جامعــة كربـلاء

كليــة الإدارة والإقتصـاد

قســم الإحصــاء

التقدير البيزي لمعلمات توزيع Consul Kumaraswamy في ظل دالة خسارة تربيعية ودالة خسارة انتروبي عامة

(دراسة تطبيقية)

رسـالة مقدمـة إلى مجلس كلية الإدارة والاقتصـاد في جامعة كربلاء وهي جزء من متطلبات نيل درجة الماجستير في علوم الإحصـــاء

تقدمت بها الطالبة

نور عامر حرب البزوني

بإشراف الأستاذ الدكتور

عواد كاظم شعلان الخالدي

1444 هـ

2022 م

بسم الله الرحمن الرحيم

﴿ نَرْفَعُ دَرَجَاتٍ مَّن نَّشَاءُ ۗ وَفَوْقَ كُلِّ ذِي عِلْمٍ عَلِيمٌ ﴾

صدق الله العلي العظيم

يوسف : 76

إقرار المشرف

أشهد بأن إعداد هذه الرسالة الموسومة (التقدير البيزي لمعلمات توزيع Consul Kumaraswamy في ظل دالة خسارة تربيعية ودالة خسارة انتروبي عامة(دراسة تطبيقية)) والتي تقدمت بها الطالبة **" نور عامر حرب البزوني"** قد جرى بإشرافي في قسم الاحصاء - كلية الادارة والاقتصاد - جامعة كربلاء، وهي جزء من متطلبات نيل درجة ماجستير علوم في الاحصاء.

أ.د. عواد كاظم شعلان الخالدي

التاريخ: / / 2022

توصية رئيس قسم الاحصاء

بناءً على توصية الاستاذ المشرف، أرشح الرسالة للمناقشة.

أ.د. شروق عبد الرضا السباح

رئيس قسم الاحصاء

التاريخ: / / 2022

إقرار الخبير اللغوي

أشــهد أن الرســالة الموســومة بـــ(**التقـدير البيـزي لمعلمـات توزيـع Consul Kumaraswamy فـي ظل دالـة خسـارة تربيعيـة ودالـة خسـارة انتروبـي عامة (دراسة تطبيقية)**) والتي تقدمت بها الطالبة "نور عامر حرب البزونـي" فـي قسم الاحصـاء كليـة الادارة والاقتصـاد قد جرى مراجعتهـا مـن الناحيـة اللغويـة حتـى أصبحت خالية من الاخطاء اللغوية ولأجله وقعت.

الخبير اللغوي

م. صلاح مهدي جابر

جامعة كربلاء – كلية الادارة والاقتصاد

إقرار لجنة المناقشة

نشهد نحن أعضاء لجنة المناقشة بأننا قد اطلعنا على الرسالة الموسومة (التقدير البيزي لمعلومات توزيع Consul Kumaraswamy في ظل دالة خسارة تربيعية ودالة خسارة انتروبي عامة (دراسة تطبيقية)) والمقدمة من قبل الطالبة **"نور عامر حرب البزوني"** وناقشنا الطالبة في محتوياتها وفيما له علاقة بها , ووجدنا بأنها جديرة بنيل درجة ماجستير علوم في الإحصاء بتقدير (امتياز)

أ.م.د نجاح رسول داخل	أ.م.د مشتاق كريم عبد الرحيم
عضوا	عضوا
/ /2022	/ / 2022
أ.د عواد كاظم شعلان الخالدي	أ.د قتيبة نبيل نايف
عضوا ومشرفا	رئيسا
/ /2022	١٥/ ١١/ 2022

إقرار رئيس لجنة الدراسات العليا

بناء على اقرار المشرف العلمي والخبير اللغوي على رسالة الماجستير للطالب نور عامر حرب البزوني " الموسومة بـ (التقدير البيزي لمعلمات توزيع Consul Kumaraswamy في ظل دالة خسارة تربيعية ودالة خسارة انتروبي عامة(دراسة تطبيقية)) ارشح هذه الرسالة للمناقشة.

أ.د محمد حسين كاظم الجبوري

رئيس لجنة الدراســـــات العليا

معاون العميد للشؤون العلمية والدراسات العليا

مصادقة مجلس الكلية

صادق مجلس كلية الادارة والاقتصاد/ جامعة كربلاء على قرار لجنة المناقشة.

أ.د.محمد حسين كاظم الجبوري

عميد كلية الادارة والاقتصاد- جامعة كربلاء

2022 /   /

الاهداء

إلى مَنْ علمنا السلام ومعنى الإسلام ، نبي الرحمة والنور المرشد في ظلمات الحياة ، النبي محمد المصطفى (صلى الله عليه وآله)

الى الغائب عن ناظرنا الحاضر في قلوبنا ، مَنْ نتشوق للقائه المهدي المنتظر (عليه السلام)

إلى ذلك الرجل الذي لن يكررهُ الزمان ، الذي اعطاني الحافز والدافع لأصل الى ما انا عليه اليوم ، ابي الذي افخر بوجودِهِ دائماً

إلى مَنْ تجسد فيها معنى الحب والعطاء ، من انقذتني دعواتها من محطات الفشل ، القلب الذي آمن بأحلامي ، امي العزيزة

إلى النجوم التي تنير سماء حياتي اخوتي احبائي ، و ذلك النجم الغائب الذي فارقنا قبل ان يشهد هذا النجاح اخي الشهيد

إلى مثال العلم والتواضع ، معلمي القدير ، الذي منذ ان رأيته قلت في نفسي سأتبع خطاه العلمية ما حييت البرفسور الدكتور عواد الخالدي

إلى رفقة الطريق والنجاح ، من حققتُ معهم اجمل الأهداف والاحلام ، زميلاتي العزيزات

أُهدي ثمرة جهدي ...

نور عامر

شكر وتقدير

وأنا انهي رحلتي مع هذه الرسالة لا يسعني الا ان أتقدم بجزيل الشكر والتقدير والوفاء الكبير والعرفان بالجميل لمن طوقني بجميلهِ أستاذي الفاضل الأستاذ الدكتور عواد كاظم شعلان الخالدي أطال لنا الله عمره لما أبداه من توجيهات سديدة ومعلومات مفيدة وكثيرة أثرت هذه الرسالة وقومت جهدي، اشكره لصبره الجميل علي، اشكره لرعايته الأبوية، اشكره لرقته وحنانه جزاه الله عني وعن كل إحصائي ألف خير

كما اتقدم بشكري الجزيل للأساتيذ الفضلاء في لجنة المناقشة الذين تفضلوا بقبولهم مناقشة رسالتي هذه ،وعلى كل ملاحظة والتي لاشك ان هدفها هو اغناء الرسالة بالنصائح العلمية.

كما اشكر اساتذتي الفضلاء في قسم الاحصاء (جامعة كربلاء) وكذلك اشكر سكرتارية قسم الاحصاء وموظفي مكتبة كلية الادارة والاقتصاد.

وكذلك اتقدم بشكري الجزيل لأفراد اسرتي والدي ووالدتي الذين لم يبخلوا علي بدعم مادي او معنوي وكذلك اتقدم بالشكر لجميع زملائي طلبة الدراسات العليا و لما قدموا لي من مساعدة

ومن الله التوفيق

الباحثة

قائمة الجداول

قائمة الاشكال

قائمة الرموز

الرمز	المصطلح باللغة العربية
CD	توزيع القنصل
KCD	توزيع كوماراسوامي
CKSD	توزيع القنصل كوماراسوامي
S(t)	دالة البقاء
h(t)	دالة المخاطرة
$f(x; m, \alpha, \beta)$	دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع القنصل كوماراسوامي ذي الثلاث معلمات
$F(x; m, \alpha, \beta)$	الدالة التراكمية لتوزيع القنصل كوماراسوامي
SBSEL	مقدر بيز القياسي في ظل دالة خسارة تربيعية
SBEL	مقدر بيز القياسي في ضل دالة خسارة انتروبي عامة
EBSEL	مقدر توقع بيز في ظل دالة خسارة تربيعية
EBEL	مقدر توقع بيز في ظل دالة خسارة انتروبي عامة
AIC	معيار اكيكي المعلوماتي
AICc	معيار اكيكي المصحح او المتسق
BIC	معيار بيز اكيكي
HQIC	معيار حنان كوين المعلوماتي
IMSE	متوسط مربعات الخطأ التكاملي
BES	افضل مقدر
IKUM	توزيع معكوس كوماراسوامي
GE	دالة انتروبي عامة
LINEX	دالة خسارة اسية خطية

المستخلص Abstract

تم في هذه الرسالة استعمال الطرائق البيزية المتمثلة بطريقة بيز القياسي المعلوماتي (Standard Informative Bayesian method) وطريقة توقع بيز (Expected Bayesian method) لإيجاد مقدرات ودالة البقاء للتوزيع المركب القنصل كوماراسوامي (Consul kumaraswamy dist.) (CKSD) ذي الثلاث معلمات (m, α, β) وذلك ضمن دالة خسارة متماثلة تدعى بدالة الخسارة التربيعية (Squared Error Loss function) وغير متماثلة تدعى بدالة خسارة انتروبي عامة (General Entropy Loss Function) ، تمثلت مشكلة الرسالة بعدم وجود تقدير لمعلمات توزيع القنصل كوماراسوامي ذي الثلاث معلمات في ظل التقدير البيزي .

كما تم استعمال الأسلوب التقريبي الذي اقترحه الباحثLindley والذي يدعى بأسلوب تقريب ليندلي (Lindley Approximation) وأسلوب اخر يدعى بأسلوب جيفري (Jeffry) لحل المعادلات الناتجة عن طرائق التقدير، والمقارنة بين الاسلوبين لمعرفة ايهما أدق في حل المعادلات غير الخطية والتي لا يمكن حلها باستعمال أساليب التحليل العددي ، من خلال توظيف أسلوب محاكاة مونت كارلو (Monte Carlo) باستعمال برنامج الماتلاب (MATLAB) وذلك بأجراء عدة تجارب بأحجام عينات مختلفة صغيرة (10، 20) ومتوسطة (30,40) وكبيرة (50) وعن طريق المعيار الاحصائي متوسط مربعات الخطأ التكاملي IMSE . أظهرت النتائج افضلية طريقة توقع بيز في ظل دالة خسارة انتروبي عامة عند تقريب ليندلي على باقي طرائق التقدير ، فضلا عن تفوق تقريب ليندلي على تقريب جيفري بنسبة افضلية بلغت 36% ولتجارب المحاكاة كافة و لتطبيق توزيع القنصل كوماراسوامي على ارض الواقع تم سحب عينه بحجم 50 مفرده تمثل مده بقاء المرضى المصابين بمرض القلب الاقفاري (الاسكيمية) في مشفى الحسين التعليمي في محافظة كربلاء المقدسة وعن طريق اختبار حسن المطابقة فقد تم اثبات افضلية توزيع القنصل كوماراسوامي في تمثيل ووصف هذه البيانات مقارنة بتوزيع القنصل وتوزيع كومارسوامي وكذلك تم تقدير داله البقاء للبيانات الحقيقية باستعمال طرائق التقدير التي تم تطبيقها في الجانب التجريبي وكانت المعلمات المقدرة للبيانات الحقيقية لتوزيع القنصل كومارسوامي اكثر اقترابا للمعلمات الافتراضية في الجانب التجريبي أي ان طريقة مقدر توقع بيز في ظل دالة خسارة انتروبي عامة هي افضل من باقي الطرائق عند تطبيقها للبيانات الحقيقية كما ان القيم المقدرة لدالة البقاء بموجب طريقة توقع بيز في ظل دالة خسارة انتروبي عامة افضل من باقي الطرائق البيزية كونها اكثر اقتراب لدالة البقاء الحقيقية .

الفصل الأول

منهجية الدراسة

1-1 المقدمة Introduction :

يهتم علم الإحصاء بدراسة الظواهر الطبيعية وكذلك الحوادث النادرة ذات السلوك العشوائي في مختلف جوانب الحياة ولتفسير تلك الظواهر يجب علينا معرفة الدالة الاحتمالية (Probability Distribution) التي تتبعها ، اذ يحتوي هذا العلم على العديد من الطرائق والأساليب الإحصائية لتقدير تلك المعلمات ومعرفة سلوكها منها تمثلت في المدرسة البيزية والمدرسة الكلاسيكية حيث تعد المدرسة البيزية اكثر تطورا ودقة من طرائق المدرسة الكلاسيكية (المربعات الصغرى MSE ، الإمكان الأعظم MLE .... الخ)كما وتميزت بمفهومها واساسيات عملها على توظيف المعلمات السابقة او الأولية ان وجدت عن المعلمة المراد تقديرها إذ تُعد هذه المعلمة متغيراً عشوائياً له توزيع احتمالي اولي وهذا على عكس المدرسة الكلاسيكية (Classical school) والتي تفترض ان المعلمات ثوابت يراد تقديرها فضلا عن تقدير المعلمات هنالك سلوك اخر لعلم الإحصاء وهو معرفة او دراسة ازمنة البقاء لفرد معين او كائن حي وما الى ذلك فيُعد تحليل ازمنة البقاء من الأمور المهمة للغاية في بعض العلوم التطبيقية .

في هذه الرسالة تمت دراسة توزيع القنصل كوماراسوامي (Consul Kumaraswamy dist.) ذي الثلاث معلمات اذ يتم تقدير معلماته باستعمال الطرائق البيزية وهي طريقة مقدر بيز القياسي المعلوماتي (Informative Standard Baysain) ومقدر توقع بيز (Expectation Bayesian)ضمن نوعين من دوال الخسارة متماثلة و تعرف بدالة الخسارة التربيعية (Squared Error Loss function)وغير متماثلة تعرف بدالة خسارة الانتروبي العامة (General Entropy Loss Function) من ثم ايجاد دالة البقاء للتوزيع آنفاً ،هذا فضلا عن المعادلات غير الخطية والتي لا تحل بالطرائق الاعتيادية تم حلها بطريقتين وهما تقريب ليندلي وطريقة جيفري والمقارنة بينهما .

ولتحقيق اهداف الرسالة قسمت الى خمسة فصول :

الأول تضمن المقدمة ومشكلة الرسالة والهدف منها والاستعراض المرجعي للدراسات السابقة ذات العلاقة بعنوان الرسالة اما الثاني والذي يمثل الجانب النظري تضمن مبحثين فالأول يوضح توزيع القنصل كوماراسوامي CKSD وخصائصه اما الثاني فيشمل دالة البقاء Survival function وبعض الخواص والدوال المرتبطة بها وشرح مفهوم النظرية البيزية وطرائق التقدير المستعملة في هذه الرسالة ،بينما تمثل الفصل الثالث في الجانب التجريبي لهذه الرسالة والذي تم فيه استعمال أسلوب المحاكاة وتوليد الأرقام العشوائية إذ تمت المقارنة بين طرائق التقدير المستعملة في إيجاد مقدرات توزيع القنصل كوماراسوامي ودالة البقاء باستعمال المعيار الاحصائي متوسط مربعات الخطأ التكاملي IMSE ، في حين تضمن الرابع الجانب التطبيقي إذ تم استعمال بيانات حقيقية بحجم (50) والتي

تم الحصول عليها من مشفى الحسين التعليمي في محافظة كربلاء المقدسة والتي تمثل (أوقات البقاء حتى الوفاة بسبب امراض القلب الاقفارية(الاسكيمية)) وتطبيقها على الطرائق المذكورة في الجانب التجريبي ومن ثم المقارنة بين الجانب التجريبي والتطبيقي لمعرفة فيما اذا كانت النتائج التي تم الحصول عليها متقاربة ام لا ، تمثل الجزء الأخير لهذه الرسالة في الفصل الخامس والذي يشمل اهم الاستنتاجات التي حصلنا عليها من الفصول السابقة والتوصيات التي ينبغي اتباعها من قبل بعض الدراسات المماثلة .

1-2 مشكلة الرسالة Thesis problem:

تمــثلت مشكلة الرسالة بعدم وجود تقدير لمعلمات توزيع القنصل كومارسوامي ذي الثلاث معلمات في ظل التقدير البيزي كما نلاحظ وجود القليل من الدراسات التي تهتم بدراسة مرض القلب الاقفاري والذي يعد من الامراض المهمة التي تهدد الحياة البشرية .

1-3 هدف الرسالة Research objectives :

هدفت الرسالة الى

1- تقدير معلمات توزيع القنصل كوماراسوامي (Consul Kumaraswamy dist.) الثلاثة (m,α,β) وذلك باستعمال طريقة تقدير بيز القياسي المعلوماتي وطريقة تقدير توقع بيز في ظل دالة خسارة تربيعية ودالة خسارة انتروبي عامة .
2- تقدير دالة البقاء لتوزيع القنصل كوماراسوامي (Consul Kumaraswamy dist.) لمعرفة وقت بقاء المريض المصاب بمرض القلب الاقفاري لغاية الوفاة
3- تحديد أي الطريقتين افضل في حل التكاملات المعقدة والمعادلات غير الخطية من خلال تطبيق تقريب ليندلي وطريقة جيفري.

1-4 الاستعراض المرجعي Literature review :

يشمل عرضاً لأهم الدراسات والبحوث الإحصائية السابقة ذات العلاقة بموضوع الرسالة والمتعلقة بتوزيع القنصل كوماراسوامي تقدير المعلمات ودالة البقاء باستعمال الطرائق البيزية

فمنذ خمســـــــــينات القرن العشرين تم التطرق الى دراسة دوال البقاء وتحليلـــــها ومع التطور الحاصل في التكنلوجيا الواسع لجأ الباحثون الى دراسة دوال البقاء ومعرفة أوقات الفشل علماً ان لهذه الأوقات توزيعات معلمية معينة وكما يأتي :

*في عام 1980 قدم Poondi Kumaraswamy [29] توزيعاً يحتوي على معلمتين اطلق علية اسم توزيع Kumaraswamy كما درس خصائصه وعلاقته بتوزيعات أوقات الحياة الأخرى .

*عام 1988 قام الباحثان Sloon و Sinha [36] بتقدير المعالم ودالة البقاء لتوزيع ويبل بطريقة بيز وطريقة الإمكان الأعظم وتبيــن ان مقدرات بيز للمعالم ودالة المعولية تمتلك تباينا لاحقاً Posterior Variance اصغر من التباين المحاذي Asymptotic Variance لمقدرات الإمكان الأعظم وتم التحقق من هذه النتائج بإعطاء امثلة متعددة .

*في عام 1991 قدم كل من Islam و Consul [22] توزيعاً ذي معلمتين يدعى بتوزيع القنصل Consul dist. كإنموذج تجميع في تدفق حركة المرور عن طريق عملية التفريع وكذلك في عملية الولادة والوفاة .

*وفي عام 1993 تمكن الباحثان Ryan و Lye [27] وعن طريق استعمال أسلوب بيز التقريبي في الحصول على مقدرين لدالة البقاء وبفرض أنموذج للفشل يتبع توزيع القيم المتطرفة اذ أجريت مقارنة بين هذه المقدرات ومقدرات الإمكان الأعظم لدالة البقاء وتوصلا الى ان مقدر الإمكان الأعظم لدالة المعولية افضل من مقدري بيز .

*في عام 2002 قام الباحثان Hossain و Howlader [19] بتقدير المعلمات ودالة البقاء لتوزيع باريتو من النوع الثاني باستعمال طريقة بيز وحســـــــــب أسلوب ليندلي Lindley وأسلوب الباحثين Kadan and Tierney وقد توصل الباحث الى ان أسلوب ليندلي Lindley افضل من أسلوب الباحثين Kadan and Tierney في حالة حجم العينات صغيرة او متوسطة .

*في عام 2006 استعمل الباحث J . Franz [16] طريقة بيز ضمن ثلاث دوال خسارة وهي دالة خسارة تربيعية ودالة خسارة خطية ودالة الخسارة الاسية الخطية فضلاً عن طريقة الإمكان الأعظم لتقدير ملعمتي توزيع ويبل وتمت المقارنة بين الطرائق المذكورة باستعمال المحاكاة وعندها تبين ان المقدرات البيزية افضل من مقدر الإمكان الأعظم .

*في عام 2009 قام الباحث Jons [24] بدراسة خصائص توزيع Kumaraswamy الأساسية فضلاً عن اشارته لأوجه التشابه بين توزيع Kumaraswamy وتوزيع بيتا وذكر عدد من المزايا الأخرى .

*في عام 2010 قدم كل من Alina Constantinecsu وآخرين [31] بحثا بعنوان مقدر بيز لمعلمات توزيع Modified Weibull باستعمال تقريب ليندلي تم عن طريقه الحصول على تقديرات بيز لتوزيع ويبل المعدل وذلك باستعمال تقريب ليندلي في ظل دوال خسارة مختلفة ومن تجارب المحاكاة تمت المقارنة بين المقدرين باستعمال المعيار الاحصائي متوسط مربعات الخطأ MSE .

*في عام 2011 قام Baltasear Tranco′n [37] باقتراح توزيع Kumaraswamy Dist.كبديل لتوزيع Beta Dist. واثبت ان هنالك علاقة بين التوزيعات التي تم انشاؤها بواسطة

تحويل بسيط بين المتغيرات العشوائية التي تتبع توزيع Kumaraswamy وبعض المتغيرات العشوائية التي تتبع توزيع بيتا .

* في عام 2013 قدم الباحث Sindhu T.N واخرون [34] دراسة تركز على التقدير البيزي وغير البيزي لتقدير معلمة الشكل للتوزيع كوماراسوامي اذ تم الحصول على مقدر الإمكان الأعظم ومقدر بيز باستعمال دوال خسارة غير متماثلة ونظرا لصعوبة المقارنة التحليلية تم استعمال محاكاة مونت كارلو للمقارنة بين المقدرين فأثبتت النتائج تفوق طريقة التقدير البيزي على طريق التقدير الكلاسيكية المتمثلة بالإمكان الأعظم .

*في عام 2014 قدم كل من Sanjay Kumar Singh [35] وآخرين بحثاً لأجراء تقدير بيز لتوزيع ليندلي المعمم ذو المعلمتين ضمن دالة خسارة انتروبي عامة غير متماثلة وللحصول على مقدرات بيز تم اجراء محاكاة مونت كارلو من ثم توسع البحث ليشمل مشكلة التنبؤ البايزية بناء على عينة إعلامية إذ تم اجراء محاولة لاشتقاق أوقات التنبؤ .

*و في عام 2015 قام الباحثان Adil Rashed و Jan [32] ببناء توزيع احتمالي مركب ذي ثلاثة معلمات ناتج عن تركيب توزيع القنصل .Consul Dist مع توزيع كوماراسوامي .Kumaraswamy Dist اطلق عليه اسم .Consul Kumaraswamy Dist والذي يمكن ان يتداخل مع توزيعات مركبة مختلفة كما وتمت مناقشة بعض الخصائص الرياضية مثل المتوسط والتباين وغيرها من الخصائص فضلاً عن تقدير معلمات التوزيع المركب Consul Kumaraswamy Dist. باستعمال طريقة التقدير الاحتمالية Maximum likelihood estimation كما ويمكن استعمال هذا التوزيع في نمذجة مجموعة بيانات الحياة الحقيقية .

*وفي عام 2019 قامت الباحثة رقية رعد[8] باستعمال اربع طرائق لتقدير معلمات توزيع كوماراسوامي .Kumaraswamy Dist وهي طريقة الإمكان الأعظم وطريقة بيز وطريقة العزوم وطريقة العزوم الخطية وتمت المقارنة بين هذه الطرائق عن طريق استعمال برنامج الR لتصميم عدد من تجارب المحاكاة وذلك بأخذ قيم افتراضية للمعلمات وحجوم العينات (70,50,30,20,10) وبتكرار التجربة للحصول على تجانس عال وعن طريق المعيار الاحصائي متوسط مربعات الخطأ (MSE) تم التوصل الى ان افضل طريقة هي طريقة تقدير بيز فضلاً عن ذلك كان هنالك تطبيق عملي لبيانات اخذت من الشركة العامة للصناعات الكهربائية لتقدير دالة المعولية باستعمال افضل طريقة توصل اليها الباحث وهي طريقة بيز .

*وفي عام 2020 قام Mohamed Ibrahim وآخرين [20] في اختيار افضل طريقة تقدير لمعلمات الأنموذج الجديد One Parameter Double Lindley Model وذلك باستعمال

طريقة Bayesianو طريقة Ordinary least squares و طريقة Weighted least squares وطريقة Cramer-von-Mises فضلاً عن طريقة Maximum likelihood ، تمت مقارنة المقدرات التي تم الحصول عليها باستعمال محاكاة ماركوف تشين مونت كارلو إذ لاحظ الباحثين أن افضل طريقة وأكثرها كفاءة هي طريقة Bayes في تقدير المعلمات .

*وفي العام نفسه قدم الباحث ادهم محمد صاحب البياتي [1] رسالة بعنوان تقدير دالة البقاء لأنموذج احتمالي مختلط (الاسي – كاما من الرتبة الثانية) إذ تم تقدير دالة البقاء لحين الوفاة لعينة من المرضى المصابين بمرض الفشل الكلوي وذلك باستعمال اربع طرائق تقدير و هي طريقة بيز Bayesian وطريقة الإمكان الأعظم Maximum likelihood وطريقة العزوم Moment وطريقة المربعات الصغرى الموزونة Weighted least squares، وبالاعتماد على نتائج تجارب المحاكاة توصل الباحث الى افضلية استعمال طريقة المربعات الصغرى الموزونة في تقدير دالة البقاء لحجوم العينات (30,60,100)

*في عام 2021 قدم كل من Mohd. Arshad, Qazi J. Azhad, Neetu Gupta [15]بحثا لتقديم وجهه نظر بيز لتقدير توزيع وحدة جومبيرتز فلذلك تم اخذ طريقتي تقريب شائعتين وهي سلسلة ماركوف وطرائق تقريب مونت كارلو وليندلي ومن ثم تم اشتقاق النتائج ضمن دوال خسارة تربيعية ودالة خسارة اسية خطية فضلاً دالة خسارة انتروبي عامة و لأظهار الجوانب العملية للنتائج المشتقة تم حساب متوسط اطوال (فترات) الكثافة الأولية لα وβ و(t) R لمعامل ثقة مقداره %95 .

*وفي العام نفسه قدم الباحث كرم ناصر[5] رسالة بعنوان التقدير البيزي لدالة البقاء لتوزيع ليندلي ذو الثلاث معلمات مع تطبيق عملي ، ففي هذه الرسالة تم التركيز على الطرائق البيزية لأيجاد قيم المقدرات الخاصة بدالة البقاء وهي طريقة بيز القياسية المعلوماتية وطريقة توقع بيز وطريقة بيز الهرمي ،إذ أجريت الدراسة على عينة حقيقية بحجم (50) مشاهدة تمثل أوقات البقاء بالساعات تحت العلاج للمصابين بفيروس (COVD-19) وبالاعتماد على نتائج تجارب المحاكاة وباستعمال المعيار الاحصائي متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) كمعيار للمفاضلة اثبت ان مقدر توقع بيز في ظل دالة خسارة انتروبي عامة بالنسبة لحجوم العينات المتوسطة لتقدير دالة البقاء افضل من طرائق التقدير الأخرى .

لم تنل عائلة توزيع Kumaraswamy ذلك الاهتمام من ناحية تقدير معلماتها وهذا احد الأسباب التي دفعتنا الى تسليط الضوء على هذه العائلة وبالأخص التوزيع المركب Consul Kumaraswamy (CKSD) فعند البحث لم نجد هنالك بحثاً يهتم بتقدير معلمات توزيع القنصل كوماراسوامي تقديرا بيزياً كما لم نجد في الأبحاث السابقة من اهتم بدراسة دالة البقاء لهذا التوزيع لربما يعود السبب الى صعوبة وتعقيد الدالة الاحتمالية المركبة الخاصة به والى الوقت والجهد الذي يحتاجه الباحث لتقدير معلماته.

الفصل الثاني

الجانب النظري

المبحث الأول

2-1 توطئة

في هذا المبحث تم التطرق الى بعض المفاهيم الأساسية التي تساعد في فهم التوزيع الاحتمالي المركب ، وتشمل تعريف توزيع القنصل كوماراسوامي (CKSD) ذي الثلاث معلمات وشكله العام ومعرفة خصائصه .

2-2 توزيع القنصل كوماراسوامي (CKSD) [32]

2-2-1 توزيع القنصل Consul Dist. (CD)

تم تعديل توزيع القنصل الذي قدمه القنصل و شنتــون (1990) الذي اشتق منه كأنموذج تجميع في تدفق حركة المرور عن طريق عملية التفريغ وناقش أيضًا تطبيقاته على مطالبات التأمين على السيارات وبيانات حجم مجموعة المركبات ، افترض أن قائمة انتظار بدأت مع عضو واحد ولديها كثافة حركة مرور مع وصول ذي حدين ، يتم توفيره عن طريق دالة التوليد $g(t) = (1-p+pt)^m$ ووقت الخدمة المستمر .

الصيغة الرياضية لدالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع القنصل :

$$f(x;m,p)=\begin{cases}\frac{1}{x}\binom{mx}{x-1}p^{x-1}(q)^{mx-x+1} & ;\ 0<p<1\,;1\le m\le p^{-1}\,;x=1,2,\dots \\ 0 & otherwise\end{cases}\qquad (2-1)$$

والشكل 1 يمثل الدالة الاحتمالية لتوزيع القنصل عند قيم مختلفة للمعلمات (m,p) .

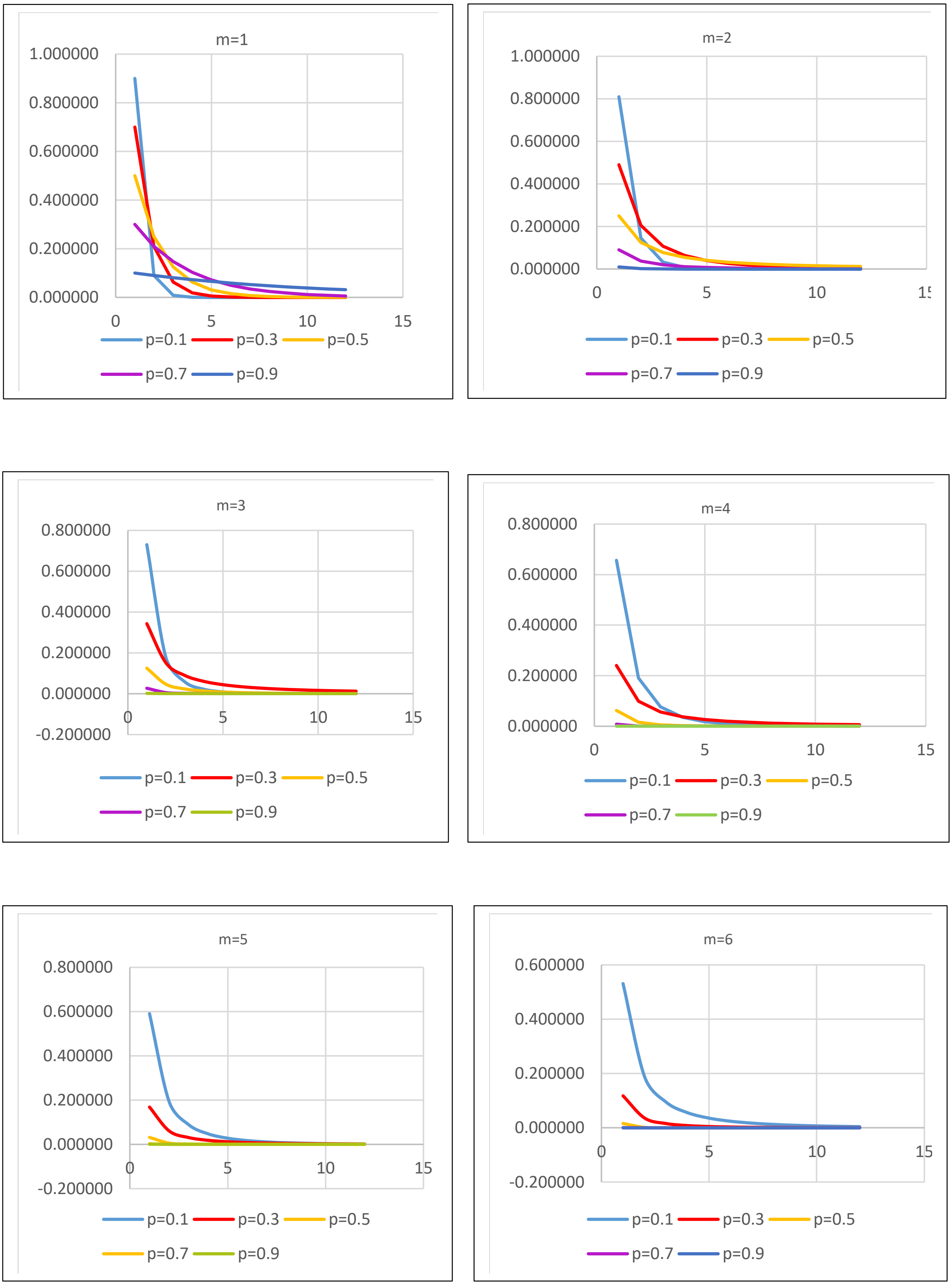
2-2-2 توزيع كوماراسوامي Kumaraswamy Dist. (KD) [8]

توزيع احتمالي مستمر مكون من معلمتين تم اقتراحه من قبل بوندي كوماراسوامي احد العلماء المهندسين الهنود الكبار، نقول ان المتغير العشوائي x يمتلك توزيع KSD اذا كانت الدالة الاحتمالية له يأخذ الشكل الأتي :

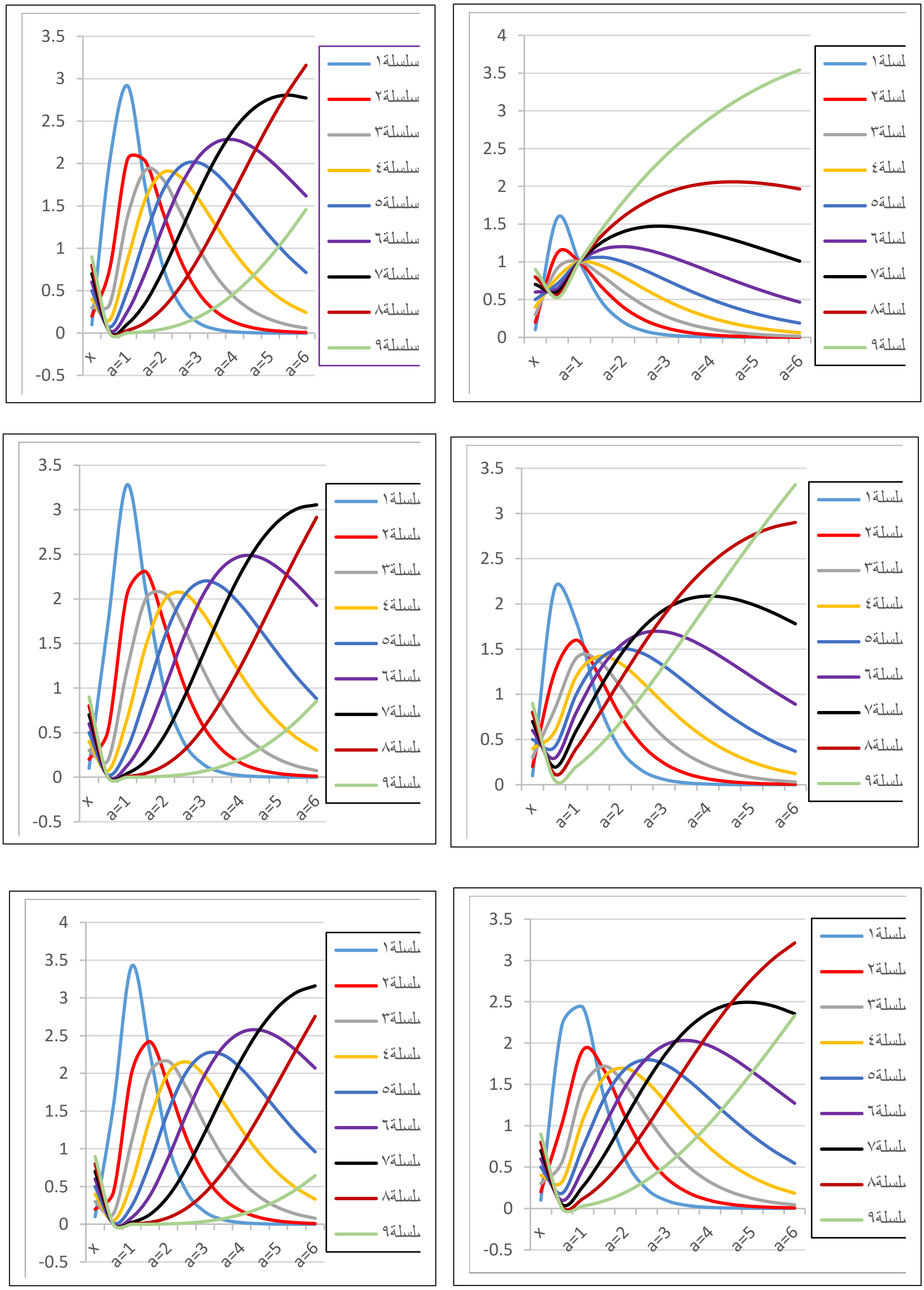
$$f(x;\propto,\beta)=\begin{cases}\propto\beta x^{\propto-1}(1-x^{\propto})^{\beta-1} & ;0<x<1\quad ;\quad \alpha,\beta>0 \\ 0 & otherwise\end{cases}\qquad (2-2)$$

ويكون مشابه لتوزيع بيتا ولكن على عكس توزيع بيتا فانه يحتوي على شكل مغلق من دالة التوزيع التراكمي مما يسهل التعامل معها ويجعله مناسبا لأنشطة الحوسبـة الكثيفة مثل النمذجة والمحاكاة ، لا يحظى هذا التوزيع بشعبية كبيرة بين الاحصائيين لأن الباحثين لم يحللوه ويفحصوه بشكل منهجي بتفاصيل كثيرة

والشكل 2 يمثل دالة التوزيع الاحتمالي كومارسوامي عند قيم مختلفة للمعلمات (α,β) .



الشكل 1 : الدالة الاحتمالية لتوزيع القنصل (CD) من عمل الباحثة



الشكل 2 : الدالة الاحتمالية لتوزيع كوماراسوامي (KSD) من عمل الباحثة

3-2-2 توزيع القنصل كوماراسوامي Consul Kumaraswamy (CKSD) [32]

اذا كان المتغير العشوائي Xi يتبع توزيع القنصل CD مع المعلمة m و p إذ أن المعلمة m تمثل قيمة ثابتة اما المعلمة p تمثل متغير عشوائي يتبع توزيع كوماراسوامي KSD لذلك لتحديد التوزيع الناتج عن التهميش على p كمركب لتوزيع القنصل مع توزيع كوماراسوامي عليه تكون دالة الاحتمال للمركب CD(m,p) مع KSD(α,β) والتي تم قمنا باشتقاقها بالشكل الأتي :

$$f_{CKSD}(x;m,\propto,\beta)=\frac{\beta}{x}\binom{mx}{x-1}\sum_{j=0}^{mx-x+1}\binom{mx-x+1}{j}(-1)^{j}\,B\left(\beta,\frac{x+j-1}{\propto}+1\right)\quad(2-3)$$

$$x=1,2,\dots,m,\propto,\beta>0$$

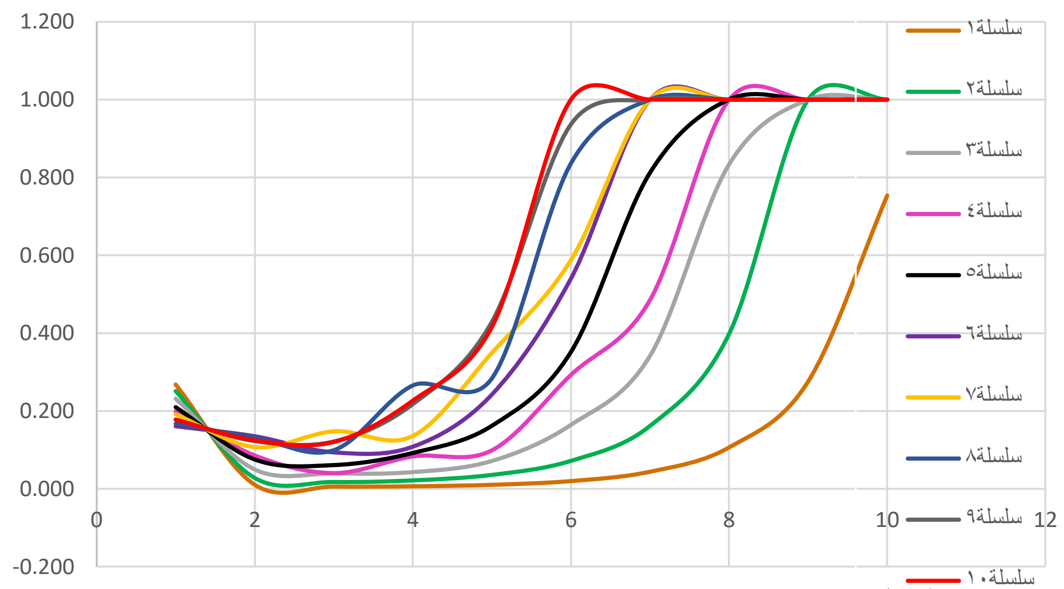
إذ أن

B : تشير الى توزيع بيتا $\left(B\left(\beta,\frac{x+j-1}{\propto}+1\right)\right)$

x: متغير عشوائي يتبع التوزيع المركب CKSD

α,m,β : تمثل معلمات التوزيع المركب CKSD

والشكل 3 يمثل الدالة الاحتمالية لتوزيع Consul kumaraswamy (CKSD) .



الشكل ٣: الدالة الاحتمالية لتوزيع القنصل كوماراسوامي (CKSD) من عمل الباحثة

عليه نجد ان دالة التراكمية الاحتمالية لتوزيع القنصل كوماراسوامي (Consul Kumaraswamy dist.) تكتب بالشكل الأتي :

$$F(t) = \sum_{i=0}^{t}\left[\frac{\beta}{t}\binom{mt}{x-1}\sum_{j=0}^{mt-t+1}\binom{mt-t+1}{j}(-1)^j \; B\left(\beta, \frac{t+j-1}{\alpha}+1\right)\right] \qquad (2-4)$$

<u>خصائص توزيع القنصل كوماراسوامي CKSD</u>

عندما $x \sim CKSD(m, \propto, \beta)$

1-بفرض ان m=1 عندها يصبح التوزيع Geometric Kumaraswamy كما في المعادلة ادناه :

$$f_{GKSD} = \frac{\beta}{x}\binom{x}{x-1}\sum_{j=0}^{1}\binom{1}{j}(-1)^j B\left(\beta, \frac{x+j-1}{\propto}+1\right) \qquad (2-5)$$

$$f_{GKSD} = \beta\sum_{j=0}^{1}\binom{1}{j}(-1)^j B\left(\beta, \frac{x+j-1}{\propto}+1\right) \qquad (2-6)$$

2-نفرض ان α,β=1 فيصبح لدينا توزيع Consul مع توزيع Uniform وكما يأتي :

$$f_{CUD}(x; m) = \frac{1}{x}\binom{mx}{x-1}\sum_{j=0}^{mx-x+1}\binom{mx-x+1}{j}(-1)^j B(1, x+j+1) \qquad (2-7)$$

3-نفرض m=α=β=1 فيكون الناتج توزيع Geometric مع التوزيع Uniform وكما يأتي :

$$f_{GUD}(x) = \frac{1}{x}\binom{x}{x-1}\sum_{j=0}^{1}\binom{1}{j}(-1)^j B(1, x+j+1)$$

$$= \sum_{j=0}^{1}\binom{1}{j}(-1)^j B(1, x+j+1) \qquad (2-8)$$

والجدول 1 يمثل اهم خصائص توزيع القنصل كومارسوامي.

الجدول (1-2) اهم خصائص توزيع القنصل كوماراسوامي (CKSD) ذي الثلاث معلمات.

