.48997	7.27E-04	2.73180	9.06E-02	1.84083	5.35E-03
		6	4.92776	1.20E-02	1.50822	6.84E-04	5.65134	1.31E-01	1.83764	6.42E-03
		8	4.95263	9.24E-03	1.50539	6.37E-04	7.51187	2.28E-01	2.16560	7.70E-03
	4	1	5.10978	1.85E-02	1.48751	7.98E-04	0.80697	6.21E-02	4.15452	3.79E-03
		2	5.10429	1.71E-02	1.48814	7.68E-04	1.78767	6.78E-02	3.84239	4.93E-03
		3	4.92413	1.25E-02	1.49137	6.97E-04	2.74521	8.36E-02	4.16077	6.40E-03
		6	4.95304	9.29E-03	1.50534	6.43E-04	5.66877	1.20E-01	4.16398	8.33E-03
		8	4.97158	7.94E-03	1.50323	6.14E-04	7.53628	2.06E-01	3.83274	1.08E-02
	8	1	5.10320	1.70E-02	1.48826	7.73E-04	0.81663	5.83E-02	8.15607	3.87E-03
		2	5.09804	1.59E-02	1.48885	7.45E-04	1.79829	6.33E-02	8.15919	5.41E-03
		3	4.93475	1.11E-02	1.49258	6.72E-04	2.75795	7.73E-02	7.83763	7.58E-03
		6	4.96948	8.12E-03	1.50347	6.22E-04	5.68533	1.10E-01	7.83438	1.06E-02
		8	4.98295	7.42E-03	1.50194	6.01E-04	7.55946	1.86E-01	8.16893	1.48E-02

n=75

<i>Dist.</i>	λ	q	$\hat{\alpha}$	<i>AMSE</i>	$\hat{\theta}$	<i>AMSE</i>	\hat{q}	<i>AMSE</i>	$\hat{\lambda}$	<i>AMSE</i>
R			5.11323	1.66E-02	-	-	-	-	-	-
L	-	-	5.10870	1.47E-02	-	-	-	-	-	-
LR			5.10435	1.37E-02	1.48734	5.80E-04	-	-	-	-
SLR	-	1	5.09913	1.28E-02	1.48797	5.61E-04	0.87618	2.60E-02	-	-
		2	5.09417	1.18E-02	1.48858	5.38E-04	1.86379	2.82E-02	-	-
		3	4.91053	1.09E-02	1.48915	5.27E-04	2.83655	3.51E-02	-	-
		6	4.91501	1.01E-02	1.48969	4.95E-04	5.78752	4.91E-02	-	-
		8	4.91926	9.36E-03	1.49020	4.76E-04	7.70252	8.34E-02	-	-
SLRP	1	1	5.09318	1.17E-02	1.48870	5.41E-04	0.88237	2.44E-02	1.12215	2.37E-03
		2	5.08852	1.08E-02	1.48926	5.19E-04	1.87060	2.64E-02	0.87541	2.60E-03
		3	4.92306	9.11E-03	1.49067	4.85E-04	2.84472	3.20E-02	0.87292	2.87E-03
		6	4.92776	8.39E-03	1.50876	4.66E-04	5.79814	4.49E-02	0.87038	3.15E-03
		8	4.93541	7.41E-03	1.50784	4.43E-04	7.71740	7.55E-02	1.13222	3.47E-03
	2	1	5.08759	1.07E-02	1.48937	5.22E-04	0.88825	2.30E-02	2.12337	2.42E-03
		2	5.08321	9.96E-03	1.48990	5.02E-04	1.87707	2.47E-02	1.87416	2.90E-03
		3	4.93383	7.77E-03	1.49197	4.61E-04	2.85249	2.97E-02	2.12835	3.48E-03
		6	4.94582	6.50E-03	1.50657	4.34E-04	5.80823	4.12E-02	2.13092	4.17E-03
		8	4.96447	5.07E-03	1.50431	4.04E-04	7.73153	6.84E-02	1.86646	5.01E-03
	4	1	5.08234	9.90E-03	1.49001	5.05E-04	0.89384	2.17E-02	3.87540	2.46E-03
		2	5.07822	9.20E-03	1.49051	4.86E-04	1.88322	2.32E-02	4.12709	3.20E-03
		3	4.94309	6.79E-03	1.49310	4.42E-04	2.85986	2.76E-02	3.87036	4.16E-03
		6	4.96478	5.11E-03	1.50427	4.09E-04	5.81782	3.78E-02	3.86777	5.41E-03
		8	4.97868	4.39E-03	1.50259	3.90E-04	7.74495	6.21E-02	4.13487	7.04E-03
	8	1	5.07740	9.15E-03	1.49061	4.90E-04	0.89914	2.06E-02	7.87415	2.51E-03
		2	5.07353	8.53E-03	1.49108	4.72E-04	1.88906	2.19E-02	7.87163	3.52E-03
		3	4.95106	6.05E-03	1.49406	4.27E-04	2.86687	2.57E-02	8.13093	4.93E-03
		6	4.97711	4.50E-03	1.50278	3.96E-04	5.82693	3.48E-02	8.13355	6.90E-03
		8	4.98721	4.12E-03	1.50155	3.82E-04	7.75770	5.64E-02	7.86378	9.66E-03

n=100

Dist.	λ	q	$\hat{\alpha}$	AMSE	$\hat{\theta}$	AMSE	\hat{q}	AMSE	$\hat{\lambda}$	AMSE
R	-	-	5.08492	9.58E-03	-	-	-	-	-	-
L	-	-	5.08152	8.35E-03	-	-	-	-	-	-
LR	-	-	5.07826	7.83E-03	1.48987	3.27E-04	-	-	-	-
SLR	-	1	5.07435	7.32E-03	1.49038	3.16E-04	0.95666	5.23E-03	-	-
		2	5.07063	6.77E-03	1.49086	3.02E-04	1.95233	5.44E-03	-	-
		3	4.93290	6.27E-03	1.49132	2.96E-04	2.94279	6.25E-03	-	-
		6	4.93626	5.81E-03	1.49175	2.76E-04	5.92563	7.79E-03	-	-
		8	4.93944	5.40E-03	1.49216	2.65E-04	7.89588	1.18E-02	-	-
SLRP	1	1	5.06989	6.72E-03	1.49096	3.04E-04	0.95883	5.02E-03	1.10054	1.60E-03
		2	5.06639	6.23E-03	1.49141	2.91E-04	1.95471	5.19E-03	0.89745	1.76E-03
		3	4.94229	5.28E-03	1.49253	2.71E-04	2.94565	5.80E-03	0.89540	1.94E-03
		6	4.94582	4.88E-03	1.50701	2.59E-04	5.92935	7.27E-03	0.89330	2.14E-03
		8	4.95155	4.34E-03	1.50627	2.46E-04	7.90109	1.08E-02	1.10883	2.35E-03
	2	1	5.06569	6.19E-03	1.49150	2.93E-04	0.96089	4.82E-03	2.10155	1.64E-03
		2	5.06241	5.75E-03	1.49192	2.81E-04	1.95698	4.97E-03	1.89642	1.96E-03
		3	4.95037	4.56E-03	1.49358	2.57E-04	2.94837	5.50E-03	2.10565	2.36E-03
		6	4.95936	3.85E-03	1.50526	2.41E-04	5.93288	6.81E-03	2.10776	2.83E-03
		8	4.97335	3.07E-03	1.50345	2.24E-04	7.90603	9.96E-03	1.89008	3.39E-03
	4	1	5.06175	5.72E-03	1.49201	2.83E-04	0.96284	4.64E-03	3.89744	1.67E-03
		2	5.05867	5.33E-03	1.49241	2.72E-04	1.95913	4.77E-03	3.89539	2.17E-03
		3	4.95732	4.01E-03	1.49448	2.46E-04	2.95095	5.23E-03	4.10671	2.82E-03
		6	4.97359	3.10E-03	1.50342	2.27E-04	5.93624	6.38E-03	4.10884	3.67E-03
		8	4.98401	2.70E-03	1.50207	2.15E-04	7.91073	9.19E-03	3.88898	4.77E-03
	8	1	5.05805	5.31E-03	1.49249	2.74E-04	0.96470	4.48E-03	7.89641	1.70E-03
		2	5.05515	4.96E-03	1.49286	2.63E-04	1.96117	4.58E-03	7.89434	2.38E-03
		3	4.96330	3.61E-03	1.49525	2.37E-04	2.95340	4.98E-03	8.10777	3.34E-03
		6	4.98283	2.76E-03	1.50222	2.19E-04	5.93943	6.00E-03	8.10993	4.67E-03
		8	4.99041	2.54E-03	1.50124	2.10E-04	7.91520	8.49E-03	7.88787	6.54E-03

نلاحظ من الجدول (3-6) أنه قد تم استعمال القيم الافتراضية (الاختيارية) الأولية للمعلمات الأربعة ($\alpha = 5, \theta = 2.5, q = 1,2,3,6,8, \lambda = 1,2,4,8$) لأيجاد تقديرات الأماكن الأعظم لمعلمات التوزيعات الاحتمالية الأصلية رابلي ، ليندلي ، ليندلي-رابلي (R, L ,LR) والتوزيعين الاحتماليين المقترحين ليندلي-رابلي المقطوع SLR (الأول) وتوزيع ليندلي-رابلي المقطوع بواسون SLRP (الثاني)

إذ تم اختيار توزيع بواسون المبتور ذو المعلمة λ (معدل التوزيع) ليمثل احد توزيعات متسلسلة القوى التي تم ذكرها في الجانب النظري، ونشير الى أن الحالة المدروسة هنا يظهر فيها تساوي بقيمتي معلمتي القياس والشكل. ولقد تم استعمال المؤشر الإحصائي معدل متوسط مربع الخطأ (AMSE) للمقارنة بين التقديرات وتحديد الأفضلية بين التوزيعات الأصلية والمقترحة وبالاعتماد على أحجام عينة مختلفة وكما يأتي:

• **عند حجم عينة $n=25$** اظهرت النتائج افضلية للتوزيعين المقترحين الأول والثاني SLRP,SLR في تقديرات MLE للمعلمات مقارنة بالتوزيعات الأصلية ولجميع القيم الاختيارية لمعلمة التقترح q والمعلمة λ (المعدل) وعلى سبيل المثال عند $q=8$ ، $\lambda = 1$ يتضح أن قيم AMSE لتوزيع المقترح الأول SLR :

$$AMSE(\hat{\alpha}) = 3.44E - 02 , AMSE(\hat{\theta}) = 1.09E - 03 , AMSE(\hat{q}) = 3.53E - 01$$

ولتوزيع المقترح الثاني SLRP:

$$AMSE(\hat{\alpha}) = 1.32E - 02 , AMSE(\hat{\theta}) = 1.01E - 03 , AMSE(\hat{q}) = 3.18E - 01$$

$$AMSE(\hat{\lambda}) = 1.62E - 02$$

• **عند حجم عينة $n=50$** اظهرت النتائج افضلية للتوزيعين المقترحين الأول والثاني SLRP,SLR في تقديرات MLE للمعلمات مقارنة بالتوزيعات الأصلية ولجميع القيم الاختيارية لمعلمة التقترح q والمعلمة λ (المعدل) وعلى سبيل المثال عند $q=8$ ، $\lambda = 1$ يتضح أن قيم AMSE لتوزيع المقترح الأول SLR :

$$AMSE(\hat{\alpha}) = 1.75E - 02 , AMSE(\hat{\theta}) = 7.54E - 04 , AMSE(\hat{q}) = 2.80E - 01$$

ولتوزيع المقترح الثاني SLRP:

$$AMSE(\hat{\alpha}) = 1.37E - 02 , MSE(\hat{\theta}) = 7.00E - 04 , AMSE(\hat{q}) = 2.52E - 01$$

$$AMSE(\hat{\lambda}) = 5.33E - 03$$

• **عند حجم عينة $n=75$** اظهرت النتائج افضلية للتوزيعين المقترحين الأول والثاني SLRP,SLR في تقديرات MLE للمعلمات مقارنة بالتوزيعات الأصلية ولجميع القيم الاختيارية لمعلمة التقترح q والمعلمة λ (المعدل) وعلى سبيل المثال عند $q=8$ ، $\lambda = 1$ يتضح أن قيم AMSE لتوزيع المقترح الأول SLR :

$$AMSE(\hat{\alpha}) = 9.36E - 03 , AMSE(\hat{\theta}) = 4.76E - 04 , AMSE(\hat{q}) = 8.34E - 02$$

ولتوزيع المقترح الثاني SLRP:

$$AMSE(\hat{\alpha}) = 7.41E - 03 , AMSE(\hat{\theta}) = 4.43E - 04 , AMSE(\hat{q}) = 7.55E - 02$$

$$AMSE(\hat{\lambda}) = 3.47E - 03$$

• عند حجم عينة $n=100$ اظهرت النتائج افضلية للتوزيعين المقترحين الأول والثاني SLRP,SLR في تقديرات MLE للمعلمات مقارنة بالتوزيعات الأصلية ولجميع القيم الاختيارية لمعلمة التفرطح q والمعلمة λ (المعدل) وعلى سبيل المثال عند $q=8$ ، $\lambda = 1$ يتضح أن قيم $AMSE$ لتوزيع المقترح الأول SLR :

$$MSE(\hat{\alpha}) = 5.40E - 03 , AMSE(\hat{\theta}) = 2.65E - 04 , AMSE(\hat{q}) = 1.18E - 02$$

ولتوزيع المقترح الثاني SLRP:

$$AMSE(\hat{\alpha}) = 4.34E - 03 , AMSE(\hat{\theta}) = 2.46E - 04 , AMSE(\hat{q}) = 1.08E - 02$$

$$AMSE(\hat{\lambda}) = 2.35E - 03$$

مما تقدم يمكن القول أن التوزيعين المقترحين كان لهما الأفضلية في تقديرات MLE للمعلمات ويمكن ملاحظة ذلك أيضاً عند بقية القيم الافتراضية الأولية الأخرى، كما يتبين أيضاً أن قيمة $AMSE$ تقل عند زيادة حجم العينة و هو المأمول والمتوقع في جميع التجارب الإحصائية.

وفيما يلي نعرض جداولاً تبين نتائج تقديرات الامكان الأعظم MLE لدوال المعولية للتوزيعات الاحتمالية للتوزيعين المقترحين SLRP,SLR عند أوقات حياة (اشتغال) مختلفة وباستعمال احجام عينات مختلفة ($n=25,50,75,100$) و بالاستناد على مجموعة قيم افتراضية اختيارية من المعلمات، كذلك نبين عن طريق هذه النتائج افضلية دوال المعولية بين المقترحين باستعمال مؤشر المقارنة الإحصائي RAMSE.

جدول (3-7) يبين نتائج تقديرات الامكان الأعظم MLE لدوال المعولية للتوزيعات الاحتمالية المقترحة SLR, SLRP لأوقات حياة (اشتغال) مختلفة عند حجوم عينات مختلفة (n= 25,50,75, 100) ولمجموعة القيم الافتراضية ($\alpha=0.4, \theta=0.4, q=3,6,8, \lambda=1$)

n=25

Dist.	t	R	\bar{R}	RAMSE	Dist.	t	R	\bar{R}	RAMSE
SLR q=3	1	0.574578	0.555124	0.012699	SLRP q=3 $\lambda=1$	1	0.563086	0.544448	0.012023
	2	0.201159	0.194348	0.011557		2	0.197136	0.190610	0.011441
	3	0.133697	0.129171	0.011004		3	0.131023	0.126686	0.010894
	4	0.090227	0.087172	0.010452		4	0.088422	0.085495	0.010348
	5	0.005897	0.005498	0.009901		5	0.005780	0.005397	0.009802
	6	0.001215	0.001132	0.009351		6	0.001190	0.001111	0.009258
	7	0.000532	0.000478	0.008801		7	0.000522	0.000470	0.008713
	8	0.000299	0.000268	0.008251		8	0.000293	0.000264	0.008168
	9	0.000084	0.000073	0.007701		9	0.000082	0.000072	0.007624
	10	0.000035	0.000030	0.006601		10	0.000034	0.000030	0.006535
SLR q=6	1	0.551825	0.527941	0.291122	SLRP q=6 $\lambda=1$	1	0.540788	0.523404	0.012311
	2	0.193193	0.184832	0.045484		2	0.189329	0.183243	0.011213
	3	0.128403	0.122846	0.025873		3	0.125835	0.121790	0.010677
	4	0.086654	0.082903	0.017116		4	0.084921	0.082191	0.010142
	5	0.005664	0.005174	0.009731		5	0.005551	0.005194	0.009607
	6	0.001166	0.001066	0.009166		6	0.001143	0.001070	0.009073
	7	0.000511	0.000445	0.008626		7	0.000501	0.000453	0.008540
	8	0.000287	0.000250	0.008087		8	0.000281	0.000254	0.008006
	9	0.000081	0.000067	0.007548		9	0.000079	0.000069	0.007472
	10	0.000033	0.000028	0.006469		10	0.000033	0.000028	0.006405
SLR q=8	1	0.535380	0.518504	0.012186	SLRP q=8 $\lambda=1$	1	0.530027	0.513484	0.012062
	2	0.187436	0.181528	0.011100		2	0.185562	0.179770	0.010989
	3	0.123318	0.119431	0.010570		3	0.120852	0.117080	0.010464
	4	0.083222	0.080599	0.010040		4	0.081558	0.079013	0.009940
	5	0.005384	0.005045	0.009511		5	0.005223	0.004897	0.009416
	6	0.001109	0.001039	0.008983		6	0.001076	0.001008	0.008893
	7	0.000481	0.000435	0.008454		7	0.000462	0.000418	0.008370
	8	0.000270	0.000244	0.007926		8	0.000259	0.000235	0.007847
	9	0.000075	0.000066	0.007397		9	0.000071	0.000063	0.007324
	10	0.000031	0.000027	0.006341		10	0.000029	0.000026	0.006277

n=50

Dist.	t	R	\hat{R}	RAMSE	Dist.	t	R	\hat{R}	RAMSE
SLR q=3	1	0.574578	0.562032	0.009774	SLRP q=3 $\lambda=1$	1	0.563086	0.550966	0.009161
	2	0.201159	0.196766	0.008891		2	0.197136	0.192892	0.008713
	3	0.133697	0.130778	0.008465		3	0.131023	0.128203	0.008295
	4	0.090227	0.088257	0.008040		4	0.088422	0.086519	0.007880
	5	0.005897	0.005640	0.007616		5	0.005780	0.005531	0.007464
	6	0.001215	0.001162	0.007193		6	0.001190	0.001139	0.007049
	7	0.000532	0.000497	0.006770		7	0.000522	0.000488	0.006635
	8	0.000299	0.000279	0.006347		8	0.000293	0.000274	0.006220
	9	0.000084	0.000077	0.005924		9	0.000082	0.000075	0.005805
	10	0.000035	0.000032	0.005078		10	0.000034	0.000031	0.004976
SLR q=6	1	0.551825	0.540117	0.009484	SLRP q=6 $\lambda=1$	1	0.540788	0.529371	0.009193
	2	0.193193	0.189094	0.008551		2	0.189329	0.185332	0.008367
	3	0.128403	0.125679	0.008135		3	0.125835	0.123178	0.007967
	4	0.086654	0.084815	0.007724		4	0.084921	0.083128	0.007567
	5	0.005664	0.005424	0.007315		5	0.005551	0.005316	0.007168
	6	0.001166	0.001117	0.006908		6	0.001143	0.001095	0.006770
	7	0.000511	0.000479	0.006502		7	0.000501	0.000469	0.006372
	8	0.000287	0.000269	0.006096		8	0.000281	0.000263	0.005974
	9	0.000081	0.000074	0.005689		9	0.000079	0.000072	0.005575
	10	0.000033	0.000030	0.004876		10	0.000033	0.000030	0.004779
SLR q=8	1	0.535380	0.524241	0.009008	SLRP q=8 $\lambda=1$	1	0.530027	0.519053	0.008827
	2	0.187436	0.183536	0.008200		2	0.185562	0.181720	0.008036
	3	0.123318	0.120752	0.007807		3	0.120852	0.118350	0.007651
	4	0.083222	0.081491	0.007416		4	0.081558	0.079869	0.007268
	5	0.005384	0.005160	0.007025		5	0.005223	0.005006	0.006885
	6	0.001109	0.001063	0.006635		6	0.001076	0.001031	0.006502
	7	0.000481	0.000451	0.006244		7	0.000462	0.000433	0.006120
	8	0.000270	0.000253	0.005854		8	0.000259	0.000243	0.005737
	9	0.000075	0.000069	0.005464		9	0.000071	0.000066	0.005355
	10	0.000031	0.000028	0.004683		10	0.000029	0.000027	0.004590

n=75

Dist.	t	R	\hat{R}	RAMSE	Dist.	t	R	\hat{R}	RAMSE
SLR q=3	1	0.574578	0.568487	0.007823	SLRP q=3 $\lambda=1$	1	0.563086	0.557174	0.007259
	2	0.201159	0.199027	0.007113		2	0.197136	0.195066	0.006900
	3	0.133697	0.132280	0.006772		3	0.131023	0.129648	0.006569
	4	0.090227	0.089270	0.006432		4	0.088422	0.087494	0.006239
	5	0.005897	0.005772	0.006093		5	0.005780	0.005658	0.005910
	6	0.001215	0.001189	0.005755		6	0.001190	0.001165	0.005582
	7	0.000532	0.000515	0.005416		7	0.000522	0.000505	0.005254
	8	0.000299	0.000289	0.005078		8	0.000293	0.000284	0.004925
	9	0.000084	0.000081	0.004739		9	0.000082	0.000079	0.004597
	10	0.000035	0.000033	0.004062		10	0.000034	0.000033	0.003940
SLR q=6	1	0.551825	0.546086	0.007358	SLRP q=6	1	0.540788	0.535164	0.007137
	2	0.193193	0.191184	0.006692		2	0.189329	0.187360	0.006492
	3	0.128403	0.127068	0.006372		3	0.125835	0.124526	0.006181
	4	0.086654	0.085753	0.006052		4	0.084921	0.084038	0.005871
	5	0.005664	0.005546	0.005733		5	0.005551	0.005435	0.005561
	6	0.001166	0.001142	0.005414		6	0.001143	0.001119	0.005252
	7	0.000511	0.000495	0.005096		7	0.000501	0.000485	0.004943
	8	0.000287	0.000278	0.004777		8	0.000281	0.000272	0.004634
	9	0.000081	0.000077	0.004459		9	0.000079	0.000076	0.004325
	10	0.000033	0.000032	0.003822		10	0.000033	0.000031	0.003707
SLR q=8	1	0.535380	0.529866	0.006923	SLRP q=8 $\lambda=1$	1	0.530027	0.524567	0.006716
	2	0.187436	0.185505	0.006297		2	0.185562	0.183650	0.006108
	3	0.123318	0.122048	0.005995		3	0.120852	0.119607	0.005815
	4	0.083222	0.082365	0.005695		4	0.081558	0.080718	0.005524
	5	0.005384	0.005273	0.005394		5	0.005223	0.005115	0.005232
	6	0.001109	0.001086	0.005094		6	0.001076	0.001053	0.004942
	7	0.000481	0.000466	0.004795		7	0.000462	0.000447	0.004651
	8	0.000270	0.000262	0.004495		8	0.000259	0.000251	0.004360
	9	0.000075	0.000072	0.004195		9	0.000071	0.000069	0.004070
	10	0.000031	0.000030	0.003596		10	0.000029	0.000028	0.003488

n=100

Dist.	t	R	\hat{R}	RAMSE	Dist.	t	R	\hat{R}	RAMSE
SLR q=3	1	0.574578	0.568832	0.006803	SLRP q=3 $\lambda=1$	1	0.563086	0.557456	0.006463
	2	0.201159	0.199147	0.006185		2	0.197136	0.195164	0.005876
	3	0.133697	0.135034	0.005889		3	0.131023	0.132334	0.005594
	4	0.090227	0.091129	0.005593		4	0.088422	0.089307	0.005314
	5	0.005897	0.006015	0.005298		5	0.005780	0.005895	0.005033
	6	0.001215	0.001239	0.005004		6	0.001190	0.001214	0.004754
	7	0.000532	0.000548	0.004710		7	0.000522	0.000537	0.004474
	8	0.000299	0.000308	0.004415		8	0.000293	0.000302	0.004194
	9	0.000084	0.000087	0.004121		9	0.000082	0.000086	0.003915
	10	0.000035	0.000036	0.003532		10	0.000034	0.000035	0.003356
SLR q=6	1	0.551825	0.546306	0.006140	SLRP q=6 $\lambda=1$	1	0.540788	0.535380	0.005834
	2	0.193193	0.191261	0.005582		2	0.189329	0.187436	0.005303
	3	0.128403	0.129687	0.005315		3	0.125835	0.127093	0.005049
	4	0.086654	0.087520	0.005048		4	0.084921	0.085770	0.004796
	5	0.005664	0.005777	0.004782		5	0.005551	0.005662	0.004543
	6	0.001166	0.001190	0.004516		6	0.001143	0.001166	0.004290
	7	0.000511	0.000526	0.004250		7	0.000501	0.000516	0.004038
	8	0.000287	0.000296	0.003985		8	0.000281	0.000290	0.003786
	9	0.000081	0.000084	0.003719		9	0.000079	0.000082	0.003533
	10	0.000033	0.000035	0.003188		10	0.000033	0.000034	0.003028
SLR q=8	1	0.535380	0.530027	0.005543	SLRP q=8 $\lambda=1$	1	0.530027	0.524726	0.005267
	2	0.187436	0.185562	0.005038		2	0.185562	0.183706	0.004786
	3	0.123318	0.124551	0.004797		3	0.120852	0.122060	0.004557
	4	0.083222	0.084055	0.004556		4	0.081558	0.082374	0.004328
	5	0.005384	0.005492	0.004316		5	0.005223	0.005327	0.004100
	6	0.001109	0.001131	0.004076		6	0.001076	0.001097	0.003872
	7	0.000481	0.000495	0.003836		7	0.000462	0.000475	0.003644
	8	0.000270	0.000278	0.003596		8	0.000259	0.000267	0.003416
	9	0.000075	0.000078	0.003356		9	0.000071	0.000074	0.003189
	10	0.000031	0.000032	0.002877		10	0.000029	0.000031	0.002733

