جمهورية العراق

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة كربلاء/ كلية الإدارة والاقتصاد

قسم الإحصاء

استعمال بعض الطرائق الاحصائية لتقدير معلمات المعادلات التفاضلية الاعتيادية مع تطبيق عملي

رسالة مقدمــة الى مجلس كلية الادارة والاقتصاد في جامعة كربلاء
وهي جزء من متطلّبات نيل درجة الماجستير في علوم الاحصاء

تقدّمت بهـا

اسراء صمد دويح الصافي

بإشـــــــــراف

أ.م.د مشتاق كريم عبد الرحيم

١٤٤٤هـ 2022 م

كربلاء المقدسة

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

﴿قَالُوا سُبْحَانَكَ لَا عِلْمَ لَنَا إِلَّا مَا عَلَّمْتَنَا ۖ إِنَّكَ أَنتَ الْعَلِيمُ الْحَكِيمُ﴾

صدق الله العلي العظيم

سورة البقرة: الاية (32)

إقرار المشـرف

أشهد أن إعداد هذه الرسالة الموسومة (**استعمال بعض الطرائق الاحصائية لتقدير معلمات المعادلات التفاضلية الاعتيادية مع تطبيق عملي**) والتي تقدم بها الطالبة " **اسراء صمد دويح** " قد جرى بإشرافي في قسم الاحصاء - كلية الادارة والاقتصاد - جامعة كربلاء، وهي جزء من متطلبات نيل درجة ماجستير علوم في الاحصاء.

أ. م . د. مشتاق كريم عبد الرحيم

التاريخ: / / 2022

توصية رئيس قسم الاحصاء

بناءً على توصية الاستاذ المشرف، أرشح الرسالة للمناقشة.

أ.د. شروق عبد الرضا السباح

رئيس قسم الاحصاء

التاريخ: / / 2022

إقرار الخبير اللغوي

أشهد أن الرسالة الموسومة بـ (**استعمال بعض الطرائق الإحصائية لتقدير معلمات المعادلات التفاضلية الإعتيادية مع تطبيق عملي**) **للطالبة إسراء صمد دويح (قسم الإحصاء / كلية الادارة والاقتصاد / جامعة كربلاء)** قد جرى مراجعتها من الناحية اللغوية متى أصبحت خالية من الاخطاء اللغوية ولأجله وقعت.

الخبير اللغوي

م. صلاح مهدي جابر

إقرار رئيس لجنة الدراسات العليا

بناءً على اقرار المشرف العلمي والخبير اللغوي على رسالة الماجستير للطالبة " **اسراء صمد دويح** " الموسومة بـ (**استعمال بعض الطرائق الاحصائية لتقدير معلمات المعادلات التفاضلية الاعتيادية مع تطبيق عملي**) ارشح هذه الرسالة للمناقشة.

أ.د محمد حسين كاظم الجبوري

رئيس لجنة الدراسات العليا

معاون العميد للشؤون العلمية والدراسات العليا

مصادقة مجلس الكلية

صادق مجلس كلية الادارة والاقتصاد/ جامعة كربلاء على قرار لجنة المناقشة.

أ.د محمد حسين كاظم الجبوري

عميد كلية الادارة والاقتصاد- جامعة كربلاء

/ / 2022

إقرار لجنة مناقشة

نشـهد نحـن أعضـاء لجنـة المناقشـة بأننـا قـد اطلعنـا علـى الرسـالة الموسـومة **(استعمال بعض الطرائق الاحصائية لتقدير معلمات المعادلات التفاضلية الاعتيادية مع تطبيق عملي)** والمقدمة من قبل الطالبة **"اسراء صمد دويح "** وناقشنا الطالبة في محتوياتها وفيما له علاقة بها، ووجدنا بأنها جديرة بنيل درجة ماجستير علوم في الإحصاء بتقدير (   ).

أ.د.مهدي وهاب نصر الله	**أ.م.د.نازك جعفر صادق**
رئيســـاً	**عضواً**
2022/ /	2022/ /
أ.م.د.اسماء نـجـم عبد الله	**أ.م.د.مشتاق كريم عبد الرحيم**
عضواً	**عضواً ومشرفاً**
2022/ /	2022/ /

الإهداء

إلى سندي منذ ولادتي ..... وفي حياتي ..... وإلى الممات

(والدي العزيز)

إلى من علمتني انه لامحال فقربت من عيني ما استحال ...... وصار جميلها لا يحصى فكيف تحصى حبات الرمال؟

(والدتي الحنونة)

إلى زوجي العزيز الذي أكن له كل الاحترام والتقدير.....

إلى كل من يسعده نجاحي....... تقد يرا

الباحثة

شكر وتقدير

الحمد لله رب العالمين، حمداً يوافي نعمه ويكافي مزيده والشكر لله على ما وهبني من صبر وهدى وتوفيق تخطيت به الصعاب لإنجاز هذا البحث، والصلاة والسلام على الرحمة المهداة نبينا محمد وعلى آل محمد وصحبه وسلم تسليماً كثيراً.

لا يسعني وأنا أتمم رسالتي إلا أن اقدم جميع كلمات الشكر والتقدير والإعتزاز الى الاستاذ المساعد الدكتور (**مشتاق كريم عبد الرحيم**) لمنحه لي شرف الإشراف على رسالتي ولما قدمه من توجيهات علمية ولجهوده القيمة التي كان لها الأثر الكبير في إخراج الرسالة بالصورة التي هي عليها، فضلاً عن أخلاقه الرفيعة ولطفه فرعاه الله وحفظه ذخراً للعلم وأهله.

كما أتقدم بجزيل الشكر والامتنان الى الأساتيذ الفضلاء رئيس لجنة المناقشة وأعضائها المحترمين لتفضلهم بقبول مناقشة الرسالة.

كما يقتضي واجب الوفاء ان أتقدم بوافر الشكر لجميع أساتذتي الفضلاء في قسم الإحصاء (**جامعة كربلاء**) الذين وهبوني علمهم في مدة دراستي في الجامعة والذين عملوا جاهدين على تحقيق الرقي العلمي لجميع الطلبة.

كما أتوجه بوافر الشكر الى جميع زملاء الدراسة على حسن رفقتهم ومساعدتهم لي فجزاهم الله خير الجزاء، وأتمنى لهم النجاح والموفقية.

وأخيراً أتوجه بالشكر الخاص الى كل من مد لي يد العون ولم اذكره واسأل المولى عز وجل أن يوفق الجميع.

الباحثة

قائمة المحتويات

قائمة الجداول

قائمة الاشكال

قائمة الرموز

الرمز	المعنى	Mean
ODE	المعادلة التفاضلية الاعتيادية	Ordinary Differential Equation
NODE	المعادلة التفاضلية الاعتيادية اللاخطية	Non Linear Ordinary Differential Equation
NLS	المربعات الصغرى اللاخطية	Non Linear Least Squares
MAP	تعظيم التوزيع اللاحق	Maximum A Posterior
MSE	متوسط مربعات الخطأ	Mean Square Errore
θ	متجه المعلمات المجهولة	Unknown Parameters Vector
I.V	القيمة الابتدائية	Initial Value
y_0	الحجم الأولي (الابتدائي)	Initial Value of Population
LJ		Luus-Jaakola

المستخلص Abstract

تستخدم نماذج المعادلات التفاضلية الاعتيادية (Ordinary Differential Equations) (ODE) على نطاق واسع لنمذجة العمليات الديناميكية (*) في العديد من المجالات العلمية، ولكنها عادة ما تعتمد على المعلمات التي تكون ذات أهمية حاسمة وتحتاج إلى تقديرها مباشرة من البيانات، وتعد عملية تقدير المعلمات عادة مشكلة صعبة خاصة في نماذج المعادلات اللاخطية. وفي هذه الرسالة تم استخدام طريقة المربعات الصغرى غير الخطية (Non Linear Least Squares) (NLS) والتي تعتبر الاكثر شيوعا في تقدير معلمات المعادلات التفاضلية الاعتيادية ومقارنتها بمقدرات طريقة تعظيم التوزيع البعدي اللاحق (Maximum A Posterior) (MAP) وباستعمال انموذجين من نماذج المعادلات التفاضلية الاعتيادية وهي كل من (انموذج Malthus والانموذج اللوجستي) وبتوظيف اسلوب محاكاة مونتي كارلو باستعمال خمس حجوم عينات مختلفة (10، 25، 50، 100، 250) وباستعمال معيار متوسط مربعات الخطأ (MSE) قد اشارت النتائج التي تم التوصل اليها الى ان طريقة المربعات الصغرى اللاخطية (NLS) كانت اكثر ملائمة في تقدير معلمات هذه النماذج.

ومن ثم تم اجراء تطبيق عملي لبيانات حقيقية متمثلة بعدد سكان العراق للفترة (1985-2018) لغرض بيان الانموذج الافضل في تمثيل هذه البيانات وباستخدام فضلى الطرائق من الجانب التجريبي وقد تبين أن الانموذج اللوجستي يعتبر أكثر ملائمة لهذه السلسلة من البيانات وبالتالي يمكن الاعتماد على نتائج تنبؤاته التي تكون أكثر دقة مقارنة بانموذج Malthus حيث وجدث الرسالة أن عدد سكان العراق سيبلغ بحدود 55 مليونا بحلول عام 2040 بناءا على التنبؤ باستعمال الانموذج اللوجستي.

(*) الديناميكية : هي إحدى فروع الرياضيات التطبيقية (على وجه التحديد الميكانيكا الكلاسيكية) التي تختص بدراسة القوى والعزوم وتأثيرها علي حركة الأجسام أي الحركة ومسبباتها.

الفصل الاول

مقدمة وهدف البحث

1.1 المقدمة Introduction

لقد أثبت علم الاحصاء أنه أداة يمكن أن تستخدم لخدمة وتطوير الانسان في مختلف الميادين من خلال استخدامه في إستدلال و تطوير بقية العلوم، ومن هنا جاء الاهتمام الواضح والكبير في هذا العلم حتى اصبح علما بارزا في مجال العلوم الصرفة.