الخاصية	الصيغة
Parameters	$m > 0$ $\propto > 0$ $\beta > 0$
Mean	$\mu_1(X) = \frac{\beta\Gamma(\beta)\Gamma(\frac{\alpha-1}{\alpha})}{(\beta+\frac{1}{\alpha})\Gamma(\beta+\frac{1}{\alpha})} - 1 = v_1$
Variance	$\mu_2(X) = 2\left(\frac{\beta\Gamma(\beta)\Gamma(\frac{\alpha-2}{\alpha})}{\Gamma(\beta-\frac{2}{\alpha}+1)} - 2\frac{\beta\Gamma(\beta)\Gamma(1-\frac{1}{\alpha})}{\Gamma(\beta-\frac{1}{\alpha}+1)} + 1\right) = 2v_2$ $V(X) = 2v_2 + v_1 - v_1^2$
SD	SD= $\sqrt{2v_2 + v_1 - v_1^2}$
CV	$CV = \frac{\sqrt{2v_2 + v_1 - v_1^2}}{v_1}$

المبحث الثاني

2-3 توطئة

في هذا المبحث تمت دراسة دالة البقاء بشيء من التفصيل ومعرفة الدوال المرتبطة بها وكذلك تقدير معلمات توزيع Consul Kumaraswamy باستعمال طرائق التقدير البيزية وهي طريقة مقدر بيز القياسي المعلوماتي (Standard Informative Bayesian Estimator) وطريقة توقع بيز (Expected Bayesian Estimator) ضمن دوال خسارة متماثلة تدعى بدالة الخسارة التربيعية (Squared error Loss function) وغير متماثلة تدعى بدالة خسارة انتروبي العامة (General Entropy Loss function) كما يتم حل المعادلات غير الخطية باستعمال تقريب ليندلي (Lindely Approximation) وطريقة جيفري (Jeffery) للوصول الى افضل طريقة تقدير .

2-4 دالة البقاء Survival function [13][1]

تمثل احتمال ان يكون وقت بقاء المفردة اكبر من او يساوي وقت بقاء المشاهدة t، أي احتمال الحدث الذي نهتم به سيحدث عند الوقت اكبر من او يساوي وقت بقاء المشاهدة t بعبارة أخرى تمثل دالة البقاء احتمال بقاء الكائن الحي على قيد الحياة بعد مرور الزمن t علماً ان احتمال البقاء على قيد الحياة يقع في المدة الزمنية (0،t) ، اما وقت البقاء فيعرف بانه حدوث حدث معين كظهور مرض معين او الانتكاسة او الموت.

علماً ان تحليل البقاء يركز بشكل أساسي على التنبؤ في تحديد احتمالية المخاطرة ويرمز اليه بالرمز S(t) ويعبر عن دالة البقاء رياضياً بالشكل الأتي :

$$S(t) = \Pr(T > t) = \int_{t}^{\infty} f(u)dt \qquad (2-9)$$

إذ أن :

f(t) : دالة كثافة احتمالية (p.d.f) للمتغير العشوائي .

T : المدة الزمنية لحدوث الفشل .

خصائص دالة البقاء

1-دالة غير متزايدة للزمن t .

$$S(t) = \begin{cases} 1 & for\ t = 0 \\ 0 & for\ t = \infty \end{cases} \qquad (2-10)$$

2-دالة موجبة لجميع قيم وقت البقاء المشاهد t ضمن المدة (0،t) .

3-قيمها بين الصفر والواحد بمعنى احتمال البقاء على قيد الحياة عند الوقت صفر او في بداية المدة هو واحد واحتمال البقاء عند الوقت ∞ او في نهاية المدة هو صفر وبالأتي دالة البقاء ستستعمل لحساب احتمالية ان المفردة تبقى على قيد الحياة من بداية الوقت الى وقت بقاء المشاهدة t او بعده.

4-غالبا ما تكون S(0)=1 .

ولايجاد دالة البقاء لتوزيع القنصل كوماراسوامي (Consul Kumaraswamy dist.) نطبق الصيغة الرياضية الأتية :

$$S(t) = 1 - F(t) \qquad (2-11)$$

F(t) : تمثل دالة الكتلة الاحتمالية c.d.f للمتغير العشوائي t .

وعند التعويض في معادلة رقم (2-11) نحصل على الاتي :

$$S(t) = 1 - \sum_{i=0}^{t} \frac{\beta}{t}\binom{mt}{x-1} \sum_{j=0}^{mt-t+1} \binom{mt-t+1}{j} (-1)^j \; B\left(\beta, \frac{t+j-1}{\alpha} + 1\right) \qquad (2-12)$$

2-5 الدوال و المؤشرات التي لها علاقة بدالة البقاء [8][10]

2-5-1 دالة الكثافة للفشل Failure Density Function

يطلق عليها نسبة الفشل الشرطية وتعرف باحتمال الفشل عبر المدة الزمنية (t, t+Δt) بغض النظر عن المدة (Δt) إذ أن

$$t_i = t_{i-1} + \Delta t_i \qquad (2-13)$$

يرمز لها بالرمز f(t) ويعبر عنها رياضيا بالصيغة الاتية :

$$f(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_r(t<T<t+\Delta t)}{\Delta t} \qquad (2-14)$$

إذ أن

T : متغير عشوائي يمثل المدة الزمنية لحدوث الفشل .

Δt : يشير الى وقت ظهور الحدث ويمثل التغيير في قيمة المتغير العشوائي T .

t : يمثل زمن بقاء الكائن الحي ويكون دائما اكبر من او يساوي صفر $(t \geq 0)$.

خصائص دالة الكثافة للفشل تكون مشابه لخصائص الدالة الاحتمالية وكما يأتي :

1-مجموع المساحة تحت المنحني تساوي واحد أي بمعنى

$$\int_{t}^{\infty} f(t)d(t) = 1 \qquad (2-15)$$

2-تكون موجبة دائما $f(t) \geq 0$

2-5-2 دالة الكثافة التجميعية للفشل Cumulativ Density Function

تدعى بدالة توزيع وقت الحياة وهي احتمال موت الكائن الحي او فشل الالة لحين الزمن t يرمز لها بالرمز F(t) ويعبر عنها رياضيا بالصيغة الأتية :

$$F(t) = p_r(T \leq t) \qquad (2-16)$$

$$F(t)=\int_{0}^{t} f(u)du$$

$$F(t)=1-S(t)$$

إذ أن

t : تمثل وقت ظهور الحدث .

S(t): تمثل دالة البقاء .

خصائص دالة الكثافة التجميعية للفشل :

1-دالة رتيبة غير متناقصة إذ أن اعلى قيمة قد تبلغها هي الواحد الصحيح .

2-تكون غير سالبة تتراوح قيمتها بين الصفر والواحد $0 \leq F(t) \leq 1$.

3-تكون غير متناقصة دائما وهذا يعني ان أي مفردة لابد ان تصل الى نقطة الفشل (الموت) عند $t \to 0$

2-5-3 دالة المخاطرة Risk function function[5][8]

من الدوال التي لها دور مهم في تحليل البيانات العمرية فهي تمثل معدل الفشل الاني للمفردة التي لا زالت على قيد الحياة الى وقت البقاء للمشاهد t ويشير معدل الفشل أيضا الى الأجهزة والاشياء العاطلة التي لا يمكن إصلاحها .

يرمز لدالة المخاطرة بالرمز h(t) ويعبر عنها رياضيا بالشكل الأتي :

$$h(t)=\frac{f(t)}{s(t)} \qquad (2-17)$$

بالنظر الى المعادلة (2-17) نلحظ أن دالة المخاطرة ترتبط بدالة التوزيع التراكمي ودالة الكثافة الاحتمالية للفشل بعبارة أخرى اذا وجدنا دالة الكثافة فبالتالي بمقدورنا ان نجد من خلالها دالة التوزيع التراكمي .

من اهم خصائص دالة المخاطرة هي :

1-تكون دائما موجبة وغير محدودة .

2-تتناسب عكسيا مع دالة البقاء وطرديا مع الدالة الاحتمالية للفشل .

ان دالة المخاطرة لتوزيع القنصل كوماراسوامي Consul Kumaraswamy Dist. (CKSD) تأخذ الشكل الأتي :

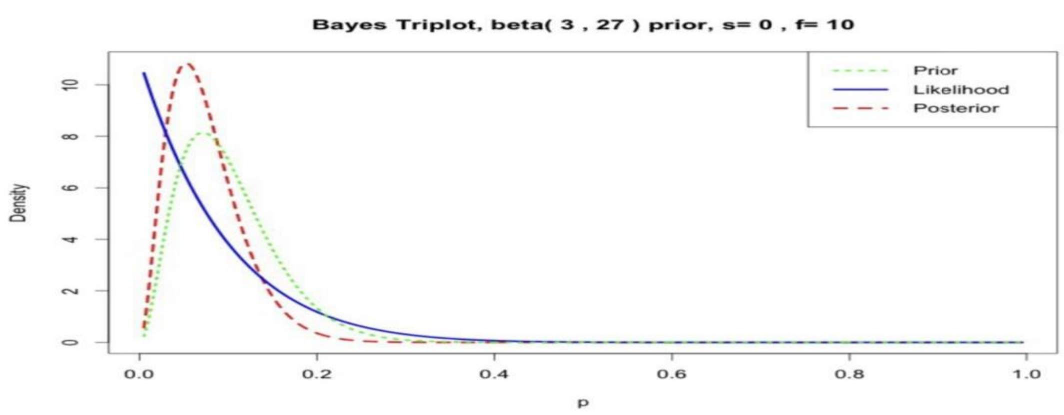
$$h(t)=\frac{\frac{\beta}{x}\binom{mx}{x-1}\sum_{j=0}^{mx-x+1}\binom{mx-x+1}{j}(-1)^{j}\ B\left(\beta,\frac{x+j-1}{\alpha}+1\right)}{1-\sum_{i=0}^{x}\frac{\beta}{xi}\binom{mxi}{xi-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^{j}\ B\left(\beta,\frac{xi+j-1}{\alpha}+1\right)} \qquad (2-18)$$

2-6 مفهوم نظرية بيز Concept of Bayes Theorem [3][7][5]

تفترض المدرسة البيزية ان المعلمات المجهولة الخاصة بالتوزيع الاحتمالي تمثل متغيرات عشوائية وان هنالك معلومات سابقة عنها تصاغ بشكل توزيع احتمالي يعرف بدالة الكثافة الاحتمالية الأولية (Prior Probability function) في بعض الأحيان يكون هذا التوزيع غير ملائم أي ناتج التكامل لا يساوي واحداً ، فضلاً عن ذلك تعتمد نظرية بيز على المعلومات الحالية للعينة او المفردة والتي يمكن تمثيلها بدالة الإمكان الخاصة بالمشاهدات ، وعند دمج دالة الكثافة الاحتمالية الأولية مع دالة الإمكان نحصل على التوزيع الاحتمالي اللاحق (Posterior) ، لذلك عند التقدير بالطريقة البيزية يجب علينا معرفة التوزيع الاحتمالي للبيانات والتي عن طريقها نحصل على دالة الإمكان للمشاهدات ، يأتي ذلك معرفة التوزيع السابق $\pi(\Theta)$ ثم نحصل على الاحتمال اللاحق وذلك عن طريق استعمال صيغة بيز العكسية كما في المعادلة ادناه :

$$h\,(\theta|x1,x2,\dots,xn)=\frac{\pi(\theta)\prod_{i=1}^{n}f(\theta|x1,x2,\dots,xn)}{\int_{\forall\theta}\pi(\theta)\prod_{i=1}^{n}f(\theta|x1,x2,\dots,xn)d\theta} \qquad (2-19)$$

والشكل(4) يوضح سلوك الدالة البيزية :



الشكل 4 :يبين سلوك دالة التقدير البيزية

ويعاب على هذه المدرسة صعوبة تحديد التوزيع السابق بشكل دقيق لعدم دقة المعلومات او لصعوبة الحصول عليها ، ففي حالة عدم وجود معلومات مسبقة ومتاحة عن المعلمة المطلوب تقديرها يفضل اتباع الأسلوب الذي اقترحه الباحث (Jeffry) علما بان دالة الكثافة الاحتمالية الأولية التي يتم الحصول عليها بهذا الأسلوب غالبا ما تكون غير ملائمة (Improper) وذلك لان تكامل الدالة في مجالها لا يساوي الواحد الصحيح ، ولكن في حالة دمجها بدالة الإمكان نحصل على دالة كثافة احتمالية لاحقة لتقدير المعلمة المجهولة .

2-7 دالة الخسارة Loss function [4][11][21]

تختلف التقديـرات البيزية تبعاً لاختلاف أنواع دوال الخسارة التي يُعد وجودها ضروريا للحصول على مقدر بيز وتعرف بأنها كمية الخسارة التي يمكن لها فغالبا مايكون هنالك فرق بين المقدر $(\widehat{\theta})$ والمعلمة (θ) فاذا كانت $\theta=\widehat{\theta}$ هذا يشير الى عدم وجود خسارة اما اذا كانت $\theta<\widehat{\theta}$ فيعني ذلك وجود تقدير واطئ او منخفض (Under estimator) او تكون $\theta>\widehat{\theta}$ وهذا يدعى بالتقدير العالي او المرتفع

(Over estimation) عليه تكون هنالك قيم مختلفة لدالة الخسارة كما وتعرف بانها دالة ذات قيمة حقيقية موجبة تحقق الاتي :

$$l(\hat{\theta},\theta) > 0 \qquad \forall\hat{\theta} \neq \theta$$

$$l(\hat{\theta},\theta) = 0 \qquad \forall\hat{\theta} = \theta$$

2-7-1 دالة خسارة الخطأ التربيعية Squared error Loss function

هي دالة خسارة متمـــــاثلة يمكن التعبير عنها بالشكل الأتي :

$$L(\sigma^{\wedge},\sigma) = (\sigma^{\wedge} - \sigma)^2 \qquad (2-20)$$

يمكن الحصول على مقدر بيز ل σ المستند الى دالة الخسارة SE على النحو الأتي :

$$\sigma^{\wedge}_{SE} = E(\sigma|X) \qquad (2-21)$$

2-7-2 دالة خسارة الانتروبي العامة General Entropy Loss function

هي تعديل لدالة الخسارة الاسية الخطية (LINEX) المقترحة من قبل (Varian , 1975) و (Zellner , 1986) والتي استعملها (Calabria and Pulcini , 1994) وتصنف من دوال الخسارة غير المتمــــاثلة ففي العديد من الحالات الطبيعية تبدو الخسارة النسبية$\hat{\theta}/\theta$ اكثر واقعية و يمكن التعبير عنها رياضياً بالشكل الأتي :

$$L(\sigma^{\wedge},\sigma)\alpha(\sigma^{\wedge} - \sigma)^q - q\ln\left(\sigma \quad \middle|\sigma\right) - 1 \quad , \quad q \neq 0 \qquad (2-22)$$

إذ أن :

$\sigma^{\wedge}$: هو تقدير للمعلمة σ .

يمكن ان نحصل على مقدر بيز بالنسبة الى دالة GE المشار اليها سابقا كما يأتي :

$$\sigma^{\wedge}_{GE} = [E\sigma(\sigma^{-q})]^{-\frac{1}{q}} \qquad (2-23)$$

بشرط ان يكون $E\sigma(\sigma^{-q})$ موجود ومحدود .

حيث انه

(1-p) = q

2-8 مقدر بيز القياسي المعلوماتي Standard Informative Bayesian Estimator [28][14][9]

لإيجاد مقدر بيز القياسي والذي يعتمد على دالة التوزيع اللاحق التي تشمل المعلومات السابقة للمعلمة ومشاهدات العينة الحالية نستعمل احدى دوال الخسارة (Loss Function) وتُعد من افضل الطرائق للحكم على أداء المعلمة المقدرة ففي هذه الرسالة سيتم استعمال نوعين من دوال الخسارة متماثلة وتدعى بدالة الخسارة التربيعية (Squared Error Loss Function (SEL)) وغير

متماثلة وهي دالة خسارة انتروبي عامة ((General Entropy Loss Function (GEL علما ان نظرية بيز تنص على (الجمع بين الدالة الاحتمالية للعينة المرصودة وعلى التوزيع اللاحق) .

خطوات طريقة مقدر بيز القياسية :

1-إيجاد دالة الكثافة الشرطية للمعلمة Ө للمتغير العشوائي $t_1, t_2, \ldots, t_n$

$$\pi(\theta|t) = \frac{L(\theta|t)g(\theta)}{\int_\theta L(\theta|t)g(\theta)d\theta} \qquad (2-24)$$

إذ أن

$L(\theta|t)$: يمثل دالة الإمكان لمشاهدات العينة .

$g(\theta)$: تمثل الاحتمال السابق للمعلمة Ө .

2-استعمال دوال الخسارة $L(\hat{\theta},\theta)$ التي تم تعريفها على انها دوال حقيقية فعندما :

$$\text{a- } L(\hat{\theta},\theta) \geq 0 \quad ; \quad \forall \hat{\theta} \neq \theta \qquad (2-25)$$

$$\text{b-} L(\hat{\theta},\theta) = 0 \quad ; \quad \forall \hat{\theta} = \theta \qquad (2-26)$$

3-إيجاد دالة المخاطرة للمعلمة Ө

$$Risk\ (\hat{\theta}) = E[\ L(\hat{\theta},\theta)] = \int_\theta L(\hat{\theta},\theta)\pi(\theta|t)d\theta \qquad (2-27)$$

يهدف $E[\ L(\hat{\theta},\theta)]$ الى تقليل المخاطرة اقل ما يمكن (Risk Minimize) .

2-8-1 مقدر بيز القياسي في ظل دالة خسارة تربيعية (SBSEL) Standard Bayesian Estimator Under Squared Error Loss function [23]

يمكن تعريف مقدر بيز القياسي SB للمعلمة Ө على انه متوسط التوزيع اللاحق (Posterior mean) للمعلمة العشوائية Ө، يمكن الحصول على طريقة SB لمعلمات توزيع القنصل كوماراسوامي باستعمال دالة الاحتمال السابق (.Prior dist) و دالة الخسارة التربيعية (Squared Error Loss function) التي تم تعريفها سابقا و تطبيق طريقة تقريب ليندلي وطريقة جيفري لتبسيط التكاملات المعقدة ، اما فيما يخص التوزيعات الأولية للمعلمات المراد تقديرها وبعد البحث والاطلاع توصلنا الى ان التوزيعات المقترحة ادناه هي افضل من التوزيعات الأخرى مثل التوزيع الهندسي والمنتظم وتوزيع كاما وغيرها الكثير والتي أدت الى تعقيد الدالة بشكل اكبر :

$$m \sim Binomial\ (n, p)$$

$$\alpha \sim Binomial\ (n, p)$$

$$\beta \sim Betta\ (c, d)$$

فعلية تكون دالة الكثافة الاحتمالية الأولية (.Prior Dist) لكل معلمة كما يأتي :

$$\pi_1(m) = \binom{n}{m} p^m q^{n-m} \qquad , m > 0 \qquad (2-28)$$

$$\pi_2(\alpha) = \binom{n}{\alpha} p^\alpha q^{n-\alpha} \qquad , \alpha > 0 \qquad (2-29)$$

$$\pi_3(\beta) = \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1} \qquad , 0 < \beta < 1 \qquad (2-30)$$

من ثم نجد دالة التوزيع المشترك الاولي (Joint Prior) والذي يمثل حاصل ضرب دوال الكثافة الاحتمالية الأولية التي تم فرضها آنفاً وكما يأتي :

$$\pi_1(m)\pi_2(\alpha)\pi_3(\beta) = \binom{n}{m} p^m q^{n-m} \binom{n}{\alpha} p^\alpha q^{n-\alpha} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1} \qquad (2-31)$$

$$\pi_1(m)\pi_2(\alpha)\pi_3(\beta) = A$$

علما ان دالة الإمكان للمشاهدات $X_1, X_2, \ldots, X_n$ تكتب بالشكل الأتي :

$$L = \prod_{i=1}^{n} f_{CKSD}(x; m, \propto, \beta)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{\beta}{x}\binom{mx}{x-1} \sum_{j=0}^{mx-x+1} \binom{mx-x+1}{j} (-1)^j \frac{\Gamma\left((\beta) + \left(\frac{x+j-1}{\alpha} + 1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x+j-1}{\alpha} + 1\right)\Gamma(\beta)}$$

$$= \beta^n \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{xi-1} \sum_{j=0}^{mxi-xi+1} \binom{mxi-xi+1}{j} (-1)^j \frac{\Gamma\left((\beta) + \left(\frac{xi+j-1}{\alpha} + 1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{xi+j-1}{\alpha} + 1\right)\Gamma(\beta)} \right] \qquad (2-32)$$

وستكون التوزيعات اللاحقة المشتركة للمعلمات m, α, β كالآتي:

$$h(m,\alpha,\beta|\vec{x}) = \frac{\prod_{i=1}^{n} f(x_i; m,\alpha,\beta)\pi_1(m)\pi_2(\alpha)\pi_3(\beta)}{\int_m \int_\alpha \int_\beta \prod_{i=1}^{n} f(x_i; m,\alpha,\beta)\pi_1(m)\pi_2(\alpha)\pi_3(\beta) d\beta d\alpha dm} \qquad (2-33)$$

$$h\,(m,\alpha,\beta|\vec{x}) = \frac{\beta^n \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x-1} \sum_{j=0}^{mxi-xi+1} \binom{mxi-xi+1}{j} (-1)^j \frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x+j+\alpha-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)} \right] A}{\int m \int \alpha \int \beta \beta^n \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x-1} \sum_{j=0}^{mxi-xi+1} \binom{mxi-xi+1}{j} (-1)^j \frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x+j+\alpha-1}{\alpha}\right)\Gamma(\beta)} \right] A\, d\beta\, d\alpha\, dm}$$

ومن ذلك يمكن ان نستنتج التوزيع اللاحق لكل معلمة من المعلمات المراد تقديرها كالآتي:

$$h1\,(m|\,\alpha,\beta,\vec{x})=\frac{\beta^n\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x_i-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^j\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j+\alpha-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\binom{n}{m}p^mq^{n-m}}{\int_m\beta^n\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x_i-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^j\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\binom{n}{m}p^mq^{n-m}dm}$$

$$=\frac{\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x_i-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^j\right]\binom{n}{m}p^mq^{n-m}}{\int_m\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x_i-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^j\right]\binom{n}{m}p^mq^{n-m}dm}\qquad(2-34)$$

$$h2\,(\,\alpha|m,\beta,\vec{x})=\frac{\beta^n\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x_i-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^j\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\binom{n}{\alpha}p^\alpha q^{n-\alpha}}{\int_\alpha\beta^n\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x_i-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^j\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\binom{n}{\alpha}p^\alpha q^{n-\alpha}d\alpha}$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\binom{n}{\alpha}p^{\alpha}q^{n-\alpha}}{\int_{\alpha}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\binom{n}{\alpha}p^{\alpha}q^{n-\alpha}d\alpha} \qquad (2-35)$$

$$h3\,(\beta|m,\alpha,\vec{x}) = \frac{\beta^{n}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x_i-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^{j}\,\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{xi+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}}{\int_{\beta}\beta^{n}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x_i-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^{j}\,\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{xi+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}d\beta}$$

$$= \frac{\boldsymbol{\beta}^{n} \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{\Gamma\left((\beta) + \left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1 \right) \right)}{\Gamma\left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1 \right) \Gamma(\beta)} \right] \boldsymbol{\beta}^{c-1} (1 - \boldsymbol{\beta})^{d-1}}{\int_{\beta} \boldsymbol{\beta}^{n} \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{\Gamma\left((\beta) + \left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1 \right) \right)}{\Gamma\left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1 \right) \Gamma(\beta)} \right] \boldsymbol{\beta}^{c-1} (1 - \boldsymbol{\beta})^{d-1} d\boldsymbol{\beta}} \qquad (2-36)$$

فأن مقدر بيز في ظل دالة الخسارة التربيعية الذي يجعل دالة المخاطرة اقل ما يمكن والتي تمثل توقع دالة الخسارة بعد ايجاد المشتقة الاولى بالنسبة للمعلمة المراد تقديرها ومساواتها بالصفر نحصل على :

$$Risk = E(d(\delta) - \widehat{d}(\delta))^2)$$

$$= \int_{\forall\delta} (d(\delta) - \widehat{d}(\delta))^2 h\,(\theta, \alpha, \beta|\vec{x})d\delta$$

$$= \int_{\forall\delta} (d(\delta)^2 - 2d(\delta)\widehat{d}(\delta) + \widehat{d}(\delta)^2)h\,(\theta, \alpha, \beta|\vec{x})d\delta$$

$$= \widehat{d}(\delta)^2 - 2\widehat{d}(\delta)E\left(d(\delta)\middle|\underline{x}\right) + E\left(d(\delta)^2\middle|\underline{x}\right) \qquad (2-37)$$

وباشتقاق المعادلة (2-37) بالنسبة للـ $\widehat{d}(\delta)$ ومساواة المشتقة بالصفر نحصل على :

$$\frac{\delta E(d(\delta) - \widehat{d}(\delta))^2)}{\delta \widehat{d}(\delta)} = 0$$

$$= 2\widehat{d}(\delta) - 2E\left(d(\delta)\middle|\underline{x}\right) = 0$$

$$\therefore \widehat{d}(\delta)_{SEL} = E_\delta\left(\delta\middle|\underline{x}\right) \qquad (2-38)$$

إذ أن :

$d(\delta)$ **: القيمة الحقيقية للمعلمة المراد تقديرها**

$\widehat{d}(\delta)$ **: مقدر المعلمة**

$\widehat{d}(\delta)_{SEL}$ **: مقدر بيز القياسي للمعلمة المراد تقديرها في ظل دالة الخسارة التربيعية**

لذلك فان مقدر بيز القياسي لمعلمات توزيع القنصل كوماراسوامي Consul Kumaraswamy يكون كالآتي:

$$\widehat{m}_{SBSEL} = \frac{\partial}{\partial \widehat{m}}\left[\int_m ((m - \widehat{m})^2)h_1\,(m|\,\alpha, \beta, \vec{x})dm\right] = 0$$

$$= \frac{\partial}{\partial \hat{m}}\left[\int_m (m-\hat{m})^2 \frac{\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x_i-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^j\right]\binom{n}{m}p^m q^{n-m}}{\int_m \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x_i-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^j\right]\binom{n}{m}p^m q^{n-m}dm}dm\right] = 0 \qquad (2-39)$$

$$\hat{\alpha}_{SBSEL} = \frac{\partial}{\partial \hat{\alpha}}\left[\int_\alpha (\alpha-\hat{\alpha})^2 h_2\,(\alpha|m,\beta,\vec{x})d\alpha\right] = 0$$

$$= \frac{\partial}{\partial \hat{\alpha}}\left[\int_\alpha (\alpha-\hat{\alpha})^2 \frac{\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\binom{n}{\alpha}p^\alpha q^{n-\alpha}}{\int_\alpha \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\binom{n}{\alpha}p^\alpha q^{n-\alpha}d\alpha}d\alpha\right] = 0 \qquad (2-40)$$

$$\hat{\beta}_{SBSEL} = \frac{\partial}{\partial \hat{\beta}}\left[\int_\beta \left(\beta-\hat{\beta}\right)^2 h_3\,(\beta|\, m,\alpha,\vec{x})d\beta\right] = 0$$

$$= \frac{\partial}{\partial \hat{\beta}} \left[\int_{\beta} (\beta - \hat{\beta})^2 \frac{\beta^n \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{\Gamma\left((\beta) + \left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1 \right) \right)}{\Gamma\left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1 \right) \Gamma(\beta)} \right] \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1}}{\int_{\beta} \beta^n \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{\Gamma\left((\beta) + \left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1 \right) \right)}{\Gamma\left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1 \right) \Gamma(\beta)} \right] \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} d\beta} d\beta \right] = 0 \qquad (2-41)$$

وان مقدر دالة البقاء لتوزيع القنصل كوماراسوامي *CKSD* في ظل دالة خسارة تربيعية

$$\hat{S}(t)_{SBSEL} = 1 - \sum_{i=0}^{x} \frac{\hat{\beta}_{SBSEL}}{xi} \binom{\widehat{m_{SBSEL}} xi}{x_i - 1} \sum_{j=0}^{\hat{m}_{SBSEL} xi - xi + 1} \binom{\hat{m}_{SBSEL} x_i - x_i + 1}{j} (-1)^j \; B\left(\hat{\beta}_{SBSEL}, \frac{x_i + j - 1}{\hat{\alpha}_{SBSEL}} + 1 \right) \qquad (2-42)$$

عند ملاحظة المعادلات *(2-39) (2-40) (2-41) (2-42)*نجد بانها معادلات غير خطية لا يمكن حلها بالطرائق الاعتيادية لذا سنلجأ الى طريقة تقريب ليندلي وطريقة جيفري .

2-8-2 مقدر بيز القياسي المعلوماتي في ظل دالة خسارة انتروبى عامة Standard Informative Bayesian Estimator under General Entropy Loss [9][5]

لذلك فان مقدر بيز القياسي لمعلمات توزيع القنصل كوماراسوامي في ظل دالة الخسارة انتروبي عامة يكون كالآتي:

$$\hat{\mathbf{m}}_{\mathbf{SBEL}} = \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{m}}} \left[\int_{\mathbf{m}} \left(\left(\frac{\hat{\mathbf{m}}}{\mathbf{m}} \right)^{\mathbf{q}} - \mathbf{q} \log \frac{\hat{\mathbf{m}}}{\mathbf{m}} - 1 \right)^{\frac{-1}{\mathbf{q}}} \mathbf{h}_1 \, (\mathbf{m} | \, \alpha, \beta, \vec{\mathbf{x}}) d\mathbf{m} \right] = 0$$

$$= \frac{\partial}{\partial \hat{m}} \left[\int_m \left(\left(\frac{\hat{m}}{m} \right)^q - q \log \frac{\hat{m}}{m} - 1 \right) \frac{\prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{xi} \binom{mxi}{x_i - 1} \sum_{j=0}^{mxi-xi+1} \binom{mxi-xi+1}{j} (-1)^j \right] \binom{n}{m} p^m q^{n-m}}{\int_m \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{xi} \binom{mxi}{x_i - 1} \sum_{j=0}^{mxi-xi+1} \binom{mxi-xi+1}{j} (-1)^j \right] \binom{n}{m} p^m q^{n-m} dm} \right] = 0 \qquad (2-43)$$

$$\hat{\alpha}_{SBEL} = \frac{\partial}{\partial \hat{\alpha}} \left[\int_\alpha \left(\left(\frac{\hat{\alpha}}{\alpha} \right)^q - q \log \frac{\hat{\alpha}}{\alpha} - 1 \right)^{\frac{-1}{q}} h_2 (\alpha | m, \beta, \vec{x}) d\alpha \right] = 0$$

$$= \frac{\partial}{\partial \hat{\alpha}} \left[\int_\alpha \left(\left(\frac{\hat{\alpha}}{\alpha} \right)^q - q \log \frac{\hat{\alpha}}{\alpha} - 1 \right)^{\frac{-1}{q}} \frac{\prod_{i=1}^{n} \left[\frac{\Gamma\left((\beta) + \left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1 \right) \right)}{\Gamma\left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1 \right) \Gamma(\beta)} \right] \binom{n}{\alpha} p^\alpha q^{n-\alpha}}{\int_\alpha \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{\Gamma\left((\beta) + \left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1 \right) \right)}{\Gamma\left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1 \right) \Gamma(\beta)} \right] \binom{n}{\alpha} p^\alpha q^{n-\alpha} d\alpha} d\alpha \right] = 0 \qquad (2-44)$$

$$\hat{\beta}_{SBEL} = \frac{\partial}{\partial \hat{\beta}} \left[\int_\beta \left(\left(\frac{\hat{\beta}}{\beta} \right)^q - q \log \frac{\hat{\beta}}{\beta} - 1 \right)^{\frac{-1}{q}} h_3 (\beta | m, \alpha, \vec{x}) d\beta \right] = 0$$

$$=\frac{\partial}{\partial\hat{\beta}}[\int_\beta\left(\left(\frac{\hat{\beta}}{\beta}\right)^q-q\log\frac{\hat{\beta}}{\beta}-1\right)^{\frac{-1}{q}}\frac{\beta^n\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}}{\int_\beta\beta^n\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{xi+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}d\beta}d\beta]=0 \qquad (2-45)$$

وان مقدر دالة البقاء لتوزيع القنصل كوماراسوامي *CKSD* في ظل دالة خسارة انتروبي عامة

$$\hat{S}(t)_{SBEL}=1-\sum_{i=0}^{x}\frac{\hat{\beta}_{SBEL}}{xi}\binom{\widehat{m_{SBEL}xi}}{x_i-1}\sum_{j=0}^{\hat{m}_{SBEL}xi-xi+1}\binom{\hat{m}_{SBEL}x_i-x_i+1}{j}(-1)^j\ B\left(\hat{\beta}_{SBEL},\frac{x_i+j-1}{\hat{\alpha}_{SBEL}}+1\right) \qquad (2-46)$$

و نلحظ أن المعادلات (*2-43*) و (*2-44*) و (*2-45*) (*2-46*)معادلات غير خطية (Non-Linear) ولا يمكن ان تحل بالطرائق التحليلية الاعتيادية وانما يتطلب حلها استعمال طرائق التحليل العددي لذلك سيتم استعمال تقريب ليندلي (Lindely Approximation) و طريقة جيفري لايجاد مقدر بيز القياسي في ظل دالة الخسارة انتروبي عامة.

2-9 مقدر توقع بيز Expected Bayesian Estimator [26][5]

واحدة من الطرائق البيزية التي قدمها الباحث Han عام (2006) في اختيار دالة كثافة احتمالية اولية تتضمن معلمات يتم اختيارها بالشكل الذي يجعل دالة الكثافة الاحتمالية الاولية متناقصة بالنسبة للمعلمة المراد تقديرها وتكون دوال الكثافة الاحتمالية للمعلمات كالآتي:

$$\pi(m) = \frac{1}{k_1} \qquad 0 < m < k_1 \qquad (2-47)$$

$$\pi(\alpha) = \frac{1}{k_2} \qquad 0 < \alpha < k_2 \qquad (2-48)$$

$$\pi(c) = \frac{1}{k_3} \qquad 0 < c < k_3 \qquad (2-49)$$

$$\pi(d) = \frac{1}{k_4} \qquad 0 < d < k_4 \qquad (2-50)$$

$$\pi^*(m, \alpha, c, d) \propto \frac{1}{k_1 k_2 k_3 k_4} \qquad (2-51)$$

إذ ان

$\pi^*(m, \alpha, c, d)$: تمثل دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة للمعلمات في التوزيعات الاحتمالية الأولية التي تستعمل لدراسة تاثير التوزيعات الأولية المختلفة على مقدر توقع بيز .

2-9-1 مقدر توقع بيز في ظل دالة خسارة تربيعية Bayes expectation estimator under a squared loss function (EBSEL)

وفق دالة الكثافة الاحتمالية الاولية في المعادلة (2-47) (2-48) (2-49)(2-50) وباستعمال صيغة توقع بيز نحصل على مقدرات توقع بيز لمعلمات توزيع القنصل كوماراسوامي

$$\hat{m}_{EBSEL} = \int_0^{k_1} \hat{m}_{SBSEL}\pi(m)\,dm$$

$$\hat{m}_{EBSEL} = \int_0^{k_1} \frac{1}{k_1}\left(\frac{\partial}{\partial\hat{m}}\left[\int_m (m-\hat{m})^2 \frac{\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{x_i}\binom{mxi}{x_i-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^j\right]\binom{n}{m}p^m q^{n-m}}{\int_m \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{x_i}\binom{mxi}{x_i-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^j\right]\binom{n}{m}p^m q^{n-m}dm}dm\right]\right)dm \quad (2-52)$$

$$\hat{\alpha}_{EBSEL} = \int_0^{k_2} \hat{\alpha}_{SBSEL}\pi(\alpha)d\alpha$$

$$\hat{\alpha}_{EBSEL} = \int_0^{k_2} \frac{1}{k_2}\left(\frac{\partial}{\partial\hat{\alpha}}\left[\int_\alpha (\alpha-\hat{\alpha})^2 \frac{\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\binom{n}{\alpha}p^\alpha q^{n-\alpha}}{\int_\alpha \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\binom{n}{\alpha}p^\alpha q^{n-\alpha}d\alpha}d\alpha\right]\right)da_2 \quad (2-53)$$

$$\hat{\beta}_{EBSEL} = \int_0^{k_3}\int_0^{k_4} \hat{\beta}_{SBSEL}\pi(\beta)dcdd$$

$$\hat{\beta}_{EBSEL}=\int_0^{k_3}\int_0^{k_4}\frac{1}{k_3k_4}\left(\frac{\partial}{\partial\hat{\beta}}\left[\int_\beta(\beta-\hat{\beta})^2\frac{\beta^n\prod_{i=1}^n\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}}{\int_\beta\beta^n\prod_{i=1}^n\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}d\beta}d\beta\right]\right)dc\,dd \quad (2-54)$$

وان مقدر دالة البقاء لتوزيع القنصل كوماراسوامي $CKSD$ في ظل دالة خسارة تربيعية :

$$\hat{S}(t)_{EBSEL}=1-\sum_{i=0}^{x}\frac{\hat{\beta}_{EBSEL}}{xi}\binom{\widehat{m_{EBSEL}}xi}{x_i-1}\sum_{j=0}^{\hat{m}_{EBSEL}xi-xi+1}\binom{\hat{m}_{EBSEL}x_i-x_i+1}{j}(-1)^j\ B\left(\hat{\beta}_{EBSEL},\frac{x_i+j-1}{\hat{\alpha}_{EBSEL}}+1\right) \quad (2-55)$$

نلحظ أن المعادلات (2-52) و (2-53) و (2-54) (2-55) معادلات غير خطية (Non-Linear) ولا يمكن ان تحل بالطرائق التحليأتية الاعتيادية لذلك سيتم استعمال تقريب ليندلي (Lindely Approximation) وطريقة جيفري لايجاد مقدر بيز القياسي في ظل دالة الخسارة انتروبي عامة.

2-9-2 مقدر توقع بيز في ظل دالة خسارة انتروبي عامة (EBEL)

(Expected Bayesian Estimator Under General EntropyLoss)

وفق دوال الكثافة الأحتمالية الاولية السابقة وباستعمال صيغة توقع بيز نحصل على مقدرات توقع بيز لتوزيع القنصل كوماراسوامي CKSD ذي الثلاث معلمات وفي ظل دالة خسارة انتروبي العامة كما يأتي:

$$\hat{m}_{EBEL}=\int_0^{k_1}\hat{m}_{SBEL}\pi(m)dm$$

$$\hat{m}_{EBEL}=\int_0^{k_1}\frac{1}{k_1}[\frac{\partial}{\partial\hat{m}}\left[\int_m\left(\left(\frac{\hat{m}}{m}\right)^q-q\log\frac{\hat{m}}{m}-1\right)\frac{\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{x_i}\binom{mxi}{x_i-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^j\right]\binom{n}{m}p^mq^{n-m}}{\int_m\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{x_i}\binom{mxi}{x_i-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^j\right]\binom{n}{m}p^mq^{n-m}dm}\right]]\,dm \quad (2-56)$$

$$\hat{\alpha}_{EBEL}=\int_0^{k_2}\hat{\alpha}_{SBEL}\pi(\alpha)d\alpha$$

$$\hat{\alpha}_{EBEL}=\int_0^{k_2}\frac{1}{k_2}\left(\frac{\partial}{\partial\hat{\alpha}}\left[\int_\alpha\left(\left(\frac{\hat{\alpha}}{\alpha}\right)^q-q\log\frac{\hat{\alpha}}{\alpha}-1\right)^{\frac{-1}{q}}\frac{\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\binom{n}{\alpha}p^\alpha q^{n-\alpha}}{\int_\alpha\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\binom{n}{\alpha}p^\alpha q^{n-\alpha}d\alpha}d\alpha\right]\right)d\alpha \quad (2-57)$$

$$\hat{\beta}_{EBEL}=\int_0^{k_3}\int_0^{k_4}\hat{\beta}_{SBEL}\pi(c)\pi(d)\,dc\,dd$$

$$\hat{\beta}_{EBEL}=\int_0^{k_3}\int_0^{k_4}\frac{1}{k_3k_4}\left(\int_\beta\left(\left(\frac{\hat{\beta}}{\beta}\right)^q-q\log\frac{\hat{\beta}}{\beta}-1\right)\frac{\beta^n\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{xi+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}}{\int_\beta\beta^n\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{xi+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}d\beta}d\beta\right)dcdd \quad (2-58)$$

وان مقدر دالة البقاء لتوزيع القنصل كوماراسوامي في ظل دالة خسارة انتروبي العامة :

$$\hat{S}(t)_{EBEL} = 1 - \sum_{i=0}^{x} \frac{\hat{\beta}_{EBEL}}{x_i} \binom{\widehat{m_{EBEL}} xi}{x_i - 1} \sum_{j=0}^{\hat{m}_{EBEL} xi - xi + 1} \binom{\hat{m}_{EBEL} xi - xi + 1}{j} (-1)^j \; B\left(\hat{\beta}_{EBEL}, \frac{xi + j - 1}{\hat{\alpha}_{EBEL}} + 1\right) \quad (2-59)$$

وكما نلحظ أن المعادلات (2-56) (2-57) (2-58) (2-59)عند تعويضها تصبح معادلات غير خطية يصعب حلها لذلك نلجأ الى طريقة تقريب ليندلي وطريقة جيفري لنجد مقدر توقع بيز القياسي .

2-10 تقريب ليندلي : (Lindley Approximation) [31][5]

وضع الباحث (Lindley) عام (1980) حلاً تقريبياً للتكامل الناتج عن أستعمال طريقة مقدر بيز(Bayesian estimator) وحسب أسلوب الباحث ليندلي يعاد صياغة توقع الدالة السابقة حسب الصيغة الآتية :

$$E[u(\underline{\theta})\backslash x] = \frac{\int_{\Omega} u(\underline{\theta}) e^{L(\underline{\theta})+\rho(\underline{\theta})} d\underline{\theta}}{\int_{\Omega} e^{L(\underline{\theta})+\rho(\underline{\theta})} d\underline{\theta}} \qquad (2-60)$$

إذ أن :

$L(\underline{\theta})$: لوغاريتم دالة الأمكان الاعظم.

$\rho(\underline{\theta})$:لوغاريتم دالة التوزيع السابق للمعلمة $(\underline{\theta})$.

$u(\underline{\theta})$:اي دالة للمعلمة $(\underline{\theta})$.