نلاحظ من الجدول (3-7) أنه قد تم استعمال القيم الافتراضية (الاختيارية) الأولية للمعلمات الأربعة (1) $(\alpha = 0.4, \theta = 0.4, q = 3, 6, 8, \lambda = 1)$ لإيجاد تقديرات الإمكان الأعظم لدوال المعولية للتوزيعين الاحتماليين المقترحين ليندلي-رايلي المقطوع SLR (الأول) وتوزيع ليندلي-رايلي المقطوع بواسون SLRP (الثاني) إذ تم اختيار توزيع بواسون المبتور ذو المعلمة λ (معدل التوزيع) ليمثل احد توزيعات متسلسلة القوى التي تم ذكرها في الجانب النظري ، ولقد تم استعمال المؤشر الإحصائي الجذر

التربيعي لمتوسط مربع الخطأ (RAMSE) للمقارنة بين التقديرات وتحديد الأفضلية لدالتي المعولية للتوزيعين المقترحين وبالاعتماد على أحجام عينة مختلفة مع ملاحظة أن الحالة المختارة هنا تظهر تساوي قيمتي معلمي الشكل والقياس. وعموما فقد اظهرت النتائج ان هناك تقارباً نسبياً بين قيمتي دالة المعولية الحقيقية (حسب قيم المعلمات الافتراضية) ودالة المعولية المقدره بطريقة MLE ولكلا التوزيعين المقترحين وعند جميع قيم أوقات الاشتغال (الحياة) المختارة وأن هذا التقارب يتزايد اكثر فأكثر مع زيادة الزمن فضلاً عن التقارب في قيمة المؤشر الإحصائي RAMSE ، ونلاحظ ايضاً أن قيم دوال المعولية المحسوبة والمقدرة تتناقص كلما يتزايد وقت الاشتغال وهذا ما يؤكد طبيعة السلوك العشوائي لهذه الدوال اذ ان دالة المعولية تتصف بانها دالة غير متزايدة من جهة اليسار، كما انه تبين لنا النتائج أن قيم جميع دوال المعولية تتناقص ايضاً كلما تزيد معلمة التفرطح q ويتثبت معلمة المعدل لتوزيع بواسون المبتور عند $\lambda = 1$ وكما يأتي :

- عند حجم عينة $n=25$ اظهرت النتائج عند الزمن الأول $t=1$ وعند $\lambda = 1, q = 3$ (على سبيل المثال) لتوزيع المقترح الأول SLR:

$$R = 0.574578, \hat{R} = 0.555124, RAMSE = 0.012699$$

ولتوزيع المقترح الثاني SLRP:

$$R = 0.563086, \hat{R} = 0.544448, RAMSE = 0.012023$$

واظهرت النتائج عند الزمن الأخير $t=10$ وعند $\lambda = 1, q = 3$ (على سبيل المثال)

لتوزيع المقترح الأول SLR:

$$R = 0.000035, \hat{R} = 0.000030, RAMSE = 0.006601$$

ولتوزيع المقترح الثاني SLRP:

$$R = 0.000034, \hat{R} = 0.000030, RAMSE = 0.006535$$

- عند حجم عينة $n=50$ اظهرت النتائج عند الزمن الأول $t=1$ وعند $\lambda = 1, q = 3$ (على سبيل المثال) لتوزيع المقترح الأول SLR:

$$R = 0.574578, \hat{R} = 0.562032, RAMSE = 0.009774$$

ولتوزيع المقترح الثاني SLRP:

$$R = 0.563086, \hat{R} = 0.550966, RAMSE = 0.009161$$

واظهرت النتائج عند الزمن الأخير $t=10$ وعند $\lambda = 1, q = 3$ (على سبيل المثال)

لتوزيع المقترح الأول SLR:

$$R = 0.000035, \hat{R} = 0.000032, RAMSE = 0.005078$$

ولتوزيع المقترح الثاني SLRP:

$$R = 0.000034, \hat{R} = 0.000031, RAMSE = 0.004976$$

• عند حجم عينة $n=75$ اظهرت النتائج عند الزمن الأول $t=1$ وعند $\lambda = 1, q = 3$

(على سبيل المثال) لتوزيع المقترح الأول SLR:

$$R = 0.574578, \hat{R} = 0.568487, RAMSE = 0.007823$$

ولتوزيع المقترح الثاني SLRP:

$$R = 0.563086, \hat{R} = 0.557174, RAMSE = 0.007259$$

واظهرت النتائج عند الزمن الأخير $t=10$ وعند $\lambda = 1, q = 3$ (على سبيل المثال)

لتوزيع المقترح الأول SLR:

$$R = 0.000035, \hat{R} = 0.000033, RAMSE = 0.004062$$

ولتوزيع المقترح الثاني SLRP:

$$R = 0.000034, \hat{R} = 0.000033, RAMSE = 0.003940$$

• عند حجم عينة $n=100$ اظهرت النتائج عند الزمن الأول $t=1$ وعند $\lambda = 1, q = 3$

(كمثال ايضاً): لتوزيع المقترح الأول SLR:

$$R = 0.574578, \hat{R} = 0.568832, RAMSE = 0.006803$$

ولتوزيع المقترح الثاني SLRP:

$$R = 0.563086, \hat{R} = 0.557456, RAMSE = 0.006463$$

واظهرت النتائج عند الزمن الأخير $t=10$ وعند $\lambda = 1, q = 3$ (على سبيل المثال)

لتوزيع المقترح الأول SLR:

$$R = 0.000035, \hat{R} = 0.000036, RAMSE = 0.003532$$

ولتوزيع المقترح الثاني SLRP:

$$R = 0.000034, \hat{R} = 0.000035, RAMSE = 0.003356$$

مما تقدم يمكن ملاحظة أن مقدار المؤشر الإحصائي RAMSE ينخفض كلما زاد حجم العينة المستعملة ولكل دوال المعولية المقدره للتوزيعين المقترحين MLE وكما هو متوقع ، ويمكن ملاحظة

ذلك ايضاً اذا ما غيرنا القيم الافتراضية الأولية الأخرى بالنسبة لمعلمة التفرطح q وعند تثبيت معلمة المعدل لتوزيع بواسون $\lambda = 1$.

جدول (8-3) يبين نتائج تقديرات الامكان الأعظم MLE لدالة المعولية للتوزيع الاحتمالي المقترح الثاني SLRP لأوقات حياة (اشتغال) مختلفة عند حجوم عينات مختلفة (n=25,50,75,100) ولمجموعة القيم الافتراضية ($\alpha=0.4, \theta=0.4, q=3,6,8, \lambda=2,4$)

n=25

Dist.	t	R	\bar{R}	RAMSE	Dist.	t	R	\bar{R}	RAMSE
SLRP q=3 $\lambda=2$	1	0.475124	0.459037	0.008532	SLRP q=3 $\lambda=4$	1	0.465622	0.450209	0.008077
	2	0.188446	0.182065	0.007765		2	0.184677	0.178564	0.007687
	3	0.110146	0.106416	0.007392		3	0.107943	0.104370	0.007318
	4	0.072222	0.069777	0.007022		4	0.070778	0.068435	0.006951
	5	0.003541	0.003301	0.006651		5	0.003470	0.003241	0.006585
	6	0.000955	0.000891	0.006282		6	0.000936	0.000874	0.006219
	7	0.000212	0.000191	0.005912		7	0.000208	0.000187	0.005853
	8	0.000086	0.000077	0.005543		8	0.000084	0.000076	0.005487
	9	0.000054	0.000047	0.005173		9	0.000053	0.000046	0.005122
	10	0.000015	0.000013	0.004434		10	0.000014	0.000013	0.004390
SLRP q=6 $\lambda=2$	1	0.456309	0.436560	0.198914	SLRP q=6 $\lambda=4$	1	0.447183	0.432808	0.008271
	2	0.180983	0.173150	0.037587		2	0.177364	0.171662	0.007533
	3	0.105784	0.101206	0.017486		3	0.103668	0.100336	0.007172
	4	0.069362	0.066360	0.011285		4	0.067975	0.065790	0.006813
	5	0.003401	0.003107	0.006529		5	0.003333	0.003119	0.006454
	6	0.000918	0.000838	0.006158		6	0.000899	0.000841	0.006095
	7	0.000204	0.000177	0.005795		7	0.000200	0.000180	0.005737
	8	0.000082	0.000072	0.005433		8	0.000081	0.000073	0.005378
	9	0.000052	0.000043	0.005070		9	0.000051	0.000044	0.005020
	10	0.000014	0.000012	0.004346		10	0.000014	0.000012	0.004303
SLRP q=8 $\lambda=2$	1	0.442711	0.428756	0.008187	SLRP q=8 $\lambda=4$	1	0.438284	0.424605	0.008104
	2	0.175590	0.170055	0.007458		2	0.173834	0.168409	0.007383
	3	0.101595	0.098392	0.007100		3	0.099563	0.096456	0.007029
	4	0.066615	0.064515	0.006745		4	0.065283	0.063245	0.006677
	5	0.003233	0.003029	0.006389		5	0.003136	0.002940	0.006325
	6	0.000872	0.000817	0.006034		6	0.000846	0.000793	0.005974
	7	0.000192	0.000174	0.005679		7	0.000184	0.000167	0.005623
	8	0.000077	0.000070	0.005324		8	0.000074	0.000067	0.005271
	9	0.000048	0.000042	0.004969		9	0.000046	0.000040	0.004920
	10	0.000013	0.000012	0.004260		10	0.000013	0.000011	0.004217

n=50

Dist.	t	R	\hat{R}	RAMSE	Dist.	t	R	\hat{R}	RAMSE
SLRP q=3 $\lambda=2$	1	0.475124	0.464749	0.006566	SLRP q=3 $\lambda=4$	1	0.465622	0.455599	0.006155
	2	0.188446	0.184331	0.005974		2	0.184677	0.180702	0.005854
	3	0.110146	0.107741	0.005687		3	0.107943	0.105619	0.005573
	4	0.072222	0.070645	0.005401		4	0.070778	0.069254	0.005293
	5	0.003541	0.003387	0.005117		5	0.003470	0.003321	0.005014
	6	0.000955	0.000914	0.004832		6	0.000936	0.000896	0.004736
	7	0.000212	0.000198	0.004548		7	0.000208	0.000194	0.004457
	8	0.000086	0.000080	0.004264		8	0.000084	0.000079	0.004178
	9	0.000054	0.000049	0.003979		9	0.000053	0.000048	0.003900
	10	0.000015	0.000013	0.003411		10	0.000014	0.000013	0.003343
SLRP q=6 $\lambda=2$	1	0.456309	0.446628	0.006373	SLRP q=6 $\lambda=4$	1	0.447183	0.437742	0.006176
	2	0.180983	0.177144	0.005748		2	0.177364	0.173619	0.005622
	3	0.105784	0.103540	0.005465		3	0.103668	0.101480	0.005352
	4	0.069362	0.067890	0.005189		4	0.067975	0.066540	0.005084
	5	0.003401	0.003257	0.004914		5	0.003333	0.003192	0.004816
	6	0.000918	0.000879	0.004641		6	0.000899	0.000861	0.004548
	7	0.000204	0.000191	0.004368		7	0.000200	0.000187	0.004281
	8	0.000082	0.000077	0.004095		8	0.000081	0.000076	0.004013
	9	0.000052	0.000048	0.003822		9	0.000051	0.000047	0.003745
	10	0.000014	0.000013	0.003276		10	0.000014	0.000013	0.003210
SLRP q=8 $\lambda=2$	1	0.442711	0.433500	0.006052	SLRP q=8 $\lambda=4$	1	0.438284	0.429210	0.005930
	2	0.175590	0.171937	0.005509		2	0.173834	0.170235	0.005399
	3	0.101595	0.099481	0.005245		3	0.099563	0.097502	0.005140
	4	0.066615	0.065229	0.004982		4	0.065283	0.063931	0.004882
	5	0.003233	0.003099	0.004719		5	0.003136	0.003006	0.004625
	6	0.000872	0.000836	0.004457		6	0.000846	0.000811	0.004368
	7	0.000192	0.000180	0.004195		7	0.000184	0.000173	0.004111
	8	0.000077	0.000073	0.003933		8	0.000074	0.000070	0.003854
	9	0.000048	0.000044	0.003671		9	0.000046	0.000042	0.003597
	10	0.000013	0.000012	0.003146		10	0.000013	0.000012	0.003083

n=75

Dist.	t	R	\hat{R}	RAMSE	Dist.	t	R	\hat{R}	RAMSE
SLRP q=3 $\lambda=2$	1	0.475124	0.470088	0.005256	SLRP q=3 $\lambda=4$	1	0.465622	0.460732	0.004877
	2	0.188446	0.186448	0.004779		2	0.184677	0.182738	0.004636
	3	0.110146	0.108978	0.004549		3	0.107943	0.106809	0.004413
	4	0.072222	0.071456	0.004321		4	0.070778	0.070034	0.004192
	5	0.003541	0.003466	0.004093		5	0.003470	0.003398	0.003970
	6	0.000955	0.000935	0.003866		6	0.000936	0.000917	0.003750
	7	0.000212	0.000205	0.003638		7	0.000208	0.000201	0.003529
	8	0.000086	0.000083	0.003411		8	0.000084	0.000081	0.003309
	9	0.000054	0.000052	0.003184		9	0.000053	0.000051	0.003088
	10	0.000015	0.000014	0.002729		10	0.000014	0.000014	0.002647
SLRP q=6 $\lambda=2$	1	0.456309	0.451563	0.004944	SLRP q=6 $\lambda=4$	1	0.447183	0.442532	0.004795
	2	0.180983	0.179101	0.004497		2	0.177364	0.175519	0.004362
	3	0.105784	0.104684	0.004280		3	0.103668	0.102590	0.004152
	4	0.069362	0.068641	0.004066		4	0.067975	0.067268	0.003944
	5	0.003401	0.003330	0.003851		5	0.003333	0.003264	0.003736
	6	0.000918	0.000899	0.003637		6	0.000899	0.000881	0.003528
	7	0.000204	0.000197	0.003423		7	0.000200	0.000193	0.003321
	8	0.000082	0.000080	0.003209		8	0.000081	0.000078	0.003113
	9	0.000052	0.000050	0.002995		9	0.000051	0.000049	0.002906
	10	0.000014	0.000014	0.002568		10	0.000014	0.000013	0.002491
SLRP q=8 $\lambda=2$	1	0.442711	0.438151	0.004651	SLRP q=8 $\lambda=4$	1	0.438284	0.433770	0.004512
	2	0.175590	0.173781	0.004231		2	0.173834	0.172044	0.004104
	3	0.101595	0.100549	0.004027		3	0.099563	0.098538	0.003907
	4	0.066615	0.065929	0.003825		4	0.065283	0.064611	0.003711
	5	0.003233	0.003166	0.003624		5	0.003136	0.003071	0.003515
	6	0.000872	0.000854	0.003422		6	0.000846	0.000829	0.003320
	7	0.000192	0.000186	0.003221		7	0.000184	0.000178	0.003124
	8	0.000077	0.000075	0.003020		8	0.000074	0.000072	0.002929
	9	0.000048	0.000046	0.002818		9	0.000046	0.000044	0.002734
	10	0.000013	0.000013	0.002416		10	0.000013	0.000012	0.002343

n=100

Dist.	t	R	\hat{R}	RAMSE	Dist.	t	R	\hat{R}	RAMSE
SLRP q=3 $\lambda=2$	1	0.475124	0.470373	0.004571	SLRP q=3 $\lambda=4$	1	0.465622	0.460965	0.004342
	2	0.188446	0.186561	0.004156		2	0.184677	0.182830	0.003948
	3	0.110146	0.111247	0.003956		3	0.107943	0.109022	0.003758
	4	0.072222	0.072944	0.003758		4	0.070778	0.071485	0.003570
	5	0.003541	0.003612	0.003559		5	0.003470	0.003540	0.003381
	6	0.000955	0.000975	0.003362		6	0.000936	0.000955	0.003193
	7	0.000212	0.000219	0.003164		7	0.000208	0.000214	0.003006
	8	0.000086	0.000088	0.002966		8	0.000084	0.000086	0.002818
	9	0.000054	0.000056	0.002768		9	0.000053	0.000055	0.002630
	10	0.000015	0.000015	0.002373		10	0.000014	0.000015	0.002254
SLRP q=6 $\lambda=2$	1	0.456309	0.451746	0.004125	SLRP q=6 $\lambda=4$	1	0.447183	0.442711	0.003919
	2	0.180983	0.179173	0.003751		2	0.177364	0.175590	0.003563
	3	0.105784	0.106842	0.003570		3	0.103668	0.104705	0.003392
	4	0.069362	0.070056	0.003391		4	0.067975	0.068655	0.003222
	5	0.003401	0.003469	0.003212		5	0.003333	0.003400	0.003052
	6	0.000918	0.000936	0.003034		6	0.000899	0.000917	0.002882
	7	0.000204	0.000210	0.002855		7	0.000200	0.000206	0.002713
	8	0.000082	0.000085	0.002677		8	0.000081	0.000083	0.002543
	9	0.000052	0.000054	0.002498		9	0.000051	0.000053	0.002374
	10	0.000014	0.000015	0.002142		10	0.000014	0.000014	0.002034
SLRP q=8 $\lambda=2$	1	0.442711	0.438284	0.003724	SLRP q=8 $\lambda=4$	1	0.438284	0.433901	0.003538
	2	0.175590	0.173834	0.003385		2	0.173834	0.172096	0.003216
	3	0.101595	0.102611	0.003222		3	0.099563	0.100559	0.003061
	4	0.066615	0.067281	0.003061		4	0.065283	0.065936	0.002908
	5	0.003233	0.003298	0.002899		5	0.003136	0.003199	0.002754
	6	0.000872	0.000890	0.002738		6	0.000846	0.000863	0.002601
	7	0.000192	0.000197	0.002577		7	0.000184	0.000190	0.002448
	8	0.000077	0.000080	0.002416		8	0.000074	0.000077	0.002295
	9	0.000048	0.000050	0.002255		9	0.000046	0.000048	0.002142
	10	0.000013	0.000014	0.001933		10	0.000013	0.000013	0.001836

نلاحظ من الجدول (8-3) أنه قد تم استعمال القيم الافتراضية (الاختيارية) الأولية للمعلمات الأربعة $(\alpha = 0.4, \theta = 0.4, q = 3, 6, 8, \lambda = 2, 4)$ لحساب قيمة دالة المعولية الحقيقية وإيجاد تقديرات الإمكان الأعظم لدالة المعولية لتوزيع المقترح الثاني SLRP عند أوقات حياة (أستغال) مختلفة وباستعمال احجام عينات مختلفة، وعطفاً على ما تم ذكره في التعليقات على الجدول (7-3) سيكون لدينا الآتي:

• عند حجم عينة $n=25$ اظهرت النتائج عند الزمن الأول $t=1$ وعند $\lambda = 2, q = 3$

(على سبيل المثال) لتوزيع المقترح الثاني SLRP:

$$R = 0.475124, \hat{R} = 0.459037, RAMSE = 0.008532$$

واظهرت النتائج عند الزمن الأخير $t=10$ وعند $\lambda = 2, q = 3$ (على سبيل المثال)

لتوزيع المقترح الثاني SLRP:

$$R = 0.000015, \hat{R} = 0.000013, RAMSE = 0.004434$$

ايضاً اظهرت النتائج عند الزمن الأول $t=1$ وعند $\lambda = 2, q = 6$ (على سبيل المثال)

لتوزيع المقترح الثاني SLRP:

$$R = 0.456309, \hat{R} = 0.436560, RAMSE = 0.198914$$

واظهرت النتائج عند الزمن الأخير $t=10$ وعند $\lambda = 2, q = 6$ (على سبيل المثال)

لتوزيع المقترح الثاني SLRP:

$$R = 0.000014, \hat{R} = 0.000012, RAMSE = 0.004346$$

• عند حجم عينة $n=50$ اظهرت النتائج عند الزمن الأول $t=1$ وعند $\lambda = 2, q = 3$

(على سبيل المثال) لتوزيع المقترح الثاني SLRP:

$$R = 0.475124, \hat{R} = 0.464749, RAMSE = 0.006566$$

واظهرت النتائج عند الزمن الأخير $t=10$ وعند $\lambda = 2, q = 3$ (على سبيل المثال)

لتوزيع المقترح الثاني SLRP:

$$R = 0.000015, \hat{R} = 0.000013, RAMSE = 0.003411$$

ايضاً اظهرت النتائج عند الزمن الأول $t=1$ وعند $\lambda = 2, q = 6$ (على سبيل المثال)

لتوزيع المقترح الثاني SLRP:

$$R = 0.456309, \hat{R} = 0.446628, RAMSE = 0.006373$$

واظهرت النتائج عند الزمن الأخير $t=10$ وعند $\lambda = 2, q = 6$ (على سبيل المثال)

لتوزيع المقترح الثاني SLRP:

$$R = 0.000014, \hat{R} = 0.000013, RAMSE = 0.003276$$

• عند حجم عينة $n=75$ اظهرت النتائج عند الزمن الأول $t=1$ وعند $\lambda = 2, q = 3$

(على سبيل المثال) لتوزيع المقترح الثاني SLRP:

$$R = 0.475124, \hat{R} = 0.470088, RAMSE = 0.005256$$

واظهرت النتائج عند الزمن الأخير $t=10$ وعند $\lambda = 2, q = 3$ (على سبيل المثال)

لتوزيع المقترح الثاني SLRP:

$$R = 0.000015, \hat{R} = 0.000014, RAMSE = 0.002729$$

ايضاً اظهرت النتائج عند الزمن الأول $t=1$ وعند $\lambda = 2, q = 6$ (على سبيل المثال)

لتوزيع المقترح الثاني SLRP:

$$R = 0.456309, \hat{R} = 0.451563, RAMSE = 0.004944$$

واظهرت النتائج عند الزمن الأخير $t=10$ وعند $\lambda = 2, q = 6$ (على سبيل المثال)

لتوزيع المقترح الثاني SLRP:

$$R = 0.000014, \hat{R} = 0.000014, RAMSE = 0.002568$$

• عند حجم عينة $n=100$ اظهرت النتائج عند الزمن الأول $t=1$ وعند $\lambda = 2, q = 3$ (مثلاً):

لتوزيع المقترح الثاني SLRP:

$$R = 0.475124, \hat{R} = 0.470373, RAMSE = 0.004571$$

واظهرت النتائج عند الزمن الأخير $t=10$ وعند $\lambda = 2, q = 3$ (على سبيل المثال)

لتوزيع المقترح الثاني SLRP:

$$R = 0.000015, \hat{R} = 0.000015, RAMSE = 0.002373$$

ايضاً اظهرت النتائج عند الزمن الأول $t=1$ وعند $\lambda = 2, q = 6$ (على سبيل المثال)

لتوزيع المقترح الثاني SLRP:

$$R = 0.456309, \hat{R} = 0.451746, RAMSE = 0.004125$$

واظهرت النتائج عند الزمن الأخير $t=10$ وعند $\lambda = 2, q = 6$ (على سبيل المثال)

لتوزيع المقترح الثاني SLRP:

$$R = 0.000014, \hat{R} = 0.000015, RAMSE = 0.002142$$

مما تقدم يتبين انه كلما تزيد معلمة التفرطح q مع بقاء اختيار قيمة $\lambda = 2$ فان قيمة دالة المعولية تتناقص بشكل رتيب اذا ما اخذنا بعين الاعتبار سلوكها غير المتزايد كلما تزايد وقت الاشتغال ، كما نلاحظ ايضاً أن قيمة المؤشر الإحصائي الجذر التربيعي لمربع الخطأ تقل كلما كبر حجم العينة. ونرى

أن هذا الاستنتاج ينطبق بقية الاختيارات الأخرى لمعلمة التفرطح q ومعلمة المعدل لتوزيع بواسون المبتور λ في الجدول أنفاً