ويمكن القول ان خطوات هذا العلم قسمت الى عدة مراحل وباتت كل مرحلة حقلا رئيسا من حقوله، وان أهم المراحل التي تستند اليها دقة النتائج المتوخاة من الانموذج الاحصائي المعتمد في الدراسة هي مرحلة تقدير معلمات الانموذج، لان مقدرات معلمات الانموذج هي التي تعطي صفة الظاهرة المراد دراستها وقد اقترحت عدة اساليب او طرائق احصائية لتقدير معلمات الانموذج الاحصائي المجهولة في حالة تحقق عدد من الفرضيات او الشروط الاساسية.

إنَ المعادلات التفاضلية (Differential Equations) ضرورية لفهم كثير من المسائل الفيزياوية والرياضية المهمة و لقد ادرك ذلك اسحاق نيوتن في القرن السابع عشر اذ استخدم المعادلات التفاضلية في دراسته لحركة الجسيمات والاجرام السماوية وتعتبر المعادلات التفاضلية من المواضيع المهمَة في الرياضيات البحتة والتطبيقية وهي الرابط بين العلوم الرياضية والهندسية والفيزيائية وغيرها، فلا تخلو مواضيع الهندسة الكهربائية والميكانيكية والإنشائية من انواع المعادلات التفاضلية. [21]

ويمكن القول بأن المعادلات التفاضلية تحتل اليوم مكانة مرموقة في كل فروع العلوم الهندسية والفيزيائية والحيوية، حيث أن اغلب العلاقات والقوانين الحاكمة بين المتغيرات في أي مسألة تظهر على صورة معادلات تفاضلية.

عندما تقاس عملية ديناميكية فأن دالة انحدار الانموذج الاحصائي للبيانات المشاهدة كثيرا ما تظهر على شكل معادلة تفاضلية تصف العملية الديناميكية الأساسية، وبذلك يمكن اعتبار انموذج الانحدار كمعادلة تفاضلية في كثير من العمليات التي يمكن نمذجتها باستعمال هذه المعادلة، و ان الفكرة الأساسية للنمذجة بالمعادلات التفاضلية للعمليات الديناميكية هي معرفة سلوك هذه العمليات من خلال تحليل النماذج الرياضية لهذه الانظمة، وان معظم هذه النماذج من المعادلات التفاضلية تكون لاخطية فالنماذج الديناميكية عادة ما تكون متمثلة بنماذج من المعادلات التفاضلية الاعتيادية اللاخطية (Non Linear Ordinary Differential Equations) (NODE).[3]

ان تقدير المعلمات في النماذج الرياضية التي تستند إلى المعادلات التفاضلية يعتبر من الامور المهمة، ومسالة تقدير المعلمات عندما يتم قياس عملية فسيلوجية(*) او بيولوجية(**) غالبا ما تعتمد او تستمد من دالة الانحدار للانموذج الاحصائي المقابل لبيانات المشاهدات في المعادلة التفاضلية التي تصف العملية الديناميكية.

يبرز السؤال هنا كيف يمكن استعمال الطرائق الاحصائية لتقدير المعلمات في المعادلات التفاضلية الاعتيادية (Ordinary Differential Equations) (ODE)؟

في هذه الرسالة سيتم التركيز على الطرائق الاحصائية لتقدير المعلمات في نماذج مختارة من المعادلات التفاضلية الاعتيادية اللاخطية (NODE) بهدف إيجاد افضل الطرائق التي تلائم هذه النماذج. وعلى هذا الاساس ولتحقيق الهدف الموسوم لهذه الرسالة فقد تم تقسيمها الى اربع فصول، حيث تم تخصيص الفصل الاول لمنهجية البحث وقد تضمن المقدمة والمشكلة والهدف والاستعراض المرجعي لبعض البحوث والدراسات ذات العلاقة بموضوع البحث، كذلك تضمن الفصل الثاني بعض المفاهيم الاساسية ووصفا للمعادلات التفاضلية الاعتيادية (ODE) وطرق تصنيفها وبعض الامثلة عنها وكذلك عرض لبعض نماذج المعادلات التفاضلية اللاخطية (NODE) وطرائق تقدير معلمات هذا النوع من المعادلات وهي كل من طريقة المربعات الصغرى اللاخطية (Non Linear Least Squares Method) (NLS) وطريقة تعظيم دالة التوزيع اللاحق (Maximum A Posterior Method) (MAP). في حين احتوى الفصل الثالث على قسمين اساسيين، حيث تضمن القسم الاول اجراء دراسة محاكاة لطرائق التقدير وللنماذج التي تم استعراضها في الفصل الثاني واستعمال اسلوب محاكاة مونتي كارلو (Monte Carlo) لغرض الوصول الى افضل تلك الطرائق باستعمال معيار متوسط مربعات الخطأ (Mean Square Error) (MSE) ولحجوم عينات مختلفة (صغيرة، متوسطة، كبيرة)، اما القسم الثاني

(*) الفسيولوجيا: هو علم دراسة وظائف الأعضاء والأجهزة الحيوية ويتضمن كمان كيف تقوم الأجهزة العضوية، والخلايا، والجزيئات الحيوية بالعمليات الكيميائية والفيزيائية في الكائنات الحية

(**) البيولوجيا: هو علم من العلوم الطبيعية يهتم بدراسة الحياة و اشكالها المختلفة ووظيفته كيف تتفاعل الكائنات الحية هذه مع بعضها و مع البيئة المحيطة بها.

فقد اقتصر على استعمال الطريقة الافضل والتي تم استخلاصها من القسم الاول وهي طريقة (NLS) في تقدير معلمات انموذج مالثوس (Malthus Model) والانموذج اللوجستي (Logistic Model) والمقارنة بينهما لايجاد أفضل انموذج يصف بيانات النمو السكاني في العراق للفترة (1985-2018). واخيرا جاء الفصل الرابع بأهم الاستنتاجات والتوصيات التي توصلت اليها الباحثة.

وتجدر الاشارة الى ان تنفيذ تجارب المحاكاة وعملية تقدير المعلمات قد تم باستعمال برنامج Mathematica 12.2 كلغة برمجة.

2-1 مشكلة الدراسة Problem and importance of research

عند دراسة اي ظاهرة فان المشكلة الرئيسية تكمن في كيفية اتخاذ القرارات لحل هذه المشكلة عن طريق اعتماد التحليل و الانموذج المناسب. وعند استعمال نماذج المعادلات التفاضلية الاعتيادية (ODE) لنمذجة العمليات الديناميكية في العديد من الظواهر تبرز لنا عادة مشكلة صعبة خاصة في نماذج المعادلات التفاضلية الاعتيادية اللاخطية (Non Linear Ordinary Equations Differential) (NODE) وهي مشكلة تقدير المعلمات التي تعتبر الاساس الذي قامت من اجله هذه الدراسة .

وتعتبر ظاهرة النمو السكاني في أي بلد من الظواهر المهمة التي تبنى عليها السياسات ورسم الخطط وايجاد الحلول للمشاكل المستقبلية ولذلك اخذنا على عاتقنا دراسة عملية النمو السكاني في العراق للفترة (1985-2018) وايجاد افضل أنموذج يصف هذه العملية وكذلك أفضل طريقة لتقدير معلمات هذا الانموذج.

3-1 هدف الدراسة Research objective

تهدف الرسالة الى استعمال بعض الطرائق الاحصائية التي يمكن توضيفها في تقدير معلمات نماذج المعادلات التفاضلية الاعتيادية اللاخطية (NODE) ودراسة حالة خاصة منها وهي مسألة القيمة الأولية (Initial Value Problem) (IV) وهي كل من طريقة المربعات الصغرى اللاخطية (NLS) وطريقة تعظيم دالة التوزيع اللاحق (MAP) والمقارنة بينها باستعمال اسلوب المحاكاة والمقارنة بين هذه الطرائق باستعمال المعيار الاحصائي متوسط مربعات الخطأ (MSE

(Mean Square Error) (لمقدرات تلك المعادلات ولانموذجين من نماذج المعادلات التفاضلية الاعتيادية وهما انموذج Malthus والانموذج اللوجستي (Logistic Model) والتوصل الى الطريقة الأفضل ومن ثم استعمال الانموذجين في الجانب التطبيقي وتقدير المعلمات بالطريقة الأفضل التي تم التوصل اليها في الجانب التجريبي وباستعمال بيانات السكان في العراق للفترة (2018-1985).

4-1 الاستعراض المرجعي Literature review

تُعد عملية تقدير معلمات المعادلات التفاضلية الاعتيادية الهدف الاساس لهذه الرسالة ولذلك سيتم سرد بعض الدراسات التي تناولت موضوع تقدير المعلمات خلال السنوات القليلة الماضية مع الاخذ بعين الاعتبار تلافي الدراسات المتشابهة والمكررة والاقتصار على الدراسات خلال ال 15 عام الاخيرة حيث ان تقدير المعلمات في نماذج المعادلات التفاضلية ذو ماضي طويل ومتناثر في الادب الاحصائي والرياضي.

ففي عام (2006) قام (Linga et.al)[27] بمقارنة طريقة Luus-Jaakola (LJ) للتحسين العددي مع طريقة كاوس نيوتن (Gauss-Newton) في تقدير معلمات المعادلات التفاضلية واثبتت بأنه يمكن استخدام طريقة تحسين LJ بنجاح لتقدير المعلمات في مشاكل الهندسة الكيميائية التي تنطوي على نماذج وصفتها المعادلات التفاضلية الاعتيادية.وبينوا تأثير قيم التخمين الأولية هو الحد الأدنى للمعلمات المثلى. علاوة على ذلك ، تم توضيح أن عددًا كبيرًا من النقاط العشوائية ليست ضرورية. من ناحية أخرى فقد واجهت طريقة Gauss-Newton صعوبات التقارب التي تم تخفيفها باستخدام نهج Marquardt-Levenberg.