وقد أقترح الباحث ليندلي الصيغة الآتية لحل التكاملات الناتجة عن صيغة بيز وكالآتي:

$$E[u(\underline{\theta})/x] = u(\hat{\theta}) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}[u_{ij} + 2u_i\rho_j]\,\sigma_{ij} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} L_{ijk} u_l \sigma_{ij}\sigma_{kl} \qquad (2-61)$$

$$L_{ijk} = \frac{\partial^3 L(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}_1 \partial \underline{\theta}_2 \partial \underline{\theta}_3} |_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}} \qquad i, j, k = 1, 2, 3 \qquad (2-62)$$

$$\partial \underline{\theta}_1 = \partial m$$

$$\partial \underline{\theta}_2 = \partial \alpha$$

$$\partial \underline{\theta}_3 = \partial \beta$$

$$\sigma_{ij} = -\left(\frac{\partial^2 L(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}_i \partial \underline{\theta}_j} |_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}} \right)^{-1} \theta_1 = \beta; \theta_2 = \alpha; \theta_3 = m \ , i.j = 1, 2, 3 \qquad (2-63)$$

$$\rho = \mathrm{Log}\left(\pi(\underline{\theta})\right) = \mathrm{Log}\left(\binom{n}{m} p^m (q)^{n-m} \binom{n}{\alpha} p^{\alpha} (q)^{n-\alpha} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} \right) \qquad (2-64)$$

$$\rho_i = \frac{\partial \log(\rho)}{\partial \underline{\theta}_i} \qquad i = 1, 2, 3 \qquad (2-65)$$

$$u_i = \frac{\partial u(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}_i} \qquad i = 1, 2, 3 \qquad (2-66)$$

$$u_{ij} = \frac{\partial u^2}{\partial \underline{\theta}_i \partial \underline{\theta}_j} \qquad i.j = 1, 2, 3 \qquad (2-67)$$

وللحصول على مقدر بيز القياسي للمعلمة في ظل دالة خسارة تربيعية وعلى فرض ان:

$$u(m)=\int_{m}(m-\widehat{m})^{2}\left(\frac{\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{x_i}\binom{mxi}{x_i-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^{j}\right]\binom{n}{m}p^{m}(q)^{n-m}}{\int_{m}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{x_i}\binom{mxi}{x_i-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^{j}\right]\binom{n}{m}p^{m}(q)^{n-m}dm}\right)dm \qquad (2-68)$$

$$u(\alpha)=\int_{\alpha}(\alpha-\widehat{\alpha})^{2}\frac{\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\binom{n}{\alpha}p^{\alpha}(q)^{n-\alpha}}{\int_{\alpha}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\binom{n}{\alpha}p^{\alpha}(q)^{n-\alpha}d\alpha}d\alpha \qquad (2-69)$$

$$u(\beta)=\int_{\beta}\left(\beta-\widehat{\beta}\right)^{2}\frac{\beta^{n}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\Gamma\left(\frac{xi+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}}{\int_{\beta}\beta^{n}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\Gamma\left(\frac{xi+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}d\beta}d\beta \qquad (2-70)$$

وباشتقاق المعادلات (2-68)(2-69)(2-70) للمعلمات (m,α,β) :

$$\mathbf{u}_m = \frac{du_m\left[\int_m (\mathbf{m}-\widehat{\mathbf{m}})^2\left(\frac{\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{x_i}\binom{mxi}{x-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^j\right]\binom{n}{m}p^m(q)^{n-m}}{\int_m\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{x_i}\binom{mxi}{x-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^j\right]\binom{n}{m}p^m(q)^{n-m}dm}\right)dm\right]}{\partial m}$$

$$\mathbf{u}_\alpha = \frac{du_\alpha\left[\int_\alpha (\alpha-\widehat{\alpha})^2\frac{\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\binom{n}{\alpha}p^\alpha(q)^{n-\alpha}}{\int_\alpha\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\binom{n}{\alpha}p^\alpha(q)^{n-\alpha}d\alpha}d\alpha\right]}{\partial\alpha}$$

$$\mathbf{u}_\beta = \frac{du_\beta\left[\int_\beta\left(\beta-\widehat{\beta}\right)^2\frac{\beta^n\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}\right)\Gamma(\beta)}\right]\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}}{\int_\beta\beta^n\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}\right)\Gamma(\beta)}\right]\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}d\beta}d\beta\right]}{\partial\beta}$$

$$\mathbf{u}_{m\alpha}=\frac{\partial^{2}\left[\int_{m}(m-\hat{m})^{2}\left(\frac{\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{x_i}\binom{mxi}{x_i-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^{j}\right]\binom{n}{m}p^{m}(q)^{n-m}}{\int_{m}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{x_i}\binom{mxi}{x_i-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^{j}\right]\binom{n}{m}p^{m}(q)^{n-m}dm}\right)dm\right]}{\partial m\partial\alpha}$$

$$\frac{\left[\left[\int_{\alpha}(\alpha-\hat{\alpha})^{2}\frac{\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}\right)\Gamma(\beta)}\right]\binom{n}{\alpha}p^{\alpha}(q)^{n-\alpha}}{\int_{\alpha}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\binom{n}{\alpha}p^{\alpha}(q)^{n-\alpha}d\alpha}d\alpha\right]\right]}{\partial m\partial\alpha}$$

$$\mathbf{u}_{m\alpha}=\mathbf{u}_{\alpha m}$$

$$\mathbf{u}_{\alpha\alpha}=\frac{\partial^{2}\left[\left[\int_{\alpha}(\alpha-\hat{\alpha})^{2}\frac{\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\binom{n}{\alpha}p^{\alpha}(q)^{n-\alpha}}{\int_{\alpha}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\binom{n}{\alpha}p^{\alpha}(q)^{n-\alpha}d\alpha}d\alpha\right]\right]}{(\partial\alpha)^{2}}$$

$$\mathbf{u}_{\mathbf{m}\boldsymbol{\beta}}=\frac{\partial^2\left[\int_m (m-\widehat{m})^2\left(\frac{\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{x_i}\binom{mxi}{x_i-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^j\right]\binom{n}{m}p^m(q)^{n-m}}{\int_m\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{x_i}\binom{mxi}{x_i-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^j\right]\binom{n}{m}p^m(q)^{n-m}dm}\right)dm\right]}{\partial m\partial\beta}$$

$$\frac{\left[\int_\beta(\beta-\widehat{\beta})^2\frac{\beta^n\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}}{\int_\beta\beta^n\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}d\beta}d\beta\right]}{\partial m\partial\beta}$$

$$\mathbf{u}_{\mathbf{m}\boldsymbol{\beta}}=\mathbf{u}_{\boldsymbol{\beta}\mathbf{m}}$$

$$\mathbf{u}_{\boldsymbol{\alpha\beta}}=\frac{\partial^2\left[\int_\beta(\beta-\widehat{\beta})^2\frac{\beta^n\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}}{\int_\beta\beta^n\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}d\beta}d\beta\right]}{\partial\alpha\partial\beta}$$

$$\frac{\left[\int_{\alpha}(\alpha-\hat{\alpha})^{2}\frac{\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\binom{n}{\alpha}p^{\alpha}(q)^{n-\alpha}}{\int_{\alpha}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\binom{n}{\alpha}p^{\alpha}(q)^{n-\alpha}d\alpha}d\alpha\right]}{\partial\alpha\partial\beta}$$

$$u_{\alpha\beta}=u_{\beta\alpha}$$

$$u_{\beta\beta}=\frac{\partial^{2}\left[\int_{\beta}\left(\beta-\hat{\beta}\right)^{2}\frac{\beta^{n}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}}{\int_{\beta}\beta^{n}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}d\beta}d\beta\right]}{(\partial\beta)^{2}}$$

$$L_{m\alpha\beta}=\frac{\partial^{3}\beta^{n}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{x_i}\binom{mxi}{x_i-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^{j}\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]}{\partial m\partial\alpha\partial\beta}$$

$$\mathbf{L_{m\beta\alpha}} = \frac{\partial^3 \beta^n \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{x_i} \binom{mxi}{x_i-1} \sum_{j=0}^{mxi-xi+1} \binom{mxi-xi+1}{j} (-1)^j \frac{\Gamma\left((\beta) + \left(\frac{x_i+j-1}{\alpha} + 1 \right) \right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha} + 1 \right) \Gamma(\beta)} \right]}{\partial m \partial \beta \partial \alpha}$$

$$\mathbf{L_{m\alpha\beta}} = \frac{\partial^3 \beta^n \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{x_i} \binom{mxi}{x_i-1} \sum_{j=0}^{mxi-xi+1} \binom{mxi-xi+1}{j} (-1)^j \frac{\Gamma\left((\beta) + \left(\frac{x_i+j-1}{\alpha} + 1 \right) \right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha} + 1 \right) \Gamma(\beta)} \right]}{\partial m \partial \alpha \partial \beta}$$

$$\mathbf{L_{\beta m\alpha}} = \frac{\partial^3 \beta^n \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{x_i} \binom{mxi}{x_i-1} \sum_{j=0}^{mxi-xi+1} \binom{mxi-xi+1}{j} (-1)^j \frac{\Gamma\left((\beta) + \left(\frac{x_i+j-1}{\alpha} + 1 \right) \right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha} + 1 \right) \Gamma(\beta)} \right]}{\partial \beta \partial m \partial \alpha}$$

$$\mathbf{L_{\alpha\beta m}} = \frac{\partial^3 \beta^n \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{x_i} \binom{mxi}{x_i-1} \sum_{j=0}^{mxi-xi+1} \binom{mxi-xi+1}{j} (-1)^j \frac{\Gamma\left((\beta) + \left(\frac{x_i+j-1}{\alpha} + 1 \right) \right)}{\Gamma\left(\frac{x+j-1}{\alpha} + 1 \right) \Gamma(\beta)} \right]}{\partial \alpha \partial \beta \partial m}$$

$$L_{\alpha\beta m}=\frac{\partial^{3}\beta^{n}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{x_i}\binom{mxi}{x_i-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^{j}\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]}{\partial\alpha\partial\beta\partial m}$$

$$L_{\beta\alpha m}=\frac{\partial^{3}\beta^{n}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{x_i}\binom{mxi}{x_i-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^{j}\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]}{\partial\beta\partial\alpha\partial m}$$

$$L_{mm\alpha}=\frac{\partial^{3}\beta^{n}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{x_i}\binom{mxi}{x_i-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^{j}\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]}{\partial m\partial m\partial\alpha}$$

$$L_{\beta\beta\alpha}=\frac{\partial^{3}\beta^{n}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{x_i}\binom{mxi}{x_i-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^{j}\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]}{\partial\beta\partial\beta\partial\alpha}$$

$$L_{\beta\alpha\beta}=\frac{\partial^{3}\beta^{n}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{x_i}\binom{mxi}{x_i-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^{j}\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]}{\partial\beta\partial\alpha\partial\beta}$$

$$L_{\alpha\beta\beta}=\frac{\partial^{3}\beta^{n}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{x_i}\binom{mxi}{x_i-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^{j}\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]}{\partial\alpha\partial\beta\partial\beta}$$

$$L_{mm\beta}=\frac{\partial^{3}\beta^{n}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{x_i}\binom{mxi}{x_i-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^{j}\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]}{\partial m\partial m\partial\beta}$$

$$L_{m\beta m}=\frac{\partial^{3}\beta^{n}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{x_i}\binom{mxi}{x_i-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^{j}\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]}{\partial m\partial\beta\partial m}$$

$$\mathbf{L}_{\beta mm}=\frac{\partial^{3}\beta^{n}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{x_i}\binom{mxi}{x_i-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^{j}\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]}{\partial\beta\partial m\partial m}$$

$$\mathbf{L}_{\alpha\beta\beta}=\frac{\partial^{3}\beta^{n}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^{j}\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]}{\partial\alpha\partial\beta\partial\beta}$$

$$\mathbf{L}_{\beta\alpha\beta}=\frac{\partial^{3}\beta^{n}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x_i-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^{j}\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]}{\partial\beta\partial\alpha\partial\beta}$$

$$\mathbf{L}_{\beta\alpha\alpha}=\frac{\partial^{3}\beta^{n}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x_i-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^{j}\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]}{\partial\beta\partial\alpha\partial\alpha}$$

$$\mathbf{L}_{\beta\beta\beta}=\frac{\partial^{3}\beta^{n}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x_i-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^{j}\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]}{\partial\beta\partial\beta\partial\beta}$$

$$\rho_{m}=\frac{\partial \mathrm{Log}\left(\binom{n}{m}p^{m}(q)^{n-m}\binom{n}{\alpha}p^{\alpha}(q)^{n-\alpha}\frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)}\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}\right)}{\partial m}$$

$$\rho_{\alpha}=\frac{\partial \mathrm{Log}\left(\binom{n}{m}p^{m}(q)^{n-m}\binom{n}{\alpha}p^{\alpha}(q)^{n-\alpha}\frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)}\beta^{c-1}(1-)^{d-1}\right)}{\partial\alpha}$$

$$\rho_{\beta}=\frac{\partial \mathrm{Log}\left(\binom{n}{m}p^{m}(q)^{n-m}\binom{n}{\alpha}p^{\alpha}(q)^{n-\alpha}\frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)}\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}\right)}{\partial\beta}$$

$$\sigma_{mm} = -\left(\frac{\partial^2 \beta^n \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{xi} \binom{mxi}{x-1} \sum_{j=0}^{mxi-xi+1} \binom{mxi-xi+1}{j} (-1)^j \frac{\Gamma\left((\beta) + \left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1\right) \Gamma(\beta)} \right]}{\partial m \partial m} \right)^{-1}$$

$$\sigma_{m\alpha} = -\left(\frac{\partial^2 \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{xi} \binom{mxi}{x-1} \sum_{j=0}^{mxi-xi+1} \binom{mxi-xi+1}{j} (-1)^j \frac{\Gamma\left((\beta) + \left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1\right) \Gamma(\beta)} \right]}{\partial m \partial \alpha} \right)^{-1}$$

$$\sigma_{m\beta} = -\left(\frac{\partial^2 \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^j \frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]}{\partial m \partial \beta}\right)^{-1}$$

$$\sigma_{\alpha m} = -\left(\frac{\partial^2 \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1) \frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]}{\partial \alpha \partial m}\right)^{-1}$$

$$\sigma_{\alpha\alpha} = -\left(\frac{\partial^2 \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^j \frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]}{\partial\alpha\partial\alpha}\right)^{-1}$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = -\left(\frac{\partial^2 \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^j \frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]}{\partial\alpha\partial\beta}\right)^{-1}$$

$$\sigma_{\beta m}=-\left(\frac{\partial^2\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^j\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]}{\partial\beta\partial m}\right)^{-1}$$

$$\sigma_{\beta\beta}=-\left(\frac{\partial^2\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]}{\partial\beta\partial\beta}\right)^{-1}$$

أما تقدير بيز(Bayes Estimate) للمعلمة (m) باعتماد على الدوال سابقة الذي تمت الإشارة إليها سابقا في المعادلة (2-28) وعلى فرض ان $u(m;\alpha;\beta)=m$ فإن المعادلة (2- 34) تكون كالآتي:

$$\begin{aligned}\hat{m}_{SBSEL} = \hat{m}_{ML} &+ u_m\rho_m\sigma_{mm} + u_m\rho_\alpha\sigma_{m\alpha} + u_m\rho_\beta\sigma_{m\beta} + 0.5L_{\alpha\beta m}u_m\sigma_{\alpha\beta}\sigma_{mm} + 0.5L_{\alpha\beta\beta}u_m\sigma_{\alpha\beta}\sigma_{\beta m}\\ &+ 0.5L_{\beta mm}u_m\sigma_{\beta m}\sigma_{mm} + 0.5L_{\beta m\alpha}u_m\sigma_{\beta m}\sigma_{\alpha m} + 0.5L_{\beta m\beta}u_m\sigma^2_{\beta m} + 0.5L_{\beta\alpha m}u_m\sigma_{\beta\alpha}\sigma_{mm}\\ &+ 0.5L_{\beta\alpha\beta}u_m\sigma_{\beta\alpha}\sigma_{\beta m} + 0.5L_{\beta\beta m}u_m\sigma_{\beta\beta}\sigma_{m\beta} + 0.5L_{\beta\beta\alpha}u_m\sigma_{\beta\beta}\sigma_{\alpha m} + 0.5L_{\beta\beta\beta}u_m\sigma_{\beta\beta}\sigma_{\beta m}\\ &+ 0.5L_{mmm}u_m\sigma^2_{mm} + 0.5L_{mm\alpha}u_m\sigma_{mm}\sigma_{\alpha m} + 0.5L_{mm\beta}u_m\sigma_{mm}\sigma_{\beta m}\end{aligned}$$

إذ أن:

$$u_\alpha = u_\beta = u_{m\alpha} = u_{m\beta} = u_{\alpha\beta} = u_{\alpha\alpha} = u_{\beta\beta} = u_{\alpha m} = u_{\beta m} = u_{\beta\alpha} = 0$$

$$L_{m\alpha\beta} = L_{m\beta\alpha} = L_{\alpha m\beta} = L_{\alpha\beta m} = L_{\beta m\alpha} = L_{\beta\alpha m}$$

$$L_{mm\alpha} = L_{m\alpha m} = L_{\alpha mm} = 0$$

$$L_{\beta\beta m} = L_{\beta m\beta} = L_{m\beta\beta} = 0$$

$$L_{mm\beta} = L_{m\beta m} = L_{\beta mm}$$

$$L_{\alpha\beta\beta} = L_{\beta\alpha\beta} = L_{\beta\alpha\alpha}$$

$$\rho_m = -\frac{1}{\gamma_m}; \rho_{\ni\alpha} = -\frac{1}{\gamma_2}; \rho_3 = -\frac{1}{\gamma_3}$$

أما تقدير بيز(Bayes Estimate) للمعلمة (α) باعتماد على الدوال سابقة الذي تمت الإشارة إليها سابقا في المعادلة (2-29) وعلى فرض ان $u(\alpha; m; \beta) = \alpha$ فإن المعادلة (2-35) تكون كالآتي:

$$\hat{\alpha}_{SBSEL} = \alpha_{ML} + 0.5L_{\alpha\beta\beta}u_{\beta}\sigma_{\alpha\beta}\sigma_{\beta\beta} + 0.5L_{\beta mm}u_{\beta}\sigma_{\beta m}\sigma_{m\beta} + 0.5L_{\beta m\alpha}u_{\beta}\sigma_{\beta m}\sigma_{\alpha\beta} + 0.5L_{\beta m\beta}u_{\beta}\sigma_{\beta m}\sigma_{\beta\beta}$$
$$+ 0.5L_{\beta\alpha m}u_{\beta}\sigma_{\beta\alpha}\sigma_{m\beta} + 0.5L_{\beta\alpha\alpha}u_{\beta}\sigma_{\beta\alpha}\sigma_{\alpha\beta} + 0.5L_{\beta\alpha\beta}u_{\beta}\sigma_{\beta\alpha}\sigma_{\beta\beta} + 0.5L_{\beta\beta m}u_{\beta}\sigma_{\beta\beta}\sigma_{m\beta}$$
$$+ 0.5L_{\beta\beta\alpha}u_{\beta}\sigma_{\beta\beta}\sigma_{\alpha\beta} + 0.5L_{\beta\beta\beta}u_{\beta}\sigma^{\alpha}{}_{\beta\beta} + 0.5\sigma_{mm}u_{mm} + 0.5\sigma_{m\alpha}u_{m\alpha} + 0.5\sigma_{m\beta}u_{m\beta} + 0.5\sigma_{\alpha m}u_{\alpha m}$$
$$+ 0.5\sigma_{\alpha\alpha}u_{\alpha\alpha} + 0.5\sigma_{\alpha\beta}u_{\alpha\beta} + 0.5\sigma_{\beta m}u_{\beta m} + 0.5\sigma_{\beta\alpha}u_{\beta\alpha} + 0.5\sigma_{\beta\beta}u_{\beta\beta} + \sigma_{\beta m}u_{\beta}\rho_{m} + \sigma_{\beta\alpha}u_{\beta}\rho_{\alpha}$$
$$+ \sigma_{\beta\beta}u_{\beta}\rho_{\beta} + 0.5L_{mm\alpha}u_{\beta}\sigma_{mm}\sigma_{\alpha\beta} + 0.5L_{m\alpha m}u_{\alpha}\sigma^{\alpha}_{m\alpha} + 0.5L_{m\alpha m}u_{\beta}\sigma_{m\alpha}\sigma_{m\beta} + 0.5L_{m\alpha\alpha}u_{\beta}\sigma_{m\alpha}\sigma_{\alpha\beta}$$
$$+ 0.5L_{m\alpha\beta}u_{\beta}\sigma_{m\alpha}\sigma_{\beta\beta} + 0.5L_{m\beta m}u_{\beta}\sigma^{\alpha}_{m\beta} + 0.5L_{m\beta\alpha}u_{m}\sigma_{m\beta}\sigma_{\alpha m}$$
$$+ 0.5L_{m\beta\alpha}u_{\alpha}\sigma_{m\beta}\sigma_{\alpha\alpha+}0.5L_{m\beta\alpha}u_{\beta}\sigma_{m\beta}\sigma_{\alpha\beta}$$

$$u_{\alpha} = u_{\beta} = u_{m\alpha} = u_{m\beta} = u_{\alpha\beta} = u_{\alpha\alpha} = u_{\beta\beta} = u_{\alpha m} = u_{\beta m} = u_{\beta\alpha} = 0$$

$$L_{m\alpha\beta} = L_{m\beta\alpha} = L_{\alpha m\beta} = L_{\alpha\beta m} = L_{\beta m\alpha} = L_{\beta\alpha m}$$

$$L_{mm\alpha} = L_{m\alpha m} = L_{\alpha mm} = 0$$

$$L_{\beta\beta\alpha} = L_{\beta\alpha\beta} = L_{\alpha\beta\beta} = 0$$

$$L_{\beta\alpha\beta} = L_{\beta\alpha\alpha}L_{mm\beta} = L_{m\beta m} = L_{\beta mm}$$

أما تقدير بيز(Bayes Estimate) للمعلمة (β) باعتماد على الدوال سابقة الذي تمت الإشارة إليها سابقا في المعادلة (2-30) وعلى فرض ان $u(b; m; \alpha) = \beta$ فإن المعادلة (2- 36) تكون كالآتي:

$$\hat{\beta}_{SBSEL} = \hat{\beta}_{ML} + 0.5L_{\beta\alpha\beta}u_{\alpha}\sigma_{\beta\alpha}^{\alpha} + 0.5L_{\beta\beta m}u_{\alpha}\sigma_{\beta\beta}\sigma_{m\alpha} + 0.5 \quad {}_{\beta\beta\alpha}u_{\alpha}\sigma_{\beta\beta}\sigma_{\alpha\alpha} + 0.5L_{\beta\beta\beta}u_{\alpha}\sigma_{\beta\beta}\sigma_{\beta\alpha}$$
$$+ 0.5L_{mmm}u_{\alpha}\sigma_{mm}\sigma_{m\alpha} + 0.5L_{mm\alpha}u_{\alpha}\sigma_{mm}\sigma_{\alpha\alpha} + 0.5L_{mm\beta}u_{\alpha}\sigma_{mm}\sigma_{\beta\alpha} + 0.5L_{m\alpha m}u_{\alpha}\sigma_{m\alpha}^{\alpha}$$
$$+ 0.5L_{m\alpha\alpha}u_{\alpha}\sigma_{m\alpha}\sigma_{\alpha\alpha} + 0.5L_{m\alpha\beta}u_{\alpha}\sigma_{m\alpha}\sigma_{\beta\alpha} + 0.5L_{m\beta m}u_{\alpha}\sigma_{m\beta}\sigma_{m\alpha} + 0.5L_{m\beta\alpha}u_{\alpha}\sigma_{m\beta}\sigma_{\alpha\alpha}$$
$$+ 0.5L_{m\beta\beta}u_{\alpha}\sigma_{m\beta}\sigma_{\beta\alpha} + 0.5L_{\alpha mm}u_{\alpha}\sigma_{\alpha m}\sigma_{m\alpha} + 0.5L_{\alpha m\alpha}u_{\alpha}\sigma_{\alpha m}\sigma_{\alpha\alpha} + 0.5L_{\alpha m\beta}u_{\alpha}\sigma_{\alpha m}\sigma_{\beta\alpha}$$
$$+ 0.5L_{\alpha\alpha m}u_{\alpha}\sigma_{\alpha\alpha}\sigma_{\beta\alpha} + 0.5L_{\alpha\alpha\alpha}u_{\alpha}\sigma_{\alpha\alpha}^{\alpha} + 0.5L_{\alpha\alpha\beta}u_{\alpha}\sigma_{\alpha\alpha}\sigma_{\beta\alpha} + 0.5L_{\alpha\beta m}u_{\alpha}\sigma_{\alpha\beta}\sigma_{m\alpha}$$
$$+ 0.5L_{\alpha\beta\alpha}u_{\alpha}\sigma_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\alpha}$$

$$u_{\alpha} = u_{\beta} = u_{m\alpha} = u_{m\beta} = u_{\alpha\beta} = u_{\alpha\alpha} = u_{\beta\beta} = u_{\alpha m} = u_{\beta m} = u_{\beta\alpha} = 0$$

$$L_{m\alpha\beta} = L_{m\beta\alpha} = L_{\alpha m\beta} = L_{\alpha\beta m} = L_{\beta m\alpha} = L_{\beta\alpha m}$$

$$L_{mm\alpha} = L_{m\alpha m} = L_{\alpha mm} = 0$$

$$L_{\beta\beta\alpha} = L_{\beta\alpha\beta} = L_{\alpha\beta\beta} = 0$$

$$L_{\beta\alpha\beta} = L_{\beta\alpha\alpha}L_{mm\beta} = L_{m\beta m} = L_{\beta mm}$$

وللحصول على مقدر بيز القياسي للمعلمات في ظل دالة خسارة انتروبي عامة وعلى فرض ان:

$$\mathrm{u(m)} = \left[\int_m \left(\left(\frac{\hat{m}}{m}\right)^q - q\log\frac{\hat{m}}{m} - 1\right) \frac{\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^j\right]\binom{n}{m}p^m(q)^{n-m}}{\int_m \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^j\right]\binom{n}{m}p^m(q)^{n-m}dm}\mathrm{dm}\right] \quad (2-71)$$

$$\mathbf{u}(\boldsymbol{\alpha}) = \left[\int_{\alpha} \left(\left(\frac{\widehat{\alpha}}{\alpha}\right)^{q} - q\,\log\frac{\widehat{\alpha}}{\alpha} - 1 \right) \frac{\prod_{i=1}^{n} \left[\frac{\Gamma\left((\beta) + \left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1\right)\Gamma(\beta)} \right] \binom{n}{\alpha} p^{\alpha} q^{n-\alpha}}{\int_{\alpha} \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{\Gamma\left((\beta) + \left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1\right)\Gamma(\beta)} \right] \binom{n}{\alpha} p^{\alpha} q^{n-\alpha} d\alpha} d\alpha \right] \quad (2-72)$$

$$\mathbf{u}(\boldsymbol{\beta}) = \left[\int_{\beta} \left(\left(\frac{\widehat{\beta}}{\beta}\right)^{q} - q\,\log\frac{\widehat{\beta}}{\beta} - 1 \right) \frac{\beta^{n} \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{\Gamma\left((\beta) + \left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1\right)\Gamma(\beta)} \right] \beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}}{\int_{\beta} \beta^{n} \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{\Gamma\left((\beta) + \left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1\right)\Gamma(\beta)} \right] \beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1} d\beta} d\beta \right] \quad (2-73)$$

وبأشتقاق المعادلات (2-71)(2-72)(2-73) للمعلمات (m,α,β):

$$\mathbf{u}_m = \frac{du_m \left[\left[\int_m \left(\left(\frac{\widehat{m}}{m} \right)^q - q \log \frac{\widehat{m}}{m} - 1 \right) \frac{\prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{xi} \binom{mxi}{x-1} \sum_{j=0}^{mxi-xi+1} \binom{mxi-xi+1}{j} (-1)^j \right] \binom{n}{m} p^m (q)^{n-m}}{\int_m \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{xi} \binom{mxi}{x-1} \sum_{j=0}^{mxi-xi+1} \binom{mxi-xi+1}{j} (-1)^j \right] \binom{n}{m} p^m (q)^{n-m} dm} \, \mathrm{dm} \right] \right]}{\partial \mathrm{m}}$$

$$\mathbf{u}_\alpha = \frac{du_\alpha \left[\int_\alpha \left(\left(\frac{\widehat{\alpha}}{\alpha} \right)^q - q \log \frac{\widehat{\alpha}}{\alpha} - 1 \right) \frac{\prod_{i=1}^{n} \left[\frac{\Gamma\left((\beta) + \left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1 \right) \right)}{\Gamma\left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1 \right) \Gamma(\beta)} \right] \binom{n}{\alpha} p^\alpha q^{n-\alpha}}{\int_\alpha \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{\Gamma\left((\beta) + \left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1 \right) \right)}{\Gamma\left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1 \right) \Gamma(\beta)} \right] \binom{n}{\alpha} p^\alpha q^{n-\alpha} d\alpha} \, d\alpha \right]}{\partial \alpha}$$

$$\mathbf{u}_{\beta}=\frac{du_{\beta}\left[\left[\int_{\beta}\left(\left(\frac{\hat{\beta}}{\beta}\right)^{q}-q\log\frac{\hat{\beta}}{\beta}-1\right)\frac{\beta^{n}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}}{\int_{\beta}\beta^{n}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}d\beta}d\beta\right]\right]}{\partial\beta}$$

$$\mathbf{u}_{m\alpha}=\frac{\partial^{2}\left[\int_{m}\left(\left(\frac{\hat{m}}{m}\right)^{q}-q\log\frac{\hat{m}}{m}-1\right)\frac{\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^{j}\right]\binom{n}{m}p^{m}(q)^{n-m}}{\int_{m}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^{j}\right]\binom{n}{m}p^{m}(q)^{n-m}dm}\,\mathrm{d}m\right]}{\partial m\partial\alpha}$$

$$\frac{\left[\int_{\alpha}\left(\left(\frac{\hat{\alpha}}{\alpha}\right)^{q}-q\log\frac{\hat{\alpha}}{\alpha}-1\right)\frac{\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\binom{n}{\alpha}p^{\alpha}q^{n-\alpha}}{\int_{\alpha}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\binom{n}{\alpha}p^{\alpha}q^{n-\alpha}d\alpha}d\alpha\right]}{\partial m\partial\alpha}$$

$$\mathbf{u}_{m\alpha}=\mathbf{u}_{\alpha m}$$

$$\mathbf{u}_{\alpha\alpha}=\frac{\partial^2\left[\left[\int_\alpha\left(\left(\frac{\hat{\alpha}}{\alpha}\right)^q-q\log\frac{\hat{\alpha}}{\alpha}-1\right)\frac{\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^j\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\binom{n}{\alpha}p^\alpha q^{n-\alpha}}{\int_\alpha\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^j\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\binom{n}{\alpha}p^\alpha q^{n-\alpha}d\alpha}d\alpha\right]\right]}{(\partial\alpha)^2}$$

$$\mathbf{u}_{m\beta}=\frac{\partial^2\left[\int_m\left(\left(\frac{\hat{m}}{m}\right)^q-q\log\frac{\hat{m}}{m}-1\right)\frac{\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^j\right]\binom{n}{m}p^m(q)^{n-m}}{\int_m\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^j\right]\binom{n}{m}p^m(q)^{n-m}dm}\mathbf{dm}\right]}{\partial m\partial\beta}$$

$$\frac{\left[\left[\int_\beta\left(\left(\frac{\hat{\beta}}{\beta}\right)^q-q\log\frac{\hat{\beta}}{\beta}-1\right)\frac{\beta^n\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}}{\int_\beta\beta^n\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}d\beta}d\beta\right]\right]}{\partial m\partial\beta}$$

$$\mathbf{u}_{m\beta}=\mathbf{u}_{\beta m}$$

$$u_{\alpha\beta}=\frac{\partial^2\left[\int_\alpha\left(\left(\frac{\hat{\alpha}}{\alpha}\right)^q-q\log\frac{\hat{\alpha}}{\alpha}-1\right)\frac{\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\binom{n}{\alpha}p^\alpha q^{n-\alpha}}{\int_\alpha\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\binom{n}{\alpha}p^\alpha q^{n-\alpha}d\alpha}d\alpha\right]}{\partial\alpha\partial\beta}$$

$$\frac{\left[\left[\int_\beta\left(\left(\frac{\hat{\beta}}{\beta}\right)^q-q\log\frac{\hat{\beta}}{\beta}-1\right)\frac{\beta^n\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}}{\int_\beta\beta^n\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}d\beta}d\beta\right]\right]}{\partial\alpha\partial\beta}$$

$$u_{\alpha\beta}=u_{\beta\alpha}$$

$$u_{\beta\beta} = \frac{\partial^2 \left[[\int_\beta \left(\left(\frac{\hat{\beta}}{\beta}\right)^q - q\, log \frac{\hat{\beta}}{\beta} - 1 \right) \frac{\beta^n \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{\Gamma\left((\beta) + \left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1 \right) \right)}{\Gamma\left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1 \right) \Gamma(\beta)} \right] \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1}}{\int_\beta \beta^n \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{\Gamma\left((\beta) + \left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1 \right) \right)}{\Gamma\left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1 \right) \Gamma(\beta)} \right] \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} d\beta} d\beta] \right]}{(\partial\beta)^2}$$

$$\frac{\left[[\int_\beta \left(\left(\frac{\hat{\beta}}{\beta}\right)^q - q\, log \frac{\hat{\beta}}{\beta} - 1 \right) \frac{\beta^n \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{\Gamma\left((\beta) + \left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1 \right) \right)}{\Gamma\left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1 \right) \Gamma(\beta)} \right] \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1}}{\int_\beta \beta^n \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{\Gamma\left((\beta) + \left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1 \right) \right)}{\Gamma\left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1 \right) \Gamma(\beta)} \right] \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} d\beta} d\beta] \right]}{(\partial\beta)^2}$$

$$\mathbf{L_{m\alpha\beta}} = \frac{\partial^3 \beta^n \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{xi} \binom{mxi}{x-1} \sum_{j=0}^{mxi-xi+1} \binom{mxi-xi+1}{j} (-1)^j \frac{\Gamma\left((\beta) + \left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1 \right) \right)}{\Gamma\left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1 \right) \Gamma(\beta)} \right]}{\partial m \partial \alpha \partial \beta}$$

$$\mathbf{L_{m\beta\alpha}} = \frac{\partial^3 \beta^n \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{xi} \binom{mxi}{x-1} \sum_{j=0}^{mxi-xi+1} \binom{mxi-xi+1}{j} (-1)^j \frac{\Gamma\left((\beta) + \left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1 \right) \right)}{\Gamma\left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1 \right) \Gamma(\beta)} \right]}{\partial m \partial \beta \partial \alpha}$$

$$\mathbf{L_{\beta m\alpha}} = \frac{\partial^3 \beta^n \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{xi} \binom{mxi}{x-1} \sum_{j=0}^{mxi-xi+1} \binom{mxi-xi+1}{j} (-1)^j \frac{\Gamma\left((\beta) + \left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1 \right) \right)}{\Gamma\left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1 \right) \Gamma(\beta)} \right]}{\partial \beta \partial m \partial \alpha}$$

$$\mathbf{L_{\alpha\beta m}} = \frac{\partial^3 \beta^n \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{xi} \binom{mxi}{x-1} \sum_{j=0}^{mxi-xi+1} \binom{mxi-xi+1}{j} (-1)^j \frac{\Gamma\left((\beta) + \left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1 \right) \right)}{\Gamma\left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1 \right) \Gamma(\beta)} \right]}{\partial \alpha \partial \beta \partial m}$$

$$L_{\beta\alpha m}=\frac{\partial^3\beta^n\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^j\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]}{\partial\beta\partial\alpha\partial m}$$

$$L_{mm\alpha}=\frac{\partial^3\beta^n\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^j\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]}{\partial m\partial m\partial\alpha}$$

$$L_{\beta\beta\alpha}=\frac{\partial^3\beta^n\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^j\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]}{\partial\beta\partial\beta\partial\alpha}$$

$$L_{\beta\alpha\beta}=\frac{\partial^3\beta^n\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^j\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]}{\partial\beta\partial\alpha\partial\beta}$$

$$L_{\alpha\beta\beta}=\frac{\partial^3\beta^n\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^j\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]}{\partial\alpha\partial\beta\partial\beta}$$

$$L_{mm\beta}=\frac{\partial^3\beta^n\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^j\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]}{\partial m\partial m\partial\beta}$$

$$L_{m\beta m}=\frac{\partial^3\beta^n\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^j\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]}{\partial m\partial\beta\partial m}$$

$$L_{\beta mm}=\frac{\partial^3\beta^n\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^j\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]}{\partial\beta\partial m\partial m}$$

$$\mathbf{L}_{\alpha\beta\beta} = \frac{\partial^3 \beta^n \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{xi} \binom{mxi}{x-1} \sum_{j=0}^{mxi-xi+1} \binom{mxi-xi+1}{j} (-1)^j \frac{\Gamma\left((\beta) + \left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1\right)\Gamma(\beta)} \right]}{\partial\alpha\partial\beta\partial\beta}$$

$$\mathbf{L}_{\beta\alpha\beta} = \frac{\partial^3 \beta^n \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{xi} \binom{mxi}{x-1} \sum_{j=0}^{mxi-xi+1} \binom{mxi-xi+1}{j} (-1)^j \frac{\Gamma\left((\beta) + \left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1\right)\Gamma(\beta)} \right]}{\partial\beta\partial\alpha\partial\beta}$$

$$\mathbf{L}_{\beta\alpha\alpha} = \frac{\partial^3 \beta^n \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{xi} \binom{mxi}{x-1} \sum_{j=0}^{mxi-xi+1} \binom{mxi-xi+1}{j} (-1)^j \frac{\Gamma\left((\beta) + \left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1\right)\Gamma(\beta)} \right]}{\partial\beta\partial\alpha\partial\alpha}$$

$$\mathbf{L}_{\beta\beta\beta} = \frac{\partial^3 \beta^n \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{xi} \binom{mxi}{x-1} \sum_{j=0}^{mxi-xi+1} \binom{mxi-xi+1}{j} (-1)^j \frac{\Gamma\left((\beta) + \left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1\right)\Gamma(\beta)} \right]}{\partial\beta\partial\beta\partial\beta}$$

$$\rho_m = \frac{\partial \mathrm{Log}\left(\binom{n}{m} p^m (q)^{n-m} \binom{n}{\alpha} p^{\alpha} (q)^{n-\alpha} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1}\right)}{\partial m}$$

$$\rho_\alpha = \frac{\partial \mathrm{Log}\left(\binom{n}{m} p^m (q)^{n-m} \binom{n}{\alpha} p^{\alpha} (q)^{n-\alpha} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1}\right)}{\partial \alpha}$$

$$\rho_\beta = \frac{\partial \mathrm{Log}\left(\binom{n}{m} p^m (q)^{n-m} \binom{n}{\alpha} p^{\alpha} (q)^{n-\alpha} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1}\right)}{\partial \beta}$$

$$\sigma_{mm} = -\left(\frac{\partial^2 \beta^n \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{xi} \binom{mxi}{x-1} \sum_{j=0}^{mxi-xi+1} \binom{mxi-xi+1}{j} (-1)^j \frac{\Gamma\left((\beta) + \left(\frac{x_i+j-1}{\alpha} + 1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha} + 1\right)\Gamma(\beta)}\right]}{\partial m \partial m}\right)^{-1}$$

$$\sigma_{m\alpha} = -\left(\frac{\partial^2 \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)\ \frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]}{\partial m \partial \alpha}\right)^{-1}$$

$$\sigma_{m\beta} = -\left(\frac{\partial^2 \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^{j}\ \frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]}{\partial m \partial \beta}\right)^{-1}$$

$$\boldsymbol{\sigma_{\alpha m} = -\left(\frac{\partial^2 \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^j \frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]}{\partial\alpha\partial m}\right)^{-1}}$$

$$\boldsymbol{\sigma_{\alpha\alpha} = -\left(\frac{\partial^2 \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^j \frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]}{\partial\alpha\partial\alpha}\right)^{-1}}$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = -\left(\frac{\partial^2 \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)\ \frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]}{\partial\alpha\partial\beta}\right)^{-1}$$

$$\sigma_{\beta m} = -\left(\frac{\partial^2 \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^j\ \frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]}{\partial\beta\partial m}\right)^{-1}$$

$$\sigma_{\beta\beta} = -\left(\frac{\partial^2 \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^j \frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]}{\partial\beta\partial\beta}\right)^{-1}$$

أما تقدير بيز(Bayes Estimate) للمعلمة (m) باعتماد على الدوال سابقة الذي تمت الإشارة إليها سابقا في المعادلة (2-28) وعلى فرض ان $u(m;\alpha;\beta) = m$ فإن المعادلة (2- 34) تكون كالآتي:

$$\begin{aligned}\hat{m}_{SBEL} = \hat{m}_{ML} &+ u_m\rho_m\sigma_{mm} + u_m\rho_\alpha\sigma_{mm} + +u_m\rho_\beta\sigma_{m\beta} + 0.5L_{m\beta}u_m\sigma_{m\beta}\sigma_{mm} + 0.5L_{\alpha\beta\beta}u_m\sigma_{\alpha\beta}\sigma_{\beta m} \\ &+ 0.5L_{\beta mm}u_m\sigma_{\beta m}\sigma_{mm} + 0.5L_{\beta m\alpha}u_m\sigma_{\beta m}\sigma_{\alpha m} + 0.5L_{\beta m\beta}u_m\sigma_{\beta m}^2 + 0.5L_{\beta\alpha m}u_m\sigma_{\beta\alpha}\sigma_{mm} \\ &+ 0.5L_{\beta\alpha\beta}u_m\sigma_{\beta\alpha}\sigma_{\beta m} + 0.5L_{\beta\beta m}u_m\sigma_{\beta\beta}\sigma_{m\beta} + 0.5L_{\beta\beta\alpha}u_m\sigma_{\beta\beta}\sigma_{\alpha m} + 0.5L_{\beta\beta\beta}u_m\sigma_{\beta\beta}\sigma_{\beta m} \\ &+ 0.5L_{mmm}u_m\sigma_{mm}^2 + 0.5L_{mm\alpha}u_m\sigma_{mm}\sigma_{\alpha m} + 0.5L_{mm\beta}u_m\sigma_{mm}\sigma_{\beta m}\end{aligned}$$

إذ أن:

$$u_\alpha = u_\beta = u_{m\alpha} = u_{m\beta} = u_{\alpha\beta} = u_{\alpha\alpha} = u_{\beta\beta} = u_{\alpha m} = u_{\beta m} = u_{\beta\alpha} = 0$$

$$L_{m\alpha\beta} = L_{m\beta\alpha} = L_{\alpha m\beta} = L_{\alpha\beta m} = L_{\beta m\alpha} = L_{\beta\alpha m}$$

$$L_{mm\alpha} = L_{m\alpha m} = L_{\alpha mm} = 0$$

$$L_{\beta\beta m} = L_{\beta\alpha\beta} = L_{\alpha\beta\beta} = 0$$

$L_{mm\beta} = L_{m\beta m} = L_{\beta mm}$

$L_{\alpha\beta\beta} = L_{\beta\alpha\beta} = L_{\beta\alpha\alpha}$

$\rho_m = -\frac{1}{\gamma_m}; \rho_{\ni\alpha} = -\frac{1}{\gamma_2}; \rho_3 = -\frac{1}{\gamma_3}$

أما تقدير بيز(Bayes Estimate) للمعلمة (α) باعتماد على الدوال سابقة الذي تمت الإشارة إليها سابقا في المعادلة (2-29) وعلى فرض ان $u(\alpha; m; \beta) = \alpha$ فإن المعادلة (2-35) تكون كالآتي:

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_{SBEL} = \alpha_{ML} &+ 0.5L_{\alpha\beta\beta}u_\beta\sigma_{\alpha\beta}\sigma_{\beta\beta} + 0.5L_{\beta mm}u_\beta\sigma_{\beta m}\sigma_{m\beta} + 0.5L_{\beta m\alpha}u_\beta\sigma_{\beta m}\sigma_{\alpha\beta} + 0.5L_{\beta m\beta}u_\beta\sigma_{\beta m}\sigma_{\beta\beta}\\ &+ 0.5L_{\beta\alpha m}u_\beta\sigma_{\beta\alpha}\sigma_{m\beta} + 0.5L_{\beta\alpha\alpha}u_\beta\sigma_{\beta\alpha}\sigma_{\alpha\beta} + 0.5L_{\beta\alpha\beta}u_\beta\sigma_{\beta\alpha}\sigma_{\beta\beta} + 0.5L_{\beta\beta m}u_\beta\sigma_{\beta\beta}\sigma_{m\beta}\\ &+ 0.5L_{\beta\beta\alpha}u_\beta\sigma_{\beta\beta}\sigma_{\alpha\beta} + 0.5L_{\beta\beta\beta}u_\beta{\sigma^{\alpha}}_{\beta\beta} + 0.5\sigma_{mm}u_{mm} + 0.5\sigma_{m\alpha}u_{m\alpha} + 0.5\sigma_{m\beta}u_{m\beta} + 0.5\sigma_{\alpha m}u_{\alpha m}\\ &+ 0.5\sigma_{\alpha\alpha}u_{\alpha\alpha} + 0.5\sigma_{\alpha\beta}u_{\alpha\beta} + 0.5\sigma_{\beta m}u_{\beta m} + 0.5\sigma_{\beta\alpha}u_{\beta\alpha} + 0.5\sigma_{\beta\beta}u_{\beta\beta} + \sigma_{\beta m}u_\beta\rho_m + \sigma_{\beta\alpha}u_\beta\rho_\alpha\\ &+ \sigma_{\beta\beta}u_\beta\rho_\beta + 0.5L_{mm\alpha}u_\beta\sigma_{mm}\sigma_{\alpha\beta} + 0.5L_{m\alpha m}u_\alpha\sigma^{\alpha}_{m\alpha} + 0.5L_{m\alpha m}u_\beta\sigma_{m\alpha}\sigma_{m\beta} + 0.5L_{m\alpha\alpha}u_\beta\sigma_{m\alpha}\sigma_{\alpha\beta}\\ &+ 0.5L_{m\alpha\beta}u_\beta\sigma_{m\alpha}\sigma_{\beta\beta} + 0.5L_{m\beta m}u_\beta\sigma^{\alpha}_{m\beta} + 0.5L_{m\beta\alpha}u_m\sigma_{m\beta}\sigma_{\alpha m}\\ &+ 0.5L_{m\beta\alpha}u_\alpha\sigma_{m\beta}\sigma_{\alpha\alpha+}0.5L_{m\beta\alpha}u_\beta\sigma_{m\beta}\sigma_{\alpha\beta}\end{aligned}$$