جدول (3-9) يبين نتائج تقديرات الامكان الأعظم MLE لدوال المعولية للتوزيعات الاحتمالية المقترحة SLRP,SLR لأوقات حياة (اشتغال) مختلفة عند حجوم عينات مختلفة (n=25,50,75,100) ولمجموعة القيم الافتراضية ($\alpha=3, \theta=1.5, q=3,6,8, \lambda=1$)

n=25

Dist.	t	R	\hat{R}	RAMSE	Dist.	t	R	\hat{R}	RAMSE
SLR q=3	1	0.871472	0.844001	0.026238	SLRP q=3 $\lambda=1$	1	0.862757	0.835830	0.025972
	2	0.655691	0.635022	0.023927		2	0.649134	0.628875	0.023685
	3	0.336290	0.325689	0.022753		3	0.329564	0.319278	0.022525
	4	0.163522	0.158367	0.021606		4	0.160252	0.155250	0.021390
	5	0.085919	0.080502	0.020470		5	0.083341	0.078139	0.020265
	6	0.004631	0.004339	0.019329		6	0.004492	0.004212	0.019136
	7	0.000860	0.000779	0.018192		7	0.000826	0.000748	0.018010
	8	0.000310	0.000281	0.017055		8	0.000298	0.000270	0.016885
	9	0.000162	0.000142	0.015918		9	0.000154	0.000135	0.015759
	10	0.000056	0.000049	0.013644		10	0.000053	0.000047	0.013508
SLR q=6	1	0.898239	0.859363	0.765187	SLRP q=6 $\lambda=1$	1	0.880274	0.851978	0.026510
	2	0.675831	0.646581	0.442428		2	0.662314	0.641024	0.024172
	3	0.350156	0.335001	0.135428		3	0.343153	0.332122	0.022984
	4	0.170265	0.162895	0.048577		4	0.166859	0.161495	0.021825
	5	0.090384	0.082560	0.027698		5	0.088576	0.082881	0.020677
	6	0.004872	0.004450	0.019741		6	0.004775	0.004468	0.019524
	7	0.000914	0.000796	0.018562		7	0.000896	0.000810	0.018376
	8	0.000330	0.000287	0.017402		8	0.000323	0.000292	0.017227
	9	0.000174	0.000144	0.016241		9	0.000171	0.000149	0.016079
	10	0.000060	0.000050	0.013921		10	0.000059	0.000052	0.013782
SLR q=8	1	0.916477	0.885446	0.027345	SLRP q=8 $\lambda=1$	1	0.907312	0.877279	0.025890
	2	0.689553	0.666206	0.024925		2	0.682657	0.660061	0.024671
	3	0.364594	0.352249	0.023692		3	0.357302	0.345475	0.023453
	4	0.177285	0.171282	0.022494		4	0.173739	0.167988	0.022269
	5	0.096061	0.089556	0.021311		5	0.093179	0.087010	0.021097
	6	0.005178	0.004827	0.020122		6	0.005023	0.004690	0.019921
	7	0.000992	0.000891	0.018938		7	0.000952	0.000858	0.018749
	8	0.000358	0.000322	0.017755		8	0.000344	0.000310	0.017577
	9	0.000193	0.000167	0.016571		9	0.000183	0.000159	0.016405
	10	0.000067	0.000058	0.014204		10	0.000064	0.000055	0.014062

n=50

Dist.	t	R	\hat{R}	RAMSE	Dist.	t	R	\hat{R}	RAMSE
SLR q=3	1	0.871472	0.853340	0.019997	SLRP q=3 $\lambda=1$	1	0.862757	0.861690	0.020203
	2	0.655691	0.642049	0.018229		2	0.649134	0.648331	0.018416
	3	0.336290	0.329293	0.017328		3	0.329564	0.335908	0.017504
	4	0.163522	0.160120	0.016453		4	0.160252	0.163336	0.016619
	5	0.085919	0.082344	0.015587		5	0.083341	0.084836	0.015745
	6	0.004631	0.004439	0.014718		6	0.004492	0.004573	0.014867
	7	0.000860	0.000806	0.013853		7	0.000826	0.000839	0.013993
	8	0.000310	0.000291	0.012987		8	0.000298	0.000303	0.013118
	9	0.000162	0.000149	0.012121		9	0.000154	0.000156	0.012243
	10	0.000056	0.000052	0.010389		10	0.000053	0.000054	0.010494
SLR q=6	1	0.898239	0.879182	0.020888	SLRP q=6 $\lambda=1$	1	0.880274	0.861690	0.020203
	2	0.675831	0.661492	0.018946		2	0.662314	0.648331	0.018416
	3	0.350156	0.342727	0.017903		3	0.343153	0.335908	0.017504
	4	0.170265	0.166652	0.016968		4	0.166859	0.163336	0.016619
	5	0.090384	0.086549	0.016078		5	0.088576	0.084836	0.015745
	6	0.004872	0.004665	0.015171		6	0.004775	0.004573	0.014867
	7	0.000914	0.000856	0.014278		7	0.000896	0.000839	0.013993
	8	0.000330	0.000309	0.013386		8	0.000323	0.000303	0.013118
	9	0.000174	0.000159	0.012493		9	0.000171	0.000156	0.012243
	10	0.000060	0.000055	0.010709		10	0.000059	0.000054	0.010494
SLR q=8	1	0.916477	0.896465	0.021048	SLRP q=8 $\lambda=1$	1	0.907312	0.887782	0.019931
	2	0.689553	0.674496	0.019181		2	0.682657	0.667963	0.018986
	3	0.364594	0.356633	0.018227		3	0.357302	0.349611	0.018043
	4	0.177285	0.173414	0.017303		4	0.173739	0.170000	0.017130
	5	0.096061	0.091866	0.016394		5	0.093179	0.089168	0.016229
	6	0.005178	0.004952	0.015479		6	0.005023	0.004806	0.015324
	7	0.000992	0.000927	0.014568		7	0.000952	0.000891	0.014422
	8	0.000358	0.000335	0.013658		8	0.000344	0.000321	0.013521
	9	0.000193	0.000176	0.012747		9	0.000183	0.000168	0.012620
	10	0.000067	0.000061	0.010926		10	0.000064	0.000058	0.010817

n=75

Dist.	t	R	\hat{R}	RAMSE	Dist.	t	R	\hat{R}	RAMSE
SLR q=3	1	0.871472	0.906762	0.016848	SLRP q=3 $\lambda=1$	1	0.862757	0.897785	0.015955
	2	0.655691	0.682244	0.015350		2	0.649134	0.675490	0.015195
	3	0.336290	0.360729	0.014583		3	0.329564	0.353550	0.014436
	4	0.163522	0.175406	0.013843		4	0.160252	0.171915	0.013705
	5	0.085919	0.094025	0.013115		5	0.083341	0.091222	0.012984
	6	0.004631	0.005068	0.012383		6	0.004492	0.004917	0.012259
	7	0.000860	0.000960	0.011654		7	0.000826	0.000922	0.011538
	8	0.000310	0.000347	0.010926		8	0.000298	0.000333	0.010817
	9	0.000162	0.000185	0.010198		9	0.000154	0.000176	0.010096
	10	0.000056	0.000064	0.008741		10	0.000053	0.000061	0.008653
SLR q=6	1	0.898239	0.888897	0.016507	SLRP q=6 $\lambda=1$	1	0.880274	0.871119	0.016011
	2	0.675831	0.668802	0.015041		2	0.662314	0.655426	0.014590
	3	0.350156	0.346514	0.014291		3	0.343153	0.339584	0.013862
	4	0.170265	0.168494	0.013567		4	0.166859	0.165124	0.013160
	5	0.090384	0.088504	0.012854		5	0.088576	0.086734	0.012468
	6	0.004872	0.004771	0.012136		6	0.004775	0.004675	0.011772
	7	0.000914	0.000886	0.011422		7	0.000896	0.000868	0.011080
	8	0.000330	0.000320	0.010709		8	0.000323	0.000313	0.010387
	9	0.000174	0.000167	0.009995		9	0.000171	0.000164	0.009695
	10	0.000060	0.000058	0.008567		10	0.000059	0.000057	0.008310
SLR q=8	1	0.916477	0.862495	0.015849	SLRP q=8 $\lambda=1$	1	0.907312	0.853870	0.015689
	2	0.689553	0.648938	0.014442		2	0.682657	0.642448	0.014298
	3	0.364594	0.332826	0.013723		3	0.357302	0.326170	0.013586
	4	0.177285	0.161838	0.013029		4	0.173739	0.158601	0.012898
	5	0.096061	0.084149	0.012343		5	0.093179	0.081624	0.012220
	6	0.005178	0.004536	0.011655		6	0.005023	0.004400	0.011538
	7	0.000992	0.000834	0.010969		7	0.000952	0.000800	0.010859
	8	0.000358	0.000301	0.010283		8	0.000344	0.000289	0.010181
	9	0.000193	0.000155	0.009598		9	0.000183	0.000148	0.009502
	10	0.000067	0.000054	0.008227		10	0.000064	0.000051	0.008144

n=100

Dist.	t	R	\hat{R}	RAMSE	Dist.	t	R	\hat{R}	RAMSE
SLR q=3	1	0.871472	0.862757	0.012945	SLRP q=3 $\lambda=1$	1	0.862757	0.854129	0.012815
	2	0.655691	0.649134	0.011793		2	0.649134	0.642643	0.011675
	3	0.336290	0.339653	0.011202		3	0.329564	0.332860	0.011089
	4	0.163522	0.165157	0.010634		4	0.160252	0.161854	0.010527
	5	0.085919	0.087637	0.010074		5	0.083341	0.085008	0.009973
	6	0.004631	0.004724	0.009512		6	0.004492	0.004582	0.009417
	7	0.000860	0.000886	0.008952		7	0.000826	0.000850	0.008863
	8	0.000310	0.000320	0.008393		8	0.000298	0.000307	0.008309
	9	0.000162	0.000169	0.007833		9	0.000154	0.000160	0.007755
	10	0.000056	0.000059	0.006714		10	0.000053	0.000056	0.006647
SLR q=6	1	0.898239	0.889257	0.013764	SLRP q=6 $\lambda=1$	1	0.880274	0.871472	0.013077
	2	0.675831	0.669073	0.012539		2	0.662314	0.655691	0.011913
	3	0.350156	0.353658	0.011911		3	0.343153	0.346584	0.011315
	4	0.170265	0.171967	0.011306		4	0.166859	0.168528	0.010741
	5	0.090384	0.092191	0.010712		5	0.088576	0.090348	0.010176
	6	0.004872	0.004969	0.010114		6	0.004775	0.004870	0.009608
	7	0.000914	0.000942	0.009519		7	0.000896	0.000923	0.009043
	8	0.000330	0.000340	0.008924		8	0.000323	0.000333	0.008478
	9	0.000174	0.000181	0.008329		9	0.000171	0.000178	0.007912
	10	0.000060	0.000063	0.007139		10	0.000059	0.000062	0.006782
SLR q=8	1	0.916477	0.907312	0.014045	SLRP q=8 $\lambda=1$	1	0.907312	0.898239	0.013904
	2	0.689553	0.682657	0.012795		2	0.682657	0.675831	0.012666
	3	0.364594	0.368240	0.012153		3	0.357302	0.360875	0.012031
	4	0.177285	0.179058	0.011536		4	0.173739	0.175477	0.011421
	5	0.096061	0.097982	0.010930		5	0.093179	0.095043	0.010820
	6	0.005178	0.005282	0.010319		6	0.005023	0.005123	0.010216
	7	0.000992	0.001022	0.009712		7	0.000952	0.000981	0.009615
	8	0.000358	0.000369	0.009105		8	0.000344	0.000354	0.009014
	9	0.000193	0.000201	0.008498		9	0.000183	0.000191	0.008413
	10	0.000067	0.000070	0.007284		10	0.000064	0.000066	0.007211

نلاحظ من الجدول (3-9) أنه قد تم استعمال القيم الافتراضية (الاختيارية) الأولية للمعلمات الأربعة $(\alpha = 3, \theta = 1.5, q = 3, 6, 8, \lambda = 1)$ لإيجاد تقديرات الإمكان الأعظم لدوال المعولية للتوزيعين الاحتماليين المقترحين ليندلي-رايلي المقطوع SLR (الأول) وتوزيع ليندلي-رايلي المقطوع بواسون SLRP (الثاني) إذ تم اختيار توزيع بواسون المبتور ذا المعلمة λ (معدل التوزيع) ليمثل احد توزيعات متسلسلة القوى التي تم ذكرها في الجانب النظري ، ولقد تم استعمال المؤشر الأحصائي الجذر

التربيعي لمتوسط مربع الخطأ (RAMSE) للمقارنة بين التقديرات وتحديد الأفضلية لدالتي المعولية للتوزيعين المقترحين وبالاعتماد على أحجام عينة مختلفة مع ملاحظة أن الحالة المختارة هنا تظهر أن قيمة معلمة القياس أكبر من قيمة معلمة الشكل. وعموما فقد اظهرت النتائج تحسناً وزيادة في قيمتي دالة المعولية الحقيقية (حسب قيم المعلمات الافتراضية) ودالة المعولية المقدره بطريقة MLE ولكلا التوزيعين المقترحين وعند جميع قيم أوقات الاشتغال (الحياة) المختارة مع الحفاظ على السلوك العشوائي والتناقص في قيم هذه الدوال كلما زاد الزمن، ويظهر لنا عن طريق النتائج أن قيمة المؤشر الإحصائي RAMSE نقل بزيادة حجم العينة المستعملة في التجربة وسنبين ذلك عن طريق اخذ قيم معينة لمعلمة التفرطح q وبتثبيت معلمة المعدل لتوزيع بواسون المبتور عند $\lambda = 1$ وكما يأتي :

• عند حجم عينة $n=25$ اظهرت النتائج عند الزمن الأول $t=1$ وعند $\lambda = 1, q = 3$

(على سبيل المثال) لتوزيع المقترح الأول SLR:

$$R = 0.871472, \hat{R} = 0.844001, RAMSE = 0.026238$$

ولتوزيع المقترح الثاني SLRP:

$$R = 0.862757, \hat{R} = 0.835830, RMSE = 0.025972$$

واظهرت النتائج عند الزمن الأخير $t=10$ وعند $\lambda = 1, q = 3$ (على سبيل المثال)

لتوزيع المقترح الأول SLR:

$$R = 0.000056, \hat{R} = 0.000049, RAMSE = 0.013644$$

ولتوزيع المقترح الثاني SLRP:

$$R = 0.000053, \hat{R} = 0.000047, RAMSE = 0.013508$$

• عند حجم عينة $n=50$ اظهرت النتائج عند الزمن الأول $t=1$ وعند $\lambda = 1, q = 3$

(على سبيل المثال) لتوزيع المقترح الأول SLR:

$$R = 0.871472, \hat{R} = 0.853340, RAMSE = 0.019997$$

ولتوزيع المقترح الثاني SLRP:

$$R = 0.862757, \hat{R} = 0.861690, RAMSE = 0.020203$$

واظهرت النتائج عند الزمن الأخير $t=10$ وعند $\lambda = 1, q = 3$ (على سبيل المثال)

لتوزيع المقترح الأول SLR:

$$R = 0.000056, \hat{R} = 0.000052, RAMSE = 0.010389$$

ولتوزيع المقترح الثاني SLRP:

$$R = 0.000053, \hat{R} = 0.000054, RAMSE = 0.010494$$

• عند حجم عينة $n=75$ اظهرت النتائج عند الزمن الأول $t=1$ وعند $\lambda = 1, q = 3$

(على سبيل المثال) لتوزيع المقترح الأول SLR:

$$R = 0.871472, \hat{R} = 0.906762, RAMSE = 0.016848$$

ولتوزيع المقترح الثاني SLRP:

$$R = 0.862757, \hat{R} = 0.897785, RAMSE = 0.015955$$

واظهرت النتائج عند الزمن الأخير $t=10$ وعند $\lambda = 1, q = 3$ (على سبيل المثال)

لتوزيع المقترح الأول SLR:

$$R = 0.000056, \hat{R} = 0.000064, RAMSE = 0.008741$$

ولتوزيع المقترح الثاني SLRP:

$$R = 0.000053, \hat{R} = 0.000061, RAMSE = 0.008653$$

• عند حجم عينة $n=100$ اظهرت النتائج عند الزمن الأول $t=1$ وعند $\lambda = 1, q = 3$

(كمثال ايضاً) لتوزيع المقترح الأول SLR:

$$R = 0.871472, \hat{R} = 0.862757, RAMSE = 0.012945$$

ولتوزيع المقترح الثاني SLRP:

$$R = 0.862757, \hat{R} = 0.854129, RAMSE = 0.012815$$

واظهرت النتائج عند الزمن الأخير $t=10$ وعند $\lambda = 1, q = 3$ (على سبيل المثال)

لتوزيع المقترح الأول SLR:

$$R = 0.000056, \hat{R} = 0.000059, RAMSE = 0.006714$$

ولتوزيع المقترح الثاني SLRP:

$$R = 0.000053, \hat{R} = 0.000059, RAMSE = 0.006647$$

مما تقدم يمكن ملاحظة أن مقدار المؤشر الإحصائي RAMSE ينخفض كلما زاد حجم العينة المستعملة ولكل دوال المعولية المقدرة للتوزيعين المقترحين MLE وكما هو متوقع، ويمكن ملاحظة ذلك ايضاً اذا ما غيرنا القيم الافتراضية الأولية الأخرى بالنسبة لمعلمة التفرطح q وعند تثبيت معلمة

المعدل لتوزيع بواسون $\lambda = 1$. كذلك يمكن استنتاج ان هناك زيادة في قيم دوال المعولية بزيادة قيمة معلمة التفرطح q فضلاً عن افضلية نسبية بقيمة دالتي المعولية الافتراضية والمقدرة لتوزيع المقترح الأول SLR مقارنة بتوزيع المقترح الثاني SLRP وذلك بسبب أن توزيع المقترح الثاني SLRP يأخذ بعين الاعتبار عدد العطلات او التوقفات للماكنة (او نظام من الماكنتن) بعدهما متغيراً عشوائياً يتبع احد توزيعات متسلسلة القوى وتحديداً توزيع بواسون المبتور بالمعلمة λ والتي تمثل معدل عدد العطلات، وأن هذه الأفضلية تزيد بزيادة قيمة المعلمة λ .

• **مراعاة للاختصار** سيتم في أدناه عرض نتائج تقديرات MLE لدوال المعولية ولقيم افتراضية اخرى مختلفة إذ كانت النتائج والاستنتاجات قريبة النتائج والاستنتاجات التي تم الحصول عليها من الجدول اعلاه.

جدول (10-3) يبين نتائج تقديرات الامكان الأعظم MLE لدالة المعولية للتوزيع الاحتمالي المقترح الثاني SLRP لأوقات حياة (اشتغال) مختلفة عند حجوم عينات مختلفة ($n=25,50,75,100$) ولمجموعة القيم الافتراضية ($\alpha=3, \theta=1.5, q=3,6,8, \lambda=2,4$)

n=25

Dist.	t	R	\hat{R}	RAMSE	Dist.	t	R	\hat{R}	RAMSE
SLRP q=3 $\lambda=2$	1	0.861043	0.833901	0.035241	SLRP q=3 $\lambda=4$	1	0.852433	0.825828	0.034884
	2	0.601102	0.582154	0.032140		2	0.595091	0.576518	0.031817
	3	0.314663	0.304744	0.030581		3	0.308370	0.298746	0.030275
	4	0.133742	0.129526	0.029044		4	0.131067	0.126976	0.028753
	5	0.073473	0.068841	0.027515		5	0.071269	0.066820	0.027240
	6	0.003579	0.003353	0.025985		6	0.003472	0.003255	0.025725
	7	0.000668	0.000605	0.024456		7	0.000641	0.000581	0.024211
	8	0.000221	0.000200	0.022928		8	0.000212	0.000192	0.022698
	9	0.000082	0.000071	0.021399		9	0.000078	0.000068	0.021185
	10	0.000045	0.000040	0.018342		10	0.000043	0.000038	0.018159
SLRP q=6 $\lambda=2$	1	0.887490	0.849079	0.756805	SLRP q=6 $\lambda=4$	1	0.869741	0.841782	0.035603
	2	0.619565	0.592750	0.384103		2	0.607174	0.587656	0.032468
	3	0.327638	0.313457	0.129446		3	0.321085	0.310763	0.030891
	4	0.139256	0.133229	0.047381		4	0.136471	0.132084	0.029337
	5	0.077291	0.070600	0.033056		5	0.075745	0.070875	0.027794
	6	0.003765	0.003439	0.026524		6	0.003690	0.003452	0.026247
	7	0.000710	0.000618	0.024953		7	0.000696	0.000629	0.024703
	8	0.000235	0.000204	0.023393		8	0.000230	0.000208	0.023159
	9	0.000088	0.000073	0.021833		9	0.000086	0.000075	0.021615
	10	0.000049	0.000040	0.018714		10	0.000048	0.000042	0.018527

SLRP q=8 λ=2	1	0.905510	0.874851	0.036716	SLRP q=8 λ=4	1	0.896455	0.866781	0.034764
	2	0.632145	0.610742	0.033473		2	0.625824	0.605108	0.033134
	3	0.341147	0.329596	0.031841		3	0.334324	0.323258	0.031521
	4	0.144998	0.140089	0.030236		4	0.142098	0.137394	0.029933
	5	0.082146	0.076583	0.028646		5	0.079681	0.074406	0.028359
	6	0.004001	0.003730	0.027050		6	0.003881	0.003624	0.026780
	7	0.000771	0.000692	0.025459		7	0.000740	0.000666	0.025205
	8	0.000255	0.000229	0.023868		8	0.000245	0.000220	0.023629
	9	0.000097	0.000084	0.022277		9	0.000092	0.000080	0.022054
	10	0.000054	0.000047	0.019094		10	0.000051	0.000045	0.018903

n=50

Dist.	t	R	\hat{R}	RAMSE	Dist.	t	R	\hat{R}	RAMSE
SLRP q=3 λ=2	1	0.861043	0.843128	0.026851	SLRP q=3 λ=4	1	0.852433	0.834785	0.026580
	2	0.601102	0.588596	0.024482		2	0.595091	0.582771	0.024236
	3	0.314663	0.308116	0.023289		3	0.308370	0.301986	0.023055
	4	0.133742	0.130959	0.022116		4	0.131067	0.128353	0.021895
	5	0.073473	0.070415	0.020952		5	0.071269	0.068318	0.020743
	6	0.003579	0.003430	0.019786		6	0.003472	0.003328	0.019588
	7	0.000668	0.000626	0.018622		7	0.000641	0.000602	0.018436
	8	0.000221	0.000207	0.017458		8	0.000212	0.000199	0.017284
	9	0.000082	0.000075	0.016295		9	0.000078	0.000071	0.016132
	10	0.000045	0.000042	0.013967		10	0.000043	0.000040	0.013827
SLRP q=6 λ=2	1	0.887490	0.868661	0.027946	SLRP q=6 λ=4	1	0.869741	0.851379	0.027127
	2	0.619565	0.606421	0.025365		2	0.607174	0.594355	0.024731
	3	0.327638	0.320686	0.024041		3	0.321085	0.314306	0.023525
	4	0.139256	0.136302	0.022802		4	0.136471	0.133590	0.022339
	5	0.077291	0.074011	0.021604		5	0.075745	0.072547	0.021164
	6	0.003765	0.003605	0.020394		6	0.003690	0.003534	0.019986
	7	0.000710	0.000665	0.019194		7	0.000696	0.000652	0.018810
	8	0.000235	0.000220	0.017995		8	0.000230	0.000216	0.017635
	9	0.000088	0.000080	0.016795		9	0.000086	0.000079	0.016459
	10	0.000049	0.000045	0.014396		10	0.000048	0.000044	0.014108
SLRP q=8 λ=2	1	0.905510	0.885737	0.028256	SLRP q=8 λ=4	1	0.896455	0.877159	0.026756
	2	0.632145	0.618341	0.025754		2	0.625824	0.612353	0.025495
	3	0.341147	0.333698	0.024495		3	0.334324	0.327128	0.024249
	4	0.144998	0.141832	0.023259		4	0.142098	0.139039	0.023026
	5	0.082146	0.078558	0.022035		5	0.079681	0.076251	0.021815