وفي عام 2007 قدم كل من (Donnet,S. and Samson) [17] طرائق تقدير المعلمات في نماذج (NODE) باستعمال خوارزمية التقريب العشوائي (Hastings –Metropolis Algorithm) (H-M) وكذلك خوارزمية (H-M) المعدلة المتضمنة المخطط الخطي المحلي

الأصلي لحل (ODE) وثبتت هذه الخوارزميات الحد من الزمن الحسابي بشكل كبير وقد ثبت التقارب على الانموذج التقريبي لجميع هذه الخوارزميات، كما انها تحد من الأخطاء الناجمة من طرائق التحليل العددي ولقد تم توضيح واستعمال طريقة بيز في التقدير (Bayesian Estimation Methods)وطريقة الإمكان الأعظم على انموذج محاكاة لأنموذج المعادلات التفاضلية الاعتيادية اللاخطية المختلط وبينت نتائج هذه المحاكاة قدرة هذه الخوارزميات على تقديم تقديرات دقيقة.

وفي العام التالي اقترح الباحث (Brunal,N) [14] طريقة عامة لتقدير معلمات نماذج (NODE) باستعمال مقدر لامعلمي لدوال الانحدار كخطوة أولى لتقديرمتغير الحالة ويركز بناء هذا المقدر على تفسير الانحدار لمشكلة تقدير المعلمات في نماذج (NODE) ، وعلى العلاقة بين المعلمة في هذه النماذج والدالة المرتبطة بها . ولقد بين الباحث الاتساق المستمد من المقدر، كما بين انه في حاله مقدرات الشرائح ان معدل التقارب هو ليس المعدل المعتاد $\sqrt{n}$ هذا المعدل يعتمد على تمهيد المعادلات التفاضلية كما بين بان هذه الطريقة قادرة على التخفيف من التكلفة الحسابية التي تواجهها الطرائق المعلمية الكلاسكية.

استعمل الباحثان (Liang,H and Wu,H)عام 2008 [26] انموذج ديناميكي متمثل بأنموذج من المعادلات التفاضلية الاعتيادية اللاخطية (NODE) و باستعمال المحاكاة بطريقة مونت كارلو بمقارنة ثلاثة طرائق من طرائق المرحلتين و تم اثبات التقارب الطبيعي بين الطرائق وتم مقارنة هذه الطرائق مع طريقة بديلة وهي طريقة التفريق العددي التي يتم استعمالها على نطاق واسع في نماذج الانتشار العشوائي وتبين ان هذه الطريقة التي تستخدم نهج تفريق اويلر (Euler Discretization) لأنموذج ديناميكي بسيط لا تحقق معدل التقارب الأمثل مقارنة مع طرائق المرحلتين المقترحة ولتوضيح الطرائق المقترحة استعمل الباحثان بيانات حقيقية لديناميكية فايروس نقص المناعة البشرية .

وفي العام (2009) قام (Miao,H et.al) [28] باقتراح تقدير احصائي لانموذج المعادلة التفاضلية اللاخطية (NODE) وكيفية اختيار الانموذج الملائم وفق الاختلافات في الافتراضات البيولوجية ليناسب البيانات التجريبية، وقاموا بتطبيق الاساليب والتقنيات المقترحة من خلال استعمال طريقة التحسين المتمثلة بطرائق التحسين العالمي (Global Optimization) مثل طريقة التطور التفاضلي (Differential Evolution) لتقدير المعلمات المجهولة واثبتوا انها اكثر كفاءة من طرائق التحسين المتمثلة بطرائق التدرج مثل طريقة نيوتن (Newton Method) .

في العام 2011 اقترح (Cao,J et.al) [15] طريقة لتقدير المعلمات في نماذج (NODE) عندما تكون هناك مشكلة وجود قيم متطرفة (Outliers Value) في البيانات وقد تم اقتراح طريقة حصينة لمعالجة هذه المشكلة وذلك بتمثيل العملية الديناميكية (متغير الحالة) بدالة لا معلميه والتي تكون عبارة عن تركيبة خطية من دوال الأساس حيث استعمال طريقة الجزاء الحصين الممهدة (Robust Penalized Smoothing Method) لتقدير هذه الدالة وكذلك تم تعريف حد الجزاء والذي يتحكم بخشونة الدالة اللامعلمية ويحافظ على دقتها في انموذج المعادلات التفاضلية الاعتيادية اللاخطية وتقدر معاملات الأساس ومعلمات نماذج المعادلات التفاضلية في مستويين متداخلين للامثلية كما ان تقديرات المعاملات تعامل كدالة ضمنية لمعلمات انموذج (NODE) التي يمكن استخلاص التدرجات التحليلية منها، ولقد قاموا بدراسة محاكاة وكذلك من خلال تقدير انموذج (NODE) الفريسة والمفترس (Predator-Prey) باستعمال بيانات بيئية حقيقية . وبينت الدراسة ان هذه الطريقة حصينة وذات نتائج جيده .

وفي العام 2014 استعمل كل من الباحثان (Ding , A. and Wu,H) [16] الانحدار المتعدد الموضعي المقيد (Constrained Local Polynomial Regression) لتقدير المعلمات المجهولة في نماذج المعادلات التفاضلية الاعتيادية اللاخطية وذلك بهدف تحسين طرائق المربعات الصغرى ذات المرحلتين المستندة على طرائق التمهيد اللامعلمية وتستمد قيود المعادلة من انموذج المعادلات التفاضلية وتدمج في انموذج الانحدار المتعدد الموضعي لتقدير المعلمات المجهولة كما استمدوا التحيز المناظر والتباين في المقدر المقترح ولقد استنتجا من خلال المحاكاة

افضلية المقدر المستند على الانحدار المتعدد الموضعي المقيد من المقدر المستند على طريقة المربعات الصغرى بالمرحلتين .

في العام 2015 قام (Hu,T et.al) [22] بتقدير نماذج المعادلات التفاضلية (NODE) عندما تكون بعض المشاهدات ملوثة، واستعملوا طرائق تقدير منتظمة، وبينوا ان طريقة المربعات الصغرى اللاخطية ستجلب تحيزا كبيرا . كما، اقترحوا تقديرات حصينة لكل من المعلمات الثابتة والمتغيرة زمنيا في نماذج المعادلات التفاضلية الاعتيادية اللاخطية (NODE).باستعمال المقدر (M- estimator) وتم الحصول على خصائصه . وركزوا على (Huber M-estimator) وأيضا اقترحوا طريقة لضبط معلمة هوبر(Huber Parameter) تلقائيا إلى المشاهدات وتمت مقارنة الطريقة المقترحة مع الطرائق الموجودة في المحاكاة العددية و تحليل البيانات وقد اثبتوا أن الأسلوب المقترح لديه كفاءة كبيرة وكذلك خصائص قوية.

وفي عام 2018 قامت الباحثة (حسين، وفاء جعفر) [3] باستعمال ثلاث فئات من طرائق التقدير في تقدير معلمات انظمة المعادلات التفاضلية الفئة الأولى والمتمثلة بالطريقة المتعددة المراحل وفي الطريقة الثانية تم تقدير متغيرات الحالة ومشتقاتها بطريقة الشرائح الجزائية لتقدير متغيرات الحالة ومشتقاتها. اما الفئة الثانية من طرائق التقدير هي الطرائق التي تستند على خوارزميات التفريق العددي اما الفئة الثالثة من طرائق التقدير فقد تم استعمال طريقة المربعات الصغرى اللاخطية المعاملة بالشرائح ولقد تم استعمال خوارزمية التطور التفاضلي وتوظيف الخوارزمية الجينية للمقارنة بين الطريقتين. ولقد تم استعمال أسلوب المحاكاة للمقارنة بين جميع طرائق التقدير باستعمال المعيار الاحصائي معدل الخطأ النسبي للتقدير (ARE) للمعالم المقدرة. وتم التوصل الى ان افضل طريقة لتقدير المعلمات في نماذج المعادلات التفاضلية الاعتيادية اللاخطية هي طريقة المربعات الصغرى اللاخطية المعززة بالشريحة باستعمال خوارزمية التطور التفاضلي .

اما في عام (2020) قدم (Huang,H et.al) [23] بحثاً لتطوير النهج البيزي لتقدير معلمات المعادلات التفاضلية الاعتيادية (ODE) من البيانات المشوشة المرصودة حيث اوضح الباحثين ان الطريقة لا تحتاج الى حل مباشر وانما باستبدال قيد (ODE) بتعبير احتمالي ويتم دمجها مع اجراء ملائمة البيانات اللامعلميه في إطار احتمالي مشترك. حيث نفذ الباحثين مخطط مونت كارلو الهجين القائم على متشعب (Riemann) لتوليد عينات للمتغيرات التي لا يمكن كتابة توزيعها الخلفي المشروط. واوضح الباحثين بانة يمكن تطبيق النهج البيزي على الحالات التي يتم فيها ملاحظة متغير الحالة جزئياً فقط وتم توضيح ذلك من خلال بيانات المحاكاة والبيانات الحقيقية .

ومما تم استعراضه نلاحظ مدى ندرة الدراسات العربية التي تتناول موضوع تقدير المعلمات في نماذج المعادلات التفاضلية الاعتيادية لا سيما نماذج مسألة القيمة الابتدائية (الاولية) ، وفي هذه الرسالة تم استعمال وتوظيف طريقة المربعات الصغرى اللاخطية (NLS) وطريقة تعظيم دالة التوزيع اللاحق (MAP) في ايجاد مقدرات نماذج مسألة القيمة الابتدائية التي تعتبر احد انواع نماذج المعادلات التفاضلية الاعتيادية اللاخطية والمقارنة بين الطريقتين باستعمال المعيار الاحصائي متوسط مربعات الخطأ (MSE).