$u_\alpha = u_\beta = u_{m\alpha} = u_{m\beta} = u_{\alpha\beta} = u_{\alpha\alpha} = u_{\beta\beta} = u_{\alpha m} = u_{\beta m} = u_{\beta\alpha} = 0$

$L_{m\alpha\beta} = L_{m\beta\alpha} = L_{\alpha m\beta} = L_{\alpha\beta m} = L_{\beta m\alpha} = L_{\beta\alpha m}$

$L_{mm\alpha} = L_{m\alpha m} = L_{\alpha mm} = 0$

$L_{\beta\beta\alpha} = L_{\beta\alpha\beta} = L_{\alpha\beta\beta} = 0$

$$L_{\beta\alpha\beta} = L_{\beta\alpha\alpha}L_{mm\beta} = L_{m\beta m} = L_{\beta mm}$$

أما تقدير بيز(Bayes Estimate) للمعلمة (β) باعتماد على الدوال سابقة الذي تمت الإشارة إليها سابقا في المعادلة (2-30) وعلى فرض ان $u(b;m;\alpha) = \alpha$ فإن المعادلة (2-36) تكون كالآتي:

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_{SBEL} = \hat{\beta}_{ML} &+ 0.5L_{\beta\alpha\beta}u_{\alpha}\sigma_{\beta\alpha}^{\alpha} + 0.5L_{\beta\beta m}u_{\alpha}\sigma_{\beta\beta}\sigma_{m\alpha} + 0.5L_{\beta\beta\alpha}u_{\alpha}\sigma_{\beta\beta}\sigma_{\alpha\alpha} + 0.5L_{\beta\beta\beta}u_{\alpha}\sigma_{\beta\beta}\sigma_{\beta\alpha}\\ &+ 0.5L_{mmm}u_{\alpha}\sigma_{mm}\sigma_{m\alpha} + 0.5L_{mm\alpha}u_{\alpha}\sigma_{mm}\sigma_{\alpha\alpha} + 0.5L_{mm\beta}u_{\alpha}\sigma_{mm}\sigma_{\beta\alpha} + 0.5L_{m\alpha m}u_{\alpha}\sigma_{m\alpha}^{\alpha}\\ &+ 0.5L_{m\alpha\alpha}u_{\alpha}\sigma_{m\alpha}\sigma_{\alpha\alpha} + 0.5L_{m\alpha\beta}u_{\alpha}\sigma_{m\alpha}\sigma_{\beta\alpha} + 0.5L_{m\beta m}u_{\alpha}\sigma_{m\beta}\sigma_{m\alpha} + 0.5L_{m\beta\alpha}u_{\alpha}\sigma_{m\beta}\sigma_{\alpha\alpha}\\ &+ 0.5L_{m\beta\beta}u_{\alpha}\sigma_{m\beta}\sigma_{\beta\alpha} + 0.5L_{\alpha mm}u_{\alpha}\sigma_{\alpha m}\sigma_{m\alpha} + 0.5L_{\alpha m\alpha}u_{\alpha}\sigma_{\alpha m}\sigma_{\alpha\alpha} + 0.5L_{\alpha m\beta}u_{\alpha}\sigma_{\alpha m}\sigma_{\beta\alpha}\\ &+ 0.5L_{\alpha\alpha m}u_{\alpha}\sigma_{\alpha\alpha}\sigma_{\beta\alpha} + 0.5L_{\alpha\alpha\alpha}u_{\alpha}\sigma_{\alpha\alpha}^{\alpha} + 0.5L_{\alpha\alpha\beta}u_{\alpha}\sigma_{\alpha\alpha}\sigma_{\beta\alpha} + 0.5L_{\alpha\beta m}u_{\alpha}\sigma_{\alpha\beta}\sigma_{m\alpha}\\ &+ 0.5L_{\alpha\beta\alpha}u_{\alpha}\sigma_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\alpha}\end{aligned}$$

$$u_{\alpha} = u_{\beta} = u_{m\alpha} = u_{m\beta} = u_{\alpha\beta} = u_{\alpha\alpha} = u_{\beta\beta} = u_{\alpha m} = u_{\beta m} = u_{\beta\alpha} = 0$$

$$L_{m\alpha\beta} = L_{m\beta\alpha} = L_{\alpha m\beta} = L_{\alpha\beta m} = L_{\beta m\alpha} = L_{\beta\alpha m}$$

$$L_{mm\alpha} = L_{m\alpha m} = L_{\alpha mm} = 0$$

$$L_{\beta\beta\alpha} = L_{\beta\alpha\beta} = L_{\alpha\beta\beta} = 0$$

$$L_{\beta\alpha\beta} = L_{\beta\alpha\alpha} = L_{mm\beta} = L_{m\beta m} = L_{\beta mm}$$

للحصول على مقدر توقع بيز للمعلمة ضمن دالة خسارة تربيعية وعلى فرض

$$u_m = \int_{m\alpha cd} u_{m_{SEL}}\pi^*(m,\alpha,c,d)\, dd\, dc\, d\alpha dm$$

$$= \int_{m\alpha cd} \left[\int_{\mathrm{m}} (\mathrm{m} - \hat{\mathrm{m}})^2 \left(\frac{\prod_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \left[\frac{1}{\mathrm{xi}} \binom{\mathrm{mxi}}{\mathrm{x-1}} \sum_{\mathrm{j=0}}^{\mathrm{mxi-xi+1}} \binom{\mathrm{mxi-xi+1}}{\mathrm{j}} (-1)^{\mathrm{j}} \right] \binom{n}{m} p^m (q)^{n-m}}{\int_{\mathrm{m}} \prod_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \left[\frac{1}{\mathrm{xi}} \binom{\mathrm{mxi}}{\mathrm{x-1}} \sum_{\mathrm{j=0}}^{\mathrm{mxi-xi+1}} \binom{\mathrm{mxi-xi+1}}{\mathrm{j}} (-1)^{\mathrm{j}} \right] \binom{n}{m} p^m (q)^{n-m} \mathrm{dm}} \right) \mathrm{dm} \right] \frac{1}{k_1 k_2 k_3 k_4} dd\, dc\, d\alpha\, dm$$

$$(2-74)$$

$$u_\alpha = \int_{m\alpha cd} u_{\alpha_{SEL}} \pi^*(m, \alpha, c, d)\, dd\, dc\, d\alpha\, dm$$

$$= \int_{m\alpha cd} \left[\int_{\alpha} (\alpha - \hat{\alpha})^2 \left(\frac{\prod_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \left[\frac{\Gamma\left((\beta) + \left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1 \right) \right)}{\Gamma\left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1 \right) \Gamma(\beta)} \right] \binom{n}{\alpha} p^\alpha (q)^{n-\alpha}}{\int_{\alpha} \prod_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \left[\frac{\Gamma\left((\beta) + \left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1 \right) \right)}{\Gamma\left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1 \right) \Gamma(\beta)} \right] \binom{n}{\alpha} p^\alpha (q)^{n-\alpha} \mathrm{d}\alpha} \right) \mathrm{d}\alpha \right] \frac{1}{k_1 k_2 k_3 k_4} dd\, dc\, d\alpha\, dm$$

$$(2-75)$$

$$u_\beta = \int_{m\alpha cd} u_{\beta_{SEL}} \pi^*(m, \alpha, c, d)\, dd\, dc\, d\alpha\, dm$$

$$= \int_{macd} \left[\int_\beta (\beta - \widehat{\beta})^2 \frac{\beta^n \prod_{i=1}^n \left[\frac{\Gamma\left((\beta) + \left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1\right)\Gamma(\beta)} \right] \beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}}{\int_\beta \beta^n \prod_{i=1}^n \left[\frac{\Gamma\left((\beta) + \Gamma\left(\frac{xi + j + \alpha - 1}{\alpha}\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x + j + \alpha - 1}{\alpha}\right)\Gamma(\beta)} \right] \beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1} d\beta} d\beta \right] \frac{1}{k_1 k_2 k_3 k_4} dd\, dc\, d\alpha\, dm$$

$$(2-76)$$

وبأشتقاق المعادلات (2-74)(2-75)(2-76) للمعلمات فان :

$$u_m = \frac{\partial \left[\int_{macd} \left[\int_m (m - \widehat{m})^2 \left(\frac{\prod_{i=1}^n \left[\frac{1}{xi} \binom{mxi}{x-1} \sum_{j=0}^{mxi-xi+1} \binom{mxi-xi+1}{j} (-1)^j \right] \binom{n}{m} p^m (q)^{n-m}}{\int_m \prod_{i=1}^n \left[\frac{1}{xi} \binom{mxi}{x-1} \sum_{j=0}^{mxi-xi+1} \binom{mxi-xi+1}{j} (-1)^j \right] \binom{n}{m} p^m (q)^{n-m} dm} \right) dm \right] \frac{1}{k_1 k_2 k_3 k_4} dd\, dc\, d\alpha\, dm \right]}{\partial m}$$

$$u_\alpha = \frac{\partial\left[\int_{m\alpha cd}\left[\int_\alpha(\alpha-\hat{\alpha})^2\left(\frac{\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\binom{n}{\alpha}p^\alpha(q)^{n-\alpha}}{\int_\alpha\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\binom{n}{\alpha}p^\alpha(q)^{n-\alpha}d\alpha}\right)d\alpha\right]\frac{1}{k_1k_2k_3k_4}dd\,dc\,d\alpha\,dm\right]}{\partial\alpha}$$

$$u_\beta = \frac{\partial\left[\int_{m\alpha cd}\left[\int_\beta\left(\beta-\hat{\beta}\right)^2\frac{\beta^n\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}}{\int_\beta\beta^n\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}d\beta}d\beta\right]\frac{1}{k_1k_2k_3k_4}dd\,dc\,d\alpha\,dm\right]}{\partial\beta}$$

$$\mathbf{u}_{m\alpha}=\frac{\partial^{2}\left[\int_{macd}\left[\int_{m}(m-\hat{m})^{2}\left(\frac{\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^{j}\right]\binom{n}{m}p^{m}(q)^{n-m}}{\int_{m}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^{j}\right]\binom{n}{m}p^{m}(q)^{n-m}dm}\right)dm\right]\frac{1}{k_{1}k_{2}k_{3}k_{4}}dd\,dc\,d\alpha\,dm\right]}{\partial m\partial\alpha}$$

$$\frac{\left[\int_{macd}\left[\int_{\alpha}(\alpha-\hat{\alpha})^{2}\left(\frac{\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_{i}+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_{i}+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\binom{n}{\alpha}p^{\alpha}(q)^{n-\alpha}}{\int_{\alpha}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_{i}+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_{i}+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\binom{n}{\alpha}p^{\alpha}(q)^{n-\alpha}d\alpha}\right)d\alpha\right]\frac{1}{k_{1}k_{2}k_{3}k_{4}}dd\,dc\,d\alpha\,dm\right]}{\partial m\partial\alpha}$$

$$\mathbf{u}_{\alpha\alpha}=\frac{\partial^{2}\left[\int_{macd}\left[\int_{\alpha}(\alpha-\hat{\alpha})^{2}\left(\frac{\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_{i}+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_{i}+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\binom{n}{\alpha}p^{\alpha}(q)^{n-\alpha}}{\int_{\alpha}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_{i}+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_{i}+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\binom{n}{\alpha}p^{\alpha}(q)^{n-\alpha}d\alpha}\right)d\alpha\right]\frac{1}{k_{1}k_{2}k_{3}k_{4}}dd\,dc\,d\alpha\,dm\right]}{(\partial\alpha)^{2}}$$

$$\mathbf{u_{m\beta}} = \frac{\partial^2 \left[\int_{macd} \left[\int_{m} (\mathbf{m} - \widehat{\mathbf{m}})^2 \left(\frac{\prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{xi} \binom{mxi}{x-1} \sum_{j=0}^{mxi-xi+1} \binom{mxi-xi+1}{j} (-1)^{j} \right] \binom{n}{m} p^{m} (q)^{n-m}}{\int_{m} \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{xi} \binom{mxi}{x-1} \sum_{j=0}^{mxi-xi+1} \binom{mxi-xi+1}{j} (-1)^{j} \right] \binom{n}{m} p^{m} (q)^{n-m} \mathbf{dm}} \right) \mathbf{dm} \right] \frac{1}{k_1 k_2 k_3 k_4} dd\, dc\, d\alpha\, dm \right]}{\partial m \partial \beta}$$

$$\frac{\int_{macd} \left[\int_{\beta} (\beta - \widehat{\beta})^2 \frac{\beta^{n} \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{\Gamma\left((\beta) + \left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1 \right) \right)}{\Gamma\left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1 \right) \Gamma(\beta)} \right] \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1}}{\int_{\beta} \beta^{n} \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{\Gamma\left((\beta) + \left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1 \right) \right)}{\Gamma\left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1 \right) \Gamma(\beta)} \right] \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} d\beta} \mathbf{d\beta} \right] \frac{1}{k_1 k_2 k_3 k_4} dd\, dc\, d\alpha\, dm}{\partial m \partial \beta}$$

$$\mathbf{u_{m\beta}} = \mathbf{u_{\beta m}}$$

$$\mathbf{u}_{\alpha\beta}=\frac{\partial^2\left[\int_{m\alpha cd}\left[\int_\alpha(\alpha-\hat{\alpha})^2\left(\frac{\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\binom{n}{\alpha}p^\alpha(q)^{n-\alpha}}{\int_\alpha\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\binom{n}{\alpha}p^\alpha(q)^{n-\alpha}d\alpha}\right)d\alpha\right]\frac{1}{k_1k_2k_3k_4}dd\,dc\,d\alpha\,dm\right]}{\partial\alpha\partial\beta}$$

$$\frac{\left[\int_{m\alpha cd}\left[\int_\beta(\beta-\hat{\beta})^2\frac{\beta^n\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}}{\int_\beta\beta^n\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}d\beta}d\beta\right]\frac{1}{k_1k_2k_3k_4}dd\,dc\,d\alpha\,dm\right]}{\partial\alpha\partial\beta}$$

$$\mathbf{u}_{\alpha\beta}=\mathbf{u}_{\beta\alpha}$$

$$\mathbf{u}_{\beta\beta} = \frac{\partial^2 \left[\int_{m\alpha cd} \left[\int_\beta \left(\beta - \hat{\beta}\right)^2 \frac{\beta^n \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{\Gamma\left((\beta) + \left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1\right)\Gamma(\beta)} \right] \beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}}{\int_\beta \beta^n \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{\Gamma\left((\beta) + \left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1\right)\Gamma(\beta)} \right] \beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1} d\beta} d\beta \right] \frac{1}{k_1 k_2 k_3 k_4} dd\, dc\, d\alpha\, dm \right]}{(\partial\beta)^2}$$

$$\mathbf{L}_{m\alpha\beta} = \frac{\partial^3 \beta^n \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{xi} \binom{mxi}{x-1} \sum_{j=0}^{mxi-xi+1} \binom{mxi-xi+1}{j} (-1)^j \frac{\Gamma\left((\beta) + \left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1\right)\Gamma(\beta)} \right]}{\partial m \partial\alpha \partial\beta}$$

$$\mathbf{L}_{m\beta\alpha} = \frac{\partial^3 \beta^n \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{xi} \binom{mxi}{x-1} \sum_{j=0}^{mxi-xi+1} \binom{mxi-xi+1}{j} (-1)^j \frac{\Gamma\left((\beta) + \left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1\right)\Gamma(\beta)} \right]}{\partial m \partial\beta \partial\alpha}$$

$$L_{\beta m\alpha}=\frac{\partial^3\beta^n\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^j\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]}{\partial\beta\partial m\partial\alpha}$$

$$L_{\alpha\beta m}=\frac{\partial^3\beta^n\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^j\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]}{\partial\alpha\partial\beta\partial m}$$

$$L_{\alpha\beta m}=\frac{\partial^3\beta^n\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^j\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]}{\partial\alpha\partial\beta\partial m}$$

$$L_{\beta\alpha m}=\frac{\partial^3\beta^n\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^j\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]}{\partial\beta\partial\alpha\partial m}$$

$$\mathrm{L_{mm\alpha}} = \frac{\partial^3 \beta^n \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{xi} \binom{mxi}{x-1} \sum_{j=0}^{mxi-xi+1} \binom{mxi-xi+1}{j} (-1)^j \frac{\Gamma\left((\beta) + \left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1\right)\Gamma(\beta)} \right]}{\partial m \partial m \partial \alpha}$$

$$\mathrm{L_{\beta\beta\alpha}} = \frac{\partial^3 \beta^n \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{xi} \binom{mxi}{x-1} \sum_{j=0}^{mxi-xi+1} \binom{mxi-xi+1}{j} (-1)^j \frac{\Gamma\left((\beta) + \left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1\right)\Gamma(\beta)} \right]}{\partial \beta \partial \beta \partial \alpha}$$

$$\mathrm{L_{\beta\alpha\beta}} = \frac{\partial^3 \beta^n \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{xi} \binom{mxi}{x-1} \sum_{j=0}^{mxi-xi+1} \binom{mxi-xi+1}{j} (-1)^j \frac{\Gamma\left((\beta) + \left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1\right)\Gamma(\beta)} \right]}{\partial \beta \partial \alpha \partial \beta}$$

$$\mathrm{L_{\alpha\beta\beta}} = \frac{\partial^3 \beta^n \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{xi} \binom{mxi}{x-1} \sum_{j=0}^{mxi-xi+1} \binom{mxi-xi+1}{j} (-1)^j \frac{\Gamma\left((\beta) + \left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1\right)\Gamma(\beta)} \right]}{\partial \alpha \partial \beta \partial \beta}$$

$$L_{mm\beta} = \frac{\partial^3 \beta^n \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{xi} \binom{mxi}{x-1} \sum_{j=0}^{mxi-xi+1} \binom{mxi-xi+1}{j} (-1)^j \frac{\Gamma\left((\beta) + \left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1 \right) \right)}{\Gamma\left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1 \right) \Gamma(\beta)} \right]}{\partial m \partial m \partial \beta}$$

$$L_{m\beta m} = \frac{\partial^3 \beta^n \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{xi} \binom{mxi}{x-1} \sum_{j=0}^{mxi-xi+1} \binom{mxi-xi+1}{j} (-1)^j \frac{\Gamma\left((\beta) + \left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1 \right) \right)}{\Gamma\left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1 \right) \Gamma(\beta)} \right]}{\partial m \partial \beta \partial m}$$

$$L_{\beta mm} = \frac{\partial^3 \beta^n \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{xi} \binom{mxi}{x-1} \sum_{j=0}^{mxi-xi+1} \binom{mxi-xi+1}{j} (-1)^j \frac{\Gamma\left((\beta) + \left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1 \right) \right)}{\Gamma\left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1 \right) \Gamma(\beta)} \right]}{\partial \beta \partial m \partial m}$$

$$L_{\alpha\beta\beta} = \frac{\partial^3 \beta^n \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{xi} \binom{mxi}{x-1} \sum_{j=0}^{mxi-xi+1} \binom{mxi-xi+1}{j} (-1)^j \frac{\Gamma\left((\beta) + \left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1 \right) \right)}{\Gamma\left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1 \right) \Gamma(\beta)} \right]}{\partial \alpha \partial \beta \partial \beta}$$

$$L_{\beta\alpha\beta}=\frac{\partial^{3}\beta^{n}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^{j}\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]}{\partial\beta\partial\alpha\partial\beta}$$

$$L_{\beta\alpha\alpha}=\frac{\partial^{3}\beta^{n}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^{j}\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]}{\partial\beta\partial\alpha\partial\alpha}$$

$$L_{\beta\beta\beta}=\frac{\partial^{3}\beta^{n}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^{j}\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]}{\partial\beta\partial\beta\partial\beta}$$

$$\rho_{m}=\frac{\partial \mathrm{Log}\left(\binom{n}{m}p^{m}(q)^{n-m}\binom{n}{\alpha}p^{\alpha}(q)^{n-\alpha}\frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)}\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}\right)}{\partial m}$$

$$\rho_{\alpha}=\frac{\partial \mathrm{Log}\left(\binom{n}{m}p^{m}(q)^{n-m}\binom{n}{\alpha}p^{\alpha}(q)^{n-\alpha}\frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)}\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}\right)}{\partial\alpha}$$

$$\rho_\beta = \frac{\partial \mathrm{Log}\left(\binom{n}{m}p^m(q)^{n-m}\binom{n}{\alpha}p^\alpha(q)^{n-\alpha}\frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)}\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}\right)}{\partial\beta}$$

$$\sigma_{mm} = -\left(\frac{\partial^2\beta^n\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^j\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]}{\partial m\partial m}\right)^{-1}$$

$$\sigma_{m\alpha} = -\left(\frac{\partial^2\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]}{\partial m\partial\alpha}\right)^{-1}$$

$$\sigma_{m\beta} = -\left(\frac{\partial^2 \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^j\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]}{\partial m\partial\beta}\right)^{-1}$$

$$\sigma_{\alpha m} = -\left(\frac{\partial^2 \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^j\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]}{\partial\alpha\partial m}\right)^{-1}$$

$$\sigma_{\alpha\alpha} = -\left(\frac{\partial^2 \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^j\,\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]}{\partial\alpha\partial\alpha}\right)^{-1}$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = -\left(\frac{\partial^2 \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)\,\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]}{\partial\alpha\partial\beta}\right)^{-1}$$

$$\sigma_{\beta m} = -\left(\frac{\partial^2 \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^j\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]}{\partial\beta\partial m}\right)^{-1}$$

$$\sigma_{\beta\beta} = -\left(\frac{\partial^2 \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^j\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]}{\partial\beta\partial\beta}\right)^{-1}$$

$$\begin{aligned}\widehat{m}_{EBSEL} = \widehat{m}_{ML} &+ u_m\rho_m\sigma_{mm} + u_m\rho_\alpha\sigma_{m\alpha} + u_m\rho_\beta\sigma_{m\beta} + 0.5L_{\alpha\beta m}u_m\sigma_{\alpha\beta}\sigma_{mm} + 0.5L_{\alpha\beta\beta}u_m\sigma_{\alpha\beta}\sigma_{\beta m}\\ &+ 0.5L_{\beta mm}u_m\sigma_{\beta m}\sigma_{mm} + 0.5L_{\beta m\alpha}u_m\sigma_{\beta m}\sigma_{\alpha m} + 0.5L_{\beta m\beta}u_m\sigma_{\beta m}^2 + 0.5L_{\beta\alpha m}u_m\sigma_{\beta\alpha}\sigma_{mm}\\ &+ 0.5L_{\beta\alpha\beta}u_m\sigma_{\beta\alpha}\sigma_{\beta m} + 0.5L_{\beta\beta m}u_m\sigma_{\beta\beta}\sigma_{m\beta} + 0.5L_{\beta\beta\alpha}u_m\sigma_{\beta\beta}\sigma_{\alpha m} + 0.5L_{\beta\beta\beta}u_m\sigma_{\beta\beta}\sigma_{\beta m}\\ &+ 0.5L_{mmm}u_m\sigma_{mm}^2 + 0.5L_{mm\alpha}u_m\sigma_{mm}\sigma_{\alpha m} + 0.5L_{mm\beta}u_m\sigma_{mm}\sigma_{\beta m}\end{aligned}$$

$$\hat{\alpha}_{EBSEL} = \alpha_{ML} + 0.5L_{\alpha\beta\beta}u_{\beta}\sigma_{\alpha\beta}\sigma_{\beta\beta} + 0.5L_{\beta mm}u_{\beta}\sigma_{\beta m}\sigma_{m\beta} + 0.5L_{\beta m\alpha}u_{\beta}\sigma_{\beta m}\sigma_{\alpha\beta} + 0.5L_{\beta m\beta}u_{\beta}\sigma_{\beta m}\sigma_{\beta\beta}$$
$$+ 0.5L_{\beta\alpha m}u_{\beta}\sigma_{\beta\alpha}\sigma_{m\beta} + 0.5L_{\beta\alpha\alpha}u_{\beta}\sigma_{\beta\alpha}\sigma_{\alpha\beta} + 0.5L_{\beta\alpha\beta}u_{\beta}\sigma_{\beta\alpha}\sigma_{\beta\beta} + 0.5L_{\beta\beta m}u_{\beta}\sigma_{\beta\beta}\sigma_{m\beta}$$
$$+ 0.5L_{\beta\beta\alpha}u_{\beta}\sigma_{\beta\beta}\sigma_{\alpha\beta} + 0.5L_{\beta\beta\beta}u_{\beta}\sigma^{\alpha}{}_{\beta\beta} + 0.5\sigma_{mm}u_{mm} + 0.5\sigma_{m\alpha}u_{m\alpha} + 0.5\sigma_{m\beta}u_{m\beta} + 0.5\sigma_{\alpha m}u_{\alpha m}$$
$$+ 0.5\sigma_{\alpha\alpha}u_{\alpha\alpha} + 0.5\sigma_{\alpha\beta}u_{\alpha\beta} + 0.5\sigma_{\beta m}u_{\beta m} + 0.5\sigma_{\beta\alpha}u_{\beta\alpha} + 0.5\sigma_{\beta\beta}u_{\beta\beta} + \sigma_{\beta m}u_{\beta}\rho_{m} + \sigma_{\beta\alpha}u_{\beta}\rho_{\alpha}$$
$$+ \sigma_{\beta\beta}u_{\beta}\rho_{\beta} + 0.5L_{mm\alpha}u_{\beta}\sigma_{mm}\sigma_{\alpha\beta} + 0.5L_{m\alpha m}u_{\alpha}\sigma^{\alpha}_{m\alpha} + 0.5L_{m\alpha m}u_{\beta}\sigma_{m\alpha}\sigma_{m\beta} + 0.5L_{m\alpha\alpha}u_{\beta}\sigma_{m\alpha}\sigma_{\alpha\beta}$$
$$+ 0.5L_{m\alpha\beta}u_{\beta}\sigma_{m\alpha}\sigma_{\beta\beta} + 0.5L_{m\beta m}u_{\beta}\sigma^{\alpha}_{m\beta} + 0.5L_{m\beta\alpha}u_{m}\sigma_{m\beta}\sigma_{\alpha m}$$
$$+ 0.5L_{m\beta\alpha}u_{\alpha}\sigma_{m\beta}\sigma_{\alpha\alpha +}0.5L_{m\beta\alpha}u_{\beta}\sigma_{m\beta}\sigma_{\alpha\beta}$$

$$\hat{\beta}_{EBSEL} = \hat{\beta}_{ML} + 0.5L_{\beta\alpha\beta}u_{\alpha}\sigma^{\alpha}_{\beta\alpha} + 0.5L_{\beta\beta m}u_{\alpha}\sigma_{\beta\beta}\sigma_{m\alpha} + 0.5L_{\beta\beta\alpha}u_{\alpha}\sigma_{\beta\beta}\sigma_{\alpha\alpha} + 0.5L_{\beta\beta\beta}u_{\alpha}\sigma_{\beta\beta}\sigma_{\beta\alpha}$$
$$+ 0.5L_{mmm}u_{\alpha}\sigma_{mm}\sigma_{m\alpha} + 0.5L_{mm\alpha}u_{\alpha}\sigma_{mm}\sigma_{\alpha\alpha} + 0.5L_{mm\beta}u_{\alpha}\sigma_{mm}\sigma_{\beta\alpha} + 0.5L_{m\alpha m}u_{\alpha}\sigma^{\alpha}_{m\alpha}$$
$$+ 0.5L_{m\alpha\alpha}u_{\alpha}\sigma_{m\alpha}\sigma_{\alpha\alpha} + 0.5L_{m\alpha\beta}u_{\alpha}\sigma_{m\alpha}\sigma_{\beta\alpha} + 0.5L_{m\beta m}u_{\alpha}\sigma_{m\beta}\sigma_{m\alpha} + 0.5L_{m\beta\alpha}u_{\alpha}\sigma_{m\beta}\sigma_{\alpha\alpha}$$
$$+ 0.5L_{m\beta\beta}u_{\alpha}\sigma_{m\beta}\sigma_{\beta\alpha} + 0.5L_{\alpha mm}u_{\alpha}\sigma_{\alpha m}\sigma_{m\alpha} + 0.5L_{\alpha m\alpha}u_{\alpha}\sigma_{\alpha m}\sigma_{\alpha\alpha} + 0.5L_{\alpha m\beta}u_{\alpha}\sigma_{\alpha m}\sigma_{\beta\alpha}$$
$$+ 0.5L_{\alpha\alpha m}u_{\alpha}\sigma_{\alpha\alpha}\sigma_{\beta\alpha} + 0.5L_{\alpha\alpha\alpha}u_{\alpha}\sigma^{\alpha}_{\alpha\alpha} + 0.5L_{\alpha\alpha\beta}u_{\alpha}\sigma_{\alpha\alpha}\sigma_{\beta\alpha} + 0.5L_{\alpha\beta m}u_{\alpha}\sigma_{\alpha\beta}\sigma_{m\alpha}$$
$$+ 0.5L_{\alpha\beta\alpha}u_{\alpha}\sigma_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\alpha}$$

وللحصول على مقدر توقع بيز للمعلمات في ظل دالة خسارة انتروبي عامة وعلى فرض ان :

$$u_m = \int_{m\alpha cd}\left[\left[\int_m \left(\left(\frac{\hat{m}}{m}\right)^q - q\log\frac{\hat{m}}{m} - 1\right)\frac{\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^j\right]\binom{n}{m}p^m(q)^{n-m}}{\int_m \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^j\right]\binom{n}{m}p^m(q)^{n-m}dm}\,\mathrm{dm}\right]\right]\frac{1}{k_1k_2k_3k_4}dd\,dc\,d\alpha\,dm$$

$(2-77)$

$$u_\alpha = \int_{m\alpha cd} \left[\left[\int_\alpha \left(\left(\frac{\hat{\alpha}}{\alpha} \right)^q - q \log \frac{\hat{\alpha}}{\alpha} - 1 \right) \frac{\prod_{i=1}^{n} \left[\frac{\Gamma\left((\beta) + \left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1 \right) \right)}{\Gamma\left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1 \right) \Gamma(\beta)} \right] \binom{n}{\alpha} p^\alpha (q)^{n-\alpha}}{\int_\alpha \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{\Gamma\left((\beta) + \left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1 \right) \right)}{\Gamma\left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1 \right) \Gamma(\beta)} \right] \binom{n}{\alpha} p^\alpha (q)^{n-\alpha} d\alpha} d\alpha \right] \right] \frac{1}{k_1 k_2 k_3 k_4} dd\, dc\, d\alpha\, dm$$

$$(2-78)$$

$$u_\beta = \int_{m\alpha cd} \left[\left[\left[\int_\beta \left(\left(\frac{\hat{\beta}}{\beta} \right)^q - q \log \frac{\hat{\beta}}{\beta} - 1 \right) \frac{\beta^n \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{\Gamma\left((\beta) + \left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1 \right) \right)}{\Gamma\left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1 \right) \Gamma(\beta)} \right] \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1}}{\int_\beta \beta^n \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{\Gamma\left((\beta) + \left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1 \right) \right)}{\Gamma\left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1 \right) \Gamma(\beta)} \right] \beta^{c-1} (1-\beta)^{d-1} d\beta} d\beta \right] \right] \right] \frac{1}{k_1 k_2 k_3 k_4} dd\, dc\, d\alpha\, dm$$

$$(2-79)$$

باشتقاق المعادلات (2-77)(2-78)(2-79) للمعلمات فان

$$u_m = \frac{\partial\left[\int_{macd}\left[\left[\int_m \left(\left(\frac{\widehat{m}}{m}\right)^q - q\log\frac{\widehat{m}}{m} - 1\right)\frac{\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^j\right]\binom{n}{m}p^m(q)^{n-m}}{\int_m \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^j\right]\binom{n}{m}p^m(q)^{n-m}dm}\, dm\right]\right]\frac{1}{k_1k_2k_3k_4}dd\,dc\,d\alpha\,dm\right]}{\partial m}$$

$$u_\alpha = \frac{du_\alpha\left[\int_{macd}\left[\int_\alpha \left(\left(\frac{\widehat{\alpha}}{\alpha}\right)^q - q\log\frac{\widehat{\alpha}}{\alpha} - 1\right)\frac{\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\binom{n}{\alpha}p^\alpha(q)^{n-\alpha}}{\int_\alpha \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\binom{n}{\alpha}p^\alpha(q)^{n-\alpha}d\alpha}\, d\alpha\right]\frac{1}{k_1k_2k_3k_4}dd\,dc\,d\alpha\,dm\right]}{\partial\alpha}$$

$$u_\beta = \frac{du_\beta\left[\int_{macd}\left[[\int_\beta \left(\left(\frac{\widehat{\beta}}{\beta}\right)^q - q\log\frac{\widehat{\beta}}{\beta} - 1\right)\frac{\beta^n\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}}{\int_\beta \beta^n\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}d\beta}\, d\beta]\right]\frac{1}{k_1k_2k_3k_4}dd\,dc\,d\alpha\,dm\right]}{\partial\beta}$$

$$u_{m\alpha} = \frac{\partial^2\left[\int_{macd}\left[\int_m \left(\left(\frac{\widehat{m}}{m}\right)^q - q\log\frac{\widehat{m}}{m} - 1\right)\frac{\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^j\right]\binom{n}{m}p^m(q)^{n-m}}{\int_m \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^j\right]\binom{n}{m}p^m(q)^{n-m}dm}\, dm\right]\frac{1}{k_1k_2k_3k_4}dd\,dc\,d\alpha\,dm\right]}{\partial m\partial\alpha}$$

$$\frac{\partial^2\left[\int_{m\alpha cd}\left[\int_{\alpha}\left(\left(\frac{\widehat{\alpha}}{\alpha}\right)^{q}-q\,log\frac{\widehat{\alpha}}{\alpha}-1\right)\frac{\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\binom{n}{\alpha}p^{\alpha}(q)^{n-\alpha}}{\int_{\alpha}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\binom{n}{\alpha}p^{\alpha}(q)^{n-\alpha}d\alpha}d\alpha\right]\frac{1}{k_1k_2k_3k_4}dd\,dc\,d\alpha\,dm\right]}{\partial m\partial\alpha}$$

$$u_{\alpha\alpha}=\frac{\partial^2\left[\int_{m\alpha cd}\left[\int_{\alpha}\left(\left(\frac{\widehat{\alpha}}{\alpha}\right)^{q}-q\,log\frac{\widehat{\alpha}}{\alpha}-1\right)\frac{\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\binom{n}{\alpha}p^{\alpha}(q)^{n-\alpha}}{\int_{\alpha}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\binom{n}{\alpha}p^{\alpha}(q)^{n-\alpha}d\alpha}d\alpha\right]\frac{1}{k_1k_2k_3k_4}dd\,dc\,d\alpha\,dm\right]}{(\partial\alpha)^2}$$

$$u_{m\beta}=\frac{\partial^2\left[\int_{m\alpha cd}\left[\int_{m}\left(\left(\frac{\widehat{m}}{m}\right)^{q}-q\,log\frac{\widehat{m}}{m}-1\right)\frac{\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^{j}\right]\binom{n}{m}p^{m}(q)^{n-m}}{\int_{m}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^{j}\right]\binom{n}{m}p^{m}(q)^{n-m}dm}dm\right]\frac{1}{k_1k_2k_3k_4}dd\,dc\,d\alpha\,dm\right]}{\partial m\partial\beta}$$

$$\frac{\int_{macd}\left[\iint_{\beta}\left(\left(\frac{\hat{\beta}}{\beta}\right)^{q}-q\log\frac{\hat{\beta}}{\beta}-1\right)\frac{\beta^{n}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}}{\int_{\beta}\beta^{n}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}d\beta}d\beta\right]\frac{1}{k_1k_2k_3k_4}dd\,dc\,d\alpha\,dm}{\partial m\partial\beta}$$

$$u_{\beta\beta}=\frac{\partial^{2}\left[\int_{macd}\left[\iint_{\beta}\left(\left(\frac{\hat{\beta}}{\beta}\right)^{q}-q\log\frac{\hat{\beta}}{\beta}-1\right)\frac{\beta^{n}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}}{\int_{\beta}\beta^{n}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}d\beta}d\beta\right]\frac{1}{k_1k_2k_3k_4}dd\,dc\,d\alpha\,dm\right]}{(\partial\beta)^{2}}$$

2-11 طريقة جيفرى Jeffery [4]

اقترح العالم Jeffery طريقتين في اختيار دوال الكثافة الاحتمالية الأولية وذلك في حال عدم توفر معلومات كافية لحل المعلمة المراد تقديرها :

الطريقة الأولى : اذا كان مجال المعلمة المراد تقديرها تمتلك قيمة في مجال لانهائي $(-\infty,\infty)$ فدالة الكثافة الاحتمالية الأولية تكون دالة الكثافة لتوزيع منتظم .

الطريقة الثانية : اما اذا كان مجال المعلمة ما بين $(0,\infty)$ اي المجال ضمن القيمة الموجبة من الاعداد الطبيعية فيستعمل توزيع لوغاريتمي منتظم.