	6	0.004001	0.003827	0.020808		6	0.003881	0.003714	0.020600
	7	0.000771	0.000720	0.019584		7	0.000740	0.000692	0.019388
	8	0.000255	0.000238	0.018360		8	0.000245	0.000229	0.018176
	9	0.000097	0.000089	0.017136		9	0.000092	0.000084	0.016965
	10	0.000054	0.000049	0.014688		10	0.000051	0.000047	0.014541

n=75

Dist.	t	R	\hat{R}	RAMSE	Dist.	t	R	\hat{R}	RAMSE
SLRP q=3 $\lambda=2$	1	0.861043	0.852174	0.021276	SLRP q=3 $\lambda=4$	1	0.852433	0.843653	0.021062
	2	0.601102	0.594911	0.019392		2	0.595091	0.588962	0.019198
	3	0.314663	0.311422	0.018443		3	0.308370	0.305194	0.018258
	4	0.133742	0.132364	0.017513		4	0.131067	0.129717	0.017337
	5	0.073473	0.071959	0.016591		5	0.071269	0.069800	0.016425
	6	0.003579	0.003505	0.015667		6	0.003472	0.003400	0.015511
	7	0.000668	0.000647	0.014746		7	0.000641	0.000622	0.014598
	8	0.000221	0.000214	0.013824		8	0.000212	0.000206	0.013686
	9	0.000082	0.000078	0.012903		9	0.000078	0.000074	0.012774
	10	0.000045	0.000044	0.011059		10	0.000043	0.000041	0.010949
SLRP q=6 $\lambda=2$	1	0.887490	0.878260	0.022159	SLRP q=6 $\lambda=4$	1	0.869741	0.860695	0.021493
	2	0.619565	0.613122	0.020196		2	0.607174	0.600859	0.019589
	3	0.327638	0.324230	0.019206		3	0.321085	0.317746	0.018630
	4	0.139256	0.137808	0.018237		4	0.136471	0.135052	0.017690
	5	0.077291	0.075683	0.017277		5	0.075745	0.074170	0.016759
	6	0.003765	0.003687	0.016315		6	0.003690	0.003613	0.015826
	7	0.000710	0.000688	0.015355		7	0.000696	0.000674	0.014895
	8	0.000235	0.000227	0.014396		8	0.000230	0.000223	0.013964
	9	0.000088	0.000084	0.013436		9	0.000086	0.000082	0.013033
	10	0.000049	0.000047	0.011517		10	0.000048	0.000046	0.011171
SLRP q=8 $\lambda=2$	1	0.905510	0.895912	0.022614	SLRP q=8 $\lambda=4$	1	0.896455	0.887042	0.021416
	2	0.632145	0.625444	0.020608		2	0.625824	0.619252	0.020401
	3	0.341147	0.337531	0.019597		3	0.334324	0.330814	0.019400
	4	0.144998	0.143461	0.018607		4	0.142098	0.140606	0.018421
	5	0.082146	0.080404	0.017629		5	0.079681	0.078008	0.017452
	6	0.004001	0.003917	0.016646		6	0.003881	0.003800	0.016480
	7	0.000771	0.000746	0.015667		7	0.000740	0.000716	0.015511
	8	0.000255	0.000247	0.014688		8	0.000245	0.000237	0.014541
	9	0.000097	0.000093	0.013709		9	0.000092	0.000088	0.013572
	10	0.000054	0.000052	0.011750		10	0.000051	0.000049	0.011633

n=100

Dist.	t	R	\hat{R}	RAMSE	Dist.	t	R	\hat{R}	RAMSE
SLRP q=3 $\lambda=2$	1	0.861043	0.852433	0.017374	SLRP q=3 $\lambda=4$	1	0.852433	0.843908	0.017200
	2	0.601102	0.595091	0.015832		2	0.595091	0.589140	0.015673
	3	0.314663	0.317810	0.015053		3	0.308370	0.311454	0.014903
	4	0.133742	0.135079	0.014293		4	0.131067	0.132377	0.014150
	5	0.073473	0.074942	0.013541		5	0.071269	0.072694	0.013406
	6	0.003579	0.003651	0.012787		6	0.003472	0.003541	0.012659
	7	0.000668	0.000688	0.012035		7	0.000641	0.000661	0.011914
	8	0.000221	0.000228	0.011283		8	0.000212	0.000218	0.011170
	9	0.000082	0.000085	0.010530		9	0.000078	0.000081	0.010425
	10	0.000045	0.000047	0.009026		10	0.000043	0.000045	0.008936
SLRP q=6 $\lambda=2$	1	0.887490	0.878615	0.018473	SLRP q=6 $\lambda=4$	1	0.869741	0.861043	0.017550
	2	0.619565	0.613370	0.016833		2	0.607174	0.601102	0.015992
	3	0.327638	0.330914	0.016006		3	0.321085	0.324296	0.015206
	4	0.139256	0.140649	0.015197		4	0.136471	0.137836	0.014438
	5	0.077291	0.078837	0.014398		5	0.075745	0.077260	0.013678
	6	0.003765	0.003840	0.013596		6	0.003690	0.003763	0.012916
	7	0.000710	0.000731	0.012796		7	0.000696	0.000717	0.012156
	8	0.000235	0.000242	0.011996		8	0.000230	0.000237	0.011397
	9	0.000088	0.000091	0.011197		9	0.000086	0.000089	0.010637
	10	0.000049	0.000051	0.009597		10	0.000048	0.000050	0.009117
SLRP q=8 $\lambda=2$	1	0.905510	0.896455	0.018850	SLRP q=8 $\lambda=4$	1	0.896455	0.887490	0.018661
	2	0.632145	0.625824	0.017176		2	0.625824	0.619565	0.017004
	3	0.341147	0.344558	0.016332		3	0.334324	0.337667	0.016168
	4	0.144998	0.146448	0.015506		4	0.142098	0.143519	0.015351
	5	0.082146	0.083789	0.014691		5	0.079681	0.081275	0.014544
	6	0.004001	0.004081	0.013872		6	0.003881	0.003959	0.013733
	7	0.000771	0.000794	0.013056		7	0.000740	0.000762	0.012925
	8	0.000255	0.000262	0.012240		8	0.000245	0.000252	0.012118
	9	0.000097	0.000101	0.011424		9	0.000092	0.000096	0.011310
	10	0.000054	0.000056	0.009792		10	0.000051	0.000053	0.009694

جدول (11-3) يبين نتائج تقديرات الامكان الأعظم MLE لدوال المعولية للتوزيعات الاحتمالية المقترحة SLRP,SLR لأوقات حياة (اشتغال) مختلفة عند حجوم عينات مختلفة ($\alpha=5, \theta=2.5, q=3,6,8, \lambda=1$) ولمجموعة القيم الافتراضية ($n=25,50,75,100$)

n=25

Dist.	t	R	\bar{R}	RAMSE	Dist.	t	R	\bar{R}	RAMSE
SLR q=3	1	0.920286	0.891276	0.039820	SLRP q=3 $\lambda=1$	1	0.911083	0.882648	0.039417
	2	0.738413	0.715137	0.036331		2	0.731029	0.708214	0.035964
	3	0.535479	0.518599	0.034574		3	0.524769	0.508391	0.034226
	4	0.275304	0.266626	0.032823		4	0.269798	0.261377	0.032494
	5	0.225522	0.211304	0.031110		5	0.218756	0.205101	0.030797
	6	0.012931	0.012116	0.029360		6	0.012543	0.011760	0.029066
	7	0.008200	0.007425	0.027633		7	0.007872	0.007135	0.027357
	8	0.002178	0.001972	0.025906		8	0.002091	0.001895	0.025647
	9	0.000802	0.000701	0.024179		9	0.000762	0.000667	0.023937
	10	0.000460	0.000402	0.020725		10	0.000437	0.000383	0.020517
SLR q=6	1	0.948553	0.907499	0.864082	SLRP q=6 $\lambda=1$	1	0.929581	0.899700	0.040229
	2	0.761094	0.728153	0.567211		2	0.745872	0.721896	0.036702
	3	0.557558	0.533427	0.319786		3	0.546407	0.528842	0.034926
	4	0.286655	0.274249	0.108693		4	0.280922	0.271892	0.033155
	5	0.237241	0.216705	0.078679		5	0.232497	0.217549	0.031427
	6	0.013603	0.012425	0.030110		6	0.013331	0.012474	0.029657
	7	0.008716	0.007584	0.028251		7	0.008542	0.007718	0.027912
	8	0.002315	0.002014	0.026436		8	0.002269	0.002050	0.026168
	9	0.000862	0.000713	0.024670		9	0.000845	0.000736	0.024423
	10	0.000494	0.000409	0.021146		10	0.000485	0.000422	0.020934
SLR q=8	1	0.967812	0.935043	0.041487	SLRP q=8 $\lambda=1$	1	0.958134	0.926418	0.039281
	2	0.776547	0.750254	0.037843		2	0.768782	0.743334	0.037458
	3	0.580548	0.560891	0.036007		3	0.568937	0.550104	0.035642
	4	0.298475	0.288369	0.034173		4	0.292506	0.282823	0.033830
	5	0.252143	0.235069	0.032399		5	0.244579	0.228387	0.032071
	6	0.014457	0.013478	0.030564		6	0.014023	0.013095	0.030259
	7	0.009458	0.008497	0.028767		7	0.009079	0.008178	0.028479
	8	0.002512	0.002257	0.026969		8	0.002412	0.002172	0.026699
	9	0.000955	0.000826	0.025171		9	0.000907	0.000787	0.024919
	10	0.000548	0.000474	0.021575		10	0.000520	0.000452	0.021359

n=50

Dist.	t	R	\hat{R}	RAMSE	Dist.	t	R	\hat{R}	RAMSE
SLR q=3	1	0.920286	0.901138	0.030340	SLRP q=3 $\lambda=1$	1	0.911083	0.892221	0.030034
	2	0.738413	0.723050	0.027677		2	0.731029	0.715894	0.027398
	3	0.535479	0.524338	0.026333		3	0.524769	0.513905	0.026068
	4	0.275304	0.269576	0.024995		4	0.269798	0.264212	0.024745
	5	0.225522	0.216137	0.023694		5	0.218756	0.209698	0.023456
	6	0.012931	0.012393	0.022357		6	0.012543	0.012023	0.022133
	7	0.008200	0.007688	0.021041		7	0.007872	0.007383	0.020831
	8	0.002178	0.002042	0.019726		8	0.002091	0.001961	0.019529
	9	0.000802	0.000736	0.018411		9	0.000762	0.000699	0.018227
	10	0.000460	0.000422	0.015781		10	0.000437	0.000401	0.015623
SLR q=6	1	0.948553	0.928428	0.031581	SLRP q=6 $\lambda=1$	1	0.929581	0.909956	0.030652
	2	0.761094	0.744946	0.028726		2	0.745872	0.730125	0.027960
	3	0.557558	0.545729	0.027249		3	0.546407	0.534871	0.026602
	4	0.286655	0.280574	0.025791		4	0.280922	0.274991	0.025248
	5	0.237241	0.227175	0.024500		5	0.232497	0.222680	0.023935
	6	0.013603	0.013025	0.023043		6	0.013331	0.012768	0.022582
	7	0.008716	0.008161	0.021688		7	0.008542	0.008001	0.021254
	8	0.002315	0.002168	0.020332		8	0.002269	0.002125	0.019926
	9	0.000862	0.000789	0.018977		9	0.000845	0.000773	0.018597
	10	0.000494	0.000453	0.016266		10	0.000485	0.000444	0.015940
SLR q=8	1	0.967812	0.946679	0.031927	SLRP q=8 $\lambda=1$	1	0.958134	0.937510	0.030233
	2	0.776547	0.759590	0.029119		2	0.768782	0.752234	0.028824
	3	0.580548	0.567871	0.027703		3	0.568937	0.556690	0.027423
	4	0.298475	0.291957	0.026288		4	0.292506	0.286209	0.026025
	5	0.252143	0.241131	0.024926		5	0.244579	0.234050	0.024674
	6	0.014457	0.013826	0.023511		6	0.014023	0.013420	0.023276
	7	0.009458	0.008838	0.022128		7	0.009079	0.008493	0.021907
	8	0.002512	0.002347	0.020745		8	0.002412	0.002256	0.020538
	9	0.000955	0.000872	0.019362		9	0.000907	0.000829	0.019168
	10	0.000548	0.000500	0.016596		10	0.000520	0.000476	0.016430

n=75

Dist.	t	R	\hat{R}	RAMSE	Dist.	t	R	\hat{R}	RAMSE
SLR q=3	1	0.920286	0.910807	0.024041	SLRP q=3 $\lambda=1$	1	0.911083	0.901699	0.023799
	2	0.738413	0.730807	0.021926		2	0.731029	0.723499	0.021706
	3	0.535479	0.529963	0.020857		3	0.524769	0.519364	0.020648
	4	0.275304	0.272468	0.019793		4	0.269798	0.267019	0.019595
	5	0.225522	0.220876	0.018766		5	0.218756	0.214250	0.018577
	6	0.012931	0.012664	0.017703		6	0.012543	0.012284	0.017526
	7	0.008200	0.007947	0.016661		7	0.007872	0.007629	0.016495
	8	0.002178	0.002111	0.015620		8	0.002091	0.002026	0.015464
	9	0.000802	0.000769	0.014579		9	0.000762	0.000731	0.014433
	10	0.000460	0.000441	0.012496		10	0.000437	0.000419	0.012371
SLR q=6	1	0.948553	0.938688	0.025038	SLRP q=6 $\lambda=1$	1	0.929581	0.919914	0.024286
	2	0.761094	0.753178	0.022835		2	0.745872	0.738115	0.022149
	3	0.557558	0.551760	0.021721		3	0.546407	0.540724	0.021069
	4	0.286655	0.283674	0.020612		4	0.280922	0.278001	0.019994
	5	0.237241	0.232307	0.019543		5	0.232497	0.227661	0.018957
	6	0.013603	0.013320	0.018435		6	0.013331	0.013053	0.017882
	7	0.008716	0.008444	0.017350		7	0.008542	0.008275	0.016830
	8	0.002315	0.002243	0.016266		8	0.002269	0.002198	0.015778
	9	0.000862	0.000826	0.015181		9	0.000845	0.000810	0.014726
	10	0.000494	0.000474	0.013013		10	0.000485	0.000464	0.012622
SLR q=8	1	0.967812	0.957553	0.025552	SLRP q=8 $\lambda=1$	1	0.958134	0.948073	0.024199
	2	0.776547	0.768316	0.023302		2	0.768782	0.760709	0.023067
	3	0.580548	0.574394	0.022166		3	0.568937	0.562963	0.021942
	4	0.298475	0.295311	0.021032		4	0.292506	0.289434	0.020821
	5	0.252143	0.246798	0.019944		5	0.244579	0.239443	0.019742
	6	0.014457	0.014151	0.018809		6	0.014023	0.013729	0.018621
	7	0.009458	0.009157	0.017702		7	0.009079	0.008793	0.017525
	8	0.002512	0.002432	0.016596		8	0.002412	0.002336	0.016430
	9	0.000955	0.000915	0.015490		9	0.000907	0.000869	0.015335
	10	0.000548	0.000525	0.013277		10	0.000520	0.000499	0.013144

n=100

Dist.	t	R	\hat{R}	RAMSE	Dist.	t	R	\hat{R}	RAMSE
SLR q=3	1	0.920286	0.911083	0.019632	SLRP q=3 $\lambda=1$	1	0.911083	0.901972	0.019435
	2	0.738413	0.731029	0.017902		2	0.731029	0.723719	0.017723
	3	0.535479	0.540834	0.017026		3	0.524769	0.530017	0.016855
	4	0.275304	0.278057	0.016155		4	0.269798	0.272496	0.015994
	5	0.225522	0.230032	0.015318		5	0.218756	0.223131	0.015164
	6	0.012931	0.013189	0.014448		6	0.012543	0.012794	0.014304
	7	0.008200	0.008446	0.013598		7	0.007872	0.008108	0.013462
	8	0.002178	0.002243	0.012748		8	0.002091	0.002154	0.012621
	9	0.000802	0.000835	0.011898		9	0.000762	0.000793	0.011779
	10	0.000460	0.000479	0.010199		10	0.000437	0.000455	0.010097
SLR q=6	1	0.948553	0.939067	0.020874	SLRP q=6 $\lambda=1$	1	0.929581	0.920286	0.019831
	2	0.761094	0.753483	0.019035		2	0.745872	0.738413	0.018083
	3	0.557558	0.563134	0.018104		3	0.546407	0.551871	0.017199
	4	0.286655	0.289522	0.017178		4	0.280922	0.283732	0.016319
	5	0.237241	0.241986	0.016288		5	0.232497	0.237146	0.015474
	6	0.013603	0.013875	0.015362		6	0.013331	0.013597	0.014594
	7	0.008716	0.008978	0.014459		7	0.008542	0.008798	0.013736
	8	0.002315	0.002385	0.013555		8	0.002269	0.002337	0.012877
	9	0.000862	0.000896	0.012651		9	0.000845	0.000878	0.012019
	10	0.000494	0.000514	0.010844		10	0.000485	0.000504	0.010302
SLR q=8	1	0.967812	0.958134	0.021300	SLRP q=8 $\lambda=1$	1	0.958134	0.948553	0.021086
	2	0.776547	0.768782	0.019422		2	0.768782	0.761094	0.019227
	3	0.580548	0.586353	0.018474		3	0.568937	0.574626	0.018288
	4	0.298475	0.301460	0.017527		4	0.292506	0.295431	0.017351
	5	0.252143	0.257186	0.016621		5	0.244579	0.249470	0.016454
	6	0.014457	0.014746	0.015674		6	0.014023	0.014304	0.015517
	7	0.009458	0.009741	0.014752		7	0.009079	0.009352	0.014605
	8	0.002512	0.002587	0.013830		8	0.002412	0.002484	0.013692
	9	0.000955	0.000993	0.012908		9	0.000907	0.000944	0.012779
	10	0.000548	0.000570	0.011064		10	0.000520	0.000541	0.010953

جدول (12-3) يبين نتائج تقديرات الامكان الأعظم MLE لدالة المعولية للتوزيع الاحتمالي المقترح الثاني SLRP لأوقات حياة (اشتغال) مختلفة عند حجوم عينات مختلفة (n=25,50,75,100) ولمجموعة القيم الافتراضية ($\alpha=5, \theta=2.5, q=3,6,8, \lambda=2,4$)

n=25

Dist.	t	R	\bar{R}	RAMSE	Dist.	t	R	\bar{R}	RAMSE
SLRP q=3 $\lambda=2$	1	0.907125	0.878531	0.036956	SLRP q=3 $\lambda=4$	1	0.898054	0.870026	0.036582
	2	0.708293	0.685966	0.033714		2	0.701210	0.679325	0.033374
	3	0.484046	0.468788	0.032080		3	0.474365	0.459560	0.031758
	4	0.236718	0.229257	0.030457		4	0.231984	0.224744	0.030152
	5	0.216870	0.203198	0.028870		5	0.210364	0.197233	0.028579
	6	0.009843	0.009222	0.027246		6	0.009548	0.008952	0.026973
	7	0.006464	0.005852	0.025643		7	0.006205	0.005624	0.025386
	8	0.000968	0.000877	0.024040		8	0.000930	0.000843	0.023800
	9	0.000659	0.000576	0.022437		9	0.000626	0.000548	0.022213
	10	0.000311	0.000272	0.019232		10	0.000295	0.000258	0.019040
SLRP q=6 $\lambda=2$	1	0.934988	0.894521	0.837778	SLRP q=6 $\lambda=4$	1	0.916288	0.886834	0.037336
	2	0.730048	0.698451	0.522174		2	0.715447	0.692449	0.034059
	3	0.504004	0.482191	0.265212		3	0.493924	0.478047	0.032407
	4	0.246479	0.235811	0.086676		4	0.241549	0.233785	0.030766
	5	0.228140	0.208392	0.072861		5	0.223577	0.209203	0.029164
	6	0.010354	0.009458	0.027888		6	0.010147	0.009495	0.027521
	7	0.006870	0.005978	0.026199		7	0.006733	0.006084	0.025902
	8	0.001029	0.000896	0.024529		8	0.001009	0.000911	0.024283
	9	0.000708	0.000585	0.022893		9	0.000694	0.000604	0.022664
	10	0.000334	0.000276	0.019623		10	0.000327	0.000285	0.019426
SLRP q=8 $\lambda=2$	1	0.953972	0.921672	0.038505	SLRP q=8 $\lambda=4$	1	0.944432	0.913170	0.036458
	2	0.744871	0.719651	0.035117		2	0.737422	0.713013	0.034759
	3	0.524786	0.507018	0.033408		3	0.514290	0.497267	0.033070
	4	0.256642	0.247952	0.031710		4	0.251509	0.243184	0.031391
	5	0.242470	0.226051	0.030066		5	0.235196	0.219625	0.029761
	6	0.011005	0.010260	0.028363		6	0.010675	0.009968	0.028080
	7	0.007455	0.006698	0.026695		7	0.007157	0.006446	0.026428
	8	0.001117	0.001003	0.025026		8	0.001072	0.000966	0.024776
	9	0.000784	0.000678	0.023358		9	0.000745	0.000646	0.023124
	10	0.000370	0.000320	0.020021		10	0.000351	0.000305	0.019821

n=50

Dist.	t	R	\hat{R}	RAMSE	Dist.	t	R	\hat{R}	RAMSE
SLRP q=3 $\lambda=2$	1	0.907125	0.888252	0.028159	SLRP q=3 $\lambda=4$	1	0.898054	0.879462	0.027875
	2	0.708293	0.693556	0.025683		2	0.701210	0.686693	0.025425
	3	0.484046	0.473975	0.024433		3	0.474365	0.464544	0.024188
	4	0.236718	0.231793	0.023193		4	0.231984	0.227181	0.022961
	5	0.216870	0.207846	0.021988		5	0.210364	0.201653	0.021766
	6	0.009843	0.009433	0.020746		6	0.009548	0.009152	0.020539
	7	0.006464	0.006060	0.019526		7	0.006205	0.005820	0.019331
	8	0.000968	0.000908	0.018306		8	0.000930	0.000872	0.018123
	9	0.000659	0.000604	0.017085		9	0.000626	0.000574	0.016914
	10	0.000311	0.000285	0.014645		10	0.000295	0.000271	0.014498
SLRP q=6 $\lambda=2$	1	0.934988	0.915151	0.029324	SLRP q=6 $\lambda=4$	1	0.916288	0.896944	0.028449
	2	0.730048	0.714559	0.026655		2	0.715447	0.700343	0.025946
	3	0.504004	0.493312	0.025272		3	0.493924	0.483497	0.024682
	4	0.246479	0.241250	0.023927		4	0.241549	0.236450	0.023428
	5	0.228140	0.218460	0.022735		5	0.223577	0.214137	0.022212
	6	0.010354	0.009915	0.021384		6	0.010147	0.009719	0.020956
	7	0.006870	0.006433	0.020126		7	0.006733	0.006306	0.019723
	8	0.001029	0.000964	0.018868		8	0.001009	0.000945	0.018491
	9	0.000708	0.000648	0.017610		9	0.000694	0.000635	0.017258
	10	0.000334	0.000305	0.015094		10	0.000327	0.000300	0.014792
SLRP q=8 $\lambda=2$	1	0.953972	0.933141	0.029633	SLRP q=8 $\lambda=4$	1	0.944432	0.924103	0.028061
	2	0.744871	0.728606	0.027021		2	0.737422	0.721549	0.026748
	3	0.524786	0.513327	0.025703		3	0.514290	0.503220	0.025443
	4	0.256642	0.251038	0.024393		4	0.251509	0.246095	0.024148
	5	0.242470	0.231881	0.023131		5	0.235196	0.225071	0.022897
	6	0.011005	0.010524	0.021818		6	0.010675	0.010215	0.021600
	7	0.007455	0.006966	0.020534		7	0.007157	0.006694	0.020329
	8	0.001117	0.001044	0.019251		8	0.001072	0.001003	0.019058
	9	0.000784	0.000716	0.017968		9	0.000745	0.000681	0.017788
	10	0.000370	0.000338	0.015401		10	0.000351	0.000321	0.015247

n=75

Dist.	t	R	\hat{R}	RAMSE	Dist.	t	R	\hat{R}	RAMSE
SLRP q=3 $\lambda=2$	1	0.907125	0.897782	0.022313	SLRP q=3 $\lambda=4$	1	0.898054	0.888804	0.022089
	2	0.708293	0.700997	0.020346		2	0.701210	0.693987	0.020142
	3	0.484046	0.479060	0.019352		3	0.474365	0.469479	0.019157
	4	0.236718	0.234280	0.018366		4	0.231984	0.229595	0.018183
	5	0.216870	0.212402	0.017414		5	0.210364	0.206030	0.017239
	6	0.009843	0.009640	0.016428		6	0.009548	0.009351	0.016264
	7	0.006464	0.006264	0.015461		7	0.006205	0.006013	0.015307
	8	0.000968	0.000938	0.014495		8	0.000930	0.000901	0.014350
	9	0.000659	0.000632	0.013529		9	0.000626	0.000600	0.013393
	10	0.000311	0.000298	0.011596		10	0.000295	0.000283	0.011480
SLRP q=6 $\lambda=2$	1	0.934988	0.925264	0.023239	SLRP q=6 $\lambda=4$	1	0.916288	0.906759	0.022541
	2	0.730048	0.722456	0.021190		2	0.715447	0.708006	0.020553
	3	0.504004	0.498763	0.020153		3	0.493924	0.488788	0.019548
	4	0.246479	0.243916	0.019126		4	0.241549	0.239037	0.018552
	5	0.228140	0.223395	0.018136		5	0.223577	0.218927	0.017591
	6	0.010354	0.010139	0.017107		6	0.010147	0.009936	0.016594
	7	0.006870	0.006656	0.016101		7	0.006733	0.006523	0.015618
	8	0.001029	0.000997	0.015094		8	0.001009	0.000977	0.014641
	9	0.000708	0.000678	0.014088		9	0.000694	0.000665	0.013665
	10	0.000334	0.000320	0.012075		10	0.000327	0.000314	0.011713
SLRP q=8 $\lambda=2$	1	0.953972	0.943860	0.023717	SLRP q=8 $\lambda=4$	1	0.944432	0.934516	0.022460
	2	0.744871	0.736975	0.021623		2	0.737422	0.729679	0.021405
	3	0.524786	0.519223	0.020565		3	0.514290	0.508890	0.020358
	4	0.256642	0.253922	0.019515		4	0.251509	0.248868	0.019320
	5	0.242470	0.237330	0.018507		5	0.235196	0.230257	0.018321
	6	0.011005	0.010771	0.017454		6	0.010675	0.010450	0.017280
	7	0.007455	0.007218	0.016428		7	0.007157	0.006931	0.016263
	8	0.001117	0.001081	0.015401		8	0.001072	0.001038	0.015247
	9	0.000784	0.000751	0.014374		9	0.000745	0.000714	0.014230
	10	0.000370	0.000354	0.012321		10	0.000351	0.000337	0.012197

n=100

Dist.	t	R	\hat{R}	RAMSE	Dist.	t	R	\hat{R}	RAMSE
SLRP q=3 $\lambda=2$	1	0.907125	0.898054	0.018222	SLRP q=3 $\lambda=4$	1	0.898054	0.889074	0.018039
	2	0.708293	0.701210	0.016612		2	0.701210	0.694198	0.016446
	3	0.484046	0.488886	0.015797		3	0.474365	0.479109	0.015638
	4	0.236718	0.239086	0.014990		4	0.231984	0.234304	0.014840
	5	0.216870	0.221207	0.014215		5	0.210364	0.214571	0.014072
	6	0.009843	0.010040	0.013408		6	0.009548	0.009739	0.013273
	7	0.006464	0.006658	0.012619		7	0.006205	0.006391	0.012493
	8	0.000968	0.000997	0.011830		8	0.000930	0.000957	0.011712
	9	0.000659	0.000685	0.011041		9	0.000626	0.000651	0.010931
	10	0.000311	0.000323	0.009464		10	0.000295	0.000307	0.009369
SLRP q=6 $\lambda=2$	1	0.934988	0.925638	0.019375	SLRP q=6 $\lambda=4$	1	0.916288	0.907125	0.018407
	2	0.730048	0.722748	0.017663		2	0.715447	0.708293	0.016781
	3	0.504004	0.509045	0.016797		3	0.493924	0.498864	0.015957
	4	0.246479	0.248944	0.015939		4	0.241549	0.243965	0.015142
	5	0.228140	0.232703	0.015115		5	0.223577	0.228049	0.014360
	6	0.010354	0.010562	0.014256		6	0.010147	0.010350	0.013543
	7	0.006870	0.007076	0.013417		7	0.006733	0.006935	0.012746
	8	0.001029	0.001060	0.012579		8	0.001009	0.001039	0.011950
	9	0.000708	0.000736	0.011740		9	0.000694	0.000721	0.011153
	10	0.000334	0.000347	0.010063		10	0.000327	0.000340	0.009560
SLRP q=8 $\lambda=2$	1	0.953972	0.944432	0.019770	SLRP q=8 $\lambda=4$	1	0.944432	0.934988	0.019571
	2	0.744871	0.737422	0.018023		2	0.737422	0.730048	0.017842
	3	0.524786	0.530034	0.017140		3	0.514290	0.519433	0.016967
	4	0.256642	0.259208	0.016263		4	0.251509	0.254024	0.016100
	5	0.242470	0.247319	0.015424		5	0.235196	0.239900	0.015269
	6	0.011005	0.011225	0.014545		6	0.010675	0.010888	0.014400
	7	0.007455	0.007678	0.013690		7	0.007157	0.007371	0.013553
	8	0.001117	0.001150	0.012834		8	0.001072	0.001104	0.012706
	9	0.000784	0.000816	0.011978		9	0.000745	0.000775	0.011859
	10	0.000370	0.000385	0.010267		10	0.000351	0.000365	0.010165

وختاماً لكل تجارب المحاكاة التي تم عملها ودراستها يتضح بأن جميع قيم تقديرات MLE لمعاملات ودوال المعولية للتوزيعات المقترحة والأصلية كانت مقارنة بصورة كافية من قيمها الافتراضية المقابلة، ويظهر ذلك جلياً عند زيادة حجم العينة، فضلاً عن أن قيمتي المؤشرين RAMSE,AMSE تقل بزيادة حجم العينة.