الفصل الثاني

الجانب النظري

الفصل الثاني

الجانب النظري

تمهيد:- (preamble)

يرجع الفضل للنجاح الذي حققته البشرية في العصر الحديث الى الاستخدام الواسع للرياضيات في مختلف العلوم التطبيقية وبالتأكيد فإن المعادلات التفاضلية تلعب دور مهم في ذلك فبواسطة هذه المعادلات نستطيع التعبير عن التغيرات التي تحدث لأحد الأنظمة مع مرور الزمن سواء كان هذا النظام يضم متغير واحد او مجموعة من المتغيرات وقد كانت بداية استخدام المعادلات التفاضلية في العلوم الطبيعية وذلك لان قوانين الفيزياء والكيمياء تكون عادة مرتبطة بعدد محدود من المتغيرات المعروفة ومع مرور الزمن اتسع نطاق استخدام المعادلات التفاضلية ليشمل علوم اخرى مثل علم الحياة وعلم الاقتصاد والهندسة بفروعها المختلفة ولهذا تعتبر المعادلات التفاضلية من اهم العلوم الرياضية التي لا غنى عنها في مختلف العلوم التطبيقية وذلك لان الظواهر الطبيعية تتوقف على عدد متنوع من العوامل والمؤثرات الطبيعية التي تؤثر على الظاهرة، وعند بناء انموذج رياضي لظاهرة طبيعية يجب:

أولا: تحديد العوامل التي لها تأثير واضح على النظام وإهمال العوامل التي لها تأثير قليل جدا او غير واضح او غير مؤكد على النظام.

ثانيا: التعبير رياضيا عن العلاقات بين العوامل المرتبطة بالنظام ومتغيراتها المتناهية في الصغر ويؤدي ذلك الى تكوين معادلة تفاضلية أو عدة معادلات تفاضلية.

ثالثا: ايجاد الحل الرياضي للمعادلة التفاضلية أو مجموعة المعادلات التفاضلية الذي يحقق الشروط الابتدائية.

رابعا: يجب عمل المقارنة بين النتائج التي حصلنا عليها وبين النتائج الحقيقية المشاهدة التي بين ايدينا فاذا اتفقت فان الانموذج الرياضي التي تم بناءه يعتبر نموذج ناجح وغير ذلك يعتبر نموذج غير صحيح.

في هذا الفصل سيتم التطرق الى نبذة المعادلات التفاضلية و انواعها والتي هي في الواقع تعتبر نماذج رياضية لعدد من الظواهر الطبيعية ، مع التركيز على المعادلات التفاضلية الاعتيادية (Ordinary Differential Equation) ودراسة بعض انواعها لا سيما مشكلة القيمة الأولية وتحويلها الى انموذج انحدار، فضلاً عن توضيح الصيغ المعتمدة في تحديد التقديرات لمعلمات تلك المعادلات، وسيتم التطرق ايضاً الى بعض النماذج الخاصة وتقدير معلماتها كـأنموذج (Malthus) والانموذج اللوجستي (Logistic).

2-2 المعادلة التفاضلية:-(Differential Equation) [12][1][8]

هي علاقة بين المتغير التابع والمتغير (المتغيرات) المستقل (المستقلة) تدخل فيها المشتقات أو التفاضلات وتسمى المعادلة التفاضلية عادية (Ordinary) اذا كان المتغير التابع دالة في متغير مستقل واحد وبالتالي لا تحتوي الا على مشتقات عادية.

وتنقسم المعادلات التفاضلية الى قسمين:

1- المعادلة التفاضلية الاعتيادية (Ordinary Differential Equation).
2- المعادلة التفاضلية الجزئية (Partial Differential Equation).

1-2-2 المعادلة التفاضلية الاعتيادية (Ordinary Differential Equation) (O.D.E)

هي معادلة تحتوي على مشتقات أو تفاضليات دالة مجهولة أوعدة دوال مجهولة تعتمد على متغيرمستقل واحد.

مثال:

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} - y = 3x^2$$

حيث ان:

y يمثل المتغير التابع

x يمثل المتغير المستقل

2-2-2 المعادلة التفاضلية الجزئية (P.D.E) (Partial Differential Equation)

هي معادلـة رياضـية تحتـوي علـى دالـة مجهولـة $unknown\ function$ لأكثـر مـن متغيـر مستقل واحد مع المشتقات الجزئية بالنسبة للمتغيرات المستقلة.

مثال:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

حيث ان:

u : يمثل المتغير التابع

x, y, z : تمثل المتغيرات المستقلة

3-2 تصنيف المعادلة التفاضلية (Classification of Differential Equation) [8][7][1]

لتصـنيف المعادلـة التفاضـلية يـتم اسـتخدام مفهـوم رتبـة المعادلـة التفاضـلية ودرجـة المعادلـة التفاضلية:

1- **رتبة المعادلة التفاضلية (Order) :** هي أعلى مشتقة أو (معامل تفاضلي) للمتغير المستقل في المعادلة التفاضلية.

2- **درجة المعادلة التفاضلية (Degree):** هي الدرجة الجبرية (الأس) للمشتقة ذات اعلى رتبة تظهر في المعادلة على ان تكون جميع المعاملات التفاضلية خالية من القوى الكسرية.

امثلة:

$$y''' - \mathrm{Sin}(x)\, y'' + 3y = 0$$

تمثل معادلة تفاضلية من الرتبة الثالثة ومن الدرجة الاولى.

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} - (\mathrm{Cos}x)y + 3y^2 = 0$$

تمثل معادلة تفاضلية من الرتبة الاولى ومن الدرجة الاولى

2- 4المعادلة التفاضلية الخطية (Linear differential equation) [1]

هي المعادلة التفاضلية التي يكون فيها المتغير المعتمد وجميع مشتقاته من الدرجة الأولى وغير مضروبة ببعضها. وفيما عدا ذالك تسمى المعادلة التفاضلية غير خطية. او هي المعادلة الخطية في المتغير التابع وجميع مشتقاته أي ان كل من المتغير التابع ومشتقاته مرفوعة للأس واحد ولا توجد حواصل ضرب مشتركة فيما بينها.

ان الصيغة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية ذات الرتبة n تكتب بالشكل الآتي:

$$P_0 y^n + P_1 y^{n-1} + \cdots + P_{n-1} y' + P_n y = Q(x) \qquad (1-2)$$

إذا كانت الدالة $Q(x)$ تساوي صفر فإن المعادلة تكون متجانسة (Homogeneous) . أما اذا كانت الدالة$Q(x)$ لاتساوي صفر فان المعادلة تكون غير متجانسة (Non-Homogeneous)

واذا كانت $P_0, P_1, \dots, P_n$ جميعها ثوابت فأن المعادلة $(2-1)$ تسمى معادلة تفاضلية اعتيادية ذات معاملات ثابتة اما اذا كان على الاقل احد هذه المعاملات متغير فتسمى المعادلة $(2-1)$ معادلة تفاضلية اعتيادية ذات معاملات متغيرة.

ومن الجدير بالذكر بأن اللا خطية لا تؤثر على رتبة المعادلة التفاضلية.

5-2 حل المعادلة التفاضلية (Solve the differential equation) [8]

تسمى الدالة $y = y(x)$ حلا للمعادلة التفاضلية $F[x, y, y', y'', \dots \dots, y^n] = 0$ اذا كانت:

1- قابلة للأشتقاق n من المرات.

2- تحقق المعادلة التفاضلية، أي : $F[x, y(x), y'(x), y''(x), \dots \dots, y^n(x)] = 0$

حيث ان F دالة معرفة على الفترة (a,b)

مثال :

الدالة $y(x) = c\ Sinx$ تحقق المعادلة التفاضلية $y'' + y = 0$ حيث c ثابت.

وذلك لأن:

$$y(x) = c\ (sin\ x)$$

$$y'(x) = c\ (cos\ x)$$

$$y''(x) = -c\ (sin\ x)$$

وبالتالي فإن

$$y''(x) + y\ (x) = -c\ (sin\ x) + c\ (sin\ x) = 0$$

1-5-2 الحل العام للمعادلة التفاضلية (General solution) من الرتبة n:

هو حل للمعادلة التفاضلية ويحتوي على عدد من الثوابت الاختيارية بقدر رتبة المعادلة التفاضلية أوهو حل يحقق المعادلة التفاضلية ويجب أن يحتوي على عدد n من الثوابت الاختارية ويأخذ الصورة.

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots . +c_ny_n$$

حيث $c_1, c_2, \dots, c_n$ هي مجموعة n من الثوابت الاختيارية و $y_1, y_2, \dots, y_n$ هي n من الدوال المختلفة (المستقلة خطيا) والتي تحقق المعادلة التفاضلية.

2-5-2 الحل الخاص (Particular solution) للمعادلة التفاضلية :

هو حل للمعادلة التفاضلية خاليا من الثوابت الاختيارية و يمكن الحصول عليه من الحل العام باختيار خاص للثوابت الاختيارية.

3-5-2 الحل الشاذ (المنفرد) (Singular solution))للمعادلة التفاضلية :

هو حل يحقق المعادلة التفاضلية ولايمكن ان يستنتج من الحل العام وذلك بإعطاء الثوابت قيم اختيارية.

6-2 المعادلات التفاضلية الاعتيادية Ordinary Differential Equations [12]

كما تم الاشارة اليها سابقا فان المعادلة التفاضلية الاعتيادية عبارة عن تعبير رياضي يربط متغير مستقل واحد مع مشتقاته.

او هي المعادلة التفاضلية التي تحتوي على متغيرين فقط احداهما متغير معتمد والاخرمتغير مستقل. وبشكل عام تكتب المعادلة التفاضلية الاعتيادية بالصورة الاتية:

$$f\left(x, y, y', y'', \ldots\ldots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad (2-2)$$

حيث ان :

$$y' = \frac{dy}{dx}, \qquad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\ldots, \qquad y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}$$

تنشأ المعادلات التفاضلية الاعتيادية (ODE) في كثير من الحالات عند استخدام تقنيات النمذجة الرياضية لوصف الظواهر في العلوم ، الهندسة ، والاقتصاد ، وما إلى ذلك. في معظم الحالات يكون الانموذج معقدًا للغاية بحيث لا يمكن إيجاد حل دقيق أو حتى حل تقريبي باليد وبذلك نضطر لاستعمال طرق حاسوبية فعالة وموثوقة.

قطع باحثوا الاحصاء والرياضيات شوطا كبيرا في تصنيف مشاكل (ODE) فيما يتعلق بالظروف الإضافية أو الجانبية المرتبطة بها.