نحتاج الى اعطاء التوزيعات الأولية للمعلمات المراد تقديرها (m, α, θ) ، وحسب ماتوفر للباحث من معلومات عن التوزيعات الأولية للمعلمات افترض أن التوزيعات الأولية لتلك المعلمات ستكون كالآتي:

وبذلك تكون دالة الكثافة الأحتمالية الاولية (Prior Distribution) لكل معلمة كالآتي:

$$\pi_1(m) = \frac{1}{m} \qquad ; m = 0, 1, 2, \ldots \qquad (2-80)$$

$$\pi_2(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \qquad ; \quad \alpha > 0 \qquad (2-81)$$

$$\pi_3(\beta) = \frac{1}{\beta} \qquad ; \quad \beta > 0 \qquad (2-82)$$

دالة التوزيع المشترك اللاحق تكون حاصل ضرب التوزيعات السابقة وكما يأتي :

$$\pi_1(m)\pi_2(\alpha)\pi_3(\beta) = \frac{1}{m\beta\,\alpha} \qquad (2-83)$$

وستكون التوزيعات اللاحقة للمعلمات m, α, β كالآتي:

$$h\,(m, \alpha, \beta|xi) = \frac{\prod_{i=1}^{n} f(xi, m, \alpha, \beta)\pi_1(m)\pi_2(\alpha)\pi_3(\beta)}{\int_m\int_\alpha\int_\beta \prod_{i=1}^{n} f(xi, m, \alpha, \beta)\pi_1(m)\pi_2(\alpha)\pi_3(\beta)\, d\beta d\alpha dm} \qquad (2-84)$$

وباستعمال دالة الخسارة التربيعية يمكن الحصول على مقدر بيز القياسي وكما يأتي :

$$\mathbf{h}\ (\mathbf{m},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}|\vec{\mathbf{x}}) = \frac{\boldsymbol{\beta}^{n}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^{j}\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\frac{1}{m\beta\ \alpha}}{\int_m\int_\alpha\int_\beta \boldsymbol{\beta}^{n}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^{j}\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\frac{1}{m\beta\ \alpha}\ dmd\alpha d\beta}$$

$$(2-85)$$

ومن ذلك يمكن ان نستنتج التوزيع اللاحق لكل معلمة من المعلمات المراد تقديرها كالآتي:

$$\mathbf{h1}\ (\mathbf{m}|\ \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\vec{\mathbf{x}}) = \frac{\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^{j}\ \right]\frac{1}{m}}{\int_m\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^{j}\ \right]\frac{1}{m}\ dm} \qquad (2-86)$$

$$\mathbf{h2}\ (\boldsymbol{\alpha}|\mathbf{m},\boldsymbol{\beta},\vec{\mathbf{x}}) = \frac{\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\frac{1}{\alpha}}{\int_\alpha\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\frac{1}{\alpha}\ d\alpha} \qquad (2-87)$$

$$h3\ (\beta|m,\alpha,\vec{x}) = \frac{\beta^n \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\frac{1}{\beta}}{\int_\beta \beta^n \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\frac{1}{\beta}d\beta} \qquad (2-88)$$

لذلك فان مقدر بيز القياسي لمعلمات توزيع القنصل كوماراسوامي *Consul Kumaraswamy* يكون كالآتي:

$$\left[E_{m/x}[\pi_1(m)]\right]_{SBSEL} = \int_m ((m-\widehat{m})^2)h_1\ (m|\ \alpha,\beta,\vec{x})dm \qquad (2-89)$$

$$= \left[\int_m (m-\widehat{m})^2 \frac{\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^j\right]\frac{1}{m}}{\int_m \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^j\right]\frac{1}{m}dm} dm\right]$$

$$\left[E_{\alpha/x}[\pi_2(\alpha)]\right]_{SBSEL} = \int_\alpha (\alpha-\widehat{\alpha})^2 h_2\ (\alpha|m,\beta,\vec{x})d\alpha \qquad (2-90)$$

$$= \left[\int_\alpha (\alpha-\widehat{\alpha})^2 \frac{\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\frac{1}{\alpha}}{\int_\alpha \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\frac{1}{\alpha}d\alpha} d\alpha\right]$$

$$\left[E_{\beta/x}[\pi_3(\beta)]\right]_{SBSEL} = \int_\beta \left(\beta-\widehat{\beta}\right)^2 h_3\ (\beta|\ \theta,\alpha,\vec{x})d\beta \qquad (2-91)$$

$$= \left[\int_{\beta} (\beta - \hat{\beta})^2 \frac{\beta^n \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{\Gamma\left((\beta) + \left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1\right) \Gamma(\beta)} \right] \frac{1}{\beta}}{\int_{\beta} \beta^n \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{\Gamma\left((\beta) + \left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1\right) \Gamma(\beta)} \right] \frac{1}{\beta}\, d\beta} d\beta \right]$$

وان مقدر دالة البقاء لتوزيع القنصل كوماراسوامي في ظل دالة خسارة تربيعية :

$$\hat{S}(t)_{SBSEL} = 1 - \sum_{i=0}^{x} \frac{\hat{\beta}_{SBSEL}}{xi} \binom{\hat{m}_{SBSEL} xi}{x-1} \sum_{j=0}^{\hat{m}_{SBSEL} xi - xi + 1} \binom{\hat{m}_{SBSEL} xi - xi + 1}{j} (-1)^j \; B\left(\hat{\beta}_{SBSEL}, \frac{xi + j - 1}{\hat{\alpha}_{SBSEL}}\right) \qquad (2-92)$$

لذلك فان مقدر بيز القياسي لمعلمات توزيع القنصل كوماراسوامي في ظل دالة الخسارة انتروبي عامة يكون كالآتي:

$$\left[E_{m/x}[\pi_1(m)]\right]_{SBEL} = \int_m \left(\left(\frac{\hat{m}}{m}\right)^q - q \log \frac{\hat{m}}{m} - 1\right) h_1(m|\, \alpha, \beta, \vec{x}) dm \qquad (2-93)$$

$$= \int_m \left(\left(\frac{\hat{m}}{m}\right)^q - q \log \frac{\hat{m}}{m} - 1\right) \frac{\prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{xi} \binom{mxi}{x-1} \sum_{j=0}^{mxi-xi+1} \binom{mxi-xi+1}{j} (-1)^j \right] \frac{1}{m}}{\int_m \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{xi} \binom{mxi}{x-1} \sum_{j=0}^{mxi-xi+1} \binom{mxi-xi+1}{j} (-1)^j \right] \frac{1}{m} dm}$$

$$\left[E_{\alpha/x}[\pi_1(\alpha)]\right]_{SBEL} = \int_\alpha \left(\left(\frac{\hat{\alpha}}{\alpha}\right)^q - q \log \frac{\hat{\alpha}}{\alpha} - 1\right) h_2(\alpha|\, m, \beta, \vec{x}) d\alpha = 0 \qquad (2-94)$$

$$= \left[\int_{\alpha} \left(\left(\frac{\hat{\alpha}}{\alpha}\right)^{q} - q\log\frac{\hat{\alpha}}{\alpha} - 1 \right) \frac{\prod_{i=1}^{n} \left[\frac{\Gamma\left((\beta) + \left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1\right)\Gamma(\beta)} \right] \frac{1}{\alpha}}{\int_{\alpha} \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{\Gamma\left((\beta) + \left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1\right)\Gamma(\beta)} \right] \frac{1}{\alpha} d\alpha} d\alpha \right]$$

$$\left[E_{\beta/x}[\pi_1(\beta)]\right]_{SBEL} = \left[\int_{\beta} \left(\left(\frac{\hat{\beta}}{\beta}\right)^{q} - q\log\frac{\hat{\beta}}{\beta} - 1 \right) h_3\,(\beta |\, m, \alpha, \vec{x}) d\beta\right] \qquad (2-95)$$

$$= [\int_{\beta} \left(\left(\frac{\hat{\beta}}{\beta}\right)^{q} - q\log\frac{\hat{\beta}}{\beta} - 1 \right) \frac{\beta^{n} \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{\Gamma\left((\beta) + \left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1\right)\Gamma(\beta)} \right] \frac{1}{\beta}}{\int_{\beta} \beta^{n} \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{\Gamma\left((\beta) + \left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1\right)\Gamma(\beta)} \right] \frac{1}{\beta} d\beta} d\beta]$$

وان مقدر دالة البقاء لتوزيع القنصل كوماراسوامي في ظل دالة خسارة انتروبي العامة :

$$\hat{S}(t)_{SBEL} = 1 - \sum_{i=0}^{x} \frac{\hat{\beta}_{SBEL}}{xi} \binom{\widehat{m_{SBEL}} xi}{x - 1} \sum_{j=0}^{\hat{m}_{SBEL} xi - xi + 1} \binom{\hat{m}_{SBEL} xi - xi + 1}{j} (-1)^{j} \; B\left(\hat{\beta}_{SBEL}, \frac{xi + j - 1}{\hat{\alpha}_{SBEL}}\right) \qquad (2-96)$$

مقدر توقع بيز ضمن دالة خسارة تربيعية

$$\hat{m}_{EBSEL} = \int_0^{k_1} \hat{m}_{SBSEL}\pi(a_1)dk_1 \tag{2-97}$$

$$\hat{m}_{EBSEL} = \int_0^{k_1} \frac{1}{k_1}\left(\int_m (m-\hat{m})^2 \frac{\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^j\right]\frac{1}{m}}{\int_m \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^j\right]\frac{1}{m}} dm\right)dk_1$$

$$\hat{\alpha}_{EBSEL} = \int_0^{k_2} \hat{\alpha}_{SBSEL}\pi(a_2)da_2 \tag{2-98}$$

$$\hat{\alpha}_{EBSEL} = \int_0^{k_2} \frac{1}{k_2}\left([\int_\alpha (\alpha-\hat{\alpha})^2 \frac{\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\frac{1}{\alpha}}{\int_\alpha \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\frac{1}{\alpha}d\alpha} d\alpha]\right)dk_2$$

$$\hat{\beta}_{EBSEL} = \int_0^{k_3}\int_0^{k_4} \hat{\beta}_{SBSEL}\pi(a_2)dcdd \tag{2-99}$$

$$\hat{\beta}_{EBSEL}=\int_0^{k_3}\int_0^{k_4}\frac{1}{k_3k_4}\left(\left[\int_\beta(\beta-\hat{\beta})^2\frac{\beta^n\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\frac{1}{\beta}}{\int_\beta\beta^n\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\Gamma\left((\beta)+\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}+1\right)\Gamma(\beta)}\right]\frac{1}{\beta}\,d\beta}d\beta\right]\right)dcdd$$

وان مقدر دالة البقاء لتوزيع القنصل كوماراسوامي في ظل دالة خسارة تربيعية :

$$\hat{S}(t)_{EBSEL}=1-\sum_{i=0}^{x}\frac{\hat{\beta}_{EBSEL}}{xi}\binom{\widehat{m_{EBSEL}}xi}{x-1}\sum_{j=0}^{\hat{m}_{EBSEL}i-xi+1}\binom{\hat{m}_{EBSEL}xi-xi+1}{j}(-1)^j\;B\left(\hat{\beta}_{EBSEL},\frac{xi+j-1}{\hat{\alpha}_{EBSEL}}\right)\quad(2-100)$$

مقدر توقع بيز ضمن دالة خسارة انتروبي عامة :

$$\hat{m}_{EBSEL}=\int_0^{k_1}\hat{m}_{SBEL}\pi(a_1)dk_1\qquad(2-101)$$

$$\hat{m}_{EBSEL}=\int_0^{k_1}\frac{1}{k_1}\left[\int_m\left(\left(\frac{\hat{m}}{m}\right)^q-q\log\frac{\hat{m}}{m}-1\right)\frac{\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^j\right]\frac{1}{m}}{\int_m\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{xi}\binom{mxi}{x-1}\sum_{j=0}^{mxi-xi+1}\binom{mxi-xi+1}{j}(-1)^j\right]\frac{1}{m}dm}dm\right]\mathrm{d}k_1$$

$$\hat{\alpha}_{EBSEL}=\int_0^{k_2}\hat{\alpha}_{SBEL}\pi(a_2)dk_2\qquad(2-102)$$

$$\hat{\alpha}_{EBSEL} = \int_0^{k_2} \frac{1}{k_2} \left(\int_\alpha \left(\left(\frac{\hat{\alpha}}{\alpha}\right)^q - q\log\frac{\hat{\alpha}}{\alpha} - 1 \right) \frac{\prod_{i=1}^{n} \left[\frac{\Gamma\left((\beta) + \left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1\right)\Gamma(\beta)} \right] \frac{1}{\alpha}}{\int_\alpha \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{\Gamma\left((\beta) + \left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1\right)\Gamma(\beta)} \right] \frac{1}{\alpha} d\alpha} d\alpha \right) dk_2$$

$$\hat{\beta}_{EBSEL} = \int_0^{k_3} \int_0^{k_4} \hat{\beta}_{SBEL} \pi(a_2) dk_3 dk_4 \qquad (2-103)$$

$$\hat{\beta}_{EBSEL} = \int_0^{k_3} \int_0^{k_4} \frac{1}{k_3 k_4} \left(\int_\beta \left(\left(\frac{\hat{\beta}}{\beta}\right)^q - q\log\frac{\hat{\beta}}{\beta} - 1 \right) \frac{\beta^n \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{\Gamma\left((\beta) + \left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1\right)\Gamma(\beta)} \right] \frac{1}{\beta}}{\int_\beta \beta^n \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{\Gamma\left((\beta) + \left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{x_i + j - 1}{\alpha} + 1\right)\Gamma(\beta)} \right] \frac{1}{\beta} d\beta} d\beta \right) dk_4 dk_3$$

. وان مقدر دالة البقاء لتوزيع القنصل كوماراسوامي في ظل دالة خسارة انتروبي العامة :

$$\hat{S}(t)_{EBSEL} = 1 - \sum_{i=0}^{x} \frac{\hat{\beta}_{EBSEL}}{xi} \binom{\widehat{m_{EBSEL}}xi}{x-1} \sum_{j=0}^{\hat{m}_{EBSEL}xi-xi+1} \binom{\hat{m}_{EBSEL}xi - xi + 1}{j} (-1)^j \; B\left(\hat{\beta}_{EBSEL}, \frac{xi + \hat{\alpha}_{EBSEL} + j - 1}{\hat{\alpha}_{EBSEL}}\right) \quad (2-104)$$

<u>[1] Criteria for comparing estimation methods 2-12 معايير المقارنة بين التوزيعات</u>

1- اختبار اكيكي Akaike's Test (AIC): تكون صيغة اختبار اكيكي كما يأتي :

$$AIC = -2L(\hat{\theta}/X) + 2P \qquad (2-105)$$

$L(\hat{\theta}/X)$ (Log Likelihood function) تمثل لوغارتيم دالة الترجيح لمشاهدات بيانات العينة .

2- اختبار اكيكي المصحح Akaike Information Criterion(AICc) : في عام 1993 قدم كل من Brockwell and Davis مقترحا لتصحيح حـــالة التحيز في اختبار اكيكي وذلك بإضافة المقدار $\frac{2(k+1)(k+2)}{(n-k-2)}$ الى قيمة اكيكي ليكون :

$$AICc = nln\sigma^2 + 2k + \frac{2(k+1)(k+2)}{(n-k-2)} \qquad (2\text{-}106)$$

3- اختبار بيزا كيكي Bayes Akaike's Test (BIC) : *من الاختبارات التي تستعمل كاختبار حسن المطابقة وتكون صيغة هذا الاختبار كالأتي :*

$$BIC = -2L(\hat{\theta}/x) + p\log(n) \qquad (2-107)$$

إذ أن p تمثل عدد المعلمات في دالة التوزيع الاحتمالية النظرية .

4- معيار حنان كوين *HQIC* : تكون صيغة اختبار حنان كوين كالاتي :

$$HQIC = 2Klog(log(n)) - 2logL \qquad (2-108)$$

الفصل الثالث

الجانب التجريبي

3-1 توطئة

تم استعمال أسلوب محاكاة مونت-كارلو (Monte-Carlo) عن طريق احجام العينات المولدة وكذلك النماذج الافتراضية المستعملة وتحليل نتائج تجارب المحاكاة التي تم الحصول عليها في ايجاد مقدرات معلمات توزيع القنصل كوماراسوامي ((Consul Kumaraswamy Distribution (CKSD) باستعمال طرائق التقدير البيزية المذكورة في الفصل الثاني في هذه الرسالة ، اذ شمل هذا الفصل وصفا لتجارب المحاكاة من إذ توليد البيانات التي تتبع توزيع القنصل كوماراسوامي ذو ثلاث معلمات ، والمقارنة باستعمال المعيار الاحصائي متوسط مربعات الخطاء التكاملي (IMSE) للتوصل الى افضلية مقدرات معلمات التوزيع ودالة البقاء.

3-2 المحاكاة: (Simulation)[33][35]

تعرف المحاكاة بأنها اسلوب رياضي يعتمد لحل المشكلات المعقدة التي تبرز خلال المعاينة، إذ يتم تصميم عينة من المجتمع النظري المفترض لتمثيل الظاهرة بدلاً من المجتمع الحقيقي.

ولوجود بعض المشاكل والنظريات الإحصائية التي ليس من السهل تحليلها تحليلاً منطقياً باستعمال البرهان الرياضي، يلجأ الباحثون الى ترجمة هذه النظريات على مجتمعات حقيقية، ثم سحب عدد من العينات العشوائية منها ليتم التوصل الى الحلول المثلى لمثل هذه المشكلات. وبما أن الحصول على عينات في الواقع الفعلي (عند دراسة النظام الحقيقي) يعد أمراً في غاية الصعوبة لما يتطلبه من كلفة عالية ووقت وجهد، لذا فقد توجه أغلب الباحثين الى استعمال اسلوب المحاكاة ولاسيما بعد التطور الكبير الذي حصل في مجال الحاسبات الالكترونية.

وتوجد طرائق مختلفة للمحاكاة هي الطريقة التناظرية (Analog Procedure)، والطريقة المختلطة (Mixed Procedure)، وطريقة مونت كارلو (Monte Carlo Procedure)، وقد تم اعتماد طريقة مونت-كارلو التي تعد من اشهر الطرائق وأكثرها استعمالاً والتي تقوم على فكرة توليد العينات العشوائية من المجتمع النظري المفترض المماثل للمجتمع الحقيقي إذ يتم باستعمال الحاسبة وبعد تحديد توزيع المجتمع المدروس تولّد أرقاماً عشوائية لتكوين عينة تمثل هذا المجتمع ، و تمتاز المحاكاة بالمرونة اذ تعطي القدرة على التجريب والاختبار عن طريق تكرار العملية لمرات عدة بتفسير المدخلات الخاصة بعملية التقدير في كل مرة وكذلك تأتي أهمية عملية المحاكاة في العشوائية، إذ أن سلسلة الأرقام العشوائية التي تستعمل في التجربة الأولى تكون مستقلة عن سلسلة الأرقام العشوائية في التجربة الثانية وهكذا.

ويمكن استعمال اسلوب المحاكاة لإجراء مقارنة ما بين الطرائق المدروسة ومعرفة الطريقة الفضلى، وهذا ما انصب عليه اهتمامنا في هذا الفصل، إذ تم صياغة إنموذج محاكاة حيث يمكن افتراض العديد من الحالات التي من الممكن وجودها في الواقع العملي عن طريق (حجم العينة وقيم المعلمات) بغية تحقيق الهدف الأساس المتمثل في إيجاد أفضل الطرائق المدروسة لتقدير

معلمات ودالة بقاء توزيع القتصل كوماراسوامي (CKSD) ذي الثلاث معلمات وذلك عن طريق الإجابة عن التساؤلات الآتية:

1- كيفية تأثر طرائق التقدير نتيجة التغير في حجم العينة.

2- كيفية تأثر طرائق التقدير نتيجة التغير في قيم المعلمات α, m, β.

هذا وان بناء تجربة المحاكاة التي سيتم عن طريقها الحصول على الإجابات لهذه التساؤلات تعتمد على عدد من المراحل وكما موضح بالاتي :

3-3وصف مراحل تجارب المحاكاة: (Description Simulation experiments)

لقد تضمنت تجارب المحاكاة عدة مراحل اساسية لتطبيق أساليب تقدير دالة البقاء وكالآتي:

3-3-1المرحلة الأولى: تحديد القيم الافتراضية: (Initial Values determination)

تعد مرحلة تحديد القيم الافتراضية من أهم المراحل التي تعتمد عليها بقية المراحل وقد تم اختيار القيم الافتراضية كآلاتي:

1- تحديد القيم الافتراضية للمعلمات: عن طريق القيام بتجارب متكررة وفحص واختبار النتائج التي يتم الحصول عليها والتي اعطت فكرة واضحة عن المقدرات ونمط سلوكها اذ جرى تحديد خمس نماذج موضحة في الجدول (3-1) الآتي:

جدول (3-1) النماذج المفترضة للمعلمات

الانموذجات المفترضة	الأنموذج الأول	الأنموذج الثاني	الأنموذج الثالث	الأنموذج الرابع	الأنموذج الخامس
α	3	5	3	8	6
m	1.5	7	5	8	2
β	3	6	2	2	2

2- تحديد عدة قيم لحجم العينـة (n): لغرض معرفة مدى تأثير حجم العينة على دقة النتائج المستحصلة من طرائق التقدير تم اختيار خمسة احجام للعينات هي (n=10, 20, 30, 40,50) والسبب وراء اختيار احجام عينات صغيرة كون انه وحسب النظرية الاحصائية بان الطرائق البيزية تعطي افضل تقديرات وافضل نتائج عند احجام العينات الصغيرة لذلك تم اختيار احجام العينات هذه لضمان أمثليه سلوك طرائق التقدير المستعملة.

3-3-2 المرحلة الثانية: توليد الأرقام العشوائية (Data Generation)

يتم في هذه المرحلة توليد البيانات التي تتبع توزيع القنصل كوماراسوامي بالمعلمات (α,m,β) على وفق الخطوات الأتية:

1- توليد الاعداد العشوائية التي تتبع التوزيع المنتظم المستمر(Uniform Distribution) الذي تقع ضمن المدة [0. 1] بالاعتماد على الدالة (Rand) في برنامج ما تلاب.

2- من خصائص توزيع القنصل كوماراسوامي انه عندما m=1 فانه يتحول الى التوزيع الهندسي – كوماراسوامي بدالة الكثافة التجميعية الآتية:

$$F(x) = 1 - [1 - (1 + q^{x})^{\alpha}]^{\beta} \; ; \; x = 0, 1, 2, ... \qquad (3-1)$$

وباستعمال طريقة التحويل المعكوس لدالة الـ CDF نحصل على الآتي:

$$x = \frac{1}{log(q)} log\left(1 - \left[1 - (1 - u)^{\frac{1}{\beta}}\right]^{\frac{1}{\alpha}} \right) \qquad (3\text{-}2)$$

وان x ليس بالضرورة ان تكون عدداً صحيحاً .

اذ ان :

q والتي تساوي 1-p وان p هي معلمة التوزيع الهندسي

3-3-3 المرحلة الثالثة: إيجاد التقديرات (Estimates finding)

وفي هذه المرحلة يتم فيها إيجاد مقدرات معلمات ودالة البقاء لتوزيع القنصل كوماراسوامي ذو ثلاثة معلمات باستعمال طرائق التقدير التي تم عرضها في الفصل الثاني من الرسالة وكالآتي:

1. مقدر بيز القياسي المعلوماتي في ظل دالة خسارة تربيعية باستعمال تقريب ليندلي SBSELind
2. مقدر بيز القياسي المعلوماتي في ظل دالة خسارة تربيعية باستعمال تقريب جفري SBSELjef
3. مقدر بيز القياسي المعلوماتي في ظل دالة خسارة انتروبي عامة باستعمال تقريب ليندلي SBELLind
4. مقدر بيز القياسي المعلوماتي في ظل دالة خسارة انتروبي عامة باستعمال تقريب جفري SBELjef
5. مقدر توقع بيز في ظل دالة خسارة تربيعية باستعمال تقريب ليندلي EBSELLind
6. مقدر توقع بيز في ظل دالة خسارة تربيعية باستعمال تقريب جفري EBSELjef
7. مقدر توقع بيز في ظل دالة خسارة انتروبي عامة باستعمال تقريب ليندلي EBELlind
8. مقدر توقع بيز في ظل دالة خسارة انتروبي عامة باستعمال تقريب جفري EBELjef

4-3-3 المرحلة الرابعة: المقارنة بين طرائق التقدير (Comparing methods)

المرحلة الأخيرة من مراحل تجربة المحاكاة تأتي مرحلة المقارنة بين مقدرات معلمات توزيع القنصل كوماراسوامي بالاعتماد على المعيار الاحصائي متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) وهو افضل من متوسط مربعات الخطأ (MSE) لكون (MSE) يحسب لكل (t_i) من الزمن لكن (IMSE) يمثل التكامل للمساحة الكلية لـ (t_i) واختزالها بقيمة واحدة عامة ممثلة للزمن، أو معبرة عن الزمن الكلي وصيغة هذا المقياس تكون كما يأتي:

$$\mathbf{IMSE}\left(\hat{\theta}(ti)\right) = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}\left\{\frac{1}{n_t}\sum_{j=1}^{n_t}(\theta_j(t_i) - \hat{\theta}_j(t_i))^2\right\}.$$

$$= \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L} \mathbf{MSE}(\hat{\theta}_j(t_i)). \qquad (3\text{-}3)$$

إذ أن:

L: تمثل عدد مرات تكرار التجربة وهو (1000) مرة.

n_t : هي معبرة عن حدود المتغير (t_i) من الحد الادنى الى الحد الاعلى .

$\hat{\theta}$ (t_i): القيمة التقديرية للمعلمة وفق طرائق التقدير المستعملة .

3-4 تحليل تجارب المحاكاة: (Simulation Experiments Analyses)

تم تحليل نتائج تجارب المحاكاة لتقدير معلمات ودالة البقاء لتوزيع القنصل كوماراسوامي (CKSD) بحسب الطرائق المبينة في الجانب النظري ، باستعمال برنامج ماتلاب. اذ تمثل الجداول 3-2 الى 3-6 نتائج تقدير معلمات التوزيع ومتوسط مربعات الخطأ التكاملي لكل معلمة مقدرة ، وتمثل الجداول 3-8 الى 3-12 تقديرات دالة البقاء للتوزيع عند طرائق التقدير والتي تضمنت بعض المختصرات والرموز والتي يمكن توضيحها كما في الجدول التالي:

الرمز	طريقة التقدير	دالة الخسارة	طريقة التقريب	حجم التجربة
SBSELLind	بيز القياسية المعلوماتي	تربيعية	ليندلي	1000
SBELLind	بيز القياسية المعلوماتي	انتروبي عامة	ليندلي	1000
SBSELjef	بيز القياسية المعلوماتي	تربيعية	جيفري	1000

SBELjef	بيز القياسية المعلوماتي	انتروبي عامة	جيفري	1000
EBSELlind	توقع بيز	تربيعية	ليندلي	1000
EBELLind	توقع بيز	انتروبي عامة	ليندلي	1000
EBSELjef	توقع بيز	تربيعية	جيفري	1000
EBELjef	توقع بيز	انتروبي عامة	جيفري	1000

علما ان يمثل IMSE متوسط مربعات الخطأ التكاملي عند طرائق التقدير .

جدول (3-2) القيم التقديرية لمعلمات توزيع القنصل كوماراسوامي (CKSD) بموجب طرائق التقدير وقيمة متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) لكل طريقة عند احجام العينات المفترضة للأنموذج الأول :

n	Parameter	SBSEL Lind	SBEL Lind	SBSEL jef	SBEL jef	EBSEL lind	EBEL Lind	EBSEL jef	EBEL jef	*Best*
10	$\hat{\alpha}$	3.89191	3.67655	3.53222	3.54438	3.43242	3.44353	3.41211	3.42212	EBSEL jef
	$\hat{m}$	1.88554	1.93222	1.81554	1.86433	1.73777	1.72411	1.61112	1.65223	
	$\hat{\beta}$	3.69232	3.97622	3.66722	3.76222	3.53211	3.57882	3.51211	3.52711	
IMSE		0.00080	0.00046	0.00028	0.00030	0.00019	0.00020	0.00017	0.00018	
		0.00015	0.00019	0.00010	0.00013	0.00006	0.00005	0.00001	0.00002	
		0.00048	0.00095	0.00045	0.00058	0.00028	0.00034	0.00026	0.00028	
20	$\hat{\alpha}$	3.79111	3.57851	3.43671	3.51132	3.41311	3.41357	3.33241	3.21128	EBEL jef
	$\hat{m}$	1.88554	1.73821	1.61751	1.76138	1.53711	1.52412	1.41113	1.51572	
	$\hat{\beta}$	3.59137	3.77656	3.56592	3.56629	3.51134	3.43828	3.41458	3.32217	
IMSE		0.00063	0.00033	0.00019	0.00026	0.00017	0.00017	0.00011	0.00004	
		0.00015	0.00006	0.00001	0.00007	0.00000	0.00000	0.00001	0.00000	
		0.00035	0.00060	0.00032	0.00032	0.00026	0.00019	0.00017	0.00010	
30	$\hat{\alpha}$	3.51145	3.51133	3.41632	3.41458	3.32981	3.35378	3.21221	3.20763	EBEL jef
	$\hat{m}$	1.82534	1.64633	1.54734	1.66111	1.51774	1.52397	1.31216	1.43772	
	$\hat{\beta}$	3.55543	3.61348	3.47241	3.45122	3.41331	3.41999	3.31321	3.31132	
		0.00026	0.00026	0.00017	0.00017	0.00011	0.00013	0.00005	0.00004	
		0.00011	0.00002	0.00000	0.00003	0.00000	0.00000	0.00004	0.00000	

IMSE		0.00031	0.00038	0.00022	0.00020	0.00017	0.00018	0.00010	0.00010	
40	$\hat{\alpha}$	3.50442	3.41785	3.40244	3.41132	3.31353	3.31131	3.20065	3.20763	EBSEL jef
	$\hat{m}$	1.52522	1.58222	1.51344	1.64532	1.51106	1.51744	1.50439	1.41232	
	$\hat{\beta}$	3.53906	3.52211	3.41028	3.41219	3.41101	3.21811	3.31126	3.31071	
IMSE		0.00025	0.00017	0.00016	0.00017	0.00010	0.00010	0.00004	0.00004	
		0.00000	0.00001	0.00000	0.00002	0.00000	0.00000	0.00000	0.00001	
		0.00029	0.00027	0.00017	0.00017	0.00017	0.00005	0.00010	0.00010	
50	$\hat{\alpha}$	3.40424	3.41133	3.23111	3.33221	3.31130	3.31001	3.10031	3.10761	EBEL jef
	$\hat{m}$	1.52212	1.51264	1.41313	1.55231	1.41201	1.51118	1.50132	1.51232	
	$\hat{\beta}$	3.51322	3.51245	3.32142	3.40074	3.21101	3.21012	3.21074	3.21011	
IMSE		0.00016	0.00017	0.00005	0.00011	0.00010	0.00010	0.00001	0.00001	
		0.00000	0.00000	0.00001	0.00000	0.00001	0.00000	0.00000	0.00000	
		0.00026	0.00026	0.00010	0.00016	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	

من جدول (3-2) يتضح تفوق طريقة توقع بيز عند استعمال تقريب جيفري لجميع العينات ، فيما تباينت النتائج وفقا لدوال الخسارة المستعملة ، فكانت دالة خسارة انتروبي العامة افضل عند عينة بحجم 20، 30 و 50 بينما كانت دالة الخسارة التربيعية افضل عند العينة بحجم 10 و40 .

جدول (3-3) القيم التقديرية لمعلمات توزيع القنصل كوماراسوامي بموجب طرائق التقدير وقيمة متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) لكل طريقة عند أحجام العينات المفترضة للأنموذج الثاني

n	Paramete	SBSEL Lind	SBEL Lind	SBSEL jef	SBEL jef	EBSEL lind	EBEL Lind	EBSEL jef	EBEL jef	*Best*
10	$\hat{\alpha}$	5.69811	5.57782	5.67818	5.64189	5.55417	5.45561	5.77122	5.66741	EBEL Lind
	$\hat{m}$	7.59342	7.63322	7.64432	7.73222	7.55113	7.35222	7.67332	7.66474	
	$\hat{\beta}$	6.55353	6.56332	6.66333	6.66773	6.42226	6.23134	6.87444	6.43796	
IMSE		0.00049	0.00033	0.00046	0.00041	0.00031	0.00021	0.00059	0.00045	
		0.00035	0.00040	0.00042	0.00054	0.00030	0.00012	0.00045	0.00044	
		0.00031	0.00032	0.00044	0.00045	0.00018	0.00005	0.00076	0.00019	
20	$\hat{\alpha}$	5.53452	5.46433	5.53255	5.61455	5.54224	5.41355	5.64334	5.55783	
	$\hat{m}$	7.52342	7.55343	7.45264	7.63344	7.52443	7.32144	7.56654	7.53674	

	$\hat{\beta}$	6.51453	6.52456	6.63532	6.62553	6.34243	6.22134	6.57888	6.41083	EBEL Lind
IMSE		0.00029	0.00022	0.00028	0.00038	0.00029	0.00017	0.00041	0.00031	
		0.00027	0.00031	0.00020	0.00040	0.00028	0.00010	0.00032	0.00029	
		0.00026	0.00028	0.00040	0.00039	0.00012	0.00005	0.00034	0.00017	
30	$\hat{\alpha}$	5.51864	5.41452	5.51800	5.53535	5.40785	5.40897	5.53633	5.33422	EBSEL lind
	$\hat{m}$	7.51235	7.51784	7.42554	7.55426	7.31124	7.31675	7.45356	7.42242	
	$\hat{\beta}$	6.41674	6.45633	6.53333	6.59754	6.11422	6.17488	6.45243	6.34243	
IMSE		0.00027	0.00017	0.00027	0.00029	0.00017	0.00017	0.00029	0.00011	
		0.00026	0.00027	0.00018	0.00031	0.00010	0.00010	0.00021	0.00018	
		0.00017	0.00021	0.00028	0.00036	0.00001	0.00003	0.00020	0.00012	
40	$\hat{\alpha}$	5.47853	5.32424	5.42455	5.44536	5.32795	5.31156	5.36786	5.32144	EBEL Lind
	$\hat{m}$	7.34255	7.34222	7.32145	7.47976	7.23144	7.20086	7.38655	7.39887	
	$\hat{\beta}$	6.33232	6.34243	6.48966	6.54667	6.11109	6.11456	6.42443	6.33456	
IMSE		0.00023	0.00011	0.00018	0.00020	0.00011	0.00010	0.00014	0.00010	
		0.00012	0.00012	0.00010	0.00023	0.00005	0.00004	0.00015	0.00016	
		0.00011	0.00012	0.00024	0.00030	0.00001	0.00001	0.00018	0.00011	
50	$\hat{\alpha}$	5.31355	5.31099	5.36755	5.41356	5.31333	5.30965	5.34224	5.31778	EBEL Lind
	$\hat{m}$	7.33134	7.33224	7.31677	7.42454	7.21097	7.18654	7.34335	7.36444	
	$\hat{\beta}$	6.28445	6.33268	6.41345	6.46688	6.11009	6.10744	6.34245	6.33134	
IMSE		0.00010	0.00010	0.00014	0.00017	0.00010	0.00010	0.00012	0.00010	
		0.00011	0.00011	0.00010	0.00018	0.00004	0.00003	0.00012	0.00013	
		0.00008	0.00011	0.00017	0.00022	0.00001	0.00001	0.00012	0.00011	

من جدول (3-3) يتضح تفوق طريقة توقع بيز عند استعمال تقريب لندلي لجميع العينات ، فيما تباينت النتائج وفقا لدوال الخسارة المستعملة ، فكانت دالة خسارة انتروبي العامة افضل عند عينة بحجم 10 و 20، 40 و 50 بينما كانت دالة الخسارة التربيعية افضل عند العينة بحجم 30 .

جدول (3-4) القيم التقديرية لمعلمات توزيع القنصل كوماراسوامي بموجب طرائق التقدير وقيمة متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) لكل طريقة عند أحجام العينات المفترضة للأنموذج الثالث

n	Parameter Estimate	SBSEL Lind	SBEL Lind	SBSEL jef	SBEL jef	EBSEL lind	EBEL Lind	EBSEL jef	EBEL jef	*Best*
10	$\hat{\alpha}$	3.55354	3.53565	3.58765	3.67443	3.62113	3.68444	3.43254	3.41865	
	$\hat{m}$	5.67332	5.56855	5.66743	5.54886	5.56378	5.59765	5.51231	5.44243	EBEL
	$\hat{\beta}$	2.78188	2.66741	2.39884	2.63864	2.55352	2.54524	2.43422	2.38677	jef
IMSE		0.00031	0.00029	0.00035	0.00045	0.00039	0.00047	0.00019	0.00018	
		0.00045	0.00032	0.00045	0.00030	0.00032	0.00036	0.00026	0.00020	
		0.00061	0.00045	0.00016	0.00041	0.00031	0.00030	0.00019	0.00015	
20	$\hat{\alpha}$	3.49755	3.51907	3.54865	3.55798	3.55335	3.53755	3.32311	3.33132	
	$\hat{m}$	5.45333	5.45789	5.45976	5.42135	5.45788	5.44576	5.74136	5.42144	
	$\hat{\beta}$	2.66356	2.53788	2.29876	2.53901	2.43222	2.43211	2.32111	2.27131	EBEL
IMSE		0.00025	0.00027	0.00030	0.00031	0.00031	0.00029	0.00010	0.00011	jef
		0.00021	0.00021	0.00021	0.00018	0.00021	0.00020	0.00055	0.00018	
		0.00044	0.00029	0.00009	0.00029	0.00019	0.00019	0.00010	0.00007	
30	$\hat{\alpha}$	3.38943	3.47573	3.42864	3.41286	3.49076	3.48976	3.31865	3.23421	
	$\hat{m}$	5.32553	5.41344	5.43278	5.39076	5.43324	5.41353	5.42442	5.32242	
	$\hat{\beta}$	2.53346	2.44235	2.26758	2.48954	2.41675	2.33256	2.21331	2.21343	EBEL
IMSE		0.00015	0.00023	0.00018	0.00017	0.00024	0.00024	0.00010	0.00005	jef
		0.00011	0.00017	0.00019	0.00015	0.00019	0.00017	0.00018	0.00010	
		0.00028	0.00020	0.00007	0.00024	0.00017	0.00011	0.00005	0.00005	
40	$\hat{\alpha}$	3.27668	3.45699	3.41896	3.36896	3.45887	3.45654	3.11244	3.16454	
	$\hat{m}$	5.31356	5.38954	5.33464	5.34567	5.35744	5.34344	5.21332	5.27855	
	$\hat{\beta}$	2.46754	2.33433	2.33450	2.34677	2.33579	2.32135	2.13566	2.21508	EBSE
IMSE		0.00008	0.00021	0.00018	0.00014	0.00021	0.00021	0.00001	0.00003	jef
		0.00010	0.00015	0.00011	0.00012	0.00013	0.00012	0.00005	0.00008	
		0.00022	0.00011	0.00011	0.00012	0.00011	0.00010	0.00002	0.00005	
50	$\hat{\alpha}$	3.25632	3.42313	3.34527	3.32896	3.41379	3.43256	3.11179	3.13445	
	$\hat{m}$	5.25885	5.32455	5.21443	5.33255	5.32467	5.33453	5.13456	5.18955	
	$\hat{\beta}$	2.44389	2.31245	2.32443	2.33245	2.23243	2.22213	2.11134	2.13553	

IMSE	0.00007	0.00018	0.00012	0.00011	0.00017	0.00019	0.00001	0.00002	EBSE jef
	0.00007	0.00011	0.00005	0.00011	0.00011	0.00011	0.00002	0.00004	
	0.00020	0.00010	0.00011	0.00011	0.00005	0.00005	0.00001	0.00002	

من جدول (3-4) يتضح تفوق طريقة توقع بيز عند استعمال تقريب جيفري لجميع العينات فيما تباينت النتائج وفقاً لدوال الخسارة المستعملة فكانت دالة انتروبي العامة افضل عند عينة بحجم 10 و 20 و 30 بينما كانت دالة الخسارة التربيعية افضل عند العينة بحجم 40 و 50 .

جدول (3-5) القيم التقديرية لمعلمات توزيع القنصل كوماراسوامي بموجب طرائق التقدير وقيمة متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) لكل طريقة عند أحجام العينات المفترضة للأنموذج الرابع

n	Parameter Estim	SBSEL Lind	SBEL Lind	SBSEL jef	SBEL jef	EBSEL lind	EBEL Lind	EBSEL jef	EBEL jef	Best
10	$\hat{\alpha}$	8.99541	8.89544	8.65733	8.56943	8.54533	8.52566	8.56999	8.55643	EBEL Lind
	$\hat{m}$	8.66646	8.73688	8.59076	8.61344	8.54533	8.50111	8.55111	8.57133	
	$\hat{\beta}$	2.60919	2.65722	2.63442	2.66432	2.43986	2.33262	2.51211	2.61456	
IMSE		0.03594	0.03476	0.03201	0.03102	0.03075	0.03053	0.03102	0.03087	
		0.00044	0.00054	0.00035	0.00038	0.00030	0.00025	0.00030	0.00033	
		0.00037	0.00043	0.00040	0.00044	0.00019	0.00011	0.00026	0.00038	
20	$\hat{\alpha}$	8.87432	8.77457	8.54688	8.44778	8.44277	8.41564	8.51135	8.51890	EBEL Lind
	$\hat{m}$	8.56144	8.66649	8.57689	8.41907	8.50014	8.42575	8.50164	8.53467	
	$\hat{\beta}$	2.54366	2.51466	2.61456	2.48966	2.41577	2.31477	2.44188	2.57864	
IMSE		0.03451	0.03335	0.03077	0.02968	0.02962	0.02933	0.03037	0.03046	
		0.00032	0.00044	0.00033	0.00018	0.00025	0.00018	0.00025	0.00029	
		0.00030	0.00026	0.00038	0.00024	0.00017	0.00010	0.00020	0.00033	
30	$\hat{\alpha}$	8.77590	8.64266	8.51578	8.41368	8.42674	8.40685	8.30865	8.32424	EBSEL jef
	$\hat{m}$	8.51110	8.55463	8.53408	8.37954	8.46855	8.41678	8.35807	8.43535	
	$\hat{\beta}$	2.44572	2.47677	2.56089	2.45567	2.36053	2.30464	2.23589	2.44557	
IMSE		0.03336	0.03184	0.03042	0.02931	0.02945	0.02923	0.02818	0.02835	
		0.00026	0.00031	0.00029	0.00014	0.00022	0.00017	0.00013	0.00019	

		0.00020	0.00023	0.00031	0.00021	0.00013	0.00009	0.00006	0.00020	
40	$\hat{\alpha}$	8.52344	8.55678	8.47955	8.39086	8.41255	8.36076	8.22155	8.31456	EBSEL jef
	$\hat{m}$	8.46896	8.47904	8.51334	8.34658	8.44287	8.35786	8.30896	8.36895	
	$\hat{\beta}$	2.35795	2.44576	2.47888	2.41379	2.31356	2.29366	2.21576	2.41566	
IMSE		0.03051	0.03088	0.03003	0.02906	0.02930	0.02874	0.02726	0.02824	
		0.00022	0.00023	0.00026	0.00012	0.00020	0.00013	0.00010	0.00014	
		0.00013	0.00020	0.00023	0.00017	0.00010	0.00009	0.00005	0.00017	
50	$\hat{\alpha}$	8.44356	8.44316	8.45765	8.34666	8.40809	8.33155	8.12478	8.25955	EBSEL jef
	$\hat{m}$	8.34796	8.32479	8.44992	8.31907	8.34579	8.31358	8.11907	8.23345	
	$\hat{\beta}$	2.23566	2.41908	2.33467	2.35897	2.23555	2.25785	2.11736	2.33578	
IMSE		0.02963	0.02963	0.02979	0.02859	0.02925	0.02843	0.02626	0.02766	
		0.00012	0.00011	0.00020	0.00010	0.00012	0.00010	0.00001	0.00005	
		0.00006	0.00018	0.00011	0.00013	0.00006	0.00007	0.00001	0.00011	

من جدول (3-5) يتضح تفوق طريقة توقع بيز عن استعمال تقريب ليندلي عن دالة خسارة انتروبي العامة افضل عند العينة بحجم 10 و 20 وتفوق طريقة توقع بيز عند استعمال تقريب جيفري عند دالة خسارة تربيعية افضل عند العينة بحجم 30 و40 و50 .

جدول (3-6) القيم التقديرية لمعلمات توزيع القنصل كوماراسوامي بموجب طرائق التقدير وقيمة متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) لكل طريقة عند أحجام العينات المفترضة للأنموذج الخامس

n	Parameter Estim	SBSEL Lind	SBEL Lind	SBSEL jef	SBEL jef	EBSEL lind	EBEL Lind	EBSEL jef	EBEL jef	*Best*
10	$\hat{\alpha}$	6.56991	6.54676	6.67944	6.59077	6.57896	6.58905	6.78976	6.77782	SBSEL Lind
	$\hat{m}$	2.63885	2.66474	2.82534	2.67882	2.78488	2.79596	2.98199	2.99962	
	$\hat{\beta}$	2.55433	2.57894	2.73434	2.59005	2.84644	2.87868	2.88955	2.89022	
IMSE		0.00032	0.00030	0.00046	0.00035	0.00034	0.00035	0.00062	0.00061	
		0.00041	0.00044	0.00068	0.00046	0.00062	0.00063	0.00096	0.00100	

		0.00031	0.00034	0.00054	0.00035	0.00072	0.00077	0.00079	0.00079	
20	$\hat{\alpha}$	6.54356	6.51464	6.51323	6.48966	6.556433	6.56788	6.75733	6.67786	
	$\hat{m}$	2.61244	2.63555	2.56466	2.51444	2.713533	2.67898	2.88957	2.89778	
	$\hat{\beta}$	2.52345	2.54644	2.51236	2.51234	2.75857	2.77859	2.76546	2.78905	SBEL jef
IMSE		0.00030	0.00026	0.00026	0.00024	0.00031	0.00032	0.00057	0.00046	
		0.00038	0.00040	0.00032	0.00026	0.00051	0.00046	0.00079	0.00081	
		0.00027	0.00030	0.00026	0.00026	0.00058	0.00061	0.00059	0.00062	
30	$\hat{\alpha}$	6.52389	6.48966	6.50144	6.45674	6.53255	6.32553	6.35675	6.345333	
	$\hat{m}$	2.57996	2.55678	2.45677	2.46797	2.65644	2.33324	2.43566	2.41222	
	$\hat{\beta}$	2.50854	2.51346	2.47976	2.45567	2.61333	2.32244	2.53445	2.51233	EBEL Lind
IMSE		0.00027	0.00024	0.00025	0.00021	0.00028	0.00011	0.00013	0.00012	
		0.00034	0.00031	0.00021	0.00022	0.00043	0.00011	0.00019	0.00017	
		0.00026	0.00026	0.00023	0.00021	0.00038	0.00010	0.00029	0.00026	
40	$\hat{\alpha}$	6.45433	6.43566	6.44456	6.43458	6.47883	6.31565	6.33455	6.32211	
	$\hat{m}$	2.46775	2.54644	2.41345	2.44277	2.52577	2.23345	2.31775	2.30043	
	$\hat{\beta}$	2.45677	2.47897	2.44366	2.34565	2.52887	2.24565	2.33223	2.31344	EBEL Lind
IMSE		0.00021	0.00019	0.00020	0.00019	0.00023	0.00010	0.00011	0.00010	
		0.00022	0.00030	0.00017	0.00020	0.00028	0.00005	0.00010	0.00009	
		0.00021	0.00023	0.00020	0.00012	0.00028	0.00006	0.00011	0.00010	
50	$\hat{\alpha}$	6.41344	6.41143	6.34466	6.32114	6.22456	6.20134	6.31113	6.31679	
	$\hat{m}$	2.44456	2.42344	2.37996	2.23456	2.21690	2.12257	2.30554	2.28966	
	$\hat{\beta}$	2.43221	2.41244	2.34586	2.29555	2.26688	2.15674	2.31234	2.26786	EBEL Lind
IMSE		0.00017	0.00017	0.00012	0.00010	0.00005	0.00004	0.00010	0.00010	
		0.00020	0.00018	0.00014	0.00006	0.00005	0.00002	0.00009	0.00008	
		0.00019	0.00017	0.00012	0.00009	0.00007	0.00002	0.00010	0.00007	

من جدول (3-6) يتضح تفوق طريقة بيز القياسية عند استعمال تقريب ليندلي وفقاً لدالة الخسارة التربيعية عند عينة بحجم 10 وكذلك عند استعمال تقريب جيفري وفقاً لدالة خسارة انتروبي العامة عند عينة بحجم 20 وتفوق طريقة توقع بيز عند استعمال تقريب ليندلي وفقا لدالة خسارة انتروبي العامة عند عينة بحجم 30 و40 و 50 .