5.3 الجانب التطبيقي

1.5.3 التمهيد The Preface

في الجانب التطبيقي سيتم تطبيق التوزيعين المقترحين على بيانات حقيقية تمثل اوقات الاشتغال lifetimes لمكائن معينة تم الحصول عليها من احد معامل الشركة العامة للصناعات الصوفية والذي يتبع الشركة العامة للصناعات النسيجية والجلدية في محافظة بغداد وهذه الشركة تابعة لوزارة الصناعة والمعادن العراقية. وقد كان الغرض من هذا التطبيق العملي هو ابراز اهمية التوزيعين المقترحين في معالجة انواع معينة من بيانات اوقات الاشتغال (او احياناً اوقات الفشل) والتي تتسم بأن لها تفلطحاً عالٍ (او مفرطاً excess kurtosis)، او تتسم بوجود قيم شاذة outliers، فضلاً عن بيانات تتماز بتنوع في أنماط معدل الفشل، وذلك عن طريق ايجاد تقديرات الامكان الأعظم لمعلمات المقترحين فضلاً عن دالتي المعولية لهما باستعمال طريقة MLEE التي تتصف بخاصية الثبات او اللاتغير invariant property، وقد تنفيذ ذلك بالاعتماد على برنامج تم كتابته بلغة R.

2.5.3 نبذة عن المعمل

يُعد معمل السجاد العراقي من معامل الشركة العامة للصناعات الصوفية التابع للشركة العامة للصناعات النسيجية والجلدية / وزارة الصناعة والمعادن. يتخصص المعمل بإنتاج نوعين من السجاد هما السادة والمنقوش وبأحجام وقياسات مختلفة. يتميز السجاد العراقي بنوعيته المتينة والعمر الطويل اذ يُعد من السلع المعمرة، وذلك لان المواد الاولية المستعملة في صناعته من هي مواد عالمية رصينة وتخضع لفحوصات الجهاز المركزي للتقييس والسيطرة النوعية. ومن المهم أن نذكر هنا أن المعمل يتكون من عدة اقسام انتاجية وخدمية هي: النسيج، الاكمال، التصاميم، الهندسة والخدمات، السيطرة النوعية، الإدارية، العلاقات العامة.

3.5.3 وصف العملية الانتاجية والمكان

مبدئياً ان صناعة السجاد تتطلب توفير ثلاث مواد اولية اساسية تتداخل لتكوّن الهيكل النسيجي للسجادة وهذه المواد هي غزول السداء، غزول الخملة، غزول اللحمة، والعملية الانتاجية بصورة عامة تقسم الى مرحلتين هما النسيج والاكمال.

أن المكنائن الانتاجية الخاصة بإنتاج السجاد المانية وبلجيكية المنشئ، صنعت بين الأعوام 1975-1989 يتم تهيئة مدات السداء في شعبة تحضيرات السداء حسب نوع الانتاج وكذلك حسب عرض الماكنة وحسب نوعية الغزل المستعمل، اذ يتم اجراء عملية تدوير لغزول الخملة في شعبة تحضيرات الغزول لغرض تدوير الغزول ذات الاحجام الكبيرة بحيث تتناسب مع تصميم مكنائن النسيج والتقطيع في المعمل.

يتألف المعمل من خطين رئيسين هما خط انتاج سجاد بغداد وخط انتاج سجاد بابل وحسب النقشة المركبة على الماكنة، يدخل الغزل الخام بعد عملية التحضير الى مكنائن النسيج، بعد انتهاء عملية النسيج عن طريق ماكنة النسيج تبدأ عمليات الاكمال بواسطة ماكنة الاكمال اذ يتم تنظيف الانتاج من الشعيرات المتبقية داخل التركيب النسيجي للسجادة، ثم يتم تعريض السجادة الى البخار لغرض تثبيت الخليط وتوزيعه بصورة متساوية على مساحة السجادة ومن ثم تجفيف السجادة، ليتم بعدها تقطيع وقص الانتاج الى القياسات المطلوبة لكل نوع وفق تصميم النقشة الرئيس. ومن الجدير بالذكر فان مجموعة من الفاحصين تقوم بالتأكد من مطابقة السجادة لمعايير الجودة واعادة اي سجادة تحتوي على عيوب لغرض اجراء الإصلاحات اللازمة.

4.5.3 وصف البيانات وتحليل النتائج

Description of the data and the Results Analysis

أن بيانات الدراسة هي عبارة عن المعدلات الأسبوعية لأوقات اشتغال المكنائن بين توقف وآخر مقاسة بالساعات، فضلا عن المعدلات الأسبوعية لأعداد التوقفات، وأن تلك المعدلات كافة مسجلة لأربعة مكنائن ثلاثة منها هي مكنائن للنسيج وماكنة واحدة للإكمال، اذ تم اختيار البيانات من سجلات المعمل للمدة من 2018/1/2 ولغاية 2019/6/14 وقد تم استبعاد العطلات الكهربائية والميكانيكية، مع ملاحظة ان نوع النظام الذي يتم فيه ربط المكنائن هو النظام المتوالي (المتسلسل) بين ماكنة النسيج الأولى وماكنة النسيج الثانية، بينما تربط ماكنة النسيج الثالثة وماكنة الاكمال (الرابعة) بشكل متوازي. ان عدد ساعات العمل اليومية في العمل متغيرة، ففي الحالات الاعتيادية يكون عدد ساعات العمل اليومية هي ثمانية، اما في حالة وجود طلبيات خاصة فان العمل يستمر لساعات اطول من الايام الاعتيادية، وقد تتوقف المكنائن عن العمل للاوقات التي لا يوجد فيها طلبيات، وقد تم وضع البيانات

(بيانات ليست تحت المراقبة) والتي تمثل معدلات اوقات الحياة (الاشتغال) الفعلي الاسبوعية للمكائن في المعمل فضلاً عن عدد العطلات في المدة المدروسة ولكل ماكينة ضمن الجداول المبينة في ادناه.

جدول (3-13) يبين معدلات اوقات الاشتغال الاسبوعية مقاسة بالساعات ولكل ماكينة

ماكينة النسيج الأولى t1

1	1.74	16	2.97	31	1.69	46	2.08	61	2.59
2	2.15	17	2.82	32	0.98	47	1.45	62	1.2
3	2.55	18	2.08	33	1.1	48	1.77	63	3.16
4	1.15	19	3.71	34	4.76	49	1.69	64	1.82
5	4.9	20	2.35	35	2.31	50	2.21	65	2.88
6	2.1	21	2.94	36	2.64	51	1.47	66	1.19
7	3.1	22	2.23	37	2.43	52	2.06	67	3.71
8	1.57	23	0.49	38	2.68	53	3.38	68	2.01
9	2.6	24	3.38	39	2	54	1.83	69	2.65
10	6.34	25	2.69	40	2.59	55	3.17	70	2.67
11	1.34	26	2.22	41	2.48	56	1.68	71	2.44
12	1.63	27	2.16	42	5.6	57	1.44	72	4.51
13	1.88	28	1.14	43	1.66	58	2.24	73	2.46
14	2.6	29	1.89	44	2.2	59	1.72	74	4.76
15	3.58	30	3.91	45	1.71	60	3.4	75	0.78

ماكينة النسيج الثانية t2

1	1.81	16	3.12	31	1.72	46	2.11	61	2.61
2	2.2	17	2.96	32	1	47	1.45	62	1.24
3	2.68	18	2.12	33	1.24	48	1.9	63	3.2
4	1.16	19	3.9	34	5.13	49	1.71	64	1.82
5	5	20	2.42	35	2.45	50	2.24	65	2.91
6	2.12	21	3.05	36	2.75	51	1.51	66	1.2
7	3.7	22	2.39	37	2.53	52	2.06	67	3.82
8	1.88	23	0.51	38	2.75	53	3.48	68	2.05
9	2.78	24	3.41	39	2.25	54	1.88	69	2.79
10	6.8	25	2.71	40	2.82	55	3.4	70	2.73
11	1.48	26	2.32	41	2.5	56	1.68	71	2.49
12	1.69	27	2.49	42	6.51	57	1.47	72	4.63
13	2.08	28	1.17	43	1.67	58	2.29	73	2.54
14	2.68	29	2.05	44	2.31	59	1.78	74	4.86
15	3.67	30	3.91	45	1.72	60	3.59	75	0.8

ماكينة النسيج الثالثة t3

1	1.87	16	3.25	31	1.76	46	2.14	61	2.63
2	2.23	17	3.07	32	1.02	47	1.45	62	1.28
3	2.79	18	2.14	33	1.36	48	2.02	63	3.23
4	1.17	19	4.05	34	5.45	49	1.73	64	1.82
5	5.08	20	2.47	35	2.56	50	2.26	65	2.94
6	2.14	21	3.15	36	2.84	51	1.54	66	1.2
7	4.27	22	2.53	37	2.61	52	2.07	67	3.91
8	2.17	23	0.53	38	2.8	53	3.57	68	2.08
9	2.93	24	3.44	39	2.48	54	1.91	69	2.9
10	7.2	25	2.72	40	3.02	55	3.59	70	2.78
11	1.59	26	2.39	41	2.51	56	1.68	71	2.52
12	1.73	27	2.79	42	7.34	57	1.5	72	4.73
13	2.25	28	1.19	43	1.69	58	2.33	73	2.6
14	2.75	29	2.18	44	2.4	59	1.83	74	4.94
15	3.74	30	3.92	45	1.73	60	3.74	75	0.81

ماكينة الاكمال t4

1	2.01	16	3.53	31	1.82	46	2.19	61	2.67
2	2.32	17	3.34	32	1.06	47	1.46	62	1.35
3	3.03	18	2.2	33	1.67	48	2.28	63	3.29
4	1.2	19	4.4	34	6.18	49	1.76	64	1.83
5	5.25	20	2.59	35	2.81	50	2.31	65	3
6	2.18	21	3.35	36	3.03	51	1.61	66	1.22
7	5.77	22	2.85	37	2.8	52	2.08	67	4.1
8	2.95	23	0.57	38	2.91	53	3.77	68	2.15
9	3.27	24	3.48	39	3.03	54	1.99	69	3.17
10	8.11	25	2.75	40	3.48	55	4.02	70	2.89
11	1.87	26	2.57	41	2.54	56	1.69	71	2.6
12	1.84	27	3.54	42	9.47	57	1.56	72	4.95
13	2.67	28	1.24	43	1.71	58	2.41	73	2.75
14	2.9	29	2.49	44	2.6	59	1.93	74	5.11
15	3.89	30	3.92	45	1.76	60	4.09	75	0.85

جدول (3-14) يبين عدد العطلات الأسبوعية مقاسة بالساعات ولكل ماكينة

ماكنتي النسيج الأولى والثانية t_1, t_2 على الترتيب

1	7	16	5	31	3	46	4	61	3	1	2	16	1	31	2	46	2	61	4
2	3	17	4	32	4	47	6	62	7	2	4	17	1	32	1	47	6	62	2
3	3	18	5	33	4	48	1	63	3	3	4	18	0	33	0	48	2	63	2
4	4	19	10	34	4	49	4	64	4	4	1	19	2	34	2	49	2	64	2
5	7	20	3	35	2	50	5	65	3	5	3	20	4	35	4	50	1	65	6
6	2	21	5	36	6	51	5	66	5	6	5	21	3	36	2	51	3	66	2
7	7	22	7	37	5	52	4	67	3	7	2	22	3	37	5	52	2	67	3
8	7	23	2	38	6	53	6	68	4	8	3	23	2	38	3	53	2	68	2
9	5	24	5	39	2	54	4	69	5	9	1	24	2	39	1	54	1	69	1
10	5	25	2	40	5	55	3	70	1	10	1	25	3	40	2	55	1	70	1
11	1	26	3	41	3	56	1	71	6	11	3	26	2	41	1	56	2	71	3
12	2	27	3	42	6	57	2	72	3	12	1	27	2	42	0	57	2	72	2
13	2	28	0	43	5	58	3	73	6	13	3	28	1	43	3	58	0	73	1
14	5	29	3	44	5	59	4	74	3	14	0	29	1	44	0	59	0	74	3
15	3	30	6	45	4	60	5	75	3	15	1	30	6	45	2	60	2	75	0

ماكينة النسيج الثالثة وماكينة الاكمال t_3, t_4 على الترتيب

1	4	16	4	31	4	46	1	61	3	1	3	16	1	31	1	46	0	61	0
2	2	17	2	32	1	47	2	62	5	2	1	17	0	32	0	47	0	62	0
3	2	18	0	33	1	48	0	63	0	3	0	18	1	33	0	48	0	63	0
4	1	19	1	34	4	49	3	64	3	4	0	19	2	34	1	49	1	64	0
5	2	20	3	35	2	50	1	65	5	5	1	20	0	35	1	50	0	65	0
6	2	21	1	36	4	51	3	66	3	6	2	21	1	36	3	51	0	66	0
7	1	22	2	37	1	52	1	67	1	7	0	22	0	37	1	52	0	67	0
8	2	23	3	38	3	53	1	68	2	8	0	23	1	38	0	53	0	68	0
9	0	24	3	39	3	54	2	69	5	9	0	24	0	39	0	54	0	69	4
10	1	25	1	40	4	55	1	70	5	10	1	25	1	40	2	55	1	70	0
11	1	26	1	41	2	56	1	71	1	11	1	26	3	41	1	56	2	71	1
12	1	27	4	42	3	57	2	72	1	12	1	27	2	42	0	57	0	72	1
13	4	28	2	43	1	58	2	73	1	13	1	28	3	43	0	58	1	73	0
14	2	29	3	44	0	59	0	74	1	14	1	29	1	44	2	59	2	74	0
15	3	30	2	45	4	60	1	75	2	15	1	30	1	45	1	60	1	75	0

اما الجدولان الآتيان فأنهما يوضحان قيم احصاءات العينة للبيانات الحقيقية للجدولين أنفاً وكما يأتي:
جدول (3-15) يبين نتائج المؤشرات الإحصائية للعينة ولكل ماكينة(اوقات الاشتغال)

Summary data

Variable	Min	1st Qu	Median	Mean	3rd Qu.	Max.	skewness	Kurtosis	SD
t1	0.49	1.71	2.23	2.45	2.85	6.34	1.21	4.89	1.09
t2	0.51	1.80	2.39	2.56	2.94	6.80	1.37	5.58	1.17
t3	0.53	1.83	2.48	2.65	3.05	7.34	1.52	6.32	1.25
t4	0.57	1.90	2.67	2.88	3.34	9.47	1.93	8.46	1.49

جدول (3-16) يبين نتائج المؤشرات الإحصائية للعينة ولكل ماكينة(عدد العطلات)

Summary data

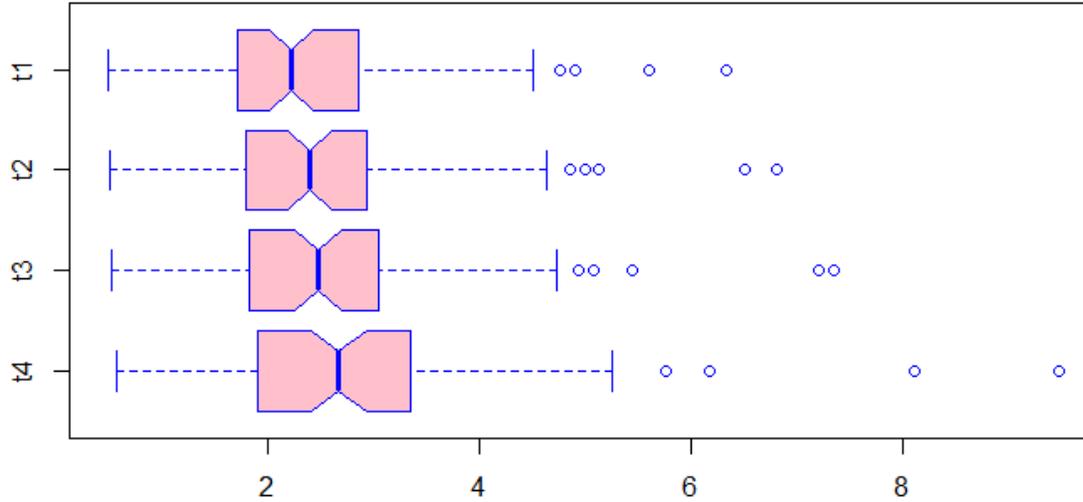
Variable	Min	1st Qu	Median	Mean	3rd Qu.	Max.	skewness	Kurtosis	SD
t1	0	3	4	4.08	5	10	0.34	3.39	1.80
t2	0	1	2	2.09	3	6	0.84	3.73	1.42
t3	0	1	2	2.08	3	5	0.49	2.39	1.34
t4	0	0	1	0.77	1	4	1.29	4.42	0.92

نلاحظ من الجدول (3-15) ما يأتي:

1- بالنسبة للماكينة t1 فإن أقل وقت اشتغال (القيمة الدنيا) هو (Min=0.49) وأن قيمة الربع الأول هي (Q1=1.71) وقيمة الوسيط هي (Median=2.23)، اما متوسط وقت الاشتغال فقد بلغت قيمته (Mean=2.45)، وأن قيمة الربع الثالث فكانت مساوية الى (Q3=2.85)، اما القيمة العظمى (العليا) لوقت اشتغال الماكينة فقد كانت (Max=6.34) اما قيمة معامل الالتواء فكانت مساوية الى (Skewness=1.21) وأن قيمة معامل التفرطح هي (Kurtosis=4.89)، اما الانحراف المعياري فقد كان مقداره هو (SD=1.09) أي بتباين مقداره (Variance=1.1881). ومن قيم هذه المؤشرات الإحصائية الوصفية يتبين لنا أن توزيع البيانات هو ملتوي نحو اليمين (اشارة معامل الالتواء موجبة)، وأنه يتصف بكونه ذا ذيل ثقيل heavy-tailed استناداً الى قيمة معامل التفرطح العالية نسبياً.

2- بالنسبة للمكائن t4, t3, t2 فأنا نلاحظ أنه وبالرغم من اختلاف قيم المؤشرات الإحصائية الوصفية لبيانات أوقات الحياة (الاشتغال) لكل منها والمبينة في الجدول أنفاً الا أن جميعها تبين لنا أن توزيع البيانات هو ملتو نحو اليمين (اشارة معامل الأتواء موجبة)، وأنه يتصف بكونه ذا ذيل ثقيل heavy-tailed ايضاً استناداً الى قيمة معامل التفرطح العالية نسبياً لكل منها.

اما الشكل الآتي فيمثل مخطط الصندوق box plot لانتشار البيانات لكل عينة (أوقات الاشتغال لكل ماكينة) ومواقع الربيعات Quartiles التي تم الحصول عليها والموضحة في الجدول أنفاً، فضلاً عن انه يبين وجود قيماً شاذة Outliers ضمن بيانات كل عينة. وعليه فإن التوزيعين المقترحين في الجانب النظري SLR و SLRP سيكونان توزيعان ملائمان لاستعمالهما في نمذجة بيانات تمتلك مثل هكذا مؤشرات وخصائص احصائية وكما سنرى لاحقاً.



شكل (1-3) يبين مخطط الصندوق box plot لانتشار البيانات ولكل ماكينة(اوقات الاشتغال)

اما فيما يتعلق بالجدول (3-16) الذي يبين عدد العطلات لكل ماكينة فأنا نلاحظ ما يأتي:

1- بالنسبة للماكينة t1 فإن أقل عدد للعطلات (القيمة الدنيا) هو (Min=0) وأن قيمة الربيع الأول هي (Q1=3) وقيمة الوسيط هي (Median=4)، اما متوسط عدد العطلات فقد بلغت قيمته (Mean=4.08)، وأن قيمة الربيع الثالث فكانت مساوية الى (Q3=5)، اما القيمة العظمى (العليا) لوقت اشتغال الماكينة فقد كانت (Max=10) اما قيمة معامل الالتواء فكانت مساوية الى (Skewness=0.34) وأن قيمة معامل التفرطح هي (Kurtosis=3.39)، اما الانحراف المعياري فقد كان مقداره هو (SD=1.80) أي بتباين مقداره (Variance=3.24).

2- بالنسبة للمكائن t4, t3, t2 فأنا نلاحظ انه وبالرغم من اختلاف قيم المؤشرات الإحصائية الوصفية لبيانات عدد العطلات لكل منها والمبينة في الجدول (3-16) أنفاً الا أن جميعها تبين لنا أن توزيع البيانات هو ملتوي نحو اليمين وبشكل ضئيل جداً (اشارة معامل الالتواء موجبة)، وأنه يتصف بكونه ذا ذيل ثقيل heavy-tailed ايضاً استناداً الى قيمة معامل التفرطح العالية نسبياً لكل منها.

لقد تم اجراء اختبار حسن المطابقة باستعمال احصاءة كولموكوروف-سميرنوف (K-S)

Kolmogorov- Smirnov Statistic Test بغرض التأكد من أن بيانات اوقات الاشتغال للمكائن الأربعة تتبع التوزيعين المقترحين $SLRPS(\alpha, \theta, q, \lambda), SLR(\alpha, \theta, q)$ وانها تعطي ملائمة وتوافقاً أكثر مقارنة بالتوزيعات الناشئة منها والمتمثلة بالتوزيعات ليندلي ورايلي وليندلي - العدم المناظرة لها والتي تدعم هذا التوافق وقبول فرضيات p-value رايلي، فضلاً عن حساب قيم المذكورة أدناه، فضلاً عن ذلك فقد تم اجراء الاختبار نفسه بغرض التأكد من أن عدد العطلات لكل ماكنة من المكائن الأربعة تتبع توزيع بواسون المبتور ذو المعلمة λ والتي تمثل معدل عدد العطلات. أن الصيغة العامة لاختبار أحصاءة (K-S) تعطى وفق العلاقة الآتية:

$$K.S = SUP|F_0(y_i) - F_n(y_i)| \quad \dots (4.1)$$

وأن هذا الاختبار قد تم تطبيقه لاختبار الفرضيات الآتية:

- | | |
|-------------------------|------------------------|
| 1. $H_0 : Y \sim LR$ | 4. $H_0 : Y \sim Pot1$ |
| $H_1 : Y \neq LR$ | $H_1 : Y \neq Pot1$ |
| 2. $H_0 : Y \sim SLR$ | 5. $H_0 : Y \sim Pot2$ |
| $H_1 : Y \neq SLR$ | $H_1 : Y \neq Pot2$ |
| 3. $H_0 : Y \sim SLRPS$ | 6. $H_0 : Y \sim Pot3$ |
| $H_1 : Y \neq SLRPS$ | $H_1 : Y \neq Pot3$ |
| | 7. $H_0 : Y \sim Pot4$ |
| | $H_1 : Y \neq Pot4$ |

مع ملاحظة أن الباحث عند التطبيق العملي قد اختار توزيع بواسون بمعدل λ لعدد العطلات او التوقفات الأسبوعي ليمثل توزيع متسلسلة القوى. والجدول الآتي يبين نتائج الاختبار وقيم الاحتمالية للتوزيعات الاحتمالية الثلاثة المذكورة في الفرضيات اعلاه والتي ابدت توافقاً ومطابقة بالنسبة للبيانات الحقيقية، فضلاً عن نتائج اختبار أن عدد العطلات يتبع توزيع بواسون المبتور ذو المعلمة λ .