1-6-2 المعادلات التفاضلية الاعتيادية من الرتبة الاولى Ordinary Differential Equations Of First Order

المعادلة التفاضلية من الرتبة الاولى تأخذ الشكل $y' = f(x, y) = 0$ او $f(x, y, y') = 0$

والحل العام للمعادلة التفاضلية الاعتيادية من الرتبة الاولى هو ايجاد دالة تربط بين المتغير المستقل x والمتغير المعتمد y وتحتوي على ثابت واحد وتحقق المعادلة التفاضلية.

1-1-6-2 المعادلة التفاضلية الاعتيادية من الرتبة الاولى قابلة لفصل المتغيرين Ordinary Differential Equation Separable Of First Order

في العديد من الحالات يمكن وضع المعادلة التفاضلية $y' = f(x, y)$ على الشكل :

$$g(y)\frac{dy}{dx} + h(x) = 0$$

أو ما يكافئ ذلك

$$g(y)dy + h(x)dx = 0 \qquad (3-2)$$

وهنا يقال أن المعادلة (2-3) هي معادلة تفاضلية عادية قابلة لفصل المتغيرين أو معادلة قابلة للفصل (Separable Equation) وذلك لأنه يمكن فصل المتغير x عن المتغير y تماما وبمعنى اخر يتم فصل المتغيرين اذا كان معامل تفاضل x دالة من x فقط ومعامل y دالة من y فقط.

وبأخذ التكامل للطرفين نحصل على :

$$\int g(y)\,dy + \int h(x)\,dx = A \qquad (4-2)$$

حيث أن A ثابت اختياري .

وباجراء التكامل للطرفين ينتج:

$$G(y) + G(x) = A$$

بذلك يتم الحصول على الحل العام للمعادلة التفاضلية.

7-2 مسألة القيمة الابتدائية **(Initial Value Problem) (I.V):** [12][13]

عند دراسة المعادلات التفاضلية تصادفنا في معظم الاحيان مسائل تشمل معادلة تفاضلية مصحوبة بشروط معينة، ويراد منا ان نجد الحل الذي يحقق المعادلة التفاضلية ويحقق الشروط المعطاة (المطلوب ايجاد الحل الخاص). اذا كانت الشروط المعطاة مقيدة بقيمة واحدة للمتغير المستقل فان تللك المسالة تسمى مسالة القيم الابتدائية. اما اذا كانت الشروط المعطاة لاكثر من قيمة واحدة للمتغير المستقل فان تلك المسالة تسمى مسالة القيم الحدودية.

ان الشكل العام لمسألة القيمة الابتدائية يكتب كالاتي:

$$\begin{cases} y' = f(t, y) & 0 \le t \le b \\ y(0) = \mathrm{c} \quad (given) & \end{cases} \qquad (5-2)$$

حيث ان f و y عبارة عن متجهات ل m من المكونات وان y=y(t) وكذلك فان f بشكل عام دالة غير خطية من y و t. عندما f لا يعتمد على t فان الصيغة تسمى حالة مستقلة (Independent case).

في الصيغة (2-5) نفترض ولتبسيط التدوين أن نقطة البداية لـ t تساوي 0. امتدادًا لفترة تكامل عشوائية [a ،b] لكل شيء الذي يلي يتم الحصول عليه دون صعوبة.

على سبيل المثال لنفترض أن لدينا الدالة التالية:

$$f(x) = 3x^2 - 4x$$

يتم حل المعادالة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x$$

باستعمال التكامل

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x \quad \to y = \int (3x^2 - 4x)dx$$

$$y = x^3 - 2x^2 + c \qquad (6-2)$$

لأن الحل ينطوي على ثابت وجميع الحلول للمعادلة يمكن الحصول عليها منه، لذلك يتم تسمية هذا الحل بالحل العام. من جانب اخر اذا اردنا الحصول على الحل الذي يمر بالنقطة (1,4) فيجب علينا ايجاد الحل عند الشرط الأولي $y(1) = 4$ ، فبالعودة للمعادلة (6-2) نجد:

$$y(1) = 1^3 - 2(1)^2 + c = 4$$

وبحل المعادلة اعلاه نجد أن قيمة الثابت $c = 5$ وكالاتي:

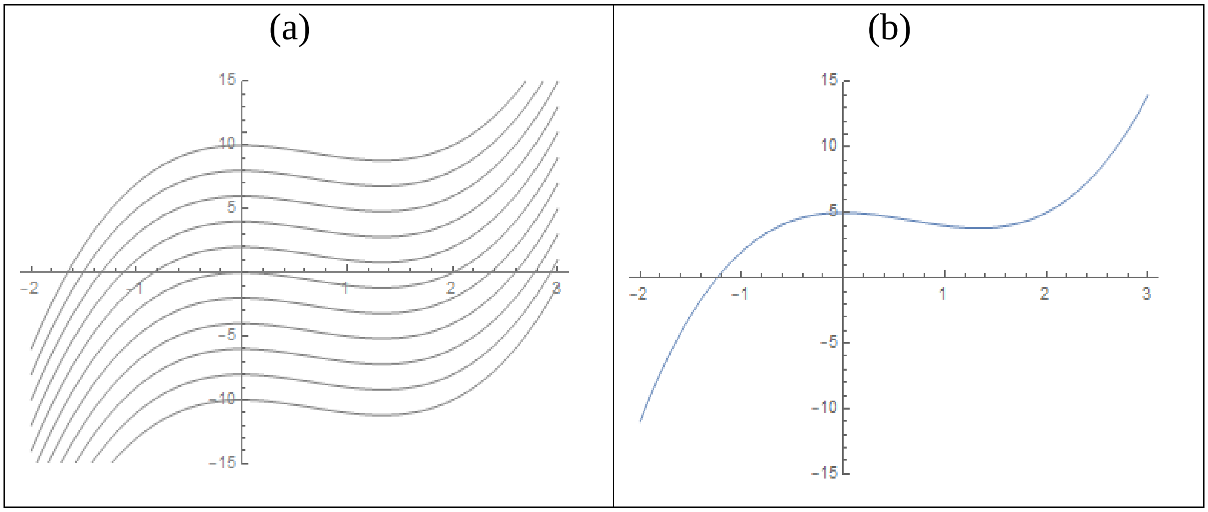
$$1 - 2 + c = 4 \to c = 4 + 1 = 5$$

وبالتالي فان حل المعادلة، $y = x^3 - 2x^2 + c$ والذي يمثل احد حلول المعادلة بحيث يحقق الشرط $y(1) = 4$ هو: $y = x^3 - 2x^2 + 5$

وبذلك يمكن اعادة صياغة مسألة القيمة الابتدائية للمعادلة (2-5) والتي تحقق الشرط $y(1) = 4$ كالاتي:

$$\begin{cases} y' = 3x^2 - 4x \\ y(1) = 4 \end{cases} \qquad (7-2)$$

والاشكال التالية تبين الحل العام والحل الذي يحقق الشرط $y(1) = 4$ والذي يمثل مسألة القيمة الابتدائية (الاولية).



شكل (2-1): (a) الحل العام للمعادلة التفاضلية (2-6) لقيم مختلفة من c، (b)الحل عند تحقق الشرط $y(1) = 4$. المصدر [12]

يمكن حل العديد من المشاكل المهمة التي تنطوي على عدد السكان من خلال استخدام المعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى. وتشمل المشاكل هذه تحديد عدد من الخلايا في احد انواع البكتيريا، عدد المواطنين في بلد معين..الخ. وسنركز في دراستنا هنا على حل مسألة النمو السكاني.

2-8 انموذج Malthus [12]

لنفترض أن المعدل الذي يتغير فيه عدد السكان (مجتمع معين) حجمه $y(t)$ في الزمن t يتناسب مع حجم المجتمع $y(t)$،في الزمن t . رياضيا يتم تمثيل هذا البيان كمسألة القيمة الأولية الوارد ذكرها في المعادلة (2-5) ..

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = ky \\ y(0) = y_0 \end{cases} \qquad (8-2)$$

حيث أن y_0 هي الحجم الأولي (الابتدائي) للمجتمع.

1- اذا كانت $k > 0$ فان حجم المجتمع في تزايد وعندها يطلق عليه انموذج نمو (growth).
2- اذا كانت $k < 0$ فان حجم المجتمع في تناقص وعندها يطلق عليه انموذج اضمحلال او تحلل (decay).

وفي هذه الدراسة سنقتصر على الحالة الاولى التي يكون فيها $k > 0$ والتي تكون تطبيقاتها في الجوانب الحيوية.

وتجدر الاشارة هنا الى ان الانموذج في المعادلة (2-8) عرف بهذا الاسم نسبة الى الاقتصادي ورجل الدين الانكليزي (Thomas R. Malthus) ويطلق عليه في بعض الاحيان اسم (أنموذج النمو الاسي).

يتم حل أنموذج Malthus (انموذج النمو الاسي) لجميع قيم k و y_0 التي تمكننا من الرجوع إلى الحل في مشاكل أخرى دون حل المعادلة التفاضلية مرة أخرى.

ويتم ايجاد الحل من خلال تطبيق طريقة فصل المتغيرين وكما يلي:

باعادة صياغة الصيغة :

$$\frac{dy}{dt} = ky \qquad (9-2)$$

بالشكل:

$$\frac{dy}{y} = k\,dt \qquad (10-2)$$

وكما نلاحظ أن هذه الصيغة عبارة عن معادلة تفاضلية منفصلة المتغيرين.

باجراء عملية التكامل للطرفين :

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int k\,dt \qquad (11-2)$$

$$\ln|y| = kt + C_1 \qquad (12-2)$$

$$y = C\,e^{kt} \qquad (13-2)$$

حيث ان $C = e^{C_1}$.

والذي يمثل الحل العام لانموذج Malthus.

ويمكن الحصول على الحل اعلاه مباشرة باستعمال دالة DSolve في برنامج Mathematica

وبما ان y يمثل عدد السكان فأن $y \geq 0$ وبالتالي فان $|y| = y$.