والجدول (3-7) يبين نسب الافضلية عند طرائق تقدير معلمات توزيع القنصل كوماراسوامي وعند كل حجم من احجام العينات:

الطريقة	حجم العينة					عدد مرات الافضلية	نسبة الافضلية%
	$n_1 = 10$	$n_2 = 20$	$n_3 = 30$	$n_4 = 40$	$n_5 = 50$		
SBSELLind	1	0	0	0	0	1	4
SBELLind	0	0	0	0	0	0	0
SBSELjef	0	0	0	0	0	0	0
SBELjef	0	1	0	0	0	1	4
EBSELlind	0	0	1	0	0	1	4
EBELLind	2	2	1	2	2	9	36
EBSELjef	1	0	1	3	2	7	28
EBELjef	1	2	2	0	1	6	24

يتضح من جدول (3-7) ما يأتي:

1. تفوق تقريب ليندلي على تقريب جفري بنسبة افضلية بلغت (36%) ولتجارب المحاكاة كافة.
2. تفوقت طريقة توقع بيز على باقي طرائق التقدير ولتجارب المحاكاة كافة.
3. كانت طريقة توقع بيز في ظل دالة خسارة انتروبي عامة عند تقريب ليندلي متفوقة على باقي طرائق التقدير ولجميع تجارب المحاكاة بنسبة افضلية بلغت (36%). تليها طريقة توقع بيز عند دالة خسارة تربيعية في ظل تقريب ليندلي بنسبة افضلية بلغت (28%) ، وتليها طريقة توقع بيز عند دالة خسارة انتروبي عامة في ظل تقريب جفري بنسبة افضلية بلغت (24%).
4. حققت طريقة توقع بيز في ظل تقريب جفري نسب متقاربة بلغت (28%) و (24%) في ظل دالتي الخسارة التربيعية والانتروبي العامة.
5. لم تحقق طريقة بيز القياسية عند دالة انتروبي عامة وفي ظل تقريب ليندلي اي افضلية وكذلك كطريقة بيز القياسية عند دالة خسارة تربيعية في ظل تقريب جفري مقارنة بباقي طرائق التقدير .

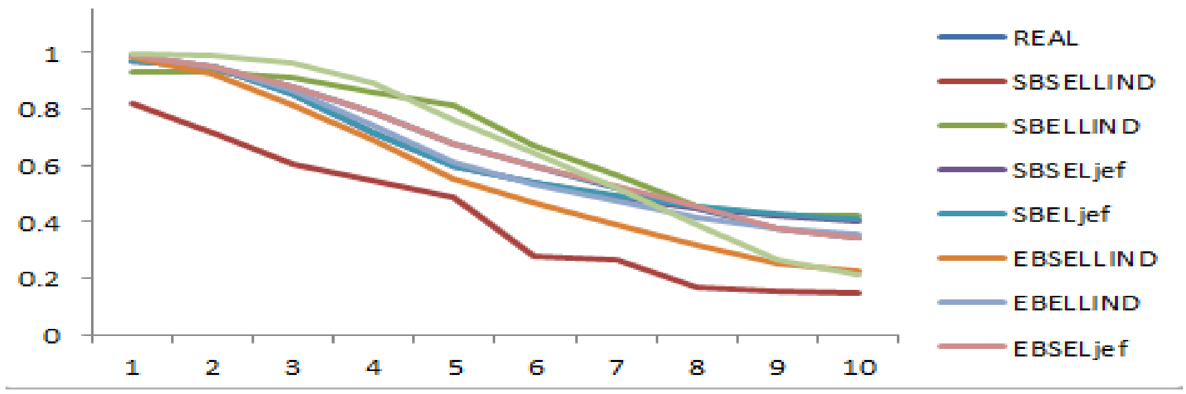
6. تساوت افضلية الطرائق بيز القياسية عند دالة خسارة تربيعية في ظل تقريب ليندلي وطريقة بيز القياسية في ظل دالة انتروبي عامة في ظل تقريب جفري وطريقة توقع بيز في ظل دالة خسارة تربيعية عند تقريب ليندلي بنسبة افضلية بلغت (4%).

جدول (3-8) القيم التقديرية لدالة البقاء لتوزيع القنصل كوماراسوامي بموجب طرائق التقدير وقيمة متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) لكل طريقة عند أحجام العينات المفترضة للأنموذج الأول

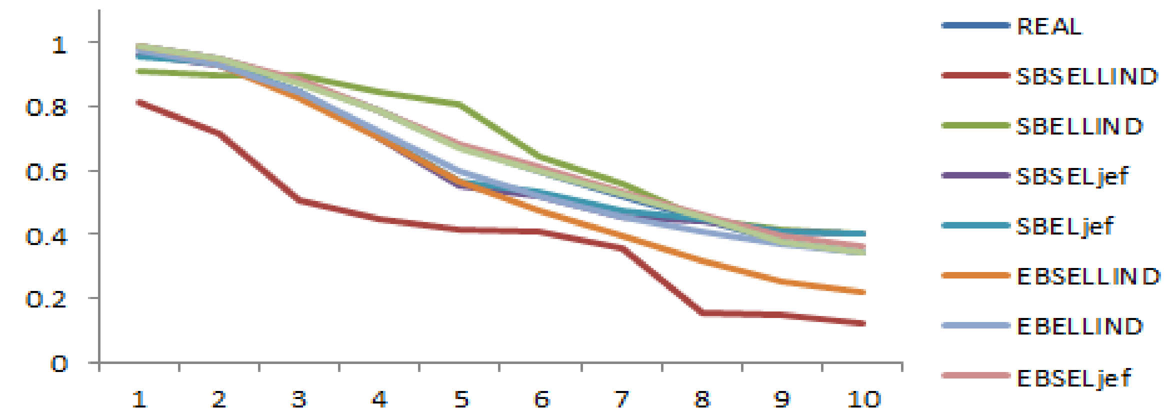
n	Real	SBSELLind	SBELLind	SBSELjef	SBELjef	EBSELlind	EBELLind	EBSELjef	EBELjef
10	0.99201	0.82113	0.93139	0.97241	0.97081	0.98632	0.98797	0.99211	0.99971
	0.95122	0.71812	0.92833	0.94815	0.94791	0.92171	0.94883	0.95375	0.99292
	0.87984	0.60321	0.91344	0.85432	0.85421	0.81661	0.86576	0.87772	0.96294
	0.78505	0.54776	0.85636	0.71626	0.71717	0.68811	0.74221	0.78644	0.88981
	0.67571	0.48555	0.81345	0.59844	0.60107	0.55327	0.61200	0.67932	0.76071
	0.59931	0.27854	0.66788	0.53776	0.54181	0.46702	0.53602	0.59986	0.64591
	0.52308	0.26777	0.56777	0.48950	0.49472	0.38727	0.47199	0.52725	0.51731
	0.44932	0.16755	0.45775	0.45093	0.45691	0.31591	0.41917	0.45784	0.38716
	0.37985	0.15675	0.42455	0.41967	0.42591	0.25385	0.37571	0.37682	0.26851
	0.34716	0.14553	0.42111	0.40620	0.41251	0.22637	0.35691	0.34144	0.21678
IMSE		0.09886	0.09123	0.07932	0.08563	0.07272	0.05061	0.00533	0.01026
Best		EBSELjef							
20	0.99201	0.81112	0.91124	0.96335	0.95675	0.98834	0.97554	0.99206	0.99112
	0.95122	0.71812	0.90122	0.93442	0.93453	0.92940	0.931221	0.95207	0.95123
	0.87984	0.50527	0.89664	0.84354	0.84343	0.82942	0.84533	0.88249	0.87556
	0.78505	0.44734	0.84353	0.70553	0.71055	0.70294	0.72342	0.79021	0.78644
	0.67571	0.41567	0.80446	0.55454	0.56566	0.56633	0.59866	0.68369	0.67111
	0.59931	0.40852	0.64564	0.52354	0.53245	0.47703	0.52343	0.60913	0.59855
	0.52308	0.35633	0.55755	0.45666	0.47675	0.39326	0.45544	0.53461	0.52653
	0.44932	0.15752	0.44566	0.44333	0.44564	0.31744	0.40664	0.46227	0.45664
	0.37985	0.14645	0.41354	0.40666	0.41233	0.25104	0.36744	0.39388	0.37454
	0.34716	0.12534	0.40455	0.40443	0.40553	0.22157	0.34533	0.36159	0.34144
IMSE		0.15815	0.13905	0.08821	0.09147	0.08081	0.06798	0.00788	0.00153
Best		EBELjef							

	0.99201	0.81022	0.91122	0.99044	0.94533	0.98854	0.95643	0.99111	0.99012
	0.95122	0.68976	0.85544	0.95048	0.92355	0.93053	0.92343	0.95121	0.94783
	0.87984	0.45644	0.84623	0.87650	0.83433	0.83186	0.83323	0.88113	0.87111
	0.78505	0.43211	0.83242	0.77287	0.68776	0.70654	0.71334	0.78743	0.78112
30	0.67571	0.33454	0.78944	0.65437	0.55644	0.57047	0.56754	0.68122	0.65633
	0.59931	0.32133	0.62244	0.57642	0.52233	0.48111	0.51442	0.60133	0.59755
	0.52308	0.23144	0.44533	0.50434	0.45444	0.39695	0.44533	0.53211	0.52343
	0.44932	0.13222	0.43333	0.44033	0.43453	0.32052	0.39076	0.46111	0.45111
	0.37985	0.11134	0.40564	0.38494	0.40554	0.25335	0.35766	0.39211	0.37233
	0.34716	0.10876	0.40333	0.36036	0.40222	0.22348	0.33233	0.36111	0.34211
IMSE		0.18977	0.14785	0.02585	0.12133	0.09007	0.08715	0.00897	0.00082
Best		EBELjef							
	0.99201	0.80445	0.90334	0.99140	0.94122	0.97875	0.94533	0.99001	0.98454
	0.95122	0.79654	0.843533	0.95117	0.91345	0.92311	0.91355	0.94111	0.95031
	0.87984	0.43244	0.834644	0.87822	0.82313	0.82311	0.81533	0.87034	0.87222
	0.78505	0.41233	0.81244	0.77805	0.67666	0.67865	0.70554	0.78055	0.77866
40	0.67571	0.32123	0.77666	0.66238	0.54645	0.55656	0.55553	0.65333	0.67655
	0.59931	0.31445	0.61345	0.58383	0.51335	0.456543	0.48987	0.57553	0.59866
	0.52308	0.11432	0.43434	0.50863	0.44533	0.38776	0.43553	0.51322	0.52322
	0.44932	0.11335	0.41112	0.43943	0.42231	0.31333	0.38944	0.44421	0.45444
	0.37985	0.11014	0.36785	0.37770	0.39077	0.24522	0.34445	0.37844	0.38955
	0.34716	0.10676	0.35865	0.34980	0.38565	0.21344	0.31234	0.34122	0.35644
IMSE		0.19975	0.17767	0.01542	0.13422	0.13454	0.14211	0.00042	0.01555
Best		EBSELjef							
	0.99201	0.79774	0.88666	0.99140	0.93466	0.96744	0.91345	0.981211	0.99001
	0.95122	0.77556	0.83233	0.95117	0.89777	0.91454	0.90444	0.95003	0.94100
	0.87984	0.42212	0.82322	0.87822	0.81233	0.81344	0.81143	0.87211	0.87021
50	0.78505	0.34553	0.80555	0.77805	0.66675	0.66765	0.68766	0.77121	0.78022
	0.67571	0.31453	0.76454	0.66238	0.53332	0.54633	0.45333	0.67321	0.65121
	0.59931	0.30554	0.60666	0.58383	0.49886	0.44343	0.46454	0.59665	0.57112
	0.52308	0.11014	0.41466	0.50863	0.43243	0.37544	0.41333	0.52112	0.51122
	0.44932	0.10064	0.34553	0.43943	0.41344	0.23122	0.37555	0.45142	0.44231

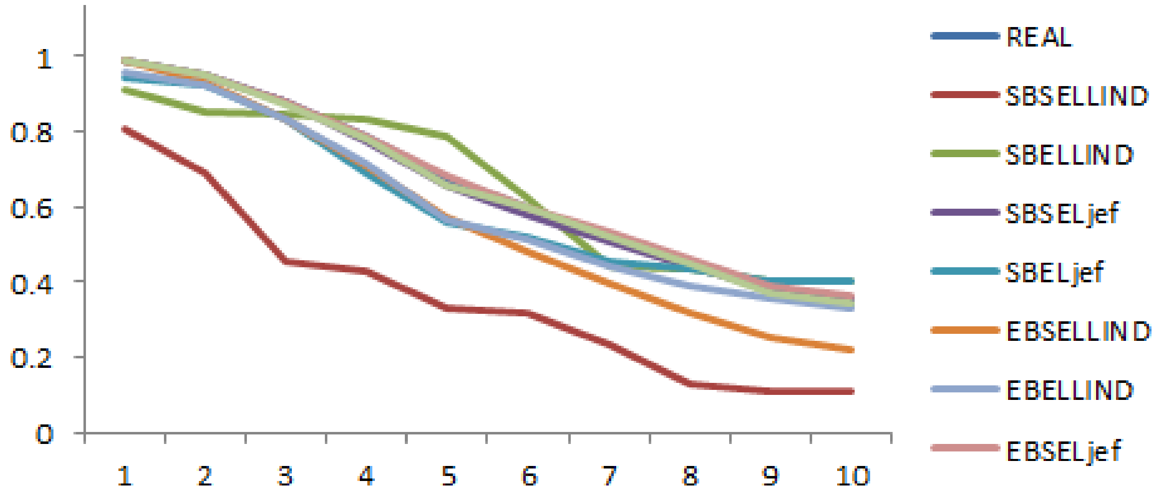
	0.37985	0.10056	0.33133	0.37770	0.38776	0.23454	0.31113	0.38551	0.37813
	0.34716	0.10031	0.21233	0.34980	0.37685	0.212211	0.31111	0.35142	0.34111
IMSE		0.11344	0.185775	0.01542	0.15654	0.14353	0.15562	0.01775	0.00042
Best		EBELjef							



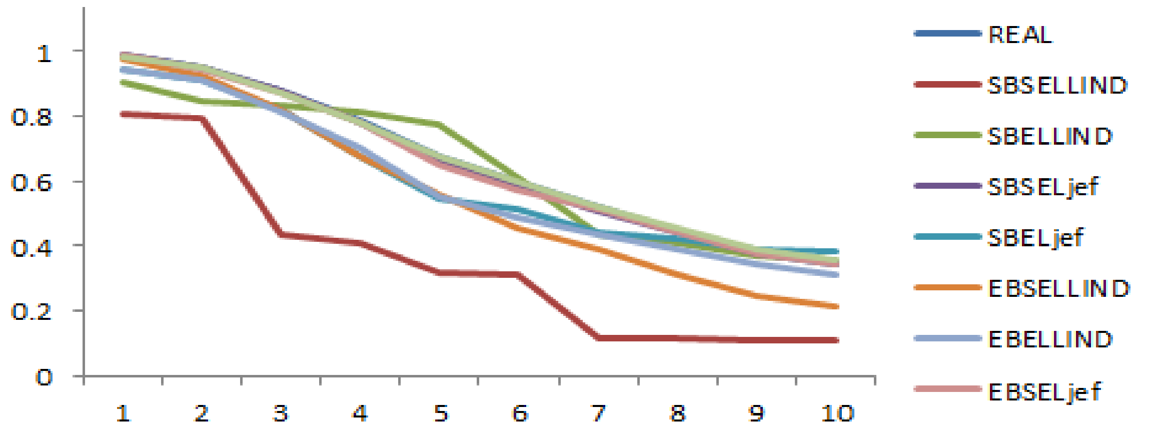
شكل (1) منحنى دالة البقاء لتوزيع القنصل كوماراسوامي عند حجم عينة 10 وللأنموذج الاول



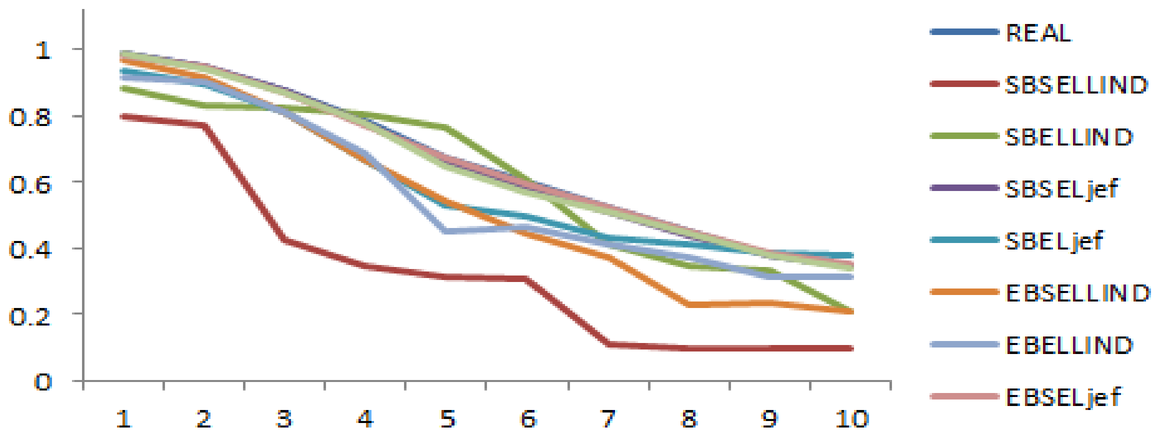
شكل (2) منحنى دالة البقاء لتوزيع القنصل كوماراسوامي عند حجم عينة 20 وللأنموذج الاول



شكل (3) منحنى دالة البقاء لتوزيع القنصل كوماراسوامي عند حجم عينة 30 وللأنموذج الاول



شكل (4) منحنى دالة البقاء لتوزيع القنصل كوماراسوامي عند حجم عينة 40 وللأنموذج الاول



شكل (5) منحنى دالة البقاء لتوزيع القنصل كوماراسوامي عند حجم عينة 50 للأنموذج الأول

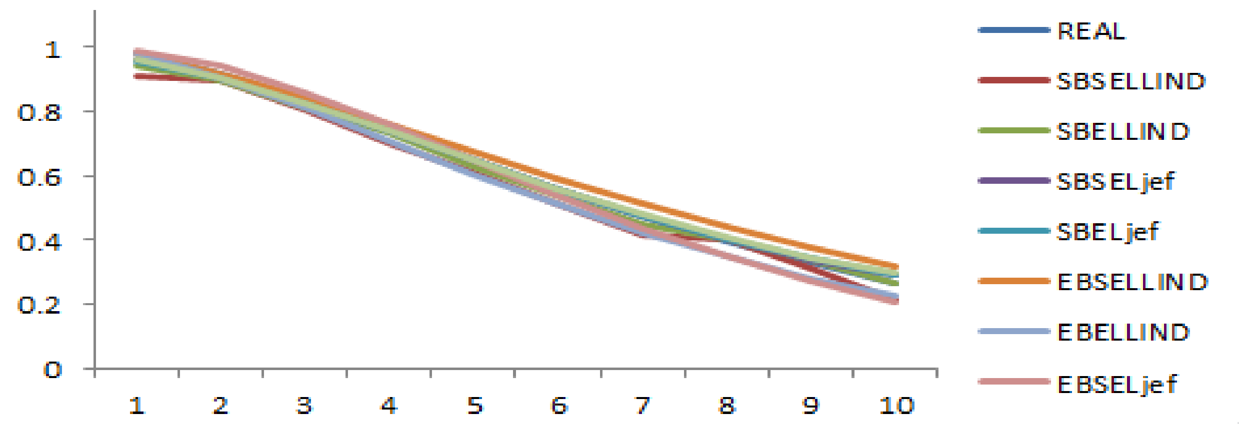
من جدول (3-8) والاشكال (3-1) الى (3-5) للأنموذج الاول وباستعمال المعيار الاحصائي متوسط مربعات الخطأ التكاملي IMSE يتضح تفوق طريقة توقع بيز عند استعمال تقريب جيفري لجميع العينات فيما تباينت النتائج وفقا لدوال الخسارة المستعملة فكانت دالة الخسارة التربيعية افضل عند عينة بحجم 10 و 40 بينما كانت دالة خسارة انتروبي العامة افضل عند العينة بحجم 20 و 30 و 50 .

جدول (3-9) القيم التقديرية لدالة البقاء لتوزيع القنصل كوماراسوامي بموجب طرائق التقدير وقيمة متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) لكل طريقة عند أحجام العينات المفترضة للأنموذج الثاني

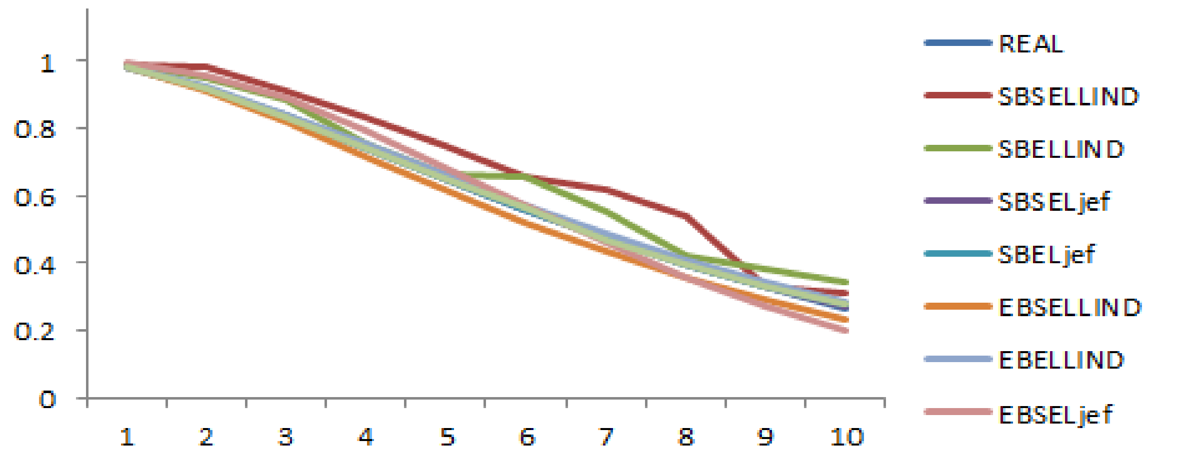
n	Real	SBSELLind	SBELLinc	SBSELjef	SBELjef	EBSELLind	EBELLind	EBSELjef	EBELjef
10	0.98412	0.91323	0.94122	0.96448	0.95987	0.98162	0.98135	0.99152	0.96648
	0.92122	0.90121	0.90112	0.90551	0.90221	0.92119	0.90625	0.94214	0.90465
	0.83767	0.80563	0.81311	0.82965	0.82734	0.84528	0.81110	0.86084	0.82710
	0.74615	0.70226	0.73542	0.74217	0.74047	0.76201	0.70822	0.75952	0.73984
	0.65244	0.61133	0.62993	0.64931	0.64807	0.67662	0.60651	0.64967	0.64872
	0.56148	0.51218	0.53675	0.55809	0.55724	0.59293	0.51222	0.54037	0.55985
	0.47643	0.41534	0.45135	0.47454	0.47433	0.51365	0.42437	0.43859	0.47825
	0.39911	0.40023	0.40255	0.40184	0.40251	0.44060	0.34804	0.34856	0.40681
	0.33022	0.31201	0.33543	0.34072	0.34242	0.37483	0.28235	0.27204	0.34627
	0.26911	0.21111	0.26322	0.29048	0.29331	0.31672	0.22686	0.20912	0.29602
	IMSE	0.08573	0.07789	0.01573	0.01789	0.00650	0.00694	0.00821	0.01558
	Best	EBSELLind							
20	0.98412	0.99131	0.98854	0.98041	0.98031	0.98221	0.98393	0.99531	0.98665
	0.92122	0.98113	0.95332	0.91634	0.91643	0.91139	0.92222	0.95852	0.91627
	0.83767	0.91432	0.88787	0.83433	0.83457	0.81922	0.84182	0.88977	0.83238
	0.74615	0.83333	0.75655	0.74346	0.74376	0.71892	0.75282	0.79546	0.74357
	0.65244	0.75021	0.66545	0.65022	0.65055	0.61862	0.66162	0.68627	0.65161
	0.56148	0.65923	0.65755	0.55961	0.55992	0.52316	0.57267	0.57174	0.56564
	0.47643	0.61512	0.55456	0.47513	0.47541	0.43561	0.48896	0.46057	0.47114
	0.39911	0.54222	0.42443	0.39914	0.39934	0.35766	0.4124	0.35912	0.39942
	0.33022	0.33222	0.38243	0.33261	0.33313	0.29011	0.34387	0.27158	0.33335
	0.26911	0.31222	0.3424	0.27568	0.27633	0.23242	0.28384	0.19947	0.27652
	IMSE	0.09441	0.08887	0.02342	0.02343	0.00751	0.00871	0.00992	0.07342
	Best	EBSELLind							
30	0.98412	0.98209	0.98212	0.98211	0.98222	0.98199	0.98366	0.99537	0.98200

	0.92122	0.91817	0.91222	0.96644	0.91102	0.91816	0.92058	0.95915	0.91819
	0.83767	0.83563	0.81331	0.83522	0.81842	0.83569	0.83854	0.89072	0.83578
	0.74615	0.74442	0.7242	0.74334	0.71772	0.74450	0.74821	0.79755	0.74452
	0.65244	0.65114	0.61333	0.651232	0.61686	0.65120	0.65610	0.68876	0.65112
	0.56148	0.56057	0.53333	0.56022	0.52093	0.56058	0.56659	0.57405	0.56039
	0.47643	0.47601	0.43224	0.47622	0.43304	0.47600	0.48262	0.46210	0.47605
	0.39911	0.39952	0.35482	0.39234	0.35484	0.39951	0.40598	0.35958	0.39952
	0.33022	0.33209	0.286233	0.33111	0.28694	0.33213	0.33762	0.27073	0.33212
	0.26911	0.27393	0.3323	0.27333	0.22919	0.27405	0.27782	0.19743	0.27402
IMSE		0.14211	0.08979	0.02786	0.02747	0.00996	0.01155	0.01133	0.08453
Best		EBSELlind							
40	0.98412	0.98432	0.98311	0.98403	0.98235	0.98321	0.98312	0.99548	0.98314
	0.92122	0.92121	0.91444	0.92094	0.91168	0.91923	0.91953	0.96004	0.91951
	0.83767	0.83222	0.81877	0.83832	0.81964	0.83716	0.83676	0.89297	0.83672
	0.74615	0.74338	0.71787	0.74718	0.71940	0.74576	0.74536	0.80121	0.74535
	0.65244	0.65622	0.61821	0.65422	0.61884	0.65289	0.65199	0.69362	0.65192
	0.56148	0.56233	0.52122	0.56395	0.52302	0.56122	0.56131	0.57953	0.56131
	0.47643	0.47988	0.43317	0.47935	0.43507	0.46714	0.47649	0.46757	0.47649
	0.39911	0.40111	0.35623	0.40223	0.35669	0.40013	0.39947	0.36431	0.39947
	0.33022	0.33311	0.28812	0.33354	0.28852	0.33387	0.33125	0.27434	0.33125
	0.26911	0.27453	0.23111	0.27355	0.23046	0.27261	0.27207	0.19977	0.27207
IMSE		0.16671	0.0959	0.03782	0.02897	0.01355	0.01455	0.02144	0.09953
Best		EBSELLind							
50	0.98412	0.91232	0.90124	0.92011	0.91117	0.90222	0.98213	0.96011	0.90977
	0.92122	0.87818	0.81133	0.83453	0.81323	0.83122	0.917322	0.89134	0.83223
	0.83767	0.77866	0.70555	0.74453	0.71112	0.74546	0.83111	0.80222	0.74557
	0.74615	0.65655	0.60755	0.65122	0.61144	0.64243	0.74357	0.62422	0.65148
	0.65244	0.55655	0.51355	0.56213	0.52132	0.56331	0.65666	0.54233	0.56433
	0.56148	0.46544	0.42333	0.47454	0.43102	0.47344	0.56422	0.46328	0.47632
	0.47643	0.40054	0.33232	0.40113	0.35223	0.40111	0.47988	0.36333	0.39344
	0.39911	0.32133	0.27877	0.33132	0.28111	0.33245	0.39786	0.27243	0.33143
	0.33022	0.29655	0.27576	0.27152	0.23136	0.27112	0.33232	0.19565	0.27222

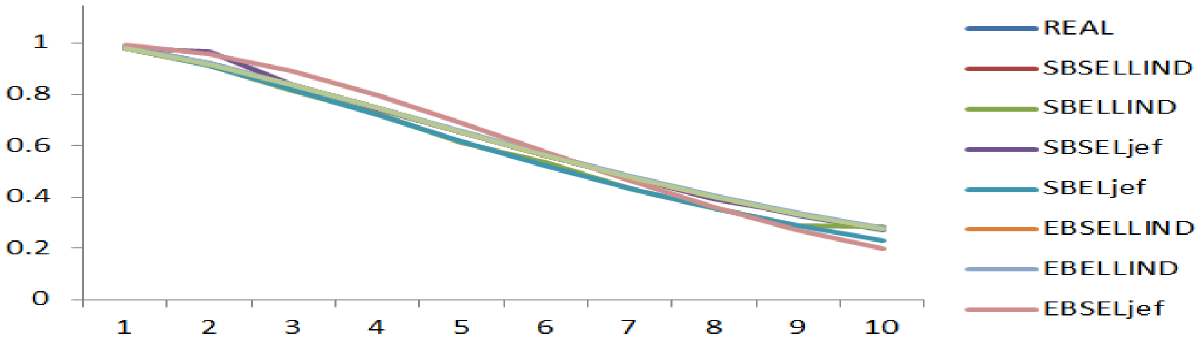
	0.26911	0.28853	0.27111	0.27122	0.27111	0.27131	0.26755	0.26023	0.27943
IMSE		0.25622	0.17855	0.05722	0.04591	0.02356	0.03234	0.05143	0.19242
Best		EBELLind							



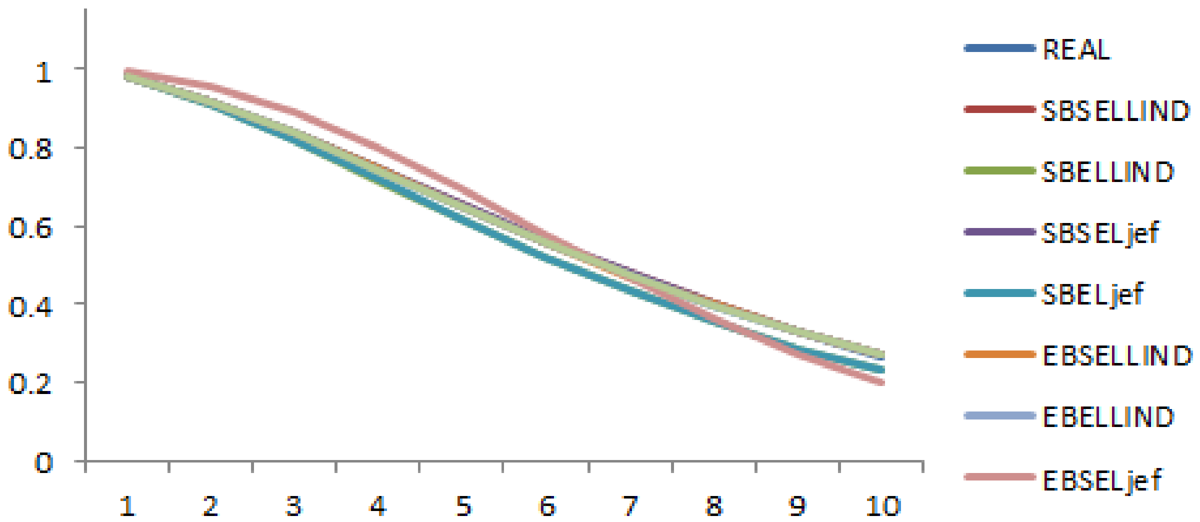
شكل (6) منحنى دالة البقاء لتوزيع القنصل كوماراسوامي عند حجم عينة 10 وللأنموذج الثاني



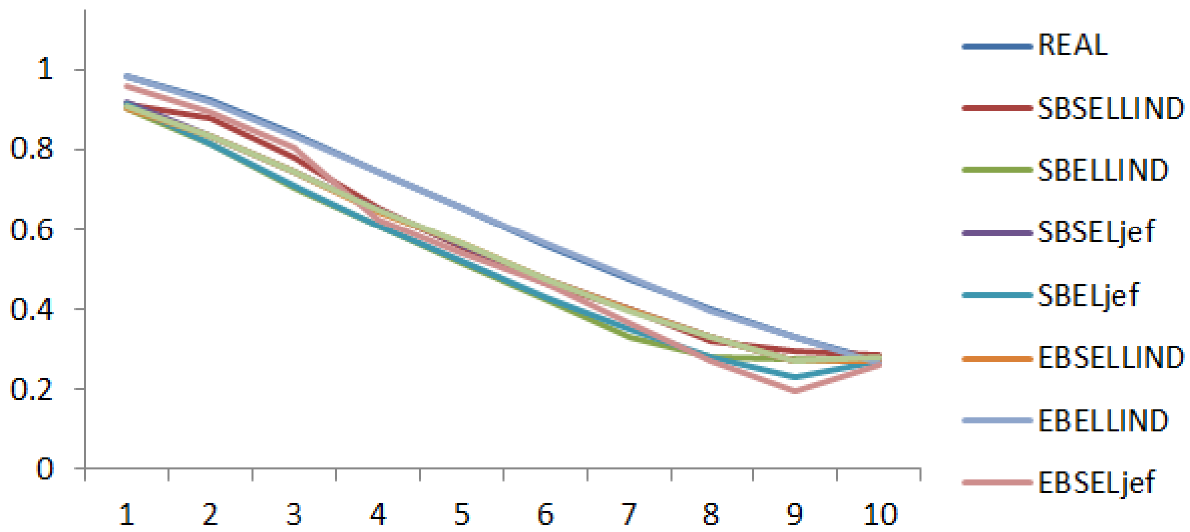
شكل (7) منحنى دالة البقاء لتوزيع القنصل كوماراسوامي عند حجم عينة 20 وللأنموذج الثاني



شكل (8) منحنى دالة البقاء لتوزيع القنصل كوماراسوامي عند حجم عينة 30 وللأنموذج الثاني



شكل (9) منحنى دالة البقاء لتوزيع القنصل كوماراسوامي عند حجم عينة 40 وللأنموذج الثاني



شكل (10) منحنى دالة البقاء لتوزيع القنصل كوماراسوامي عند حجم عينة 50 وللأنموذج الثاني

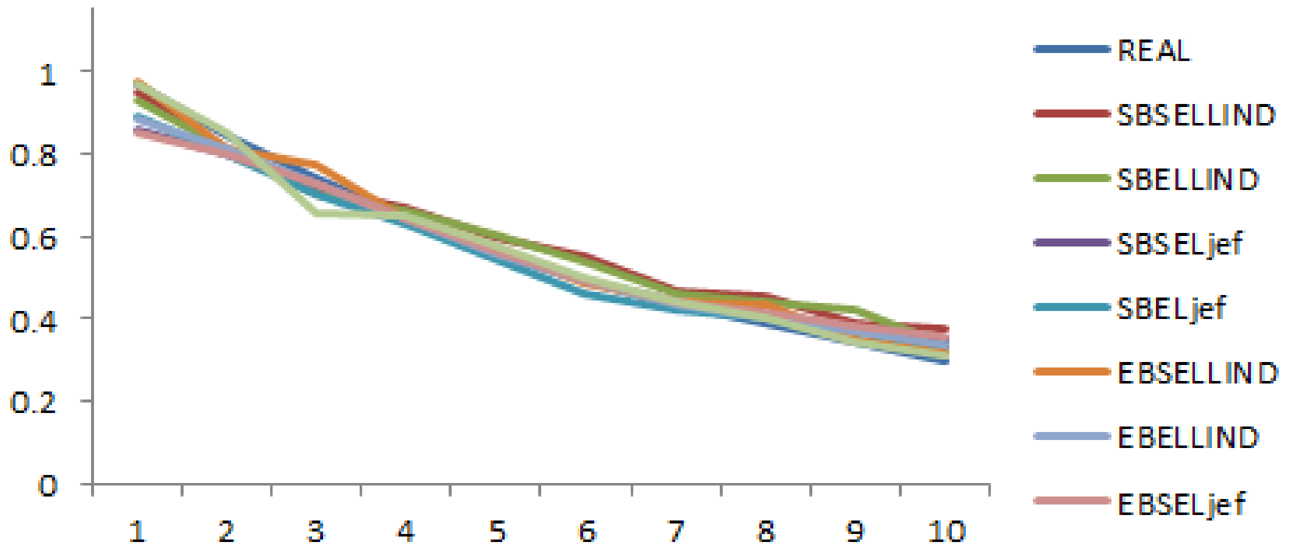
من جدول (3-9) والاشكال (3-6) الى (3-10) للأنموذج الثاني وباستعمال المعيار الاحصائي متوسط مربعات الخطأ التكاملي IMSE يتضح تفوق طريقة توقع بيز عند استعمال تقريب ليندلي وفقا لدالة الخسارة التربيعية لجميع احجام العينات .

جدول (3-10) القيم التقديرية لدالة البقاء لتوزيع القنصل كوماراسوامي بموجب طرائق التقدير وقيمة متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) لكل طريقة عند أحجام العينات المفترضة للأنموذج الثالث :

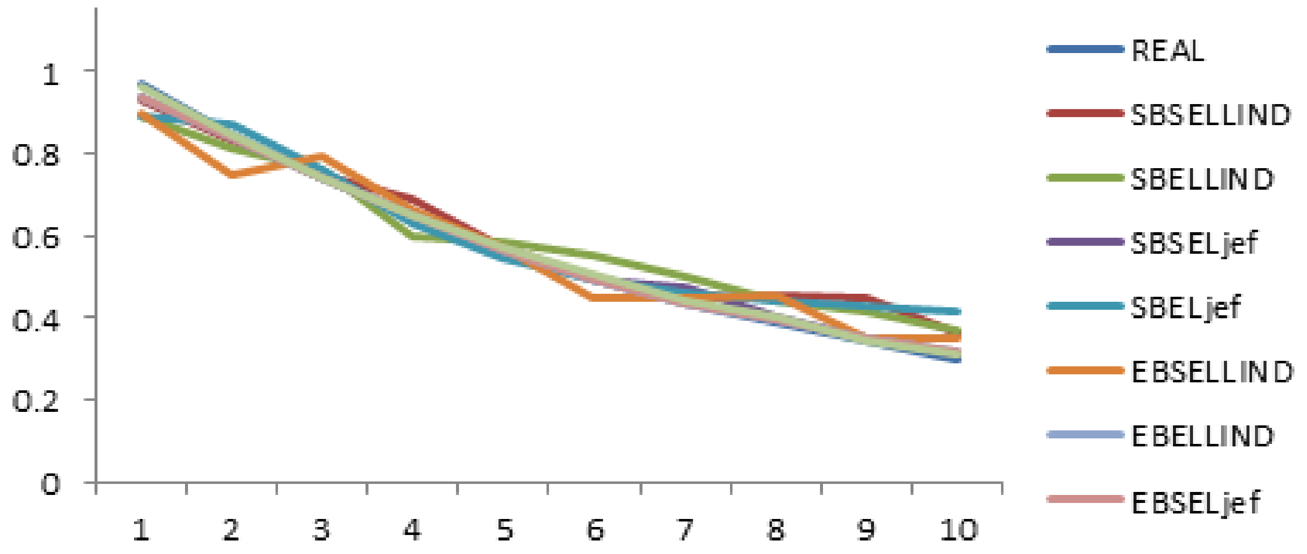
n	Real	SBSELLind	SBELLind	SBSELjef	SBELjef	EBSELlind	EBELLind	EBSELjef	EBELjef
10	0.96821	0.95133	0.92955	0.85942	0.89435	0.97508	0.884569	0.85013	0.96744
	0.84658	0.81333	0.81112	0.80357	0.80353	0.81455	0.81131	0.79823	0.85128
	0.74082	0.71344	0.70344	0.72898	0.70504	0.77326	0.73027	0.72726	0.65951
	0.64844	0.67112	0.66343	0.64404	0.62982	0.64545	0.64329	0.64431	0.65211
	0.56743	0.59906	0.60656	0.56238	0.54645	0.57536	0.56134	0.56341	0.57761
	0.49657	0.55443	0.54119	0.49426	0.46411	0.48478	0.49177	0.49611	0.50113
	0.4346	0.47122	0.46062	0.44132	0.42061	0.43964	0.43621	0.44402	0.44331
	0.39323	0.45233	0.44366	0.41004	0.40377	0.43467	0.40287	0.41348	0.40312
	0.34413	0.39111	0.42366	0.37694	0.34815	0.35222	0.36718	0.38177	0.34601
	0.30127	0.37865	0.3383	0.35116	0.33331	0.32111	0.33977	0.35591	0.31411
	IMSE	0.08645	0.09331	0.07100	0.11881	0.04187	0.03340	0.00811	0.00671
	Best	EBELjef							
20	0.96821	0.93343	0.89112	0.93981	0.89372	0.89941	0.93923	0.93849	0.96307
	0.84658	0.83123	0.81575	0.83723	0.87058	0.74862	0.83693	0.83695	0.84382
	0.74082	0.75011	0.76121	0.74024	0.7638	0.79699	0.74049	0.74066	0.74176
	0.64844	0.68676	0.60111	0.64881	0.6315	0.66199	0.64945	0.64941	0.65154
	0.56743	0.57556	0.58565	0.56599	0.54781	0.57377	0.56684	0.56646	0.57247
	0.49657	0.50213	0.55323	0.49382	0.49454	0.44992	0.49486	0.49421	0.50714
	0.4346	0.45138	0.50011	0.47276	0.46052	0.45185	0.43403	0.43325	0.44133
	0.39323	0.45218	0.44312	0.4038	0.44334	0.45447	0.39526	0.39447	0.40568
	0.34413	0.44944	0.41745	0.34984	0.42778	0.35207	0.35156	0.35084	0.345732
	0.30127	0.36337	0.36767	0.31359	0.41783	0.35323	0.31558	0.31499	0.31488
	IMSE	0.19951	0.1978	0.08755	0.08846	0.04676	0.04787	0.00914	0.00787
	Best	EBELjef							
30	0.96821	0.94895	0.94433	0.95312	0.95192	0.98869	0.95210	0.95416	0.96747

	0.84658	0.82455	0.82133	0.83965	0.83973	0.75329	0.83983	0.85179	0.84891
	0.74082	0.72133	0.72134	0.73792	0.73832	0.73264	0.73837	0.74521	0.74513
	0.64844	0.56111	0.61456	0.46551	0.64574	0.64380	0.64577	0.65905	0.65413
	0.56743	0.53444	0.54544	0.56319	0.56312	0.57311	0.56314	0.57904	0.57432
	0.49657	0.44675	0.48654	0.49129	0.49098	0.49915	0.49099	0.50841	0.50432
	0.43460	0.41111	0.42121	0.42947	0.42910	0.43444	0.42909	0.44810	0.44294
	0.39323	0.35666	0.38233	0.38925	0.38893	0.39735	0.38890	0.41376	0.40191
	0.34413	0.34335	0.34134	0.34296	0.34283	0.35654	0.34276	0.36805	0.35312
	0.30127	0.33433	0.30334	0.30399	0.30411	0.33444	0.30400	0.311799	0.31032
IMSE		0.21211	0.21444	0.09787	0.09545	0.04877	0.04888	0.00939	0.00898
Best		EBELjef							
40	0.96821	0.98677	0.97332	0.96221	0.96183	0.98882	0.96184	0.96786	0.96712
	0.84658	0.89433	0.86656	0.84469	0.84444	0.83533	0.84445	0.84072	0.84699
	0.74082	0.79032	0.76764	0.74079	0.74058	0.75452	0.74059	0.74644	0.74202
	0.64844	0.70821	0.66671	0.64824	0.64800	0.65334	0.64801	0.64285	0.65014
	0.56743	0.66622	0.66411	0.56649	0.56621	0.57173	0.56623	0.56879	0.56972
	0.49657	0.54544	0.54721	0.49491	0.49461	0.50830	0.49463	0.49510	0.49929
	0.43460	0.46261	0.43454	0.43269	0.43241	0.44123	0.43243	0.44080	0.43762
	0.39323	0.40181	0.40136	0.39160	0.39136	0.40025	0.39139	0.39348	0.39646
	0.34413	0.37341	0.34333	0.34348	0.34333	0.35332	0.34336	0.35181	0.34757
	0.30127	0.38222	0.31218	0.33211	0.33208	0.32432	0.30210	0.30779	0.30475
IMSE		0.23241	0.26766	0.09989	0.09787	0.04999	0.05676	0.00991	0.00997
Best		EBSELjef							
50	0.96821	0.98455	0.97311	0.96121	0.96122	0.98123	0.96433	0.96531	0.96511
	0.84658	0.89124	0.86238	0.84237	0.84113	0.83323	0.84045	0.84011	0.84656
	0.74082	0.78755	0.76546	0.74005	0.74111	0.75158	0.74111	0.74624	0.74112
	0.64844	0.70176	0.66433	0.64113	0.64565	0.65111	0.64675	0.64183	0.65011
	0.56743	0.66231	0.66231	0.56123	0.56452	0.57123	0.56425	0.56571	0.56332
	0.49657	0.54244	0.54332	0.49343	0.49134	0.50185	0.49343	0.49311	0.49819
	0.43460	0.46111	0.43121	0.43211	0.43113	0.44111	0.43214	0.44035	0.43411
	0.39323	0.40113	0.40076	0.39161	0.39054	0.40007	0.39116	0.39111	0.39145
	0.34413	0.37289	0.34115	0.34121	0.34129	0.35311	0.34306	0.35111	0.34151