جدول (3-17) يبين نتائج اختبار حسن المطابقة

sample Kolmogorov-Smirnov (K-S statistic) test

Distribution	LRt1	LRt2	LRt3	LRt4	SLRt1	SLRt2
K-S Statistic	0.09297	0.10911	0.13091	0.14636	0.09861	0.1003
p-value	0.5062	0.3108	0.1398	0.07251	0.4316	0.4105
Distribution	SLRt3	SLRt4	SLRPt1	SLRPt2	SLRPt3	SLRPt4
K-S Statistic	0.11296	0.13007	0.08907	0.10174	0.10985	0.12247
p-value	0.273	0.1446	0.5609	0.393	0.3033	0.1939
Distribution	POt1	POt2	POt3	POt4		

Statistic	0.15075	0.14269	0.1459	0.15565		
p-value	0.06617	0.09432	0.08211	0.05283		

- ومن الجدول المذكور أنفاً نستنتج أن بيانات وقت الحياة (الاشتغال) للمكائن t_1, t_2, t_3, t_4 تتبع توزيع LR بسبب أن قيمة احصاء الاختبار K-S المحسوبة لكل منها اقل من نظيرتها الحرجة او النظرية (الجدولية) المستخرجة من جداول خاصة باختبار K-S وإذ ان حجم كل عينة هو (75) وهو اكبر من (35) لذلك فإن القيمة الجدولية وتحت مستوى معنوية $\alpha = 0.05$ تكون مساوية الى $\frac{1.36}{\sqrt{75}} = 0.16$ وعلى سبيل المثال بالنسبة الى الماكنة t_1 نرى بأن قيمة احصاء الاختبار مساوية الى (K-S=0.09297) وهي اقل من القيمة الجدولية 0.16، وما يدعم هذا الاستنتاج هو أن قيمة الاحتمال المقابلة كانت مساوية الى $p - value = 0.5062$ وهي اكبر من مستوى المعنوية المحدد للاختبار $\alpha = 0.05$.

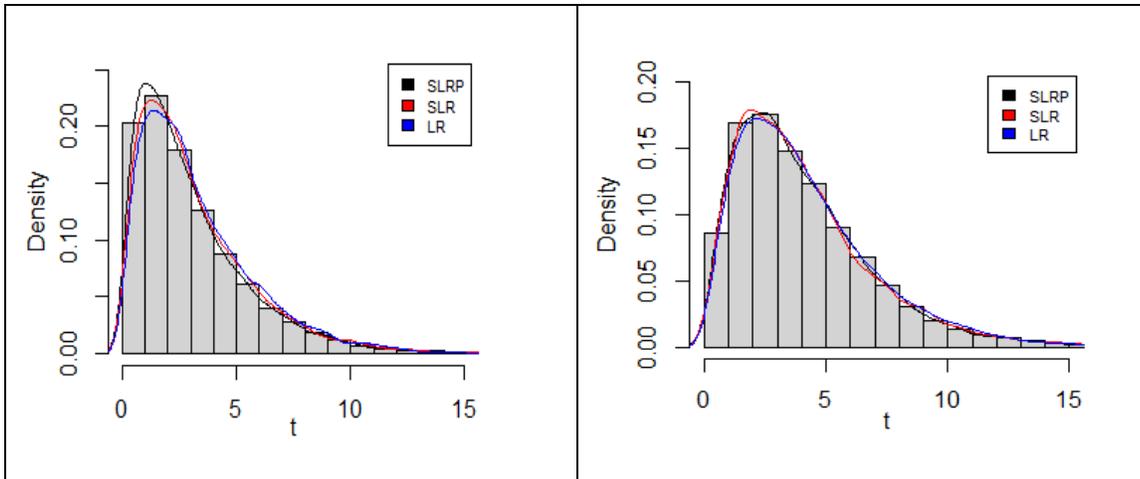
- كذلك من الجدول المذكور أنفاً نستنتج أن بيانات وقت الحياة (الاشتغال) للمكائن t_1, t_2, t_3, t_4 تتبع توزيع SLR بسبب أن قيمة احصاء الاختبار (K-S) المحسوبة لكل منها اقل من نظيرتها الحرجة او النظرية (الجدولية) المستخرجة من جداول خاصة باختبار (K-S) وإذ ان حجم كل عينة هو (75) وهو اكبر من (35) لذلك فإن القيمة الجدولية وتحت مستوى معنوية $\alpha = 0.05$ تكون مساوية الى $\frac{1.36}{\sqrt{75}} = 0.16$ وعلى سبيل المثال بالنسبة الى الماكنة t_2 نرى بأن قيمة احصاء الاختبار مساوية الى (K-S=0.1003) وهي اقل من القيمة الجدولية 0.16، وما يدعم هذا الاستنتاج هو أن قيمة الاحتمال المقابلة كانت مساوية الى $p - value = 0.4105$ وهي اكبر من مستوى المعنوية المحدد للاختبار $\alpha = 0.05$.

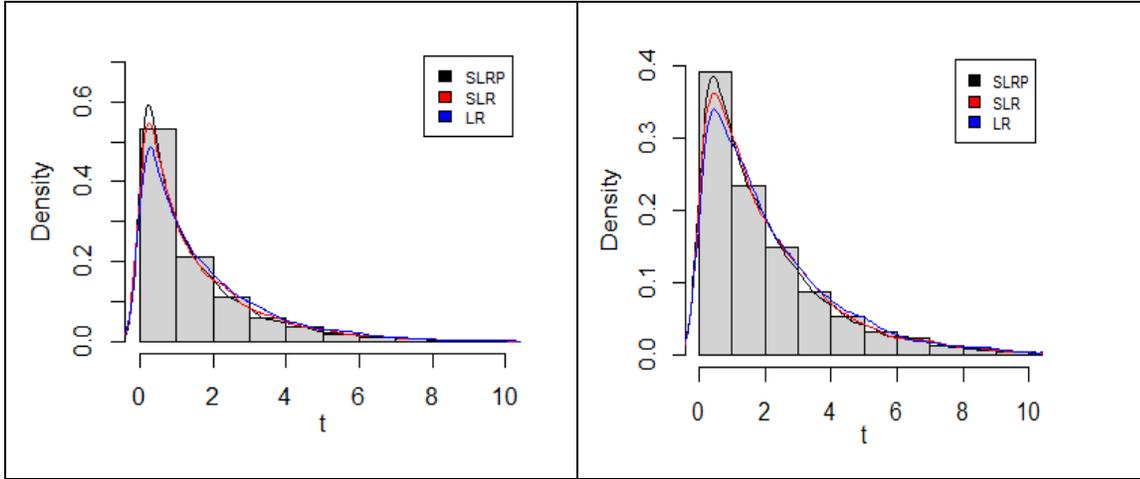
- ايضاً من الجدول المذكور أنفاً نستنتج أن بيانات وقت الحياة (الاشتغال) للمكائن t_1, t_2, t_3, t_4 تتبع توزيع SLRP بسبب أن قيمة احصاء الاختبار (K-S) المحسوبة لكل منها اقل من نظيرتها الحرجة او النظرية (الجدولية) المستخرجة من جداول خاصة باختبار (K-S)، وإذ ان حجم كل عينة هو (75) وهو اكبر من (35) لذلك فإن القيمة الجدولية تحت مستوى معنوية $\alpha = 0.05$ تكون مساوية الى $\frac{1.36}{\sqrt{75}} = 0.16$ وعلى سبيل المثال بالنسبة الى الماكنة t_3 نرى بأن قيمة احصاء الاختبار مساوية الى (K-S=0.10985) وهي اقل من القيمة الجدولية 0.16، وما يدعم هذا الاستنتاج هو أن

قيمة الاحتمال المقابلة كانت مساوية الى $p - value = 0.3033$ وهي اكبر من مستوى المعنوية المحدد للاختبار $\alpha = 0.05$.

كذلك نرى وفقاً للجدول نفسه أن عدد العطلات لكل ماكينة يتبع توزيع بواسون المبتور بالمعلمة λ . ومراعاة للاختصار فإنه بالنسبة ماكينة النسيج الأولى t1 على سبيل المثال نجد أن عدد عطلاتها يتبع توزيع بواسون المبتور $Po(\lambda)$ بسبب أن قيمة احصاءة الاختبار مساوية الى $(K-S=0.15075)$ وهي اقل من القيمة الجدولية 0.16، وما يدعم هذا الاستنتاج هو أن قيمة الاحتمال المقابلة كانت مساوية الى $p - value = 0.06617$ وهي اكبر من مستوى المعنوية الذي تم تحديده لأجراء الاختبار وهو $\alpha = 0.05$. ويمكن الخروج بهذا الاستنتاج نفسه بالنسبة للمكائن الثلاثة الأخرى بحسب نتائج الجدول نفسه.

والشكل الآتي يوضح دوال الكثافة الاحتمالية للتوزيعات المقترحة للبيانات الحقيقية ولكل عينة (أوقات الاشتغال لكل ماكينة) .





شكل (2-3) يبين دوال الكثافة الاحتمالية pdfs للبيانات الحقيقية

(الماكنة الأولى t1 في اعلى اليمين، t2 اعلى اليسار، t3 اسفل اليسار، t4 اسفل اليسار)

يظهر من الشكل المذكور أنفاً أن هنالك تقارباً واضحاً بين شكل pdfs المقترحة والمبين في الجانب النظري باستعمال البيانات التجريبية وشكل نظيراتها الممثلة بالبيانات الحقيقية، فضلاً عن رسم شكل المدرج التكراري، مما يعطي مؤشراً جيداً على دقة التطابق (التوفيق)، ويعطي ايضاً دليلاً على صحة نتائج اختبار احصاءة K-S ومن ثم امكانية قبول فرضيات عدم المشار أليها أنفاً.

اما الجداول الآتية فهي تلخص تقديرات الامكان الأعظم لمعلمات التوزيعات المقترحة SLRP,SLR فضلاً عن التوزيعات الأصلية وتحديدات توزيع LR، فضلاً عن الأخطاء المعيارية (SE) المصاحبة لها، وكذلك بيان قيم حدي الثقة الأدنى والأعلى Lower and Upper Confidence Limits والفرق بينهما او ما يسمى بطول الفترة The Difference or The Length of Interval ولكل عينة اي اوقات الحياة (الاشتغال) لكل ماكنة.

جدول (3-18) يبين تقديرات معالم التوزيعات المقترحة لأوقات اشتغال ماكنة النسيج الأولى t1

Distribution	Parameter	MLEE	SE	Lower	Upper	Difference
LR	$\hat{\alpha}$	2.17983	0.03184	1.44461	2.91499	1.47038
	$\hat{\theta}$	1.15218	0.01559	0.63780	1.66656	1.02876
SLR	$\hat{\alpha}$	2.38958	0.02599	1.72537	3.05379	1.32842

	$\hat{\theta}$	1.22672	0.00994	0.81594	1.63750	0.82156
	\hat{q}	3.48769	0.05228	2.54567	4.42971	1.88404
SLRP	$\hat{\alpha}$	2.55047	0.02035	1.96280	3.13814	1.17534
	$\hat{\theta}$	1.25482	0.00458	0.97605	1.53359	0.55754
	\hat{q}	3.85551	0.04422	2.98917	4.72185	1.73268
	$\hat{\lambda}$	0.75452	0.00589	0.43831	1.07073	0.63242

جدول (3-19) يبين تقديرات معالم التوزيعات المقترحة لأوقات اشتغال ماكينة النسيج الثانية t2

Distribution	Parameter	MLEE	SE	Lower	Upper	Difference
LR	$\hat{\alpha}$	2.03949	0.03715	1.24537	2.83361	1.58824
	$\hat{\theta}$	1.16094	0.01483	0.65928	1.66260	1.00332
SLR	$\hat{\alpha}$	2.29058	0.03063	1.56948	3.01168	1.44220
	$\hat{\theta}$	1.22657	0.00892	0.83735	1.61579	0.77844
	\hat{q}	3.45145	0.05961	2.44556	4.45734	2.01178
SLRP	$\hat{\alpha}$	2.48612	0.02422	1.84494	3.12730	1.28236
	$\hat{\theta}$	1.24283	0.00323	1.00877	1.47697	0.46820
	\hat{q}	3.87790	0.05064	2.95073	4.80507	1.85434
	$\hat{\lambda}$	2.13948	0.02240	1.52288	2.75607	1.23319

جدول (3-20) يبين تقديرات معالم التوزيعات المقترحة لأوقات اشتغال ماكينة النسيج الثالثة t3

Distribution	Parameter	MLEE	SE	Lower	Upper	Difference
LR	$\hat{\alpha}$	1.87621	0.04308	1.02105	2.73137	1.71032
	$\hat{\theta}$	1.05182	0.02470	0.40434	1.69930	1.29496
SLR	$\hat{\alpha}$	2.17788	0.03635	1.39239	2.96337	1.57098
	$\hat{\theta}$	1.20057	0.01855	0.63947	1.76167	1.12220
	\hat{q}	5.40122	0.07809	4.24991	6.55253	2.30262
SLRP	$\hat{\alpha}$	2.42185	0.02945	1.71477	3.12893	1.41416
	$\hat{\theta}$	1.29728	0.01253	0.83603	1.75837	0.92234
	\hat{q}	5.98221	0.06850	4.90393	7.06049	2.15656
	$\hat{\lambda}$	1.69560	0.04225	0.84877	2.54243	1.69366

جدول (3-21) يبين تقديرات معالم التوزيعات المقترحة لأوقات اشتغال ماكينة الاكمام t4

Distribution	Parameter	MLEE	SE	Lower	Upper	Difference
LR	$\hat{\alpha}$	1.76425	0.04669	0.87484	2.65366	1.77882
	$\hat{\theta}$	1.00427	0.02973	0.29390	1.71464	1.42074

SLR	$\hat{\alpha}$	2.09420	0.03951	1.27540	2.91300	1.63760
	$\hat{\theta}$	1.19452	0.02334	0.56511	1.82393	1.25882
	\hat{q}	7.32842	0.11842	6.02298	8.63386	2.61088
SLRP	$\hat{\alpha}$	2.36425	0.03257	1.62073	3.10777	1.48704
	$\hat{\theta}$	1.32925	0.01696	0.79320	1.86534	1.07214
	\hat{q}	8.09826	0.09043	6.85930	9.33722	2.47792
	$\hat{\lambda}$	3.672	0.05083	2.74309	4.60091	1.85782

ومن الجداول الأربعة المذكورة آنفاً نلاحظ أن تقديرات الامكان الأعظم لمعاملات التوزيعين المقترحين SLR,SLRP كانت بشكل عام افضل مقارنة بمثيلاتها في التوزيعات الأصلية وتحديدا توزيع LR وذلك بفضل امتلاكها أخطاءً معيارية SE اقل وسنأخذ الجدول الأول الخاص بماكنة النسيج الأولى t1 مثلاً لتحليل النتائج للجداول الأربعة المذكورة آنفاً:

1. بالنسبة إلى اوقات الحياة (الاشتغال) لماكنة النسيج الاولى t1 وكما مبين في الجدول الاول فإنه فيما يخص توزيع LR فقد كان مقدر MLE لمعلمة القياس مساوي الى $\hat{\alpha} = 2.17983$ ، بخطأ معياري مقداره $SE= 0.03184$ ، اما الحدين الأدنى والأعلى للثقة لمعلمة القياس فقد كانت قيمتهما $L = 1.44461$, $U = 2.91499$ ، اي بطول فترة (الفرق) مساوي الى $D=1.47038$.

كذلك نجد أن مقدر MLE لمعلمة الشكل مساوي الى $\hat{\theta} = 1.15218$ ، وبخطأ معياري قيمته مساوية الى $SE= 0.01599$ ، اما الحدين الأدنى والأعلى للثقة لمعلمة الشكل فقد كانت قيمتهما $L = 0.63780$, $U = 1.66656$ ، اي بطول فترة (الفرق) مساوي الى $D=1.02876$.

2. بالنسبة إلى اوقات الحياة (الاشتغال) لماكنة النسيج الأولى t1 وكما مبين في الجدول الأول فإنه فيما يخص التوزيع المقترح الأول SLR فقد كان مقدر MLE لمعلمة القياس مساوي الى $\hat{\alpha} = 2.38958$ ، بخطأ معياري مقداره $SE= 0.02599$ ، اما الحدين الأدنى والأعلى للثقة لمعلمة القياس فقد كانت قيمتهما $L = 1.72537$, $U = 3.05379$ ، اي بطول فترة (الفرق) مساوي الى $D=1.32842$.

كذلك نجد أن مقدر MLE لمعلمة الشكل مساوي الى $\hat{\theta} = 1.22672$ ، وبخطأ معياري قيمته مساوية الى $SE= 0.00994$ ، اما الحدين الأدنى والأعلى للثقة لمعلمة الشكل فقد كانت قيمتهما $L = 0.81594$, $U = 1.63750$ ، اي بطول فترة (الفرق) مساوي الى $D=0.82156$.

كما يتضح لنا من الجدول نفسه أن مقدر MLE لمعلمة التفرطح (التسطح) كان مساوياً الى $\hat{q} = 3.48769$ وبخطأ معياري قيمته مساوية $SE = 0.05228$ ، اما الحدين الأدنى والأعلى للثقة لمعلمة التفرطح فقد كانت قيمتهما $L = 2.54567, U = 4.42971$ ، اي بطول فترة (الفرق) مساوي الى $D = 1.88404$.

3. بالنسبة الى اوقات الحياة (الاشتغال) لماكنة النسيج الأولى t_1 وكما مبين في الجدول الأول فإنه فيما يخص التوزيع المقترح الثاني SLRP فقد كان مقدر MLE لمعلمة القياس مساوي الى $\hat{\alpha} = 2.55047$ ، بخطأ معياري مقداره $SE = 0.02035$ ، اما الحدين الأدنى والأعلى للثقة لمعلمة القياس فقد كانت قيمتهما $L = 1.96280, U = 3.13814$ ، اي بطول فترة (الفرق) مساوي الى $D = 1.17534$.

كذلك نجد أن مقدر MLE لمعلمة الشكل مساوي الى $\hat{\theta} = 1.25482$ ، وبخطأ معياري قيمته مساوية الى $SE = 0.00458$ ، اما الحدين الأدنى والأعلى للثقة لمعلمة الشكل فقد كانت قيمتهما $L = 0.97605, U = 1.53359$ ، اي بطول فترة (الفرق) مساوي الى $D = 0.55754$.

كما يتضح لنا من الجدول نفسه أن مقدر MLE لمعلمة التفرطح (التسطح) كان مساوياً الى $\hat{q} = 3.85551$ وبخطأ معياري قيمته مساوية الى $SE = 0.04422$ ، اما الحدين الأدنى و الأعلى للثقة لمعلمة التفرطح فقد كانت قيمتهما $L = 2.98917, U = 4.72185$ ، اي بطول فترة (الفرق) مساوي الى $D = 1.73268$.

4. كما يتبين ايضاً من الجدول نفسه أن مقدر MLE لمعلمة معدل عدد العطلات (التوقفات) والمتمثل بتوزيع بواسون المبتور كان مساوياً الى $\hat{\lambda} = 0.75452$ (اي تقريباً ساعة واحدة كمعدل اسبوعي)، وبخطأ معياري قيمته مساوية إلى $SE = 0.00589$ ، اما الحدين الأدنى و الأعلى للثقة للمعلمة λ فقد كانت $L = 0.43831, U = 1.07073$ ، اي بطول فترة (الفرق) مساوي الى $D = 0.63242$.

وبالاعتماد على ما تقدم من تحليل لنتائج تقديرات الامكان الأعظم لمعلمات التوزيعات الاحتمالية والمبينة في الجداول الأربعة المذكورة آنفاً نلاحظ بأن جميع قيم المعلمات المقدره كانت متوافقة وقريبة بشكل كافٍ من نظيراتها الافتراضية المبينة في الجانب التجريبي (المحاكاة) وتحديدأ عند حجم العينة $n = 75$ وهي كذلك تمثل عدد المشاهدات الحقيقية لأوقات الاشتغال ولكل ماكنة، مع ملاحظة ان

الأخطاء المعيارية تقل بزيادة حجم العينة، وبناءً على ذلك يمكن القول أن التوزيعات المقترحة تتماز بمرونة كبيرة عند استعمالها لنمذجة بيانات موجبة (أوقات الاشتغال) تتصف بامتلاكها قيمة شاذة وايضاً بيانات تبدي تفلطحاً عالياً او مفطحاً وهذا بفضل أهمية معلمة التفرطح q إذ أنه وكما اشرنا في الجانب النظري فإن معامل التفرطح يقل كلما تزيد معلمة التفرطح q .

ومن اجل معرفة مدى مطابقة وملائمة التوزيعين المقترحين (SLRP, SLR) في تمثيل البيانات الحقيقية والمتمثلة بأوقات الحياة (الاشتغال) للمكائن الأربعة مقارنة بالتوزيعات الأساسية الناشئة منها وتحديداً توزيع LR، فقد تم استعمال معايير المقارنة الكلاسيكية المتمثلة بمعيار معلومات اكاكي (Akaike Information Criterion (AIC) (Akaike,1974,2) و معيار معلومات بيز (Bayesian Information Criterion (BIC) (Schwarz,1978,42) ، (Frank ، (logL قيمة $\log L$ (et al., 2014,19) والمعرفة حسب الصيغتين الآتيتين بالاعتماد على ايجاد قيمة

$$(1) AIC = 2k - 2\log L$$

$$(2) BIC = k \log n - 2\log L$$

إذ أن k تشير الى عدد المعلمات في الإنموذج الاحتمالي، و n تمثل حجم العينة، وأن L تمثل القيمة الأعظم لدالة الامكان، ونشير هنا الى أن الإنموذج الاحتمالي الأفضل في تمثيل البيانات هو الذي يملك اقل معايير مقارنة من (BIC, AIC). والجدول الآتي يوضح نتائج هذه المعايير ولكل عينة (أوقات الاشتغال لكل ماكينة).