ولايجاد قيمة C نقوم بتطبيق الشرط الاولي لنحصل على:

$$y(0) = y_0 = C\, e^{k*0} = C \qquad (14-2)$$

وبالتالي فأن الحل لمشكلة القيمة الاولية في المعادلة (2-8) هو:

$$y = y_0\, e^{kt} \qquad (2-15)$$

9-2 المعادلة اللوجستية (The Logistic Equation)[12][29][30]

المعادلة اللوجستية او (معادلة Verhulst) ,والتي تكون بالشكل التالي:

$$\frac{dy}{dt} = \big(r - ay(t)\big)y(t) \qquad (2-16)$$

حيث r و a ثوابت

تم التطرق هذه المعادلة لأول مرة من قبل عالم الرياضيات البلجيكي (Pierre Verhulst) لدراسة النمو السكاني وتختلف المعادلة اللوجستية عن انموذج Malthus في ان $r - ay(t)$ ليست ثابتة.

ويمكن اعادة كتابة المعادلة اللوجستية بالشكل:

$$\frac{dy}{dt} = (r - ay)y = ry - ay^2 \qquad (17-2)$$

حيث ($-y^2$) يمثل عامل محدد.

في ظل هذه الافتراضات او الشروط، فانه لا يمكن للسكان النمو او الاضمحلال خارج نطاق السيطرة كما في انموذج Malthus .

والمعادلة اللوجستية قابلة للفصل وبالتالي يمكن حلها بطريقة فصل المتغيرات.وان حل هذه المعادلة مقترن بالشرط $y(0) = y_0$ وكما يلي:

$$\frac{1}{(r-ay)y}dy = dt \qquad (18-2)$$

$$\left(\frac{a}{r(r-ay)} + \frac{1}{r\,y}\right)dy = dt \qquad (19-2)$$

$$\frac{1}{r}\left(a\frac{1}{(r-ay)} + \frac{1}{y}\right)dy = dt \qquad (20-2)$$

$$\left(a\frac{1}{(r-ay)} + \frac{1}{y}\right)dy = rdt \qquad (21-2)$$

باخذ التكامل للطرفين:

$$\int (a\frac{1}{(r-ay)} + \frac{1}{y})dy = \int rdt \qquad (22-2)$$

وباجراء التكامل ينتج:

$$-\ln|r-ay| + \ln|y| = rt + C \qquad (23-2)$$

بتبسيط المعادلة وتوحيد ln كعامل مشترك:

$$\ln\left|\frac{y}{(r-ay)}\right| = rt + C \qquad (24-2)$$

$$\frac{y}{(r-ay)} = \pm e^{rt+C} = K\,e^{rt} \qquad (25-2)$$

حيث ان: $\pm e^{C} = K$

ويتم حل المعادلة اعلاه بالنسبة الى y وكما يلي:

$$y = e^{rt}k(r - ay) \tag{26 – 2}$$

$$y = e^{rt}kr - ae^{rt}ky \tag{27 – 2}$$

$$y + ae^{rt}ky = e^{rt}kr \tag{28 – 2}$$

$$y(1 + ae^{rt}k) = e^{rt}kr \tag{29 – 2}$$

بقسمة الطرفين على $(1 + ae^{rt}k)$

$$y = \frac{e^{rt}kr}{(1 + ae^{rt}k)} \tag{30 – 2}$$

والذي يمثل الحل العام للمعادلة اللوجستية.

ويمكن الحصول على الحل اعلاه مباشرة باستعمال دالة DSolve في برنامج Mathematica

ولايجاد قيمة K نقوم بتطبيق الشرط الاولي $\mathrm{y}(0) = y_0$ في معادلة الحل العام:

$$\mathrm{y}(0) = y_0 = \frac{e^{r*0}kr}{(1 + ae^{r*0}k)} \tag{31 – 2}$$

$$y_0 = \frac{kr}{1 + ak} \tag{32 – 2}$$

$$y_0(1 + ak) = kr \rightarrow \quad kr - kay_0 = y_0$$

$$k(r - y_0a) = y_0$$

$$K = \frac{y_0}{(r - ay_0)}$$

وبتعويض قيمة K في معادلة الحل العام (2-30) وتبسيط الحل نحصل على :

$$y = \frac{ry_0}{ay_0 + (r - ay_0)e^{-rt}} \qquad (33-2)$$

يلاحظ أنه إذا كان $r > 0$, ، فإن $lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{r}{a}$ لأن $lim_{t\to\infty} e^{-rt} = 0$

وهذا ما يجعل حل المعادلة اللوجستية مختلفا عن حل انموذج Malthus،حيث ان حلول المعادلات اللوجستية هي قريبة من حدود غير صفرية محدودة عند $t \to \infty$ في حين ان نتائج انموذج Malthus إما قريبة من اللانهاية أو قريبة من الصفر عند $t \to \infty$.

10-2 تقدير المعلمات (Parameter Estimation)

من اجل تطبيق نماذج المعادلات التفاضلية نحن بحاجة لمعرفة المعلمات النموذجية. و يمكن بسهولة تحديد قيمة بعض المعلمات، ولكن هذا ليس صحيحا بشكل عام. نلاحظ بدلا من ذلك كمية الاهتمام أو تمثيل لها كبيانات تجريبية.

ان الهدف من استعمال طرائق التقدير هوايجاد مقدرات لمعلمات الانموذج المدروس تتصف بمواصفات جيدة بحيث تؤهلها الى تكوين نموذج تقديري يمكن الاعتماد عليه في اغراض مختلفة . وتختلف طرائق التقدير في الافكار والاساليب المعتمدة في التقدير وذلك من اجل تحقيق نقطتين الاولى هي امتلاك المقدرات افضل المواصفات والثانية هو ظهور الطريقة باسلوب سهل التنفيذ .

نموذج المعادلات (2-5) يمكن التعبير عنها في الأشكال التالية من النظم الديناميكية :

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y, \theta), \quad y(0) = y_0 \qquad (34-2)$$

حيث ان t يمثل المتغير المستقل (الزمن) وان y يمثل متجه الحالة للانموذج

$$\frac{dy}{dt} = [\frac{dy_1}{dt}, \dots \dots, \frac{dy_N}{dt}]^T \qquad (35-2)$$

$y = [y_1, \ldots \ldots, y_N]$

$f = [f_1, \ldots \ldots f_N]$

N تمثل عدد مفردات العينة

$\theta = [\theta_1, \ldots \ldots \theta_P]$ هو متجه المعلمات المجهولة في الانموذج

y_0 تمثل القيمة الابتدائية (الاولية)

ولتحديد قيم المعلمات θ ، متغير الحالة $y(t)$ مشاهدة في Lأي $t_1, \ldots \ldots t_T$ نجد ان:

$$Y(t_i) = X(t_i) + e_i \qquad (36-2)$$

2-10-1 طريقة المربعات الصغرى اللاخطية (NLS) [25][20][18]

تعد طريقة المربعات الصغرى اللاخطية من اهم الطرق في تقدير معلمات النماذج اللاخطية

نفترض ان لدينا الانموذج غير الخطي الاتي:

$$Y_i = f(t_i, \theta) + e_i \qquad (37-2)$$

حيث ان: Y_i يمثل متغير الاستجابة (المعتمد)

f تمثل دالة من t_i, θ

e_i متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 0 وتباين ثابت σ^2 وبالتالي فان $E(e_i) = 0$

وباستعمال طريقة المربعات الصغرى اللاخطية يمكن تصغير المقدار الاتي:

$$S(\hat{\theta}) = [y - f(t_i, \hat{\theta})]' \, [y - f(t_i, \hat{\theta})] \qquad (38-2)$$

وباستعمال طريقة كاوس نيوتن (**Gauss–Newton**) فان $\theta_0 = (\theta_{10}, \theta_{20}, \ldots\ldots, \theta_{P0})'$ تمثل القيم الأولية للمعلمات وبعد تقريب هذه السلسلة باستعمال مفكوك تايلر بحذف الحدود التي لا تحتوي على المشتقات الجزئية من الدرجة الاعلى نحصل على :

$$f(t_i, \theta) = f(t_i, \theta_0) + \sum_{j=1}^{P} \left[\frac{\partial f(t_i, \theta)}{\partial \theta_j}\right] \theta = \theta_0 \big(\theta_j - \theta_{j0}\big) \qquad (39-2)$$

حيث ان θ_0 تمثل القيم الاولية لـ (θ)

اذا كانت

$$Y^* = \underline{D}^{(0)} \underline{B}^{(0)} + e \qquad (40-2)$$

اذ ان :

$$Y^* = \underline{Y} - f^{(0)} = \begin{bmatrix} Y_1 - f_1{}^{(0)} \\ Y_2 - f_2{}^{(0)} \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_P - f_P{}^{(0)} \end{bmatrix}$$

$$D^{(0)} = \begin{bmatrix} D_{11}{}^{(0)} & D_{12}{}^{(0)} & \cdots D_{1P}{}^{(0)} \\ D_{21}{}^{(0)} & D_{22}{}^{(0)} & \cdots D_{2P}{}^{(0)} \\ \vdots & \vdots & \cdots \quad \vdots \\ D_{n1}{}^{(0)} & D_{n2}{}^{(0)} & \ldots D_{nP}{}^{(0)} \end{bmatrix}$$

$$D_{ij}{}^{(0)} = \left[\frac{\partial f(t_i, \theta)}{\partial \theta_j}\right] \theta = \theta_0$$

ويمكن تقدير معلمات $\underline{B}^{(0)}$ للمعادلة (2-40) باستعمال طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية من خلال الصيغة:

$$\underline{\hat{B}}^{(0)} = (D'^{(0)}D^{(0)})^{-1}D'^{(0)}\underline{Y^*}$$

حيث ان

$$\underline{B}^{(0)} = \theta - \theta_0$$

وان القيم التقديرية لـ $B^{(0)}$ تكون

$$\underline{\hat{B}}^{(0)} = \hat{\theta} - \theta_0$$

ومن المعادلة اعلاه يمكن الحصول على قيمة $\hat{\theta}_1$ التي تمثل القيم التقديرية المعدلة لـ θ عند التكرار الاول ويتم وضعها بدل القيمة التقديرية الاولى θ_0 ويتم تكرار العمليات نفسها على مجموعة ثانية من التقديرات المعدلة $\hat{\theta}_2$ وهكذا.