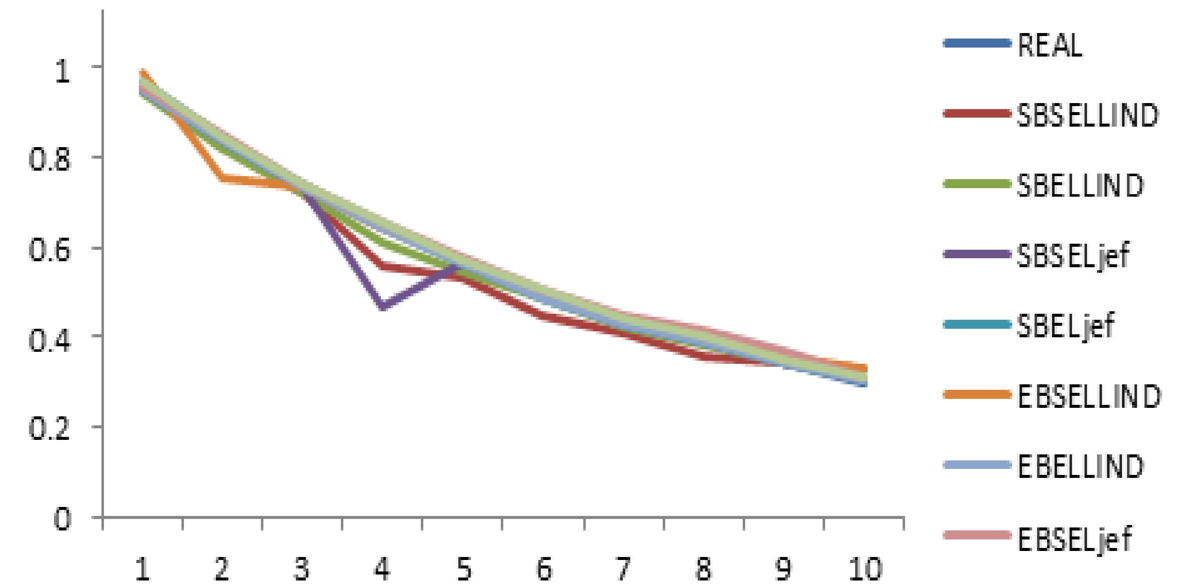
	0.30127	0.38110	0.31113	0.33113	0.33211	0.32135	0.30111	0.30556	0.30311
IMSE		0.3342	0.32451	0.12343	0.11122	0.08931	0.07867	0.01113	0.01343
Best		EBSELjef							



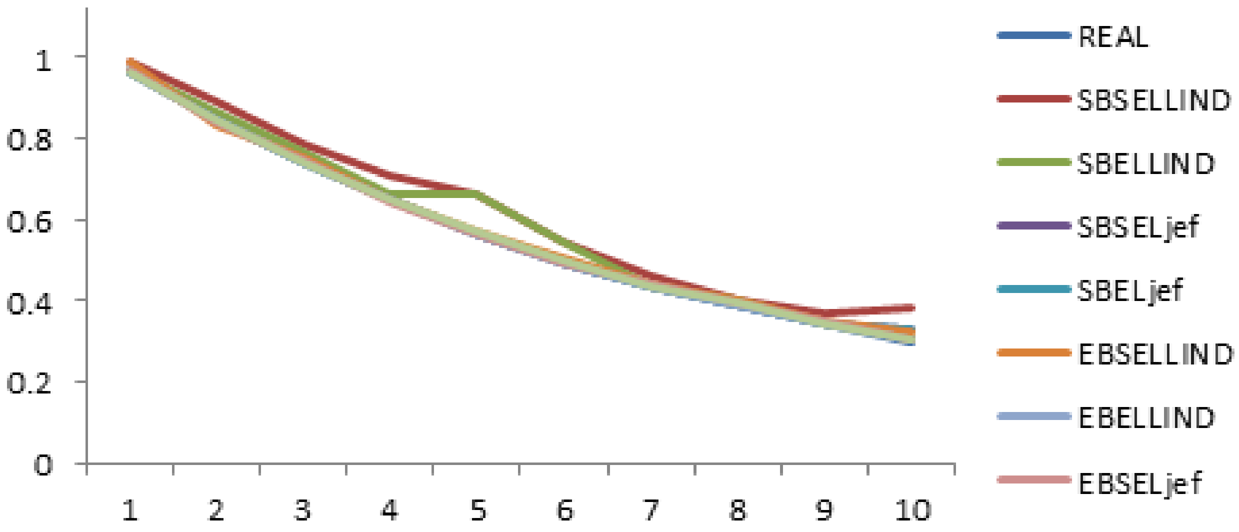
شكل (11) منحنى دالة البقاء لتوزيع القنصل كوماراسوامي عند حجم عينة 10 وللأنموذج الثالث



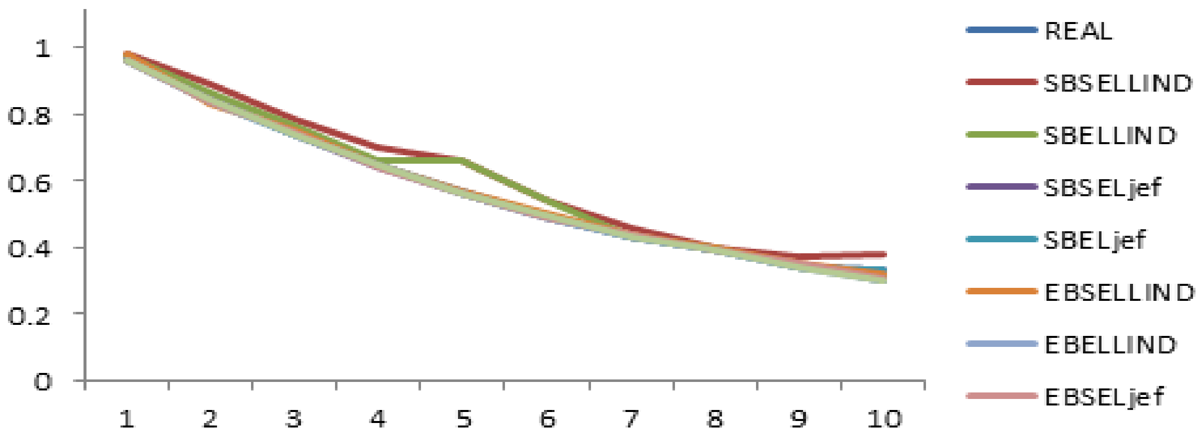
شكل (12) منحنى دالة البقاء لتوزيع القنصل كوماراسوامي عند حجم عينة 20 وللأنموذج الثالث



شكل (13) منحنى دالة البقاء لتوزيع القنصل كوماراسوامي عند حجم عينة 30 وللأنموذج الثالث



شكل (14) منحنى دالة البقاء لتوزيع القنصل كوماراسوامي عند حجم عينة 40 وللأنموذج الثالث



شكل (15) منحنى دالة البقاء لتوزيع القنصل كوماراسوامي عند حجم عينة 50 وللأنموذج الثالث

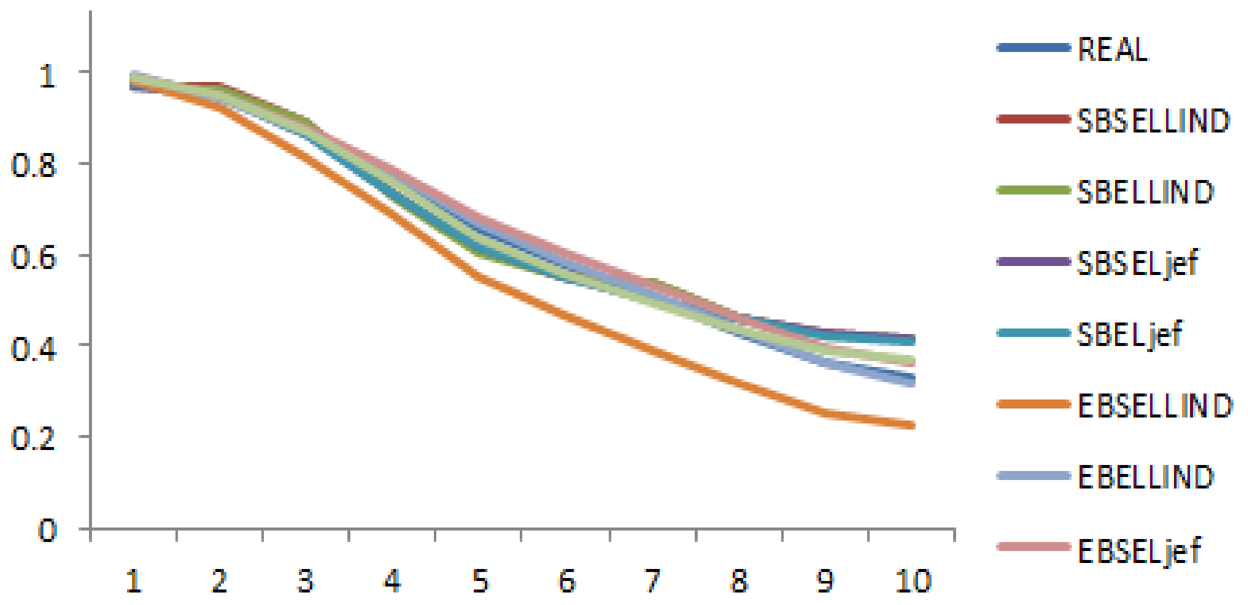
من جدول (3-10) والاشكال (3-11) الى (3-15) للأنموذج الثالث وباستعمال المعيار الاحصائي متوسط مربعات الخطأ التكاملي IMSE يتضح تفوق طريقة توقع بيز عند استعمال تقريب جيفري لجميع احجام العينات فيما تباينت النتائج وفقا لدالة الخسارة المستعملة فكانت دالة خسارة انتروبي العامة افضل عند عينة بحجم 10 و 20و 30 و 50 بينما كانت دالة الخسارة التربيعية افضل عند العينة بحجم 40 .

جدول (3-11) القيم التقديرية لدالة البقاء لتوزيع القتصل كوماراسوامي بموجب طرائق التقدير وقيمة متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) لكل طريقة عند أحجام العينات المفترضة للأنموذج الرابع

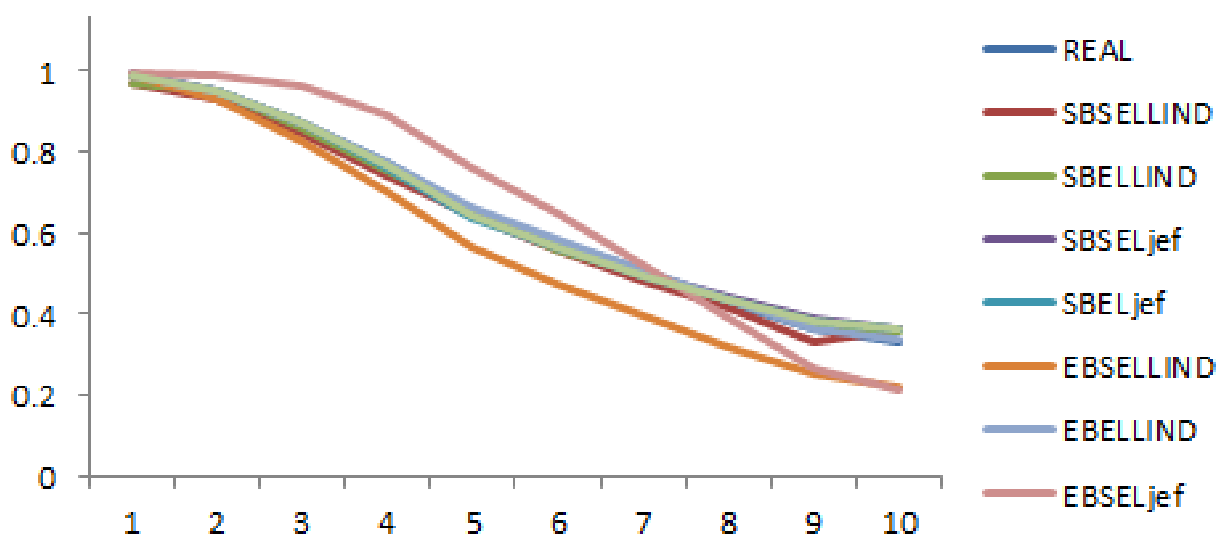
n	Real	SBSELLind	SBELLind	SBSELjef	SBELjef	EBSELlind	EBELLind	EBSELjef	EBELjef
10	0.99150	0.97123	0.97111	0.97218	0.97527	0.98632	0.99972	0.99161	0.98813
	0.94811	0.96821	0.96453	0.94826	0.94872	0.92189	0.94284	0.95057	0.94893
	0.87266	0.89331	0.89121	0.86333	0.86433	0.81707	0.87259	0.87994	0.87225
	0.77336	0.73312	0.73111	0.73307	0.73524	0.68882	0.77887	0.78693	0.76094
	0.66016	0.61222	0.60227	0.61519	0.61655	0.55427	0.66899	0.68035	0.63727
	0.58197	0.55111	0.55017	0.55312	0.55337	0.46818	0.58385	0.60626	0.56092
	0.50474	0.54281	0.54186	0.50285	0.50192	0.38854	0.51515	0.53264	0.49400
	0.43076	0.46211	0.46183	0.46206	0.46002	0.31722	0.43525	0.46160	0.43702
	0.36178	0.42881	0.42115	0.42875	0.42574	0.25516	0.36205	0.39484	0.38907
	0.32958	0.41533	0.41511	0.41439	0.41096	0.22766	0.31560	0.36346	0.36808
IMSE		0.11191	0.11057	0.07146	0.07442	0.01262	0.00516	0.01518	0.01057
Best		EBELLind							
20	0.99150	0.96754	0.97131	0.99721	0.98981	0.98831	0.99141	0.99971	0.99011
	0.94811	0.93445	0.95211	0.95122	0.95131	0.92945	0.94837	0.99313	0.95131
	0.87266	0.84444	0.85643	0.87541	0.87497	0.82945	0.87373	0.96311	0.87543
	0.77336	0.74533	0.75533	0.76614	0.76383	0.70333	0.77542	0.89133	0.76572
	0.66016	0.64111	0.65652	0.64624	0.64054	0.56652	0.66311	0.76312	0.64295
	0.58197	0.55647	0.55953	0.56734	0.56371	0.47721	0.58431	0.64861	0.56569
	0.50474	0.47875	0.49785	0.49824	0.49553	0.39354	0.50841	0.51921	0.49660
	0.43076	0.41311	0.43567	0.43911	0.43663	0.31771	0.43445	0.38712	0.43670
	0.36178	0.33111	0.37188	0.38811	0.38655	0.25131	0.36567	0.26511	0.38559
	0.32958	0.36121	0.35432	0.36581	0.36441	0.22181	0.33511	0.21213	0.36306
IMSE		0.11772	0.11985	0.07888	0.07676	0.01563	0.00645	0.02811	0.01118
Best		EBELLind							
30	0.99150	0.97644	0.99111	0.99141	0.99111	0.98565	0.99141	0.99136	0.99171

	0.94811	0.91223	0.95222	0.95115	0.95222	0.93111	0.95111	0.94734	0.99313
	0.87266	0.82222	0.88821	0.87853	0.87829	0.83341	0.87836	0.87083	0.88401
	0.77336	0.74351	0.76453	0.77926	0.77886	0.70813	0.77894	0.77007	0.88277
	0.66016	0.61233	0.66244	0.66454	0.66416	0.57313	0.66411	0.65512	0.65566
	0.58197	0.51133	0.59744	0.58628	0.58588	0.48361	0.58593	0.57577	0.59121
	0.50474	0.48974	0.51422	0.51081	0.51027	0.39921	0.51061	0.49723	0.51141
	0.43076	0.41081	0.44123	0.44089	0.44095	0.32231	0.44086	0.42234	0.48838
	0.36178	0.33431	0.3533	0.37791	0.37824	0.25433	0.37823	0.35271	0.36580
	0.32958	0.31111	0.33114	0.34947	0.34991	0.22441	0.34981	0.32028	0.31217
IMSE		0.1644	0.19355	0.08965	0.09864	0.02511	0.07583	0.07832	0.08955
Best		**EBSELlind**							
40	0.99150	0.95245	0.96011	0.97241	0.97056	0.99512	0.97292	0.99540	0.99641
	0.94811	0.92152	0.93111	0.91155	0.90978	0.96392	0.91021	0.94657	0.94551
	0.87266	0.83331	0.83111	0.83245	0.83082	0.90951	0.83071	0.87905	0.87651
	0.77336	0.73266	0.74422	0.74266	0.74111	0.83775	0.74151	0.77324	0.77642
	0.66016	0.61922	0.64123	0.64919	0.64691	0.75467	0.64924	0.67141	0.67919
	0.58197	0.54033	0.54355	0.55801	0.55197	0.66581	0.56033	0.58111	0.58916
	0.50474	0.41521	0.43532	0.47529	0.47371	0.57666	0.47851	0.50645	0.51058
	0.43076	0.39322	0.40787	0.40321	0.40234	0.49098	0.40737	0.43411	0.43241
	0.36178	0.31245	0.32311	0.34241	0.34331	0.41171	0.34697	0.36936	0.34840
	0.32958	0.27211	0.28111	0.29215	0.29489	0.34066	0.29671	0.32108	0.33851
IMSE		0.19881	0.19873	0.08999	0.09991	0.09992	0.0999	0.08171	0.08258
Best		**EBSELjef**							
50	0.99150	0.94871	0.98872	0.98125	0.98123	0.98223	0.98123	0.98991	0.98903
	0.94811	0.91891	0.92895	0.91718	0.91734	0.93422	0.91730	0.94934	0.92251
	0.87266	0.81732	0.83731	0.83478	0.83502	0.83785	0.83500	0.87421	0.84571
	0.77336	0.72261	0.72769	0.74362	0.74382	0.73452	0.74385	0.73041	0.75991
	0.66016	0.60655	0.61152	0.65035	0.65044	0.65454	0.65056	0.66414	0.66981
	0.58197	0.49791	0.49799	0.55994	0.55989	0.56453	0.56009	0.58298	0.60071
	0.50474	0.39371	0.39375	0.47584	0.47568	0.48261	0.47595	0.51106	0.53791
	0.43076	0.30281	0.30285	0.40018	0.39997	0.40979	0.40028	0.43307	0.43615
	0.36178	0.30004	0.30104	0.33393	0.33373	0.32371	0.33404	0.36503	0.40928

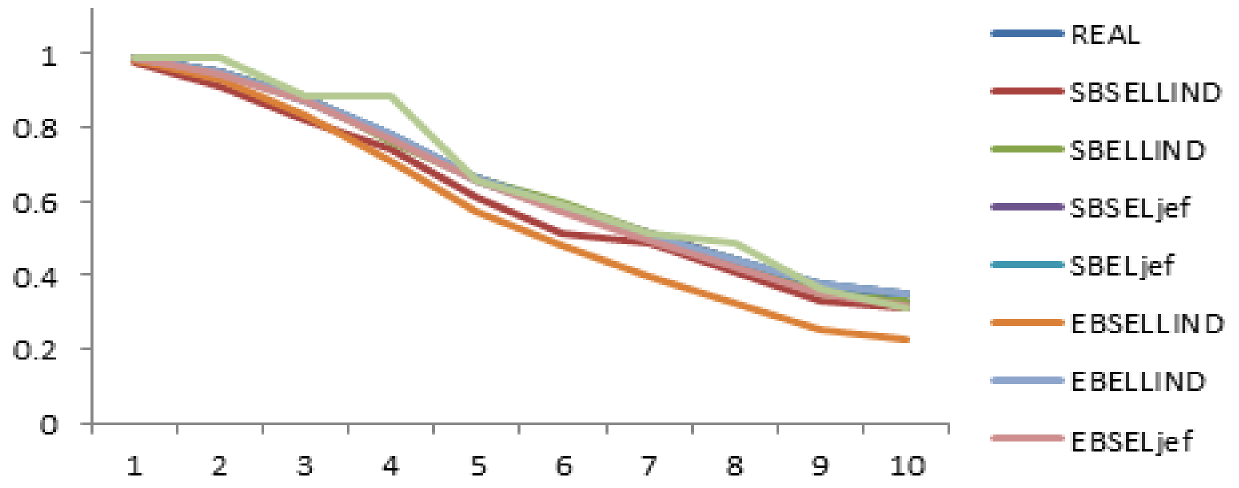
0.32958	0.36621	0.36626	0.37714	0.37703	0.37702	0.33731	0.31440	0.32013
IMSE	0.23299	0.21444	0.17633	0.1863	0.15632	0.11341	0.09143	0.09873
Best	EBSELjef							



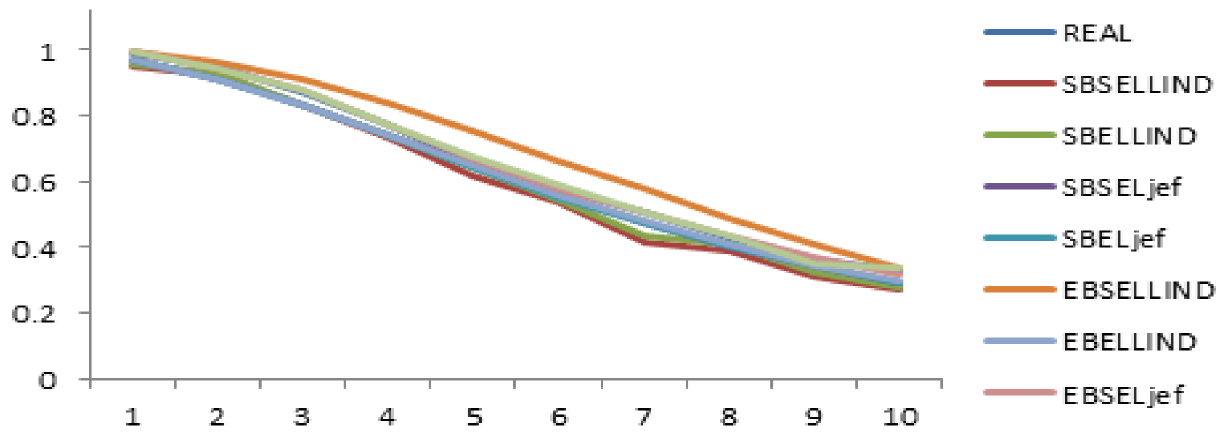
شكل (16) منحنى دالة البقاء لتوزيع القنصل كوماراسوامي عند حجم عينة 10 وللأنموذج الرابع



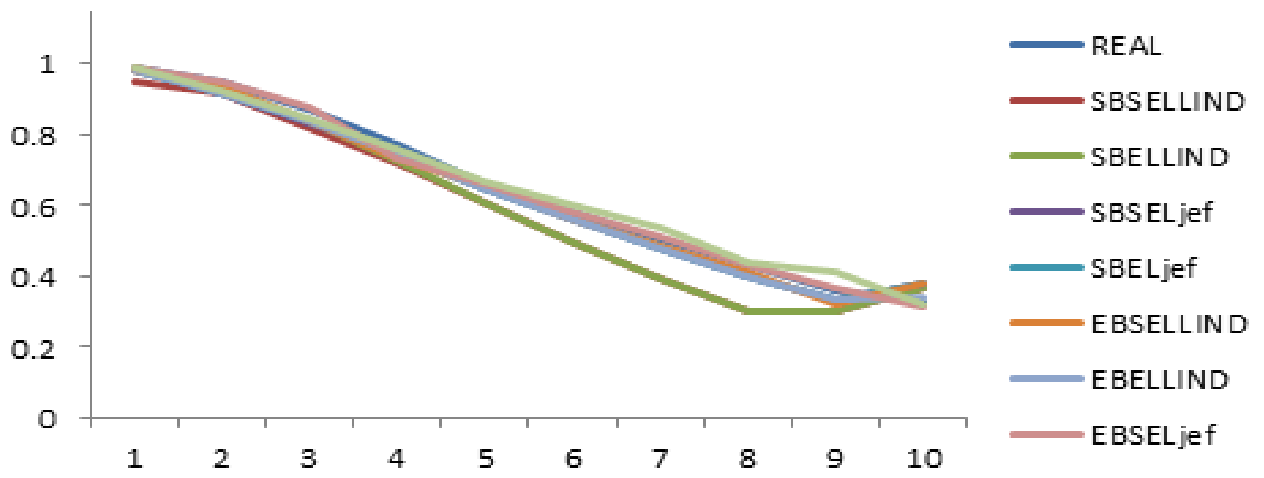
شكل (17) منحنى دالة البقاء لتوزيع القنصل كوماراسوامي عند حجم عينة 20 وللأنموذج الرابع



شكل (18) منحنى دالة البقاء لتوزيع القنصل كوماراسوامي عند حجم عينة 30 وللأنموذج الرابع



شكل (19) منحنى دالة البقاء لتوزيع القنصل كوماراسوامي عند حجم عينة 40 وللأنموذج الرابع



شكل (20) منحنى دالة البقاء لتوزيع القنصل كوماراسوامي عند حجم عينة 50 وللأنموذج الرابع

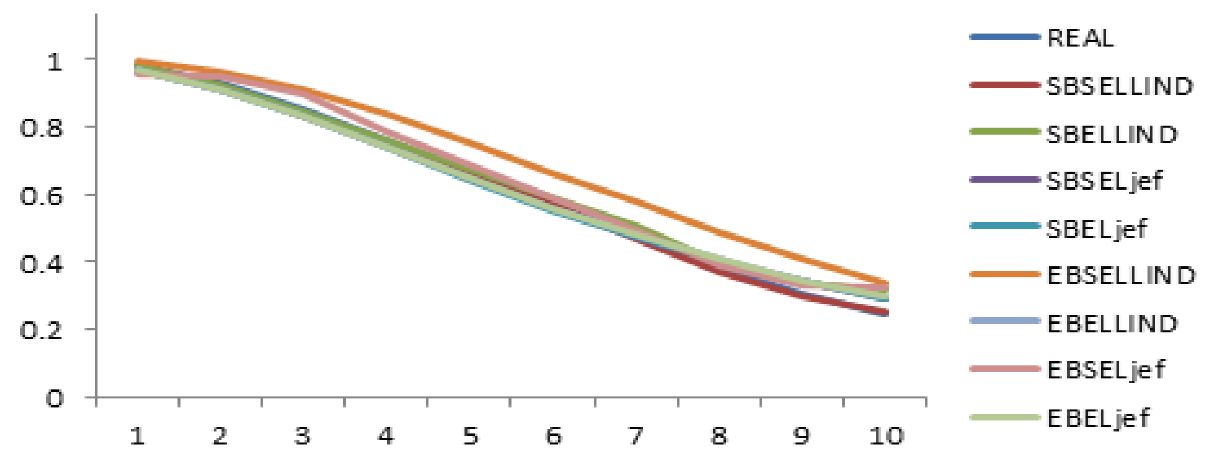
من جدول (3-11) والاشكال (3-16) الى (3-20) للأنموذج الرابع وباستعمال المعيار الاحصائي متوسط مربعات الخطأ التكاملي IMSE يتضح تفوق طريقة توقع بيز لجميع احجام العينات فعند استعمال تقريب ليندلي تباينت النتائج وفقا لدالة الخسارة المستعملة فكانت دالة خسارة انتروبي العامة افضل عند عينة بحجم 10 وكانت دالة الخسارة التربيعية افضل عند عينة بحجم 30 اما عند استعمال تقريب جيفري فكانت دالة خسارة انتروبي العامة افضل عند عينة بحجم 20 وكانت دالة الخسارة التربيعية افضل عند عينة بحجم 40 و 50 .

جدول (3-12) القيم التقديرية لدالة البقاء لتوزيع القتصل كوماراسوامي بموجب طرائق التقدير وقيمة متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) لكل طريقة عند أحجام العينات المفترضة للأنموذج الخامس

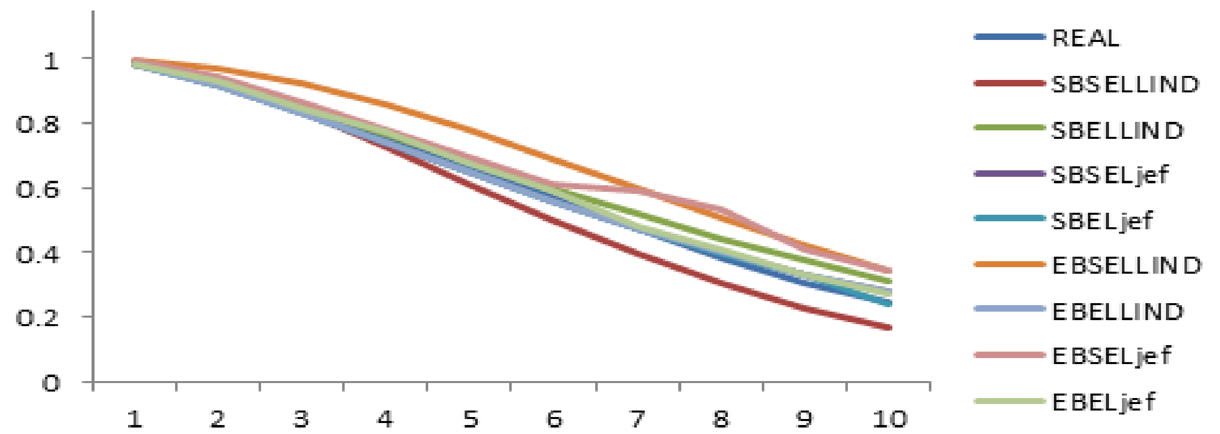
n	Real	SBSELLind	SBELLind	SBSELjef	SBELjef	EBSELlind	EBELLind	EBSELjef	EBELjef
10	0.98588	0.98642	0.98540	0.97245	0.97045	0.99511	0.97291	0.95744	0.97291
	0.92878	0.92554	0.92657	0.91105	0.90932	0.96391	0.91000	0.95242	0.91000
	0.85244	0.83653	0.84903	0.83240	0.83086	0.90953	0.83072	0.89993	0.83072
	0.76491	0.75142	0.76323	0.74278	0.74104	0.83776	0.74159	0.78546	0.74159
	0.67038	0.66619	0.67543	0.64904	0.64694	0.75460	0.64927	0.68686	0.64927
	0.57136	0.57115	0.58976	0.55808	0.55597	0.66587	0.56001	0.58977	0.56001
	0.47312	0.47052	0.50884	0.47524	0.47375	0.57664	0.47852	0.49675	0.47852
	0.38372	0.36786	0.39442	0.40322	0.40282	0.49097	0.40734	0.39123	0.40734
	0.30631	0.29841	0.33736	0.34248	0.34335	0.41173	0.34699	0.33222	0.34699
	0.24521	0.25151	0.31801	0.29216	0.29428	0.34066	0.29675	0.32297	0.29675
IMSE		0.00563	0.00595	0.01529	0.01738	0.01252	0.01546	0.02265	0.01933
Best		SBSELLind							
20	0.98588	0.98842	0.98556	0.98125	0.98144	0.99693	0.98123	0.99356	0.98432
	0.92878	0.92831	0.92932	0.91718	0.91731	0.97223	0.91730	0.94453	0.93211
	0.85244	0.83732	0.85444	0.83478	0.83511	0.92512	0.83500	0.86333	0.84666
	0.76491	0.72763	0.77045	0.74362	0.74317	0.85911	0.74385	0.78121	0.77385
	0.67038	0.61157	0.68347	0.65035	0.65043	0.77967	0.65056	0.69788	0.67688
	0.57136	0.49794	0.59893	0.55994	0.55989	0.69074	0.56009	0.61114	0.58987
	0.47312	0.39373	0.51813	0.47584	0.47561	0.59787	0.47595	0.59454	0.47998
	0.38372	0.30281	0.44316	0.40018	0.39453	0.50669	0.40028	0.53133	0.40898
	0.30631	0.22707	0.37505	0.33393	0.33172	0.41945	0.33404	0.41232	0.33211
	0.24521	0.16625	0.31441	0.27714	0.23703	0.34115	0.27731	0.34454	0.27222
IMSE		0.01962	0.01678	0.02313	0.01754	0.02253	0.02548	0.03236	0.02936
Best		SBELLind							

30	0.98588	0.98853	0.98596	0.98260	0.98251	0.99698	0.98252	0.98076	0.98214
	0.92878	0.92717	0.92919	0.91892	0.91892	0.97317	0.91892	0.97454	0.91564
	0.85244	0.83336	0.85389	0.83616	0.83621	0.92730	0.83621	0.92134	0.83222
	0.76491	0.72174	0.76989	0.74460	0.74463	0.86267	0.74463	0.86453	0.74545
	0.67038	0.60415	0.68317	0.65103	0.65098	0.78370	0.65098	0.78345	0.65164
	0.57136	0.48987	0.59781	0.56027	0.65117	0.69544	0.56012	0.69637	0.56786
	0.47312	0.38547	0.51660	0.47562	0.47539	0.60298	0.47539	0.60213	0.47543
	0.38372	0.29484	0.44133	0.39910	0.39886	0.51105	0.39885	0.51244	0.39657
	0.30631	0.21958	0.37305	0.33169	0.33148	0.42357	0.33147	0.42122	0.33814
	0.24521	0.15949	0.31223	0.27353	0.27342	0.34347	0.27340	0.34311	0.22361
IMSE		0.02964	0.02564	0.02359	0.02749	0.02253	0.02114	0.03243	0.02856
Best		EBELLind							
40	0.98588	0.98887	0.98604	0.98350	0.98340	0.99703	0.98340	0.98966	0.98454
	0.92878	0.92794	0.92956	0.92020	0.91997	0.97360	0.91997	0.96575	0.93242
	0.85244	0.83410	0.85460	0.83743	0.83710	0.92814	0.83710	0.93455	0.83564
	0.76491	0.72216	0.77089	0.74593	0.74553	0.86458	0.74553	0.87685	0.74589
	0.67038	0.60412	0.68439	0.65249	0.65203	0.78638	0.65204	0.78765	0.65556
	0.57136	0.48938	0.59915	0.56178	0.56130	0.69867	0.56130	0.6879	0.56343
	0.47312	0.38454	0.51795	0.47695	0.47647	0.60646	0.47648	0.60111	0.47786
	0.38372	0.29355	0.44262	0.39994	0.39950	0.51441	0.39951	0.53244	0.39655
	0.30631	0.21798	0.37420	0.33170	0.33138	0.42646	0.33136	0.43345	0.34533
	0.24521	0.15767	0.31321	0.27248	0.27223	0.34564	0.27224	0.34566	0.26744
IMSE		0.04133	0.03532	0.02424	0.03454	0.02456	0.03242	0.03884	0.02989
Best		SBSELjef							
50	0.98588	0.96754	0.97565	0.98434	0.98311	0.99703	0.98224	0.98923	0.98133
	0.92878	0.91344	0.93443	0.93454	0.93242	0.97360	0.92535	0.96535	0.93233
	0.85244	0.82134	0.85564	0.83111	0.83134	0.92814	0.85711	0.93343	0.83564
	0.76491	0.71344	0.75654	0.74352	0.74333	0.86458	0.76454	0.87346	0.74997
	0.67038	0.61333	0.68444	0.65113	0.65137	0.78638	0.66786	0.78754	0.65231
	0.57136	0.49655	0.57855	0.56115	0.56234	0.69867	0.56878	0.6345	0.56333
	0.47312	0.38676	0.50077	0.47556	0.47546	0.60646	0.47231	0.60145	0.47344
	0.38372	0.29788	0.41355	0.39675	0.39676	0.51441	0.37855	0.53111	0.39564

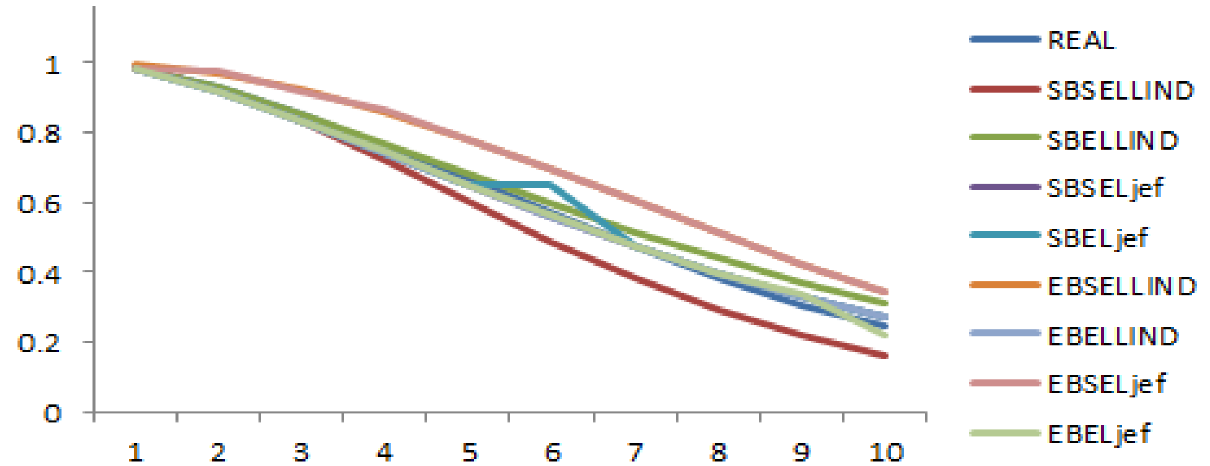
	0.30631	0.28788	0.33242	0.33234	0.33332	0.42646	0.31134	0.43344	0.34344
	0.24521	0.26767	0.31322	0.27333	0.27888	0.34564	0.25644	0.33434	0.26177
IMSE		0.05789	0.04962	0.03467	0.03454	0.02456	0.04535	0.03856	0.03675
Best		EBSELlind							



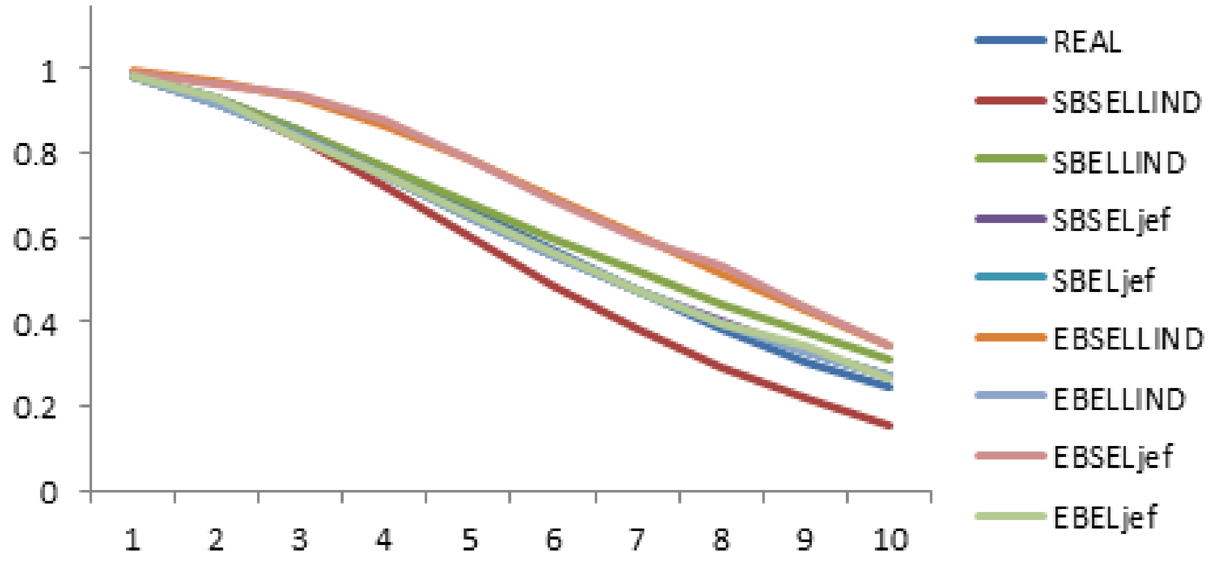
شكل (21) منحنى دالة البقاء لتوزيع القنصل كوماراسوامي عند حجم عينة 10 وللأنموذج الخامس



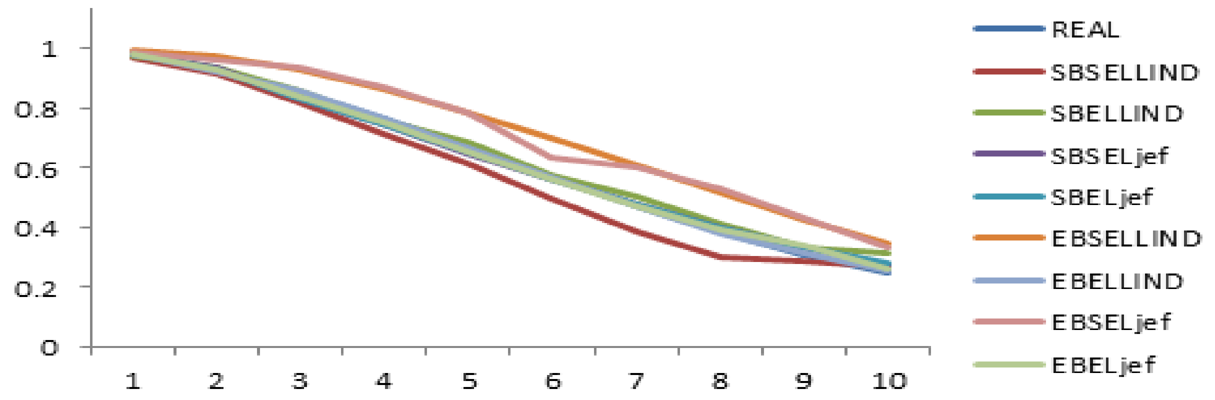
شكل (22) منحنى دالة البقاء لتوزيع القنصل كوماراسوامي عند حجم عينة 20 وللأنموذج الخامس



شكل (23) منحنى دالة البقاء لتوزيع القنصل كوماراسوامي عند حجم عينة 30 وللأنموذج الخامس



شكل (24) منحنى دالة البقاء لتوزيع القنصل كوماراسوامي عند حجم عينة 40 وللأنموذج الخامس



شكل (25) منحنى دالة البقاء لتوزيع القنصل كوماراسوامي عند حجم عينة 50 وللأنموذج الخامس

من جدول (12-3) والاشكال (21-3) الى (25-3) للأنموذج الخامس وباستعمال المعيار الاحصائي متوسط مربعات الخطأ التكاملي IMSE يتضح تفوق طريقة بيز القياسية عند عينة بحجم 10 و 20 و40 فعند استعمال تقريب ليندلي تباينت النتائج وفقا لدوال الخسارة المستعملة فكانت دالة الخسارة التربيعية افضل عند عينة بحجم 10 و كانت دالة خسارة انتروبي العامة افضل عند عينة بحجم 20 اما عند استعمال تقريب جيفري كانت دالة الخسارة التربيعية افضل عند عينة بحجم 40 كما تفوقت طريقة توقع بيز عند استعمال تقريب ليندلي عند عينة بحجم 30 و 50 فيما تباينت النتائج وفقا لدوال الخسارة المستعملة فكانت دالة خسارة انتروبي العامة افضل عند عينة بحجم 30 بينما كانت دالة الخسارة التربيعية افضل عند عينة بحجم 50 .