جدول (3-22) يوضح نتائج معايير المقارنة ($\log L, AIC, BIC$) بين التوزيعات الاحتمالية

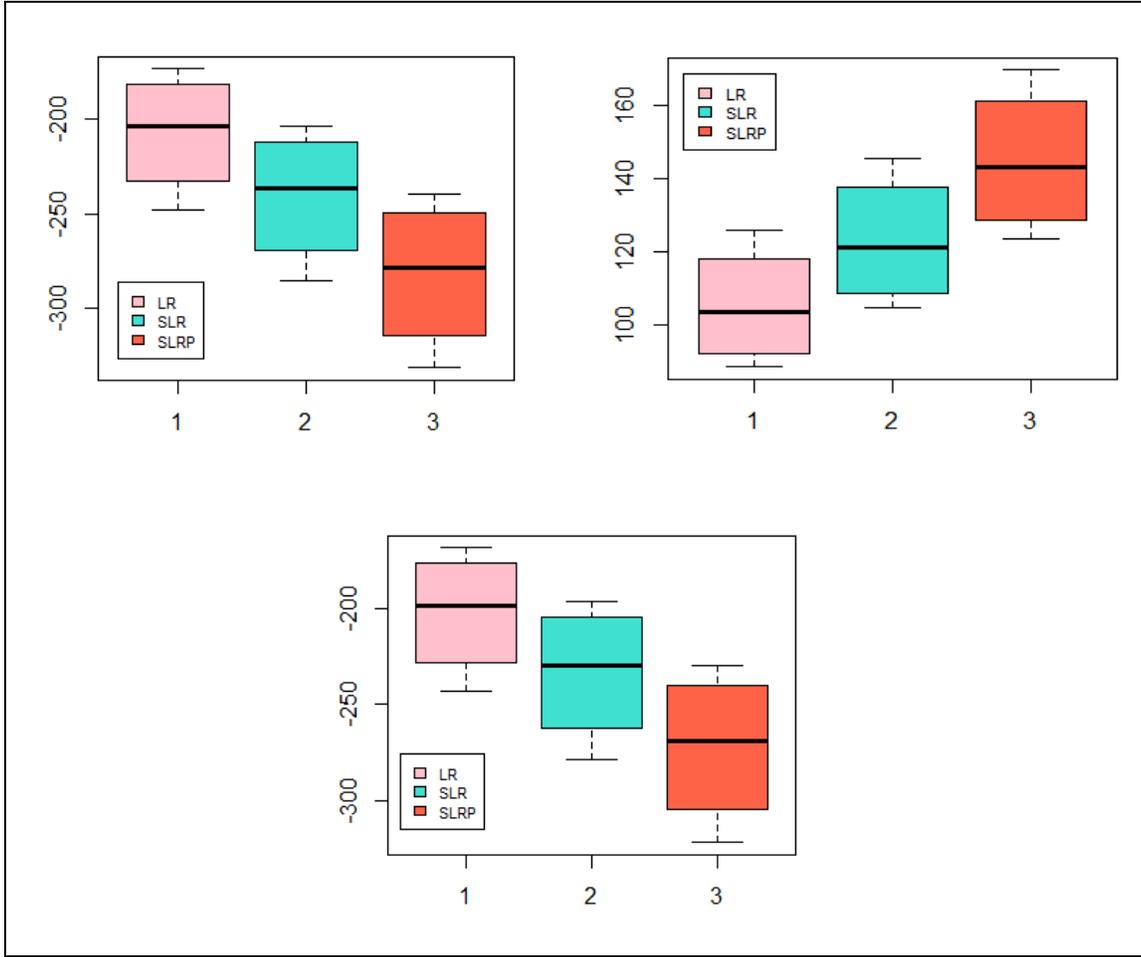
Dist.	t1			t2		
	log-L	AIC	BIC	log-L	AIC	BIC
LR	125.88	-247.75	-243.12	110.81	-217.62	-212.98
SLR	145.72	-285.44	-278.49	129.66	-253.32	-246.37
SLRP	169.65	-331.30	-322.03	152.62	-297.23	-287.96
Dist.	t3			t4		
	log-L	AIC	BIC	log-L	AIC	BIC
LR	96.34	-188.68	-184.04	88.66	-173.32	-168.69
SLR	112.95	-219.89	-212.95	104.83	-203.65	-196.71
SLRP	133.50	-259.00	-249.73	123.68	-239.35	-230.08

ومن الجدول أنفاً نرى بأن :

1- فيما يتعلق ببيانات الماكنة الأولى t_1 ، فإن إنموذج التوزيع المقترح الثاني SLRP اعطى افضلية على التوزيعات الأصلية الممثلة بتوزيع LR لامتلاكه اقل معايير مقارنة من BIC, AIC وتحديداً ($AIC=-331.30, BIC=-322.03$)، يليه إنموذج التوزيع المقترح الأول SLR الذي اعطى قيماً اقل للمعايير قياساً بالتوزيعات الأصلية ($AIC=-285.44, BIC=-278.49$).

2- فيما يتعلق ببيانات الماكنت الثلاثة الأخرى t_2, t_3, t_4 ومراعاة للاختصار فإن معايير المقارنة اعطت الأفضلية للإنموذجين المقترحين على التوزيعات الأصلية كما في ماكنة النسيج الأولى t_1 وكما مبينة قيمها في جدول المقارنة أنفاً.

والشكل الآتي يوضح هذه المعايير و ترتيب التوزيعات الاحتمالية فيما يتعلق بأفضليتها في تمثيل البيانات وحسب ما تم ذكره أنفاً فضلاً عن رسم دالة $\log-L$ إذ أن الإنموذج الاحتمالي الأفضل هو الذي يملك القيمة الأكبر لدالة $\log-L$.



الشكل (3-3) يوضح معايير المقارنة $\log L$ من اعلى اليمين، AIC اعلى اليسار ، BIC في الاسفل

اما الآن فسيقوم الباحث بدراسة سلوك دوال المعولية لكل ماكنة ولأوقات اشتغال مختلفة ولكلا التوزيعين المقترحين $SLR, SLRP$ ومقارنتها بدالة المعولية للتوزيعات الأصلية والمتمثلة بتوزيع LR فضلاً عن دراسة سلوك دوال المعولية للأنظمة الموصولة او المربوطة عليها الماكائن الأربعة في المعمل (التوالي والتوازي)، وسيتم عمل ذلك عن طريق ايجاد تقديرات الامكان الأعظم لجميع دوال المعولية ولكل توزيع احتمالي وذلك بالاعتماد على خاصية الثبات $Invariant$ التي تتصف بها طريقة تقديرات الامكان الأعظم MLE ، والجدول الآتي يلخص نتائج كل تقديرات دوال معولية كل ماكنة ومعولية كل نظام.

جدول (3-23) يبين نتائج تقديرات دوال المعولية لكل ماكينة ومعولية الأنظمة RP,RS ولكل توزيع

Dist.	time	\hat{R}_{t1}	\hat{R}_{t2}	\hat{R}_{t3}	\hat{R}_{t4}	$\hat{R}_s(t_1, t_2)$	$\hat{R}_p(t_3, t_4)$
LR	1	0.85160	0.86759	0.88674	0.90012	0.73884	0.988688
	2	0.52595	0.56657	0.58135	0.65645	0.297987	0.856173
	3	0.23557	0.27850	0.29511	0.38788	0.065606	0.568523
	4	0.07652	0.10304	0.11422	0.18569	0.007885	0.2787
	5	0.01803	0.02870	0.03371	0.07203	0.000517	0.103312
	6	0.00229	0.00435	0.00893	0.01061	9.96E-06	0.019445
	7	0.00025	0.00061	0.00163	0.00206	1.53E-07	0.003687
	8	0.00002	0.00006	0.00023	0.00031	1.2E-09	0.00054
SLR	1	0.89418	0.90229	0.91334	0.91812	0.80681	0.992904
	2	0.55751	0.59490	0.60460	0.67614	0.331663	0.871946
	3	0.25206	0.29521	0.30987	0.40340	0.074411	0.588268
	4	0.08264	0.11025	0.12107	0.19497	0.009111	0.292435
	5	0.01965	0.03100	0.03607	0.07635	0.000609	0.109666
	6	0.00252	0.00474	0.00964	0.01135	1.19E-05	0.020881
	7	0.00028	0.00068	0.00178	0.00222	1.9E-07	0.003996
	8	0.00002	0.00007	0.00028	0.00034	1.4E-09	0.00062
SLRP	1	0.87715	0.88494	0.89561	0.90912	0.776225	0.990513
	2	0.54699	0.58357	0.59298	0.66301	0.319207	0.862838
	3	0.24735	0.28964	0.30396	0.39564	0.071642	0.579341
	4	0.08111	0.10819	0.11879	0.19126	0.008775	0.28733
	5	0.01929	0.03042	0.03540	0.07491	0.000587	0.107658
	6	0.00247	0.00465	0.00947	0.01114	1.15E-05	0.020505
	7	0.00027	0.00066	0.00174	0.00218	1.78E-07	0.003916
	8	0.00002	0.00007	0.00025	0.00033	1.4E-09	0.00058

ومن الجدول المذكور أنفاً نلاحظ ما يأتي:

1- أن قيم دوال المعولية لكل ماكينة ولكل نظام سواء أكان الربط على التوالي (المتسلسل) Serial Connection أم كان الربط على التوازي Parallel Connection ولكل توزيع احتمالي هي قيم

ذات نمط او سلوك عشوائي تناقصي كلما زاد الزمن وهذا ما يؤكد حقيقة أن دالة المعولية بشكل عام تتصف بكونها دالة غير متزايدة من جهة اليسار.

2- أن قيم دوال المعولية لإنموذج التوزيع المقترح الأول SLR كانت الأعلى والأفضل لكل ماكنة ولكل نظام سواء أكان الربط على التوالي (المتسلسل) او كان الربط على التوازي مقارنة بإنموذج التوزيع المقترح الثاني SLRP وتفسير ام سبب ذلك قد يعود الى اننا أخذنا بعين الاعتبار أن عدد العطلات او التوقفات هو متغير عشوائي يتبع توزيع احد توزيعات متسلسلة القوى وتحديداً توزيع بواسون المبتور بمعدل λ ، كذلك يظهر الجدول افضلية في القيم التقديرية لدوال المعولية على نظيراتها في التوزيعات الأصلية وتحديداً توزيع LR .

3- عطفاً على النقطتين الأولى والثانية أنفاً فإنه حسابياً عند الزمن $T=1$ (الساعة الأولى للاشتغال) فقد بلغت قيم تقديرات دوال المعولية لماكنة النسيج الأولى t_1 عند استعمال SLRP,SLR,LR على الترتيب (الترتيب من اليسار لليمين) :

$$\hat{R}_{t_1} = 0.87715 , \hat{R}_{t_1} = 0.89418 , \hat{R}_{t_1} = 0.85160$$

وقد بلغت قيم تقديرات دوال المعولية لماكنة النسيج الثانية t_2 عند استعمال SLRP,SLR,LR على الترتيب:

$$\hat{R}_{t_2} = 0.86759 , \hat{R}_{t_2} = 0.90229 , \hat{R}_{t_2} = 0.88494 \text{ على الترتيب.}$$

وقد بلغت قيم تقديرات دوال المعولية لماكنة النسيج الثالثة t_3 عند استعمال SLRP,SLR,LR على الترتيب:

$$\hat{R}_{t_3} = 0.88674 , \hat{R}_{t_3} = 0.91334 , \hat{R}_{t_3} = 0.89561$$

وقد بلغت قيم تقديرات دوال المعولية لماكنة الإكمال t_4 عند استخدام SLRP,SLR,LR على الترتيب:

$$\hat{R}_{t_4} = 0.90012 , \hat{R}_{t_4} = 0.91812 , \hat{R}_{t_4} = 0.90912$$

وقد بلغت قيم تقديرات دوال المعولية عند ربط ماكنتي النسيج الأولى والثانية t_1, t_2 على التوالي وعند استعمال التوزيعات الاحتمالية SLRP,SLR,LR على الترتيب:

$$\hat{R}_s(t_1, t_2) = 0.776225 \quad , \quad \hat{R}_s(t_1, t_2) = 0.80681 \quad , \quad \hat{R}_s(t_1, t_2) = 0.73844$$

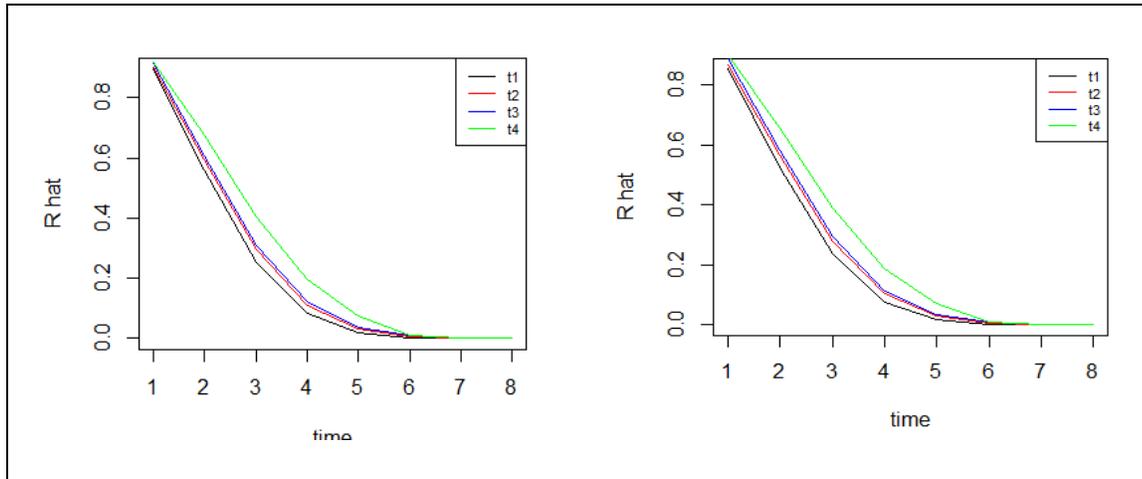
وقد بلغت قيم تقديرات دوال المعولية عند ربط ماكنة النسيج الثالثة t_3 وماكنة الإكمال t_4 على التوالي وعند استعمال التوزيعات الاحتمالية SLRP,SLR,LR على الترتيب :

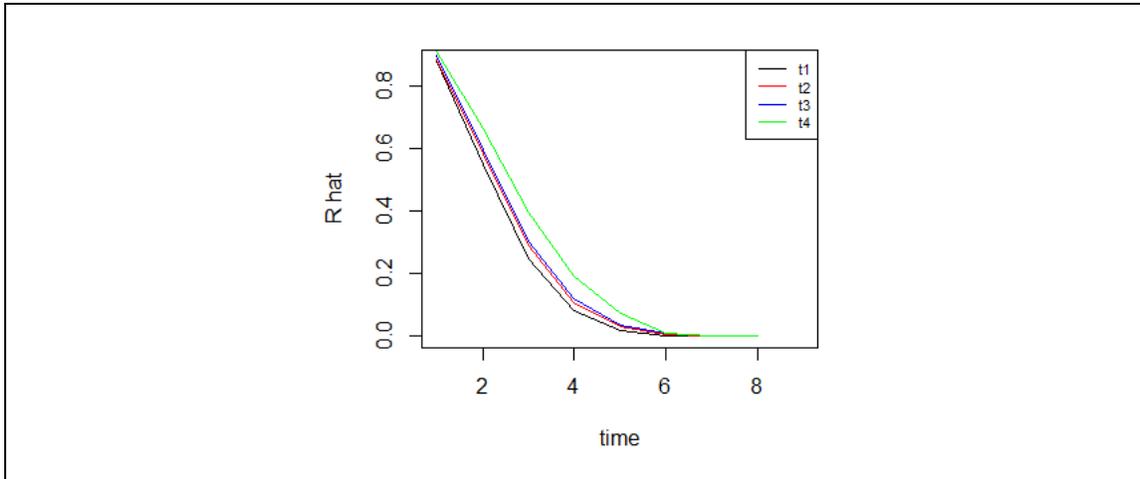
$$\hat{R}_p(t_3, t_4) = 0.990513, \hat{R}_p(t_3, t_4) = 0.992904 \quad , \quad \hat{R}_p(t_3, t_4) = 0.988688$$

وتشير نتائج تقديرات المعولية الأنظمة المذكورة أنفاً الى أن معوليتها تكون اعلى عند ربط الماكائن على التوازي.

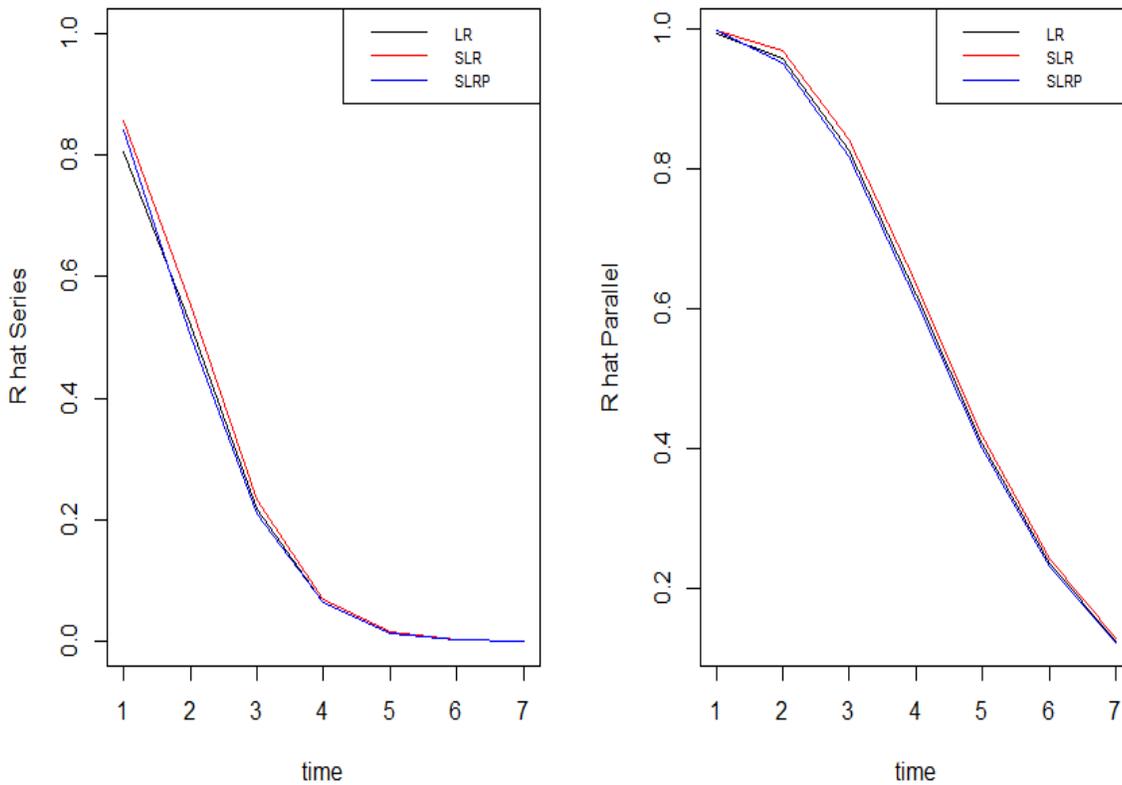
4- وفقاً للنسق الذي بيناه في النقاط الثلاثة المذكورة أنفاً ومراعاة للاختصار فإن جميع النتائج ستحافظ على الاستنتاجات المذكورة نفسها مع ملاحظة أن جميع القيم داخل الجدول أنفاً ستتناقص كلما زاد وقت الاشتغال.

5- أن الأشكال الآتية توضح وتؤكد ما تم استنتاجه والتوصل اليه إذ يظهر فيها السلوك العشوائي المتناقص لدوال المعولية لكل ماكنة ولكل نظام (توالي وتوازي) ولكل توزيع احتمالي.





الشكل (3-4) يوضح دوال المعولية للتوزيعات الاحتمالية LR من اعلى اليمين , SLR من اعلى اليسار, SLRP في الاسفل



الشكل (3-5) يوضح دوال معولية الأنظمة للتوزيعات الاحتمالية (نظام التوازي على اليمين، نظام التوالي على اليسار)

الفصل الرابع

الاستنتاجات والتوصيات

الفصل الرابع

الاستنتاجات والتوصيات

1.4 توطئة Prelude

في هذا الفصل سيتم تناول اهم الإستنتاجات والتوصيات التي توصل اليها الباحث على ضوء ما تم دراسته وبحثه والتوصل اليه في الجانب النظري (Theoretical part) وفي الجانبين التجريبي (Experimental part/ Simulation) والتطبيقي (Applied Part) وكما يأتي:

2.4 الاستنتاجات The Conclusions

1- عمل الباحث على توظيف ما أسماه بمعلمة التفرطح او التسطح kurtosis parameter $q > 0$ بالأعتماد على فكرة ايجاد التوزيع المقطوع بنسبة (قسمة) The Slash Distribution باستعمال أسلوب تحويل المتغيرات المستمرة وذلك بقسمة متغيريين عشوائيين مستقلين، إذ تم استعمال توزيع ليندلي - رايلي LR ليمثل المتغير الأول في البسط والتوزيع المنتظم $U \sim (0,1)$ المرفوع الى القوة او الأس كدالة بدلالة معلمة التفرطح q ليمثل المتغير الثاني في المقام والذي يمكن عدّه حالة خاصة من توزيع بيتا $Be \sim (q, 1)$ لينتج من تطبيق هذه الفكرة الإنموذج الاحتمالي المقترح الأول والذي سمي بتوزيع ليندلي- رايلي المقطوع SLR

(The Slash Lindley- Rayleigh Distribution) والذي تم اثبات أنه توزيع احتمالي pdf.

2- توصل الباحث الى ثلاثة صيغ او صور متكافئة لإنموذج التوزيع الاحتمالي المقترح الأول SLR ، إذ ظهرت الصورة الأولى بدلالة دالة Gamma غير الكاملة الدنيا، والثانية بدلالة دالة Gamma غير الكاملة العليا، اما الثالثة فقد ظهرت بالصيغة او الصورة التكاملية . وقد تم اثبات أن الصور (الصيغ) الثلاثة متكافئة فضلاً عن اثبات أن كل صورة (صيغة) تمثل دالة كثافة احتمالية pdf ، وأستنتج الباحث أن pdf المعطاة بالصورة (الصيغة) التكاملية كانت الأنسب لاستعمالها في ايجاد تقديرات الأماكن الأعظم MLE لمعالم التوزيع المقترح SLR فيما يتعلق بطريقة اشتقاقها وبرمجتها بلغة R.

3- يمكن عدّ أن الإنموذج الاحتمالي المقترح الأول SLR امتداداً لتوزيع LR عندما تأخذ معلمة التفرطح q قيمة كبيرة جداً، إذ يمكن ملاحظة أن توزيع $SLR(\alpha, \theta, q)$ سوف يتقارب من توزيع $LR(\alpha, \theta)$ كلما كانت $q \rightarrow \infty$.

4- عطفاً على النقطة (3) أستنتج الباحث أن توزيع SLR كان أكثر مرونة مقارنة بالتوزيعات الاحتمالية الأصلية L, R, LR في نمذجة البيانات الموجبة التي تتصف بأن لها تفرطحاً زائداً أو مفرطاً Excess Kurtosis لاسيما اوقات الحياة (الأشتغال) التي يكثر تطبيقها في دراسة تحليل المعولية Reliability Analysis و أوقات البقاء التي يكثر تطبيقها في دراسة تحليل البقاء Survival Analysis .

5- أبدى توزيع الإنموذج المقترح الأول SLR قدرة عالية على التكيف والملائمة والتطابق مع Fitting مع البيانات التي تتسم باحتوائها قيماً أو مشاهدات شاذة Outlying Observations فضلاً عن تفرطحها العالي Higher Kurtosis ، إذ يمكن ملاحظة ذلك عن طريق الأشكال المختلفة لدالة الكثافة الاحتمالية pdf ، وايضاً عن طريق معاملي الالتواء والتفرطح أظهرت مدىً واسعاً من القيم إذ يتبين لنا أن معامل التفرطح يقل بزيادة معلمة التفرطح q .

6- عمل الباحث على توسيع إنموذج التوزيع الاحتمالي المقترح الأول SLR بادخال المعلمة الجديدة λ التي تمثل معلمة احد توزيعات متسلسلة القوى Power Series المبتورة عند النقطة او القيمة صفر) بواسون ، ثنائي الحدين، ثنائي الحدين السالب، الهندسي ، اللوغاريتمي)، أي يمكن أن تمثل λ معدل عدد العطلات او التوقفات للمكائن اذا كان التوزيع المبتور هو بواسون او أنها تمثل احتمال العطل للمكائن اذا كان التوزيع المبتور هو توزيع ثنائي الحدين (مثلاً) وذلك باستعمال اسلوب التوزيعات المركبة Compounding Distributions بين توزيع المقترح الأول SLR وتوزيع متسلسلة القوى PS والذي نتج عنه فئة جديدة من توزيعات وقت الحياة lifetime تماز بكل ما تم ذكره في النقاط المذكورة أنفاً وقد سمي هذا الإنموذج او التوزيع الاحتمالي المقترح الثاني بتوزيع ليندلي- رايلي المقطوع و متسلسلة القوى ذي الأربعة معالم $SLRPS(\alpha, \theta, q, \lambda)$.

Rayleigh and Power Series Distribution وقد تم اثبات أنه يمثل دالة كثافة احتمالية pdf.

- 7- أستنتج الباحث أن إنموذج التوزيع الأحمالي المقترح الثاني $SLRPS(\alpha, \theta, q, \lambda)$ يتقارب من إنموذج التوزيع الأحمالي المقترح الأول $SLR(\alpha, \theta, q)$ وذلك عندما $\lambda \rightarrow 0$.
- 8- امكانية استعمال التوزيعين المقترحين $SLRP, SLR$ في نمذجة بيانات تخص ظواهر غير مستقرة والتي تكون دوال المخاطرة لها متنوعة الأنماط مثل $bathtub$, $upside\ down\ bathtub$.