ان التقديرات المعدلة بشكل عام يمكن اعادة كتابتها وكمتجه بالشكل :

$$\hat{\theta}_{r+1} - \hat{\theta}_r + \underline{B}^{(r)}$$

وتستمر عمليات التكرار حتى نصل الى التقارب بين التقديران المتعاقبان r و$r+1$ بحيث ان

$$||\hat{\theta}_{r+1} - \hat{\theta}_r| < \gamma$$

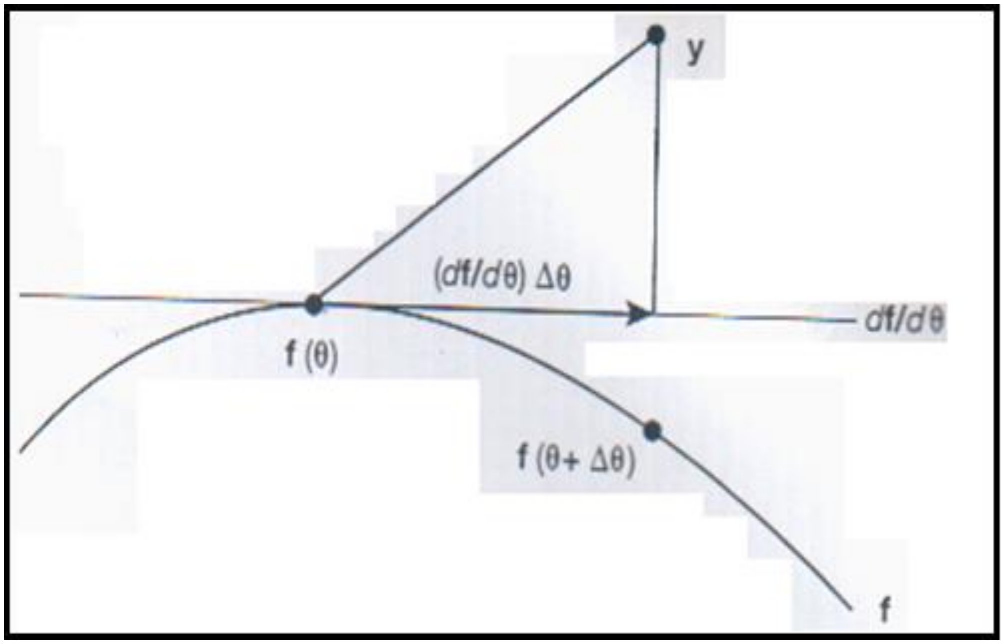
حيث γ مقدار صغير جدا مع ملاحظة $S(\theta)$ لكل دورة من دورات التكرار والتوقف حسب الصيغة التالية:

$$S(\hat{\theta}_{r+1}) \cong S(\hat{\theta}_r) \qquad (41-2)$$

2-10-1-1 خوارزمية كاوس نيوتن Gauss –Newton Algorithm [24][27]

تعد طريقة كاوس نيوتن الافضل من بين الطرق الاخرى في تصغير مقدار مربع انحرافات قيم المشاهدات . لذلك تستخدم هذه الطريقة في الحصول على مقدرات المربعات الصغرى، وتعد مقياس دقيق ومناسب لكل من السببين الآتيين.

الاول لانه يشترط مجال طبيعي في الجانب النظري للانحدار الخطي والانحدار اللاخطي والثاني لان اغلب طرق الانحدار اللاخطية تعتمد صيغ معدلة لطريقة كاوس نيوتن فضلاً عن بساطة وسهولة الطريقة في حل مشاكل عدة. والشكل (2-2) يوضح فكرة اسلوب كاوس نيوتن.



شكل (2-2) يوضح مجال المتغير في اسلوب كاوس نيوتن [24]

اذ أن f يمثل مجال متجهات الاستجابة . نبدأ بنقطة ثابتة θ مع ثبوت النقطة $f(\theta)$ على مجال الدالة. وان مستوي المماس موضح في النقطة $f(\theta)$ من خلال $\frac{df}{d\theta}$ لكون اعمدة $\frac{df}{d\theta}$ تمثل امتداد الى مستوي المماس.

يمكن تمثيل الطريقة من خلال $y - f(\theta)$ على المستوي المماس للمتجه $\left(\frac{df}{d\theta}\right)\Delta\theta$. لتصغير المقدار الاتي:

$$Q_\theta(\Delta\theta) = \left|y - f(\theta) - \frac{df}{d\theta}\Delta\theta\right|^2 \qquad (42-2)$$

بافتراض اعمدة $\frac{df}{d\theta}$مستقلة خطياً وان:

$$\Delta\theta = \left[\frac{df^T}{d\theta} * \frac{df}{d\theta}\right]^{-1} \frac{df^T}{d\theta}\left(y - f(\theta)\right) \qquad (43-2)$$

وعملية التعويض المتعاقب تبدأ من خلال استبدال θ بالحد $\theta + \Delta\theta$ للحصول على نقطة جديدة $f(\theta + \Delta\theta)$ واقعة على مجال f .

وحسب تعريف الدالة $Q_\theta(\Delta\theta)$ يمكن حل مشكلة التقدير بطريقة المربعات الصغرى في كل خطوة والحصول على تقارب $Q(\theta + \Delta\theta)$ وذلك باستبدال $f(\theta + \Delta\theta)$ في الصيغة (42-2) الى $Q(\theta + \Delta\theta)$ وحسب متسلسلة تايلر يكون $f(\theta + \Delta\theta) \doteq f(\theta) + \frac{df}{d\theta}\Delta\theta$

2-10-2 طريقة تعظيم دالة التوزيع اللاحق Maximum A Posterior Method (MAP)[19]

تعد هذه الطريقة احدى الطرق البيزية في تقدير المعلمات من حيث الاهتمام بمقياس المنوال للتوزيع اللاحق أكثر من المتوسط، بالرغم من زيادة قيمة التباين في هذه الطريقة مقارنة بطريقة بيز الا انها تعد أسهل من حيث حلها لمقدرات معلمات متعددة في النماذج اللاخطية وذلك لعدم ظهور التوزيع اللاحق فضلاً عن سهولة حل التكاملات العددية لمعادلات من الدرجات العليا.

نفترض ان لدينا الانموذج التالي:

$$f(t_i) = Y_i - e_i \qquad (44-2)$$

حيث $f(t_i)$ تمثل قيم المشاهدات التي تتوزع توزيعا طبيعيا مستقلا

$$f(t_i) \sim IN(0, {\sigma^2}_e)$$

Independent Normal distribution :IN

فان صيغة التوزيع اللاحق تكون

$$P(\theta|Y) = L(\theta)g(\theta)$$

حيث θ تمثل متجه معلمات ذات بعد *m x 1*

Y يمثل متجه قيم الاستجابة ذو بعد *n x 1*

$L(\theta)$ يمثل دالة الامكان الاعظم والموضحة بالشكل التالي:

$$L(\theta_k) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_e\sqrt{2\pi}}\ exp\left(-\frac{e_i^2}{2{\sigma_e}^2}\right) \qquad (45-2)$$

$g(\theta)$ تمثل دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع السابق

وعلى افتراض ان $g(\theta)$ تتبع توزيع طبيعي متعدد بمتوسط μ ومصفوفة تباين وتباين مشترك $\sum$

$$g(\theta) \sim MN(\mu, \sum)$$

وبأخذ اللوغارتم الطبيعي للتوزيع اللاحق

$$\ln P(\theta|Y) = \ln\big(L(\theta)\big) + \ln\big(g(\theta)\big) \qquad (46-2)$$

اذ ان

$$g(\theta)=\frac{|\sum|^{-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\ \exp[-\frac{1}{2}\sum_{k}^{n}\sum_{L}^{m}\sum{}^{kL}(\theta_K-\theta_{K0})(\theta_1-\theta_{L0})] \qquad (47-2)$$

وان :

$$G(\theta_K)=\frac{1}{{\sigma_e}^2}\sum_{i=1}^{n}e_i\frac{\partial f(t_i)}{\partial\theta_k}-\sum{}^{kL}(\theta_{L1}-\theta_{L0})$$

وان مصفوفة Hessian تكون كالاتي:

$$H(\theta_K,\theta_L)=-\frac{1}{{\sigma_e}^2}\sum_{i=1}^{n}[\sum_{\mathrm{k}}^{m}\sum_{\mathrm{L}}^{m}\frac{\partial f(t_i)}{\partial\theta_k}\ \frac{\partial f(t_i)}{\partial\theta_L}+e_i\frac{\partial^2 f(t_i)}{\partial\theta_k\partial\theta_L}$$

مصفوفة معلومات التوزيع اللاحق تكون :

$$I(\theta_K,\theta_L)=\frac{1}{{\sigma_e}^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(t_i)}{\partial\theta_k}\ \frac{\partial f(t_i)}{\partial\theta_L}+\sum{}^{kL}$$

وباستعمال برمجة العمليات الحسابية يتم الحصول على تقديرات المعلمات من خلال الصيغة التالية:

$$\hat{\theta}_{r+1}=\hat{\theta}_r-I^{-1}G_r \qquad (48-2)$$

11-2 معيار متوسط مربعات الخطأ (Mean Square Error Criteria)

متوسط مربعات الخطأ (MSE) بالنسبة للمعلمات

$$MSE[\theta] = \frac{1}{R}\sum_{i=1}^{R}\left(\hat{\theta}_i - \theta\right)^2 \qquad (49-2)$$

إذ أن:

θ : تمثل القيم الافتراضية للمعلمات

$\hat{\theta}_i$: تمثل القيم المقدرة للمعلمات حسب الطريقة المستعملة.

R: تمثل عدد تكرارات التجربة والمساوية الى (1000).