الفصل الرابع

الجانب التطبيقي

4-1 توطئة

تم في هذا الفصل استعمال بيانات تمثل أوقات البقاء حتى الوفاة بسبب امراض القلب الاقفارية (الاسكيمية) من المرضى الراقدين في مشفى الحسين التعليمي في محافظة كربلاء المقدسة بعدد (50) مريضاً مقاسة بالأسابيع لغرض تقدير معلمات ودالة البقاء لتوزيع القنصل كوماراسوامي CKSD .

4-2 نبذة عن امراض القلب الاقفارية (الأسكيمية) (Ischaemic heart disease) :

داء قلبي إقفاري أو مرض نقص تروية القلب (Ischaemic heart disease) هو مرض يتميز بنقص الأوكسجين(انخفاض إمدادات الدم) في عضلة القلب، عادة ما يرجع إلى داء شريان القلب التاجي ، تصلب عصيدي للشرايين التاجية . ويزيد من مخاطره التقدم بالسن، التدخين، فرط كوليسترول الدم ، ارتفاع مستويات الكولسترول ، السكري، فرط ضغط الدم وهو أكثر شيوعا لدى الرجال والذين لديهم أقارب يعانون منه. أعراض الداء القلبي الإقفاري تشمل الذبحة الصدرية ميزتها الم بالصدر عند بذل مجهود وانخفاض القدرة على ممارسة التمارين الرياضية. الداء القلبي الإقفاري غير المستقر يظهر على شكل ألم في الصدر أو ذبحة صدرية سريعة التفاقم. يتم تشخيص الداء القلبي الإقفاري بواسطة مخطط القلب الكهربائي، تحليل الدم(واسمات القلب)، تمرين إجهاد القلب أو قسطرة قلبية .اعتمادا على الأعراض والمخاطر، يكون العلاج بالدواء، التدخل التاجي عن طريق الجلد (القسطرة) أو جراحة مجازة الشريان التاجي(CABG).

وتعد امراض القلب الاقفارية من الاسباب الأكثر شيوعا للوفاة في معظم البلدان الغربية والعربية اذ يتصدر هذا المرض الاسباب العشرة للوفاة والسبب الرئيس لدخول المشافي .هناك أدلة محدودة للكشف عن الاصابة بهذه الامراض، ولكن الوقاية مع اتباع نظام غذائي صحي وأحيانا دواء لمرض السكري، الكوليسترول وارتفاع ضغط الدم تستعمل لمنع ظهور الداء القلبي الإقفاري والحد من خطر حدوث مضاعفات.

السيرة المرضية تميز بين مختلف الأسباب الممكنة لألم الصدر مثل عسر الهضم، آلام العضلات الهيكلية والانصمام الرئوي . كجزء من تقييم العروض الثلاثة الرئيسة للداء القلبي الإقفاري، تتم معالجة عوامل الخطر. هذه هي الأسباب الرئيسة للتصلب العصيدي :التقدم بالسن، جنس الذكور، فرط شحميات الدم، ارتفاع نسبة الكولسترول والدهون في الدم ، التدخين، فرط ضغط الدم ، ارتفاع ضغط الدم ، السكري والتاريخ العائلي.

4-3 البيانات الحقيقية Real Data

تم أخذ عينة عشوائية بسيطة بحجم (50) مريضاً لبيانات تمثل أوقات البقاء حتى الوفاة بسبب أمراض القلب الاقفارية(الاسكيمية) من المرضى الراقدين في مشفى الحسين التعليمي في محافظة كربلاء المقدسة مريضاً مقاسة بالاسابيع فالرقم (2.13) الموجود في

جدول (4-1) يقرأ بشكل اسبوعان ويوم وثلاث ساعات وذلك لغرض إيجاد معلمات ودالة البقاء لتوزيع القنصل-كوماراسوامي خلال سنة (2021) . والجدول (4-1) الآتي يبين البيانات الحقيقية.

جدول (4-1) أوقات البقاء حتى الوفاة بسبب أمراض القلب الاقفارية (الاسكيمية) للمرضى الراقدين بمشفى الحسين التعليمي التعليمي خلال سنة (2021)

No.	ti	No.	ti	No.	ti	No.	ti	No.	ti
1	0.31	11	0.44	21	0.56	31	0.67	41	1.45
2	2.13	12	2.35	22	1.11	32	2.49	42	2.45
3	1.11	13	0.35	23	1.57	33	2.58	43	5.34
4	0.56	14	1.21	24	5.19	34	0.77	44	0.77
5	3.45	15	1.33	25	8.32	35	3.37	45	3.56
6	4.56	16	0.28	26	2.35	36	4.31	46	4.45
7	2.34	16	0.31	27	5.56	37	2.22	47	3.55
8	1.44	18	2.67	28	2.23	38	1.13	48	2.56
9	0.34	19	1.67	29	4.34	39	0.11	49	1.33
10	1.13	20	0.13	30	1.89	40	1.24	50	2.89

والجدول (4-2) يبين الاحصاءات الوصفية للبيانات الحقيقية:

Index	value
Mean	2.1694
Median	1.7800
Mode	0.31
Std. Deviation	1.72746
Variance	2.984
Minimum	0.11
Maximum	8.32

يتضح من جدول (4-2) ان متوسط مدة بقاء المريض المصاب بأمراض القلب الاقفارية هو اسبوعان ويومان بانحراف معياري بلغ (1.72746) . وان اعلى مدة بقاء المصاب بلغت

ثمانية اسابيع وثلاثة ايام واقل مدة بلغت يوماً واحداً. وكمدة بقاء شائعة بين المرضى المصابين هي ثلاثة ايام.

4-4 اختبار ملائمة البيانات Data Fitting

للتأكد من ان البيانات في جدول (4-1) تتبع توزيع القنصل كوماراسوامي ((CKSD) Consul Kumaraswamy Distribution) تم استعمال اختبار Chi-square لحسن المطابقة وبموجب الفرضية الآتية:

H_0: *The data have the* **CKSD**

H_1: *The data don't have the* **CKSD**

ولاختبار هذه الفرضية الاحصائية سيتم احتساب قيمة إحصاءة χ^2 وحسب الصيغة الآتية:

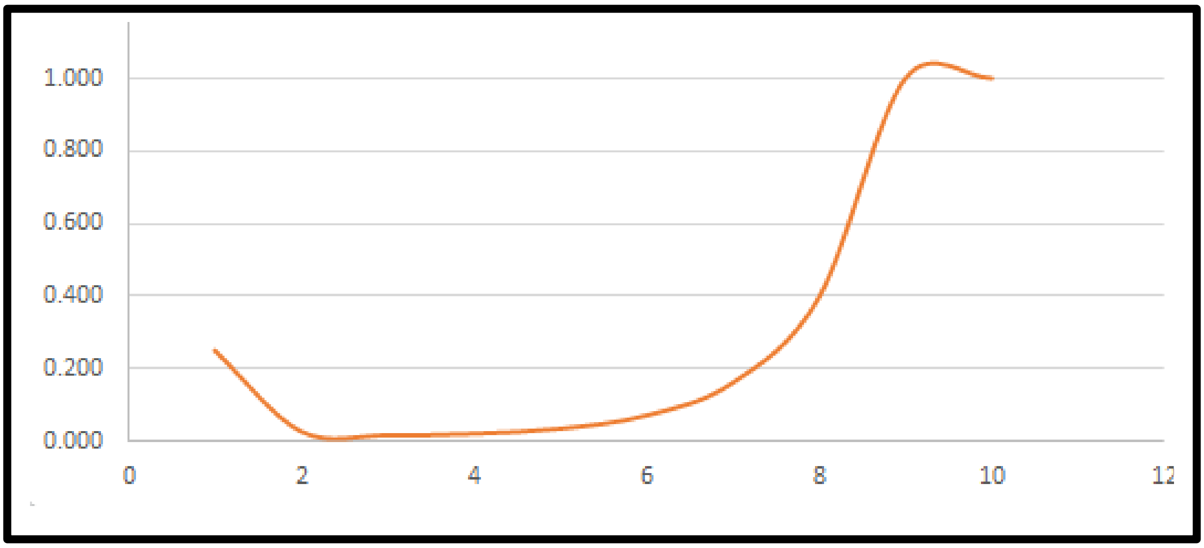
$$\chi_c^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \qquad (4\text{-}1)$$

إذ تم احتساب إحصاءه حسن المطابقة χ_c^2 (في برنامج (MatLab) وكانت نتائج الاختبار كما في جدول (4-3):

جدول (4-3) نتائج اختبار ملائمة البيانات

Distribution	χ_c^2	χ_t^2	Sig.	Decision
Consul	10.45544	7.82	0.02567	Reject H_0
Kumaraswamy	11.89227		0.01433	Reject H_0
Consul Kumaraswamy	4.32737		0.44577	Don't reject H_0

نلحظ من جدول (4-3) ان قيمة χ_c^2 المحسوبة لتوزيع CKSD بثلاث معلمات والبالغة (4.32737) اقل من قيمة χ_t^2 الجدولية عند مستوى معنوية 5% ودرجة حرية (3) والبالغة (7.82) وكانت قيمة Sig=0.44577 اكبر من مستوى المعنوية (0.05) وهذا يعني عدم رفض فرضية العدم اي ان البيانات الحقيقية تتوزع وفقاً لتوزيع CKSD بثلاث معلمات.



شكل (4-1) منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع CKSD بثلاث معلمات للبيانات الحقيقية

4-5 المفاضلة بين التوزيعات المدروسة (The comparison between the studied distributions)

في هذه الفقرة سيتم استعمال معايير المقارنة بين التوزيعات وهي (-2LnL, AIC , AICc, BIC, HQIC) للمقارنة بين التوزيعات المستعملة وهي توزيع القنصل كوماراسوامي وتوزيع القنصل وتوزيع كوماراسوامي لغرض معرفة اي من التوزيعات اكثر دقة للبيانات الحقيقية وكانت النتائج في جدول (4-4) .

جدول (4-4) نتائج اختبارات المقارنة والدقة والتي طبقت على البيانات الحقيقية

Distribution	-2LnL	AIC	AICc	BIC	HQIC
Consul Kumaraswamy	127.23	127.37	127.45	127.21	17.96
Consul	187.55	187.56	187.67	187.56	45.90
Kumaraswamy	167.45	167.98	167.45	167.34	44.61

نلحظ من جدول(4-4) أن معايير الاختبارات الخاصة بتوزيع القنصل كوماراوسامي بثلاث معلمات افضل من باقي التوزيعات، وهذا يدل عن ملائمة البيانات الحقيقية اكثر لتوزيع القنصل كوماراوسامي بثلاث معلمات من باقي التوزيعات.

6-4 تحليل البيانات الحقيقية (Real data analysis)

بينت اختبارات الملائمة افضلية توزيع القنصل كوماراسوامي عند البيانات الحقيقية لتمثيل البيانات الحقيقية ، وعلى ضوء ذلك تم تقدير معلمات ودالة البقاء بموجب طرائق التقدير المستعملة وكانت نتائج تقدير معلمات توزيع القنصل كوماراسوامي كما في جدول (4-5) أدناه:

جدول (4-5) القيم التقديرية لمعلمات توزيع القنصل كوماراسوامي بموجب طرائق التقدير وقيمة متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) لكل طريقة للبيانات الحقيقية

Parameter	SBSELLind	SBELLind	SBSELjef	SBELjef	EBSELlind	EBELLind	EBSELjef	EBELjef
$\hat{\alpha}$	3.7754	4.7464	3.4222	4.6555	3.6689	3.3422	3.4423	3.4632
$\hat{m}$	1.8644	2.8855	1.7786	3.5533	1.7855	1.6333	1.7134	1.7435
$\hat{\beta}$	3.7544	2.8978	3.7844	4.6754	3.8896	3.4267	3.5324	3.5422
IMSE	0.00766	0.67444	0.00028	0.00089	0.00056	0.00011	0.00028	0.00029
	0.00897	0.56444	0.00010	0.00055	0.00053	0.00012	0.00001	0.00014
	0.00888	0.5564	0.00045	0.00047	0.00066	0.00011	0.00026	0.00043

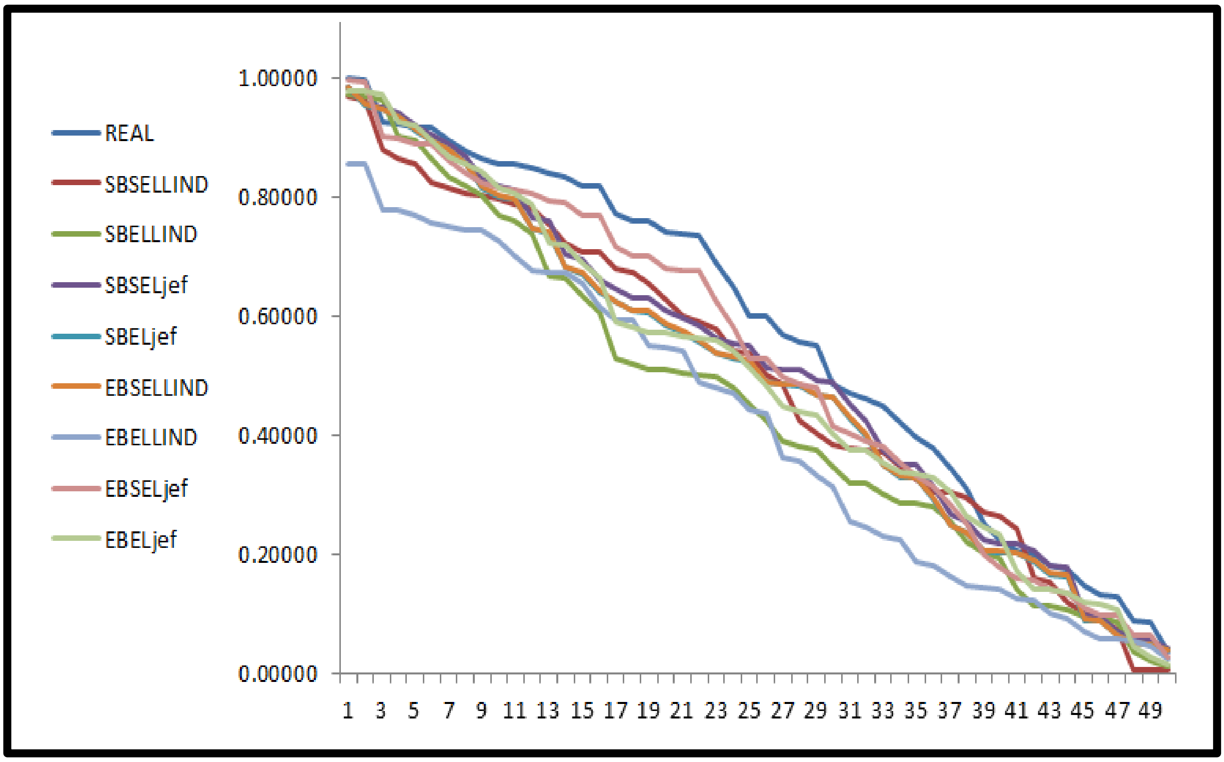
ونلحظ أن المعلمات المقدرة للبيانات الحقيقية لتوزيع القنصل كوماراسوامي بثلاث معلمات اكثر اقتراباً للمعلمات الافتراضية في الجانب التجريبي . ونلحظ ان طريقة مقدر توقع بيز في ظل دالة خسارة انتروبي عامة هي الافضل من باقي الطرائق عند البيانات الحقيقية.

ولغرض تقدير دالة البقاء لتوزيع القنصل كوماراسوامي للبيانات الحقيقية لكافة طرائق التقدير كما في جدول (4-6) الاتي:

جدول (4-6) القيم التقديرية لدالة البقاء لتوزيع القنصل كوماراسوامي بموجب طرائق التقدير لكل طريقة عند البيانات الحقيقية

No.	ti	Real	SBSEL Lind	SBELL ind	SBSEL jef	SBELj ef	EBSEL lind	EBEL Lind	EBSEL jef	EBELj ef
1	0.31	0.99837	0.96773	0.97133	0.98460	0.98291	0.98481	0.85369	0.99547	0.97875
2	2.13	0.99537	0.96078	0.96946	0.95698	0.95242	0.95566	0.85369	0.99363	0.97721
3	1.11	0.92403	0.87765	0.96226	0.95035	0.94513	0.94543	0.77804	0.89921	0.97177
4	0.56	0.92182	0.86234	0.90129	0.94022	0.93403	0.93420	0.77800	0.89639	0.92428
5	3.45	0.91618	0.85593	0.89324	0.91887	0.91070	0.91234	0.76815	0.88919	0.91795
6	4.56	0.91556	0.82487	0.86345	0.90355	0.89401	0.89567	0.75629	0.88841	0.89384
7	2.34	0.89335	0.81402	0.83207	0.88880	0.87802	0.88020	0.75092	0.86044	0.86785
8	1.44	0.87668	0.80465	0.81708	0.86803	0.85559	0.85590	0.74494	0.83980	0.85512
9	0.34	0.86393	0.80304	0.80219	0.83101	0.81587	0.81794	0.74278	0.82419	0.84244
10	1.13	0.85505	0.79534	0.76841	0.81649	0.80038	0.80339	0.72568	0.81340	0.81346
11	0.44	0.85446	0.78667	0.76007	0.81104	0.79459	0.79528	0.70154	0.81270	0.80581
12	2.35	0.84762	0.78113	0.73813	0.76522	0.74609	0.74809	0.67657	0.80445	0.78675
13	0.35	0.83782	0.75225	0.66584	0.75831	0.73882	0.74134	0.67388	0.79270	0.72116
14	1.21	0.83435	0.72301	0.66464	0.70368	0.68171	0.68366	0.67261	0.78856	0.72001
15	1.33	0.81815	0.70834	0.63256	0.69365	0.67130	0.67436	0.65498	0.76938	0.68979
16	0.28	0.81609	0.70559	0.60448	0.66228	0.63888	0.64180	0.61551	0.76695	0.66324
17	0.31	0.77102	0.68015	0.52891	0.64684	0.62299	0.62317	0.59375	0.71478	0.58982
18	2.67	0.76008	0.67380	0.52008	0.63152	0.60728	0.60786	0.59356	0.70235	0.58120
19	1.67	0.76005	0.65338	0.51110	0.63075	0.60650	0.60742	0.55164	0.70231	0.57206
20	0.13	0.74013	0.62846	0.51010	0.61026	0.58557	0.58877	0.54822	0.67991	0.57128
21	0.56	0.73703	0.60047	0.50583	0.59609	0.57115	0.57370	0.54249	0.67645	0.56678
22	1.11	0.73620	0.59003	0.49998	0.58273	0.55759	0.55972	0.48763	0.67552	0.56114
23	1.57	0.68878	0.57931	0.49953	0.56414	0.53879	0.53934	0.47982	0.62343	0.56063
24	5.19	0.64905	0.54039	0.47886	0.55322	0.52777	0.53113	0.46914	0.58088	0.53993
25	8.32	0.60022	0.53792	0.45319	0.54908	0.52360	0.52686	0.44203	0.52989	0.51381
26	2.35	0.59819	0.50080	0.42328	0.51321	0.48762	0.49041	0.43696	0.52780	0.48309

27	5.56	0.56859	0.48455	0.39013	0.51075	0.48516	0.48628	0.36205	0.49757	0.44852
28	2.23	0.55732	0.42331	0.38233	0.50914	0.48355	0.48440	0.35739	0.48619	0.44012
29	4.34	0.54946	0.40317	0.37594	0.49149	0.46597	0.46709	0.33258	0.47828	0.43351
30	1.89	0.48675	0.38375	0.34624	0.48923	0.46371	0.46550	0.31244	0.41636	0.40177
31	0.56	0.47147	0.37904	0.32086	0.45299	0.42780	0.42926	0.25510	0.40156	0.37442
32	1.11	0.46166	0.37412	0.32027	0.42479	0.40003	0.40236	0.24533	0.39212	0.37406
33	1.57	0.45014	0.37289	0.30125	0.37438	0.35077	0.35158	0.23062	0.38110	0.35334
34	5.19	0.42030	0.34672	0.28731	0.35225	0.32931	0.33203	0.22422	0.35282	0.33810
35	8.32	0.39802	0.32559	0.28496	0.35088	0.32798	0.32897	0.18915	0.33198	0.33568
36	2.35	0.37794	0.30610	0.27877	0.31322	0.29167	0.29441	0.18168	0.31339	0.32879
37	5.56	0.34592	0.30352	0.25593	0.26828	0.24868	0.25076	0.16381	0.28411	0.30356
38	2.23	0.31079	0.29687	0.22095	0.25531	0.23635	0.23754	0.14741	0.25251	0.26454
39	4.34	0.25185	0.27154	0.20382	0.22429	0.20698	0.20767	0.14442	0.20072	0.24515
40	1.89	0.22509	0.26329	0.19451	0.21977	0.20272	0.20584	0.14336	0.17772	0.23449
41	1.45	0.20572	0.24393	0.14056	0.21975	0.20270	0.20292	0.12535	0.16127	0.17210
42	2.45	0.19993	0.16113	0.11483	0.20517	0.18897	0.18968	0.12442	0.15639	0.14186
43	5.34	0.18270	0.15438	0.11349	0.18237	0.16759	0.16926	0.10277	0.14195	0.14050
44	0.77	0.17418	0.11969	0.10908	0.17881	0.16426	0.16610	0.09248	0.13487	0.13495
45	3.56	0.14697	0.10126	0.09628	0.09995	0.09112	0.09292	0.07210	0.11247	0.11988
46	4.45	0.13131	0.09271	0.09528	0.09728	0.08867	0.09096	0.06017	0.09975	0.11855
47	3.55	0.13071	0.07532	0.08671	0.07061	0.06422	0.06581	0.05983	0.09927	0.10856
48	2.56	0.08935	0.00799	0.03691	0.05795	0.05266	0.05424	0.05472	0.06635	0.04747
49	1.33	0.08666	0.00786	0.02132	0.05521	0.05017	0.05074	0.04538	0.06425	0.02773
50	2.89	0.03810	0.00537	0.01202	0.04387	0.03984	0.04048	0.02448	0.02715	0.01577



شكل (4-2) منحنى دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير للبيانات الحقيقية

من الجدول (4-6) والشكل (4-2) يتضح الآتي:

1. **تناقص قيم دالة البقاء مع الزمن وبصورة واضحة وهذا ما يطابق سلوك هذه الدالة كونها متناقصة مع الزمن .**
2. **القيم المقدرة لدالة البقاء لجميع الطرائق تقترب من قيم دالة البقاء الحقيقية.**
3. **القيم المقدرة لدالة البقاء بموجب طريقة توقع بيز في ظل دالة خسارة انتروبي عامة (EBELLind) افضل من باقي الطرائق البيزية كونها اكثر اقتراب لدالة البقاء الحقيقية.**
4. **كلما قلت مدة بقاء المريض في المشفى، زاد احتمال بقائه على قيد الحياة. فالمريض الذي بقي راقداً في المشفى مدة (1) يوم كان احتمال بقائه على قيد الحياة (99%) ، والمريض الذي كانت مدة بقائه في المشفى (3) اسابيع كان احتمال بقائه على قيد الحياة (2.7%).**

الفصل الخامس

الاستنتاجات و التوصيات

5-1 الاستنتاجات Conclusions

بالاستناد الى النتائج التي تم الحصول عليها في الجانب التجريبي من الفصل الثالث والجانب التطبيقي من الفصل الرابع تم الاستنتاج الى :

1-ان استعمال دالة توزيع القنصل كوماراسوامي ذي الثلاث معلمات أظهرت نتائجها اكثر دقة من استعمال دالة توزيع القنصل ودالة توزيع كوماراسوامي ذي المعلمتين في تقدير دالة البقاء في ظل دالة خسارة انتروبي عامة المستعملة في هذه الرسالة .

2- نلحظ أن النتائج التي تم الحصول عليها في الجانب التطبيقي في تقدير دالة البقاء للبيانات الحقيقة تقارب واضح مع النتائج التي تم الحصول عليها في الجانب التجريبي لتوزيع القنصل كوماراسوامي في هذه الرسالة .

3- يبين الجانب التطبيقي ان المعلمات المقدرة للبيانات الحقيقية لتوزيع القنصل كوماراسوامي اكثر اقترابا للمعلمات الافتراضية في الجانب التجريبي .

4- تفوق طريقة توقع بيز في ظل دالة خسارة انتروبي عامة عند تقريب ليندلي على باقي طرائق التقدير بنسبة 36% لتجارب المحاكاة كافة تليها طريقة توقع بيز عند دالة خسارة تربيعية في ظل تقريب ليندلي بنسبة افضلية بلغت 28% وتليها طريقة توقع بيز عند دالة خسارة انتروبي عامة في ظل تقريب جيفري بنسبة افضلية 24% .

5- ان اعلى مدة بقاء للمصاب بامراض القلب الاقفارية هي ثمانية أسابيع وثلاثة أيام واقل مدة بلغت يوماً واحداً وكمدة بقاء شائعة بين المرضى المصابين هي ثلاثة أيام .

6-المريض الذي بقي راقدا في المشفى مدة يوم واحد كان احتمال بقائه على قيد الحياة 99% والمريض الذي كانت مدة بقائه في المشفى ثلاثة أسابيع كان احتمال بقائه على قيد الحياة 2.7%

8- عن طريق استعمال اختبار حسن المطابقة تم التأكد ان البيانات الحقيقية لهذه الرسالة تتبع توزيع القنصل كوماراسوامي ذي الثلاث معلمات .

5-2 التوصيات Recommendations

يوصي الباحث بـ :

1- تطبيق توزيع القنصل كوماراسوامي CKSD في مجالات أخرى غير الجانب الطبي مثل الجانب الهندسـي والصناعـي .
2- استعمال طريقة توقع بيز لإيجاد مقدرات التوزيعات المركبة ومنها توزيع القنصل كوماراسوامي .
3- تسليط الضوء على دراسة التوزيعات المركبة وإيجاد دالة البقاء وتقدير معلماتها .
4- على الباحث التطرق الى دوال خسارة أخرى غير دالة الخسارة التربيعية ودالة خسارة انتروبي عامة وذلك لمعرفة سلوك المقدرات البيزية في ظل تلك الدوال .
5- تقديم ادلة كافية للكشف عن الإصابة بامراض القلب الاقفارية .
6- نتيجة ما توصلنا اليه في الجانب التطبيقي للبيانات الحقيقية والتي تمثل أوقات بقاء المرضى المصابين بامرا ض القلب الاقفارية فالمريض الذي قلت مدة بقائه في المشفى زاد احتمال بقائه على قيد الحياة .
7- باستعمال تقريب ليندلي في الطرائق البيزية المستعملة في تقدير المعلمات ودالة البقاء وذلك لإعطائه نتائج دقيقة .
8- اعتماد الدراسة لدى وزارة الصحة للافادة منها في تفسير سلوك أنواع أخرى مقاربة لأمراض القلب الاقفارية .

المصادر

المصادر العربية Arabic references :

القرآن الكريم

1- البياتي ، ادهم محمد صاحب ،2020 ، تقدير دالة البقاء لنموذج احتمالي مختلط (الاسي- كاما من الرتبة الثانية) ،جامعة كربلاء كلية الإدارة والاقتصاد .

2- البياتي ، حسام نجم عبود ، 2002 م ، مقارن طرائق تقدير أنموذج ويبل للفشل باستخدام المحاكاة ، أطروحة دكتوراه ، كلية الإدارة والاقتصاد ، جامعة بغداد .

3- لسوداني ، مروة علي مكلف ،2019م ،تقدير معلمات بعض نماذج البقاء اللاخطية باعتماد نظرية التصميم ، أطروحة دكتوراه ، كلية الإدارة والاقتصاد ، الجامعة المستنصرية .

4- صفوان ناظم راشد العكاش ، ريا سالم الرسام ، 2020 م، التقدير البيزي لمعلمة توزيع زمن الحياة تحت دالة خسارة مركبة مع تحديد حجم العينة الأمثل ، المجلة العراقية للعلوم الإحصائية ، (31) ص (72-93) .

5- العبادي ، كرم ناصر ، 2021 م، التقدير البيزي لتوزيع ليندلي ذو ثلاث معلمات مع تطبيق عملي ، رسالة ماجستير ، كلية الإدارة والاقتصاد ، جامعة كربلاء .

6- عبد علي ، احمد تركي ، 2019 م ، استعمال أسلوب بيز والبرمجة الهدفية في تقدير معالم الانحدار ، رسالة ماجستير ، كلية الإدارة والاقتصاد ، جامعة كربلاء .

7- علي ، بشار خالد ، 2022 م ، ، طريقة جديدة بيزية ضبابية حصينة عامة للتوزيعات الاحتمالية ، أطروحة ، جامعة كربلاء .

8- محمد ،رقية رعد حسين ،2019م ، تقدير دالة المعولية لتوزيع كوماراسوامي مع تطبيق عملي ، رسالة ماجستير ، كلية الإدارة والاقتصاد ، جامعة بغداد .

9- نجم عبد عليوي ، سامي عطية سيد ،2017م ، مقارنة بين مقدرات بيز القياسية وطريقة الإمكان الأعظم لتقدير معلمة توزيع ماكسويل بأستخدام المحاكاة ، مجلة ميسان للدراسات الاكاديمية ،32، جامعة ميسان قسم الرياضيات .

المصادر الأجنبية Foreign references :

10- Abd-Alzahra ,Atheer ,2018 , Analysis of the Survival function when the coefficient Hazard proportional with time (Applied study) ,

11-- Ahmad, A., & Tripathi, R. (2022). Bayesian Estimation of Weighted Inverse Maxwell Distribution under Different Loss Functions. *Earthline Journal of Mathematical Sciences*, *8*(1), 189-203.

12- Al-Duais, F. S. (2022). Bayesian reliability analysis based on the Weibull model under weighted General Entropy loss function. *Alexandria Engineering Journal*, *61*(1), 247-255

13- AL-Khalidi, A. K. S., Saheb, N. H. A., & Al-Abadi, K. N. H. (2022). ESTIMATE THE SURVIVAL FUNCTION FOR THE NEW MODEL THREEPARAMETER WEIGHTED NWIKPE DISTRIBUTION. *ResearchJet Journal of Analysis and Inventions*, *3*(1), 74-95

14- Amin, A. A. (2020). Bayesian analysis of double seasonal autoregressive models. *Sankhya B*, *82*(2), 328-352.

15- Arshad, M., J. Azhad, Q., Gupta, N., & Pathak, A. K. (2021). Bayesian inference of Unit Gompertz distribution based on dual generalized order statistics. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 1-19.

16- Franz, J. (2006). Posterior distribution and loss functions for parameter .estimation in Weibull processes.

17-Han, M. (2020). Study on the effect of the different prior distributions on E-Bayesian estimation of failure probability and its E-posterior risk. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 1-15.

18- Han, M. (2007). E-Bayesian estimation of failure probability and its application. *Mathematical and Computer Modelling*, *45*(9-10), 1272-1279.

19- Howlader ,H.A , & Hossain , A .M , (2002) : Bayesian Survival of Estimation of Pareto Distribution of the Second Kind , Elsevier , Computational Statistics on Data Analysis , 38 , pp. 301 – 314 .

20- Ibrahim, M., Mohammed, W., & Yousof, H. M. (2020). Bayesian and classical estimation for the one parameter double Lindley model. *Pakistan Journal of Statistics and Operation Research*, 409-420.28- Kinyanjui,J., and Korir, B.(2020) Bayesian Estimation of Parameters of Weibull Dist. Using Linex Error Loss Function . International Journal of Statistics and Probability , 9(2), 1-38

21- Islam, A. F. M. (2011). *Loss functions, utility functions and Bayesian sample size determination* (Doctoral dissertation).

22- Islam, M. N., & Consul, P. C. (1991). The Consul distribution as a bunching model in traffic flow. *Transportation Research Part B: Methodological*, *25*(5), 365-372.

23-Ismail, S. K., AL-Sabbah, S. A., Moahammed, S. M., Nassif, M. M., & Ramadan, E. Q. (2022). Estimation of exponential Pareto parameters. *International Journal of Nonlinear Analysis and Applications*, *13*(1), 2385-2394.

24- Jones, M. C. (2009). Kumaraswamy's distribution: A beta-type distribution with some tractability advantages. *Statistical methodology*, *6*(1), 70-81.

25- Kinyanjui, J. K., & Korir, B. C. (2020). Bayesian estimation of parameters of weibull distribution using linex error loss function. *International Journal of Statistics and Probability*, *9*(2), 1-38.

26-Li, C.P.& Hao ,H.B.(2019).E-Bayesian estimation and hierarchical Bayesian estimation of Poisson dist. Parameter under entropy loss function . IJAM,49,369-374.

27- Lye,L.M.Hapuarachchi,kp,Ryan,S.(1993)" Bayess Estimation of the Extrem-value Reliability function ",IEEE Transaction on Reliability ,vol.v42,no4,PP:641-644.

28- Mahmoud, M. A., Mohammed, A. A., & Abraheem, S. K. (2022). A comparative study on numerical, non-Bayes and Bayes estimation for the shape parameter of Kumaraswamy distribution. *International Journal of Nonlinear Analysis and Applications*, *13*(1), 1417-1434

29- Mohammed ,B. E. (2014) . Statistical properties of Kumaraswamy-generalized exponentiated exponential distribution. International Journal of Computer Applications , 94(4),1-8.

30- Noor, F., Masood, S., Zaman, M., Siddiqa, M., Wagan, R. A., Khan, I. U., & Sajid, A. (2021). Bayesian Analysis of Inverted Kumaraswamy Mixture Model with Application to Burning Velocity of Chemicals. *Mathematical Problems in Engineering*, *2021*

31- Preda, V., Panaitescu, E., & Constantinescu, A. (2010). Bayes estimators of modified-Weibull distribution parameters using Lindley's approximation. *WSEAS Transactions on Mathematics*, *9*(7), 539-549.

32-- Rashid, A., & Jan, T. R. (2015). A New Three Parameter Consul Kumaraswamy Distribution with Application. *Int. J. Modern Math. Sci*, *13*(4), 366-376

33-- Rubinstein, R. Y., & Kroese, D. P. (2016). *Simulation and the Monte Carlo method*. John Wiley & Sons.

34- Sindhu, T. N., Feroze, N., & Aslam, M. (2013). Bayesian analysis of the Kumaraswamy distribution under failure censoring sampling scheme. *International Journal of Advanced Science and Technology*, *51*, 39-58.

35-- Singh, S. K., Singh, U., & Sharma, V. K. (2014). Bayesian estimation and prediction for the generalized Lindley distribution under asymmetric loss function. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, *43*(4), 661-.678.

36- Sinha, S. K., & Sloan, J. A. (1988). Bayes estimation of the parameters and reliability function of the 3-parameter Weibull distribution. *IEEE Transactions on Reliability*, *37*(4), 364-369

37- y Widemann, B. T. (2011). Kumaraswamy and beta distribution are related by the logistic map. ***arXiv preprint arXiv:1104.0581*****.**

الملاحق

طريقة الإمكان الأعظم Maximum Likelihood Method [8][3]

يمكن تعريف طريقة الإمكان الأعظم على انها واحدة من اهم طرائق التقدير الاعتيادية وأكثرها استعمالا في تقدير معلمات النماذج كونها تتضمن العديد من الخصائص منها الثبات والكفاية العالية والاتساق وعدم التحيز بالإضافة الى امتلاكها اقل تباين ، الهدف من هذه الطريقة هو إيجاد قيم تقديرية للمعلمات (m,β,α) وذلك بجعل دالة الإمكان في نهايتها العظمى علما ان المقدرات المستخرجة تمتاز بان لها خصائص المقدر الجيد (Best Estimate) .

لتكن $x_1,x_2,\dots,x_n$ مشاهدات عشوائية بحجم عينة n تتبع توزيع القنصل كوماراسوامي CKSD ذي الثلاث معلمات فان دالة الإمكان للمشاهدات تصاغ بالشكل الأتي :

$$L(t_1,t_2,\dots,t_n)=\prod_{i=1}^{n} f(t;m,\alpha,\beta)$$

$$=\frac{\beta^n}{x_i}\binom{mx_i}{x_i-1}\sum_{j=0}^{mx_i-x_i+1}\binom{mx_i-x_i+1}{j}(-1)^j\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\frac{x_i+j-1}{\alpha})}{\Gamma(\beta+\frac{x_i+j-1}{\alpha})}$$

$$=\frac{\beta^n}{x_i}\frac{(mx_i)!}{(x_i-1)!\,(mx_i-x_i+1)!}\sum_{j=0}^{mx_i-x_i+1}\binom{mx_i-x_i+1}{j}(-1)^j\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\frac{x_i+j-1}{\alpha})}{\Gamma(\beta+\frac{x_i+j-1}{\alpha})}$$

$$\log L(t_1,t_2,\dots,t_n)$$
$$=n\log\beta+\sum_{i=1}^{n}\log\Gamma(mx_i+1)-\sum_{i=1}^{n}\log\Gamma(mx_i-x_i+2)$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\log\Gamma(x_i+1)$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\log\left[\sum_{j=0}^{mx_i-x_i+1}\binom{mx_i-x_i+1}{j}(-1)^j\frac{\Gamma(\beta)\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\beta+\frac{x_i+j-1}{\alpha}\right)}\right]$$

$$\frac{\partial\log L(f(t))}{m}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{\partial}{\partial m}(\Gamma(mx_i+1))}{\Gamma(mx_i+1)}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{\partial}{\partial m}(\Gamma(mx_i-x_i+2))}{\Gamma(mx_i-x_i+2)}$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\frac{\partial}{\partial m}\left[\sum_{j=0}^{mx_i-x_i+1}\binom{mx_i-x_i+1}{j}(-1)^j\frac{\Gamma(\beta)\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\beta+\frac{x_i+j-1}{\alpha}\right)}\right]}{\sum_{j=0}^{mx_i-x_i+1}\binom{mx_i-x_i+1}{j}(-1)^j\frac{\Gamma(\beta)\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\beta+\frac{x_i+j-1}{\alpha}\right)}}\right]=0$$

$$\frac{\partial \log L(f(t))}{\alpha}=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\left[\sum_{j=0}^{mx_i-x_i+1}\binom{mx_i-x_i+1}{j}(-1)^j\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{\Gamma(\beta)\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\beta+\frac{x_i+j-1}{\alpha}\right)}\right]}{\sum_{j=0}^{mx_i-x_i+1}\binom{mx_i-x_i+1}{j}(-1)^j\frac{\Gamma(\beta)\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\beta+\frac{x_i+j-1}{\alpha}\right)}}\right]$$
$$=0$$

$$\frac{\partial \log L(f(t))}{\beta}=\frac{n}{\beta}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\left[\sum_{j=0}^{mx_i-x_i+1}\binom{mx_i-x_i+1}{j}(-1)^j\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{\Gamma(\beta)\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\beta+\frac{x_i+j-1}{\alpha}\right)}\right]}{\sum_{j=0}^{mx_i-x_i+1}\binom{mx_i-x_i+1}{j}(-1)^j\frac{\Gamma(\beta)\Gamma\left(\frac{x_i+j-1}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\beta+\frac{x_i+j-1}{\alpha}\right)}}\right]$$
$$=0$$

بعد مساواة المشتقة انفاً بالصفر سوف تنتج لنا معادلات لاخطية يصعب حلها باستعمال الطرائق الاعتيادية فلابد من استعمال الطراق العددية لحلها منها طريقة نيوتن رافسون .

توزيع القتصل كوماراسوامي CKSD

$$f_{CKSD}(x;m,\propto,\beta)=\binom{mx}{x-1}\sum_{j=0}^{mx-x+1}\binom{mx-x+1}{j}(-1)^j B\left(\beta,\frac{x+j+\alpha-1}{\propto}+1\right)\quad \dots 2$$

$$x=1,2,\dots.m \qquad m,\propto,\beta>0$$

Proof: With the help of definition of proposed distribution the probability function of a compound of CD (m, p) with KSD (α,β) can be obtained as

$$f_{CKSD}(x;m,\beta,\alpha)=\int_0^1 f_1(x|p)f_2(p)dp$$

$$f_{CKSD}(x;m,\beta,\alpha)=\frac{\beta\alpha}{x}\binom{mx}{x-1}\int_0^1 p^{x+\alpha-2}(1-p)^{mx-x+1}(1-p^\alpha)^{\beta-1}dp$$

$$f_{CKSD}(x;m,\beta,\alpha) = \frac{\beta\alpha}{x}\binom{mx}{x-1}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{mx-x+1}{j}(-1)^j \int_0^1 p^{x+j+\alpha-2}\,(1 - p^{\alpha})^{\beta-1}dp$$

Substituting , $1 - p^{\alpha} = z$ we get

$$f_{CKSD}(x;m,\beta,\alpha) = \frac{\beta\alpha}{x}\binom{mx}{x-1}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{mx-x+1}{j}(-1)^j \int_0^1 z^{\beta-1}\,(1 - z)^{\frac{x+j+\alpha-1}{\alpha}}dz$$

$$f_{CKSD}(x;m,\beta,\alpha) = \frac{\beta\alpha}{x}\binom{mx}{x-1}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{mx-x+1}{j}(-1)^j\, B(\beta,\frac{x+j+\alpha-1}{\alpha}+1)$$

If $m \in N$ the above probability function takes the simpler rearranged form as

$$f_{CKSD}(x;m,\beta,\alpha) = \frac{\beta\alpha}{x}\binom{mx}{x-1}\sum_{j=0}^{mx-x+1}\binom{mx-x+1}{j}(-1)^j\, B(\beta,\frac{x+j+\alpha-1}{\alpha}+1)$$

Abstract

The study seeks to use the Bayesian methods represented by the Standard Informative Bayesian method and the Expected Bayesian method to find the capabilities and survival function of the Consul kumaraswamy dist. (CKSD) with three parameters (m, α, β) within a symmetrical loss function called the squared error loss function, and an asymmetrical one called a general entropy loss function.
In order to simplify and solve the equations resulting from the above estimation methods, the approximate method proposed by the researcher Lindley, which is called the Lindley Approximation method, and another method called the Jeffry method was used, where the two methods were compared to find out which one is more accurate in solving non-linear equations that cannot be solved Using numerical analysis methods
For the purpose of comparing the Bayesian estimation methods used to find the estimators and survival function of the Consul Kumaraswamy dist., the Monte Carlo simulation method was employed using the MATLAB program by conducting several experiments with different small sample sizes (10, 20).), medium (30,40) and large (50), and by means of the statistical criterion mean squares of integral error IMSE, the results showed the preference of the Bayesian prediction method in light of the general entropy loss function when Lindley approximation over the rest of the estimation methods. In addition to the superiority of the Lindley approximation to the Jeffrey approximation with an advantage of 36% and for all simulation experiments and to apply the distribution of the Consul Kumaraswamy on the ground, a sample of 50 individuals was drawn representing the duration of stay of patients with ischemic heart disease in Al-Hussein Teaching Hospital in the Holy Karbala Governorate Through the good-matching test, it was proved that the distribution of Consul Kumaraswamy is preferable in representing and describing these data compared to the distribution of Consul Kumaraswamy. The survival function in the real data was also estimated using the estimation methods that were applied in the experimental side, where we note that the estimated parameters of the real data for the distribution of Consul Komarswami are more close to the default parameters on the experimental side, that is, the Bayes prediction estimator method under the general entropy loss function is better than the rest The methods when applied to the real data, and the estimated values of the survival function according to Bayesian prediction method under the general entropy loss function are better than the rest of Bayesian methods as they are more close to the real survival function.

University of Karbala

College of Administration and Economic

Department of Statistic

Bayesian Estimation of Parameters of a Consul Kumaraswamy distribution under a Squared loos function and a General entropy loos function

(An Empirical Study)

A thesis

Submitted to the council of the college of administration and Economic\ University of Karbala, as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in statistic

By

Noor Amer Harb AL-Bazuny

Under supervision

Prof. Dr. Awad Kazem Shaalan AL-Khalidy

2022 **1444**