9- أظهرت نتائج الجانب التجريبي ما يأتي:

- a. افضلية للتوزيعين المقترحين الأول والثاني $SLRP, SLR$ في تقديرات MLE للمعالم مقارنة بالتوزيعات الأصلية L, R, LR ولجميع القيم الاختيارية لمعلمة التفرطح q والمعلمة λ (المعدل) ولاسيما تلك التي تكون فيها معلمة القياس α اكبر من معلمة الشكل θ مقارنة بتلك التي تكون قيمتي هاتين المعلمتين غير متساويتين و لجميع أحجام العينة التي تم استعمالها في التجارب ومما يؤكد ذلك أن قيمة المؤشر الأحصائي متوسط مربعات الخطأ $AMSE$ تقل عند زيادة حجم العينة (وهو المأمول والمتوقع في التجارب الأحصائية) وبشكل اسرع بالنسبة للتوزيعين المقترحين الأول والثاني .
- b. عند تساوي قيمتي معلمتي الشكل θ والقياس α فإنه يتبين أن هناك تقارباً نسبياً بين قيمتي دالة المعولية الحقيقية (حسب قيم المعلمات الافتراضية) ودالة المعولية المقدره بطريقة MLE ولكلا التوزيعين المقترحين $SLRP, SLR$ وعند جميع قيم أوقات الأشتغال (الحياة) التي تم اختيارها وأن هذا التقارب يتزايد اكثر فأكثر مع زيادة الزمن، فضلاً عن التقارب الملحوظ في قيمة المؤشر الأحصائي $RAMSE$.
- c. نلاحظ ايضاً أن قيم دوال المعولية المحسوبة والمقدرة تتناقص كلما يتزايد وقت الأشتغال وهذا ما يؤكد طبيعة السلوك العشوائي لهذه الدوال اذ ان دالة المعولية تتصف بانها دالة غير متزايدة من جهة اليسار، كما انه تبين لنا النتائج أن قيم جميع دوال المعولية تتناقص ايضاً كلما تزيد معلمة التفرطح q ويتثبت معلمة المعدل لتوزيع بواسون المبتور عند $\lambda = 1$ ويتسارع هذا التناقص بشكل اكبر بزيادة λ (معدل عدد العطلات او التوقفات) الى $\lambda > 1$.
- d. أن مقدار المؤشر الأحصائي $RAMSE$ ينخفض كلما زاد حجم العينة المستعملة ولكل دوال المعولية المقدره بطريقة MLE للتوزيعين المقترحين، ويمكن ملاحظة ذلك ايضاً اذا ما غيرنا القيم

الأفتراضية الأولية الأخرى بالنسبة لمعلمة التفرطح q وعند تثبيت معلمة المعدل لتوزيع بواسون المبتور $\lambda = 1$ على سبيل المثال.

e. عندما تكون قيمة معلمة القياس α اكبر من قيمة معلمة الشكل θ فقد اظهرت النتائج تحسناً وزيادة في قيمتي دالة المعولية الحقيقية (حسب قيم المعلمات الأفتراضية) ودالة المعولية المقدره بطريقة MLE ولكلا التوزيعين المقترحين وعند جميع قيم أوقات الأشتغال (الحياة) المختارة مع الحفاظ على السلوك العشوائي والتناقص في قيم هذه الدوال كلما زاد الزمن .

f- عطفاً على النقطة (e) فإنه يمكن استنتاج ان هناك زيادة في قيم دوال المعولية بزيادة قيمة معلمة التفرطح q فضلاً عن افضلية نسبية بقيمة دالتي المعولية الأفتراضية و المقدره لتوزيع المقترح الأول SLR مقارنة بتوزيع المقترح الثاني SLRP وذلك بسبب أن توزيع المقترح الثاني SLRP يأخذ بعين الاعتبار أن عدد العطلات او التوقفات للماكنة (او نظام من الماكائن) هي متغيراً عشوائياً يتبع احد توزيعات متسلسلة القوى وتحديداً توزيع بواسون المبتور بالمعلمة λ والتي تمثل معدل عدد العطلات ، وأن هذه الأفضلية تزيد بزيادة قيمة المعلمة λ وتحديداً عندما $\lambda > 1$.

10- أبرزت نتائج الجانب التطبيقي ما يأتي:

a- اعتماداً على معايير المقارنة المستعملة $\log L$, BIC , AIC بين التوزيعات الاحتمالية فإنه يظهر جلياً أفضلية التوزيعين المقترحين SLR, SLRP التوزيعات الأصلية الناشئة منها وتحديداً توزيع LR في تمثيل البيانات الحقيقية ولكل عينة المتمثلة ببيانات وقت الحياة (الأشتغال) لكل ماكنة من الماكائن الأربعة التي تشمل مكائن النسيج الأولى والثانية والثالثة فضلاً عن ماكنة الاكمال علماً أن كل عينة كانت تتصف بامتلاكها مشاهدات شاذة $Outliers$ ، فضلاً عن معاملات تفرطح عالية نسبياً.

b- أن تقديرات الامكان الأعظم لمعلمات التوزيعات الاحتمالية كانت متوافقة وقريبة بشكل كاف من نظيراتها الأفتراضية المبينة في الجانب التجريبي (المحاكاة) وتحديداً عند حجم العينة $n=75$ الذي يمثل عدد المشاهدات الحقيقية لأوقات الأشتغال ولكل ماكنة، مع ملاحظة ان الأخطاء المعيارية SE تقل بزيادة حجم العينة، وبناءً على ذلك يمكن القول بأن التوزيعات المقترحة تتماز بمرونة كبيرة عند استعمالها لنمذجة بيانات موجبة (أوقات الأشتغال) تتصف بامتلاكها قيماً شاذة وايضاً بيانات تبدي

تفرطاً عالياً او مفراطاً وهذا بفضل اهمية معلمة التفرطح q إذ أن معامل التفرطح يقل كلما تزيد معلمة التفرطح q كما أشرنا الى ذلك في الجانب النظري وتحديداً $q > 3$.

c- أن قيم دوال المعولية المقدره لكل ماكنة ولكل نظام سواء أكان الربط على التوالي (المتسلسل) Series Connection او كان الربط على التوازي Parallel Connection ولكل توزيع احتمالي هي قيم ذات نمط او سلوك عشوائي تناقصي كلما زاد الزمن وهذا ما يؤكد حقيقة أن دالة المعولية بشكل عام تتصف بكونها دالة غير متزايدة من جهة اليسار مع ملاحظة أن قيم دالة المعولية لماكنتي النسيج الأولى $t1$ والثانية $t2$ الموصولة وفق نظام الربط على التوالي تكون دائماً اقل من قيم دالة المعولية لماكنتي الثالثة $t3$ وماكنتي الاكمال $t4$ وفق نظام الربط على التوازي.

d- أن قيم دوال المعولية لإنموذج التوزيع المقترح الأول SLR كانت الأعلى والأفضل لكل ماكنة ولكل نظام سواء أكان الربط على التوالي (المتسلسل) ام كان الربط على التوازي مقارنة بإنموذج التوزيع المقترح الثاني SLRP وتفسير او سبب ذلك قد يعود الى اننا أخذنا بعين الاعتبار أن عدد العطلات او التوقفات هو متغير عشوائي يتبع توزيع احد توزيعات متسلسلة القوى وتحديداً توزيع بواسون المبتور بمعدل λ ، وبالمحصلة فإنه توجد افضلية في القيم التقديرية لدوال المعولية على نظيراتها في التوزيعات الأصلية وتحديداً توزيع LR .

3.4 التوصيات The Recommendations

في ضوء الأستنتاجات وما تم التوصل اليه في هذه الاطروحة فأن الباحث يوصي بما يأتي:

1- الأستفادة من فكرة التوزيع المقطوع بالقسمة (توزيع النسبة) The Slash Distribution التي تبنها الباحث مستعملاً أسلوب تحويل المتغيرات المستمرة وتوظيفها مع عوائل اخرى من التوزيعات المولدة Generator مثل عائلة توزيعات Gamma المولدة Gamma-Generator (G-G) للحصول على توزيعات جديدة تمتاز بأنها اكثر مرونة من التوزيعات الأصلية الناشئة منها لنمذجة بيانات موجبة كوقت الحياة (الأشتغال) lifetime والتي تتسم بأنها ذات تفرطح عالٍ او مفراطاً ، او أنها تحتوي على قيم او مشاهدات شاذة Outliers ، او بيانات تتسم بتنوع أنماط دالة المخاطرة لها مثل upside down bathtub, bathtub ، وغيرها من اشكال دوال المخاطرة المركبة.

2- يمكن توسيع التوزيعات الجديدة الي يتم الحصول عليها بموجب التوصية الأولى أنفاً وذلك باستعمال أسلوب التوزيعات المركبة Compounding Distributions مع توزيعات متسلسلة القوى إذا كان هناك اهتماماً منصباً على أن عدد العطلات او التوقفات (مثلاً) متغيراً عشوائياً يتبع أحد توزيعات متسلسلة القوى المبتورة عند الصفر (zero truncated distributions) .

3- استعمال طرائق اخرى للتقدير مثل طريقتي بيز والعزوم ومقارنتها بطريقة تقدير الامكان الأعظم MLEE التي اعتمدها الباحث في بحثه.

4- في التطبيق العملي وتحديداً في الجانب الصناعي والهندسي الذي طبق فيه البحث فإنه يمكن أستبدال توزيع بواسون المبتور ذو المعلمة λ التي تمثل معدل عدد العطلات للمكانن المستعملة بتوزيعات متسلسلة القوى الأخرى وكما يأتي:

أ- إذا كان الأهتمام منصباً على احتمال عطل الماكنة فإنه يمكن استعمال توزيع ثنائي الحدين المبتور عند الصفر وفي هذه الحالة سوف تمثل المعلمة λ احتمال العطل وأن قيمتها ستقع ضمن الفترة $0 < \lambda < 1$ وسيكون أسم التوزيع المقترح ليندلي-رايلي المقطوع ثنائي الحدين The SLRB (Slash Lindley-Rayleigh Binomial) .

ب- إذا كان الأهتمام منصباً على احتمال الحصول على أول عطل الماكنة فإنه يمكن استعمال التوزيع الهندسي المبتور عند الصفر وفي هذه الحالة سوف تمثل المعلمة λ احتمال الحصول على أول عطل وأن قيمتها ستقع ضمن الفترة $0 < \lambda < 1$ وسيكون أسم التوزيع المقترح ليندلي-رايلي المقطوع الهندسي SLRG (The Slash Lindley-Rayleigh Geometric) .

ج- إذا كان الأهتمام منصباً على احتمال الحصول على عدد محدد من عطلات الماكنة فإنه يمكن استعمال توزيع ثنائي الحدين السالب المبتور عند الصفر وفي هذه الحالة سوف تمثل المعلمة λ احتمال الحصول على عدد محدد من العطلات وأن قيمتها ستقع ضمن الفترة $0 < \lambda < 1$ وسيكون أسم التوزيع المقترح في هذه الحالة ليندلي-رايلي المقطوع ثنائي الحدين السالب The SLRNB (Slash Lindley-Rayleigh Negative Binomial) .

5- فضلاً عن امكانية تطبيق التوزيعين المقترحين $SLR(\alpha, \theta, q)$ و $SLRPS(\alpha, \theta, q, \lambda)$ في المجالات الصناعية والهندسية، فأن الباحث يوصي المؤسسات الصحية ذات الاختصاص التابعة لوزارة الصحة العراقية باستعمالها وتطبيقها في المجالات الصحية والطبية وعلى سبيل المثال:

أ- تقدير ومعرفة وقت البقاء ودالة البقاء *The Survival Function* لمرضى السرطان او تطبيقه على وقت الهدأة لمرضى السرطان *Cancer Remission* (هدأة السرطان تعني اختفاء نسبة كبيرة من علامات واعراض السرطان او توقف نشاطه لمدة معينة ولا تعني الشفاء التام من مرض السرطان) ، ومن الممكن هنا أن نعدّ المعلمة λ تمثل معدل عدد الأنتكاسات *The Relapses* التي يتعرض لها مريض السرطان (الأنتكاسة تعني عودة المرض بعد الشفاء) ، او أن λ تمثل احتمال حدوث الأنتكاسة وحسب ماتم ذكره في الجانب الصناعي أنفاً.

ب- تقدير ومعرفة وقت البقاء على قيد الحياة ودالة البقاء *The Survival Function* للمرضى المصابين بمرض covid-19 ومن الممكن هنا أن نعدّ المعلمة λ تمثل معدل عدد الأنتكاسات *The Relapses* التي يتعرض لها مريض covid-19 (الأنتكاسة تعني عودة النشاط للفايروس بعد الحصول على الشفاء) ، او أن λ تمثل احتمال حدوث الأنتكاسة وحسب ماتم ذكره في الجانب الصناعي أنفاً .

6- بناءً على ما تم عرضه من توصيات تخص المجالات الصناعية والهندسية يوصي الباحث باعتماد نتائج الدراسة لدى جهة مصدر البيانات (معمل السجاد العراقي في بغداد / الشركة العامة للصناعات الصوفية التابع للشركة العامة للصناعات النسيجية والجلدية / وزارة الصناعة والمعادن) وأستعمال التوزيعين المقترحين *SLR, SLRP* في معرفة وقت الحياة (الأشتغال) او وقت الفشل ودوال المعولية للمكائن سواء أكانت منفردة ام موصولة على شكل أنظمة ربط معينة. ونوصي كذلك هنا ان المعدلات الاسبوعية لاقوات الاشتغال القليلة في بعض الاحيان تحتم على المعمل الاهتمام اكثر بعمليات الصيانة والادامة لرفع مستوى المعولية.

المصادر

References

اولاً: المصادر العربية

1- المشهداني، محمود حسن، هرمز، امير حنا ، الاحصاء،1980، جامعة بغداد، بيت الحكمة.

ثانياً : المصادر الأجنبية

- [2] Afaq A., Shervin P .A.,and Ahmed A.(2014), "Transmuted Inverse Rayleigh Distribution :A Generalization of The Inverse Rayleigh Distribution", *Mathematical Theory and Modeling* ,Vol.4(7), pp.90-98.
- [3] Akaike H. (1974), A new look at the statistical model identification. *IEEE Trans Autom Control* 19:716-723
- [4] Akber A., Nadarajah S., and Fateme S.(2018),"Weibull Lindley Distribution" ,*REVSTAT-Statistical Journal*,Vol.16(1), pp.87-113 .
- [5] Ali A. G.,Mustafa C. K.,and Coshkun K.(2014),"The Beta Moyal – Slash Distribution", *Journal of Selcuk University Natural and Applied Science Online ISSN 2147-3781*,Vol.3(4).pp.88- 104.
- [6] Ali I. G.(2013),"A Skew Extension of the Slash Distribution Via Beta-Normal Distribution", *Statistical Papers*,Springer,Vol.54(2) , pp.427-442.
- [7] Alice L.M.,and Wagner B.S.(2011),"A Compound Class of Weibull and Power Series Distribution", *Computational Statistics & Data Analysis* 55 ,pp. 1410-1425.
- [8] Asmussen S-R.(2003),"Steady- State Properties of GI/G/1", *Applied Probability and Queues. Part of Stochastic Modelling and Applied Probability* ,Vol.51,pp.266-301.
- [9] Bakouch H.S.,Bander M.A.,Al-Shomrani A.A., Marchi V.A.A., and Louzada F.,(2012) ,"An Extended Lindley Distribution ",*Journal of the Korean Statistical Society*,Vol.41, pp.75-85.
- [10] Bhati D.,Malik M.A., and Vaman H.J.(2015),"Lindley-Exponential Distribution: Properties and Appliction",*Metron*,Vol.73,pp.335-357
- [11] Boikanyo M.,Morongwa G.,Fastel C.,and Broderick O (2021),"A New Lindley-Burr XII Power Series Distribution:Model, Properties and Applications", *Heliyon*,Vol.7, e 07146 .
- [12] Boikanyo M.,Thatayaone M.,and Broderick O.(2021),"A New Generalized Lindley-Weibul 1 Class of Distributions: Theory, Properties and Applications", *Mathematica Slovaca*,Vol.71(1), pp.211-234.
- [13] Broderick O., Precious M., Boikanyo M., and Shujiao H.(2018), "The Burr-Weibull Power Series Class of Distributions", *Austrian Journal of Statistics*,Vol.48(1),pp.1-13 .

- [14] Cakmakyapan S.,and Ozel G.(2017),"The Lindley Family of Distributions :Properties and Applicatios, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics,Vol.46,pp.1113-1137.
- [15] Charles M.G. and Claudia K.(1998),"Sub exponential Distributions" , in A Practical Guide to Heavy Tails: Statistical Techniques and Applications .Birkhauser,Boston,pp.435-459.
- [16] Chaudhry M.A. and Zubair S.M.(1994),"Generalized Incomplete Gamma Functions With Applications, Journal of Computational and Applied Mathematics,Vol.55,pp.99-124.
- [17] Chistyakov V.P.(1964),"A Theorem on Sums of Independent Positive Random Variables and Its Applications to Branching Random Processes", Theory of Probability and Its Applications Vol.9(4), pp.640-648.
- [18] Feng C.,Wang H.,Yun Z.,Yu H.,Yue feng L.,and Xin M.T.(2017) "Generalized Definition of The Geometric Mean of a Non- Negative Random Variable", Communications In Statistics- Theory and Methods,Vol.46(7),pp.3614-3620.
- [19] Filidor V.,Diego G.,Hector G.G.,and Jimmy G.(2017),"Modified Slash Birnbaum-Saunders Distribution. Hacettepe ,Journal of Mathematics and Statistics,Vol.46(112),pp.969-984
- [20] Frank J.F, Sergio M.F, Svetlozar T.R and Bala G.A, (2014), "Model Selection Criterion: AIC and BIC", John Wiley & Sons, Inc. Published by John Wiley & Sons, Inc.
- [21] Frans K., and Sollie M.(2017)"Beta Slashed Generalized Half – Normal Distribution ,South Africa Journal,Vol.51,pp. 329-343 .
- [22] Gayan W. L.,and Mavis P.(2015),"The Lindley Power Series Class of Distributions :Model, Properties and Applications" , Journal of Computations and Modelling,Vol.5(3),pp.35-80.
- [23] Ghitany M.E.,Atieh B.,and Nadarajah S.(2008), "Lindley Distribution and Its Application", Math. Compu. Simul.,Vol.78, pp.493-506.
- [24] Gomez H.W., Quintana F.A., and Torres F.J.(2007),"A New Family of Slash-Distributions With Elliptical Contours", Stat. Probab. Lett. ,Vol.77 , pp.717-725.
- [25] Gomez H.W.,Venegas O.(2008),Erratum to:" A New Family of Slash-Distributions With Elliptical Contours",Stat.Probab. Lett. ,Vol.77 (2007) , pp.717-725. Stat. Probab. Lett. 78,2273=2274.

- [26] Hugo S.S.,Yuri A.I. ,and Heleno B.,(2015),"Slashed Exponentiated Rayleigh Distribution", Revista Colombiana de Estadística, Vol. 38(2) , pp.453-466.
- [27] Huihui L.,and Weizhong T.(2020),"Slashed Lomax Distribution and Regression Model",Symmetry,MDPI,Vol.12, pp.01877.
- [28] Inmaculada B-C.,Yuri A.I.,Yolanda M. G., Juan M.A ,and Hector W.G.(2021),"A Generalized Rayleigh Family of Distributions Based on The Modified Slash Model", Symmetry,Vol.13(7),pp.1226 .
- [29] Jimmy R., Osvaldo V., and Hector W.G.(2017)," Modified Slash Lindley Distribution", Journal of Probability and Statistics, Vol.3, pp.1-9.
- [30] Jorda P.(2010),"Computer Generation of Random Variables With Lindley or Poisson-Lindley Distribution Via The Lambert W Function" , Math. Comput. Simul., Vol. 81,pp.851-859 .
- [31] Karl S.(1999),"Appendix:A Primer on Heavy-Tailed Distributions", Queueing Vol.33(1), pp .261-275.
- [32] Lindley D.V.(1958),"Fiducial Distributions and Bayes Theorem" ,J Roy Statist. Soc Ser B20, pp.102-107.
- [33] Mario D., S. Nurrohmah, and Mila N.(2021),"Lindley-Exponential Slash Distribution", Journal of Physics; Conference Series , Vol. 1725 /1 / 012093 .
- [34] Marshall A.W., Olkin I.(1997),"A new method for adding a parameter to a family of distributions with application to the exponential and Weibull families" , Biometrika , Vol. 84 pp. 641-652.
- [35] Maya R. and Irshad M.R.(2017) ,"New Extended Generalized Lindley Distribution: Properties and Applications, Statistica; Bologna, Vol. 77, 33-52.
- [36] Merovci F.and Elbatal I.(2015), "Weibull Rayleigh Distribution: Theory and Applications", Applied Mathematics and Information Sciences , Vol.9 (4) , pp.2127-2137.
- [37]NevekaM.O.,OsvaldoV.,YolandaM.G., and Yuri A.I.(2020),"Confluent Hypergeometric Slashed-Rayleigh Distribution: Properties, Estimation and Applications" , Journal of Computational Mathematics, Vol. 368, pp.1125-1148.
- [38] Olmos N.M., Varela H., Bolfarine H., and Gomez H.W.(2014), "An Extension of The Generalized Half-Normal Distribution" Papers, pp. 967-981.

- [39] Rashid A., Jan T.R., Bhat A.H., and Ahmad Z.,(2018),"A New Compound Lifetime Distribution: Model, Characterization, Estimation and Application,JAMSI,Vol.14(2),pp.45-57.
- [40] Rodrigo B.S., Marcelo B. ,Cicero R.B.D. ,and Gass .C.,(2013),"The Compound Class of Extended Weibull Power Series Distribution", Computational Statistics & Data Analysis,Vol.58,pp. 352-367.
- [41] Said H.A.(2018),"Generalized Lindley Power Series Family of Distributions" ,Advanced and Applications In Statistics, Vol. 53(5), pp.537-567 .
- [42] Sandeep K.M., Dinesh K., Pradip K., Sanjay K.S., and Umesh S. (2020), "A New Extension of Lindley Distribution and its Application", Journal of Scientific Research,Vol.64(2),pp.366-373
- [43] Schwarz G (1978), Estimating the dimension of a model. Ann Stat 6:461-464
- [44] Selen C. and Gomez O.(2018),"Lindley-Rayleigh Distribution With Application To Lifetime Data" ,Journal of Reliability and Statistical Studies ,Vol.11,pp.9-24
- [45] Sergey F., Dmitry K., and Stanley Z.(2013),"An Introduction to Heavy-Tailed and Sub exponential Distributions", Springer Series in Operations Research and Financial Engineering, 2nd ed., New York
- [46] Shaw W. and Buckley I. (2007),"The alchemy of probability distributions" , beyond Gram-Charlier expansions, and a skew-kurtotic –normal distribution from a rank, transmutation map. IMA, Primera Conferencia, sobre,Finanzas Computacionales, Cornell University, arXiv: 0901. 0434.
- [47] Sidney I.R.,(2007),"Heavy-Tail Phenomena :Probabilistic and statistical Modeling", Springer Series in Operations Research and Financial Engineering, New York..
- [48] Sukru A., Talha A., and Birdal S.,(2020),"Slash Maxwell Distribution: Definition, Modified Maximum Likelihood Estimation and Applications", GU J Sci, Vol. 33(1), pp.249-263.
- [49] Yuri A. I., Hector W.G., Hector V., and Heleno B.,(2015),"Slashed Rayleigh Distribution", Revista Colombiana de Estadística,Vol. 38(1), pp. 31-44.
- [50]Zografos K.,Balakrishnan N., (2009),"On families of beta-and generalized gamma-generated distributions and associated inference . Statistical methodology,6, no. 4,pp.344-362.

Abstract

Most of the probability distributions families Lindley-G (LG) where G denotes to the generator distribution and more specifically, the Lindley-Rayleigh (LR) lifetime distribution were suggested for the sake of increasing the flexibility of Lindley distribution by adding another parameter, in spite of that, the right side tail of the LR distribution is not heavy enough to conciliate and fit data that exhibit high kurtosis and outlying values, namely, those which concern with lifetime data such as, the analysis of reliability and survival. In addition to the above-mentioned, there are certain probability distributions fail to fit and hence predict more accurate when they meet a certain data for which its hazard rate functions exhibit a various patterns. A new lifetime distribution has been proposed with two proposals to deal with and overcome these problems and limitations, the first one will be called the Slash Lindley-Rayleigh ("SLR" for short) distribution with three parameters $SLR(\alpha, \theta, q)$, where it has been founded by using the transformation of variables technique, where most of the statistical and mathematical properties have been derived and studied, besides to find the maximum likelihood estimation MLE for its three parameters which did not appear in the closed form. The researcher work to study the effect of the observations number N (namely, it means a machine or a system breakdowns number) on the reliability function of SLR distribution by assuming that N is a discrete random variable follows one of the power series distributions which is truncated at the point zero (zero truncated distributions) with the parameter λ which will represent mean of the breakdowns number or the breakdowns probability according to PS distribution (Poisson, Geometric, Logarithmic, Binomial, and Negative Binomial). And for studying and knowing that effect, an extended distribution has been suggested to represent the second proposed distribution which will be called the Slash Lindley-Rayleigh and Power Series ("SLRPS" for short) distribution in four parameters $(\alpha, \theta, q, \lambda)$,

distribution. $SLRPS(\alpha, \theta, q, \lambda)$ distribution has been obtained by using the compounding distributions technique between the SLR distribution and the PS distribution, where some of its statistical characteristics have been derived, furthermore, the maximum likelihood estimates MLE for its parameters have been founded.

Via results of the empirical side which represented by Monte Carlo simulation technique and results of the practical side which are representing by the real data, namely, it represent the weakly averages of lifetimes measured in hours for four machines three of them represent the weaving machines and the other one represents the completion machine with sample size $n=75$ lifetimes for each machine taken from The General Company Of Textile Industries/The Iraqi Carpet Factory /Iraq- Baghdad, note that the first and second weaving machines are connected according to the series system, and the third weaving machine and the completion machine (the fourth machine) are connected according to the parallel system. And by depending on statistical indices and different comparison criteria such as (AMSE.RAMSE, AIC, BIC), the researcher reach to that the two proposed distributions show a preference and more flexibility in fitting and modeling data with high or excess kurtosis compared with the original distributions (Lindley, Rayleigh, Lindley- Rayleigh) concerned with estimation of the parameters and the reliability function, and these results have been obtained and implemented via writing a special program by using R- language.

Republic of Iraq
Ministry of Higher Education
And Scientific Research
University of Karbala
College of Administration
And Economics
Department of Statistics
Graduate Studies



A New Lifetime Distribution Slash Lindley – Rayleigh and Power Series

A Dissertation
Submitted to the Council of College
of Administration and Economics /
University of Karbala as Partial fulfillment of the
Requirements for Degree of Philosophy
Doctorate in Statistics

By
Adel Abboud Najm

Supervision
Prof. Dr. Mahdi Wahab Nea'ama

2022 A.D.

1444 A.H.