12-2 اختيار الأنموذج الأفضل Choosing the Best model

بعد التعرف على خصائص السلسلة الزمنية والانموذجات التي تلائم بياناتها وكذلك تقدير معلمات هذه الانموذجات. تأتي مرحلة اختيار الأنموذج الأفضل من بين الانموذجات قيد الدراسة. وهنالك عدة معايير لاختيار الأنموذج الأفضل ومنها معيار معلومات أكايكي (Akaike's Information Criterion) (AIC) ومعيار معلومات اكايكي المصحح (Corrected Akaike's Information Criterion) (AICc) ومعيار معلومات بيز (Bayesian Information criterion) (BIC). والتي تستعمل للمقارنة بين النماذج واختيار أفضل انموذج يعطي أصغر قيمة لهذه المعايير، وتستند هذه المعايير على الإحصاءات التي تخص البواقي Residuals والتي تنتج من مطابقة الأنموذج (Fitted model) ويكون الأنموذج بصورة عامة غير متحيز(Unbiased) [11]

1-12-2 معيار معلومات اكايكي Akanke's Information Criterion [10][11]

يعد معيار معلومات اكايكي أحد الأدوات لقياس ملائمة الأنموذج الاحصائي ب P من المعلمات. ويرمز له بالرمز (AIC). ويعبر عنه بالمعادلة الآتية:

$$AIC(P) = -2\ In[Maximum\ Likelihood] + 2P$$

OR

$$AIC(P) = -2In\frac{RSS}{n} + 2P$$

حيث ان:

RSS: تمثل مجموع مربعات الانحدار

P: تمثل عدد معلمات الأنموذج.

n: تمثل عدد المشاهدات.

وان دالة Log_Likelihood هي كالآتي.

$$Ln\ L = -\frac{n}{2}\ Ln\left(2\pi\hat{\sigma}_a{}^2\right) - \frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\ S\left(\underline{\varphi}\right)$$

حيث ان:

$$S\left(\underline{\varphi}\right) = \sum_{t=-P}^{n}[E(a_t/\varphi, Z]^2$$

وعند تعظيم المعادلة اعلاه نحصل على الصيغة التقريبية لمعيار أكايكي (AIC).

$$AIC \simeq n\ Ln\hat{\sigma}_a{}^2 + n\left(1 + Ln(2\pi)\right) + 2P \qquad (50\text{-}2)$$

ان الحد الثاني للمعادلة (1-3) يكون ثابتا (Constant) فيتقلص معيار أكايكي AIC ويصبح بالشكل الآتي.

$$AIC(P) = n\, Ln\hat{\sigma}_a^2 + 2P \qquad (51\text{-}2)$$

فأن الرتبة المثالية للأنموذج يتم اختيارها عن طريق القيمة P والتي تقابل اقل قيمة للمعيار. وان الأنموذج الذي يعطي اقل قيمة لمعيارAIC هو الأنموذج الأفضل. يمثل الحد الأول للصيغة (2-44) مدى المطابقة وذلك بأخذ اقل تباين له. ويمثل الحد الثاني عدد المعلمات للأنموذج المطابق.

ويمكن كتابة معيار AIC بالصيغة المعيارية وذلك عن طريق قسمة معيار AIC على حجم العينة n ويرمز له بالرمز NAIC. ويعبر عنه بالصيغة الآتية.

$$\mathrm{NAIC(P)} = \mathrm{AIC(p)} / \mathrm{n} \qquad (52\text{-}2)$$

وان الأنموذج الذي يقابل اقل قيمة لمعيار AIC هو الأنموذج الأفضل.[11]

2-12-2معيارمعلومات اكايكي المصحح Corrected Akanke's Information Criterion [10][11]

في عام 1989 توصل الباحثان Hurvich و Tsai الى معياراً جديداً يدعى بمعيار معلومات اكايكي المصحح (Corrected Akaike Information Criterion) ويرمز له بالرمز (AIC_c) ويعبر عنه بالصيغة الآتية.

$$AIC_c = nLn\hat{\sigma}_a^2 + n\,\frac{1+\frac{P}{n}}{1-\frac{P+2}{n}} \qquad (53\text{-}2)$$

وان الفائدة من استعمال معيار AIC_c هو لتصحيح التحيز الذي يظهره المعيار السابق [11] [10]

.

3-12-2 معيار معلومة بيز Bayesian Information criterion [11] [10].

وهو أحد معايير تحديد رتبة الأنموذج ويرمز له بالرمز (BIC) ان معيار معلومات بيز يعطي مقدر متسق (Consistence Estimate) للرتبة الحقيقية على عكس معيار اكايكي AIC الذي يعطي غالبا مقدر ذو رتبة اعلى من الرتبة الحقيقية. ويأخذ الصيغة الآتية:

$$BIC(P) = n\,Ln(\hat{\sigma}_a^2) - (n-P)Ln\left(1-\frac{P}{n}\right)P\,Ln(n) + P\,Ln\left[\frac{1}{P}\left(\frac{\sigma_z^2}{\sigma_a^2}-1\right)\right] \quad (54\text{-}2)$$

وعند اهمال بعض الحدود والتبسيط فان الصيغة اعلاه تصبح بالشكل

$$BIC(P) = n\,Ln(\hat{\sigma}_a^2) + P\,Ln(n) \quad (55\text{-}2)$$

إذ ان:

n: تمثل حجم العينة المستخدمة

RSS: تمثل مجموع مربعات الانحدار

$\hat{\sigma}_a^2$ تمثل مقدر الإمكان الأعظم ل σ_a^2.

P: تمثل عدد المعلمات في الأنموذج.

σ_z^2: تمثل تباين العينة.

وان الأنموذج الذي يقابل اقل قيمة لمعيار (BIC) هو الأنموذج الأفضل.

الفصل الثالث

الجانب التجريبي والتطبيقي

1-3 تمهيد Introduction :-

سيتم في القسم الأول من هذا الفصل استعراض لمراحل ومناقشة تجارب المحاكاة التي تم استعمالها لمقارنة طرائق التقدير وذلك بتقدير معلمات نماذج المعادلات التفاضلية الاعتيادية التي تم التطرق اليها في الجانب النظري ولحجوم عينات ومستويات مختلفة من التشويش وباستعمال معيار متوسط مربعات الخطأ (MSE) من أجل الوصول الى أفضل طريقة تقدير.

أما في القسم الثاني فيتم استعمال افضل طرائق التقدير من القسم الأول لغرض تقدير معلمات ذات نماذج المعادلات التفاضلية الاعتيادية ولبيانات حقيقية متمثلة بعدد سكان العراق بالالف وللفترة (1985-2018) من أجل بيان افضل انموذج يمثل تلك البيانات.

2-3 المحاكاة Simulation:-

يعد اسلوب المحاكاة من الاساليب العلمية الرصينة التي تقوم على اعطاء صورة طبق الاصل لظاهرة حقيقية ليتسنى الاستفادة من هذه الصورة في دراسة خواص تلك الظاهرة ومميزاتها. وتُعد طريقة (مونت كارلو) (Monte Carlo) من بين أهم طرائق المحاكاة وافضلها وأكثرها استعمالا في تحليل المشكلات المعقدة.

حيث توظف نماذج تحتوي على عدد من الحالات الافتراضية حتى تكون نتائج التحليل اكثر شمولية، ونظرا للتطور والتقدم الحاصل في مجال الحاسبات الالكترونية فقد تطورت اساليب المحاكاة بما يتماشى مع الواقع العملي. و يمكن ان يُعتمد أسلوب المحاكاة في اثبات صحة طريقة معينة يكون من الصعب اثبات صحتها نظرياً.

ويمكن تلخيص مراحل بناء تجربة المحاكاة بثلاثة مراحل اساسية وكالاتي:

اولا: توليد البيانات Generation of the data :-

وقد تم توليد البيانات بموجب الخطوات الآتية بعد تثبيت حجم العينة المراد توليدها وشكل الأنموذج المطلوب.اذ يتم حل نماذج المعادلات التفاضلية الاعتيادية الوارد ذكرها في الفصل الثاني بطريقة فصل المتغيرات ومن ثم نبدأ مرحلة توليد البيانات

1-المتغيرات المستقلة Independent variables :-

عند توليد المتغيرات المستقلة (التوضيحية) يجب ان يؤخذ بنظر الاعتبار طبيعة كل متغير والظاهرة التي يمثلها ذلك المتغير فهناك ظواهر لا تقبل الكميات السالبة أو الاعداد العشرية أو يستبعد عن متغيراتها انها تأخذ قيماً معينة من أجل ان تكون البيانات المولدة تطابق الواقع الذي تُحاكيه .

2- الاخطاء العشوائية Random errors :-

يتم توليد الاخطاء العشوائية على اساس الغاية المرجوة من البيانات حيث يمكن توفير اي مشكلة في البيانات وفي هذه الرسالة تم توليد الاخطاء العشوائية التي تتوزع طبيعيا بمتوسط صفر وتباين معين σ^2 أي ان:

$$e_i \sim N(0, \sigma^2)$$

وسوف يتم استعمال ثلاث مستويات من التباين تضاف للمتغير وهي $(0.1, 0.3, 0.5)$

المرحلة الثالثة:

3- متغيرالاستجابة (التابع) Dependent Variable :-

يتم توليد متغير الاستجابة بعد تعويض بيانات المتغيرات التوضيحية المولدة في الفقرة اولاً و بيانات الاخطاء العشوائية المولدة في الفقرة ثانياً بالانموذج المراد محاكاتهِ وبأفتراض قيم للمعالم تكون هذه القيم بمثابة قيم معالم المجتمع المراد تقديرها والوصول اليها . ولكن افتراض قيم معالم الانموذج يجب ان يكون ضمن الاطار المنطقي لمفهوم هذه القيم كي لا تخرج التجربة عن واقعيتها ولكي لا تسخر نتائج المحاكاة حسب رغبة الباحث .

لقد تضمنت تجارب المحاكاة المراحل والخطوات التالية لتقدير معلمات نماذج المعادلات التفاضلية الاعتيادية وتطبيق طرائق التقدير المستعملة في هذه الرسالة والتي يتم من خلالها تحقيق الهدف المرجو ببيان أفضل طريقة تقدير لهذه النماذج والتي تم فيها اعتماد نتائج برنامج (Mathematica 21.2).

حيث تم اختيار القيم الافتراضية للمعلمات ولكل انموذج على حدة بافتراض معلومية القيم الابتدائية $y(0)=y_0$ وبقيم مختلفة وكما في الجداول (3-1) و (3-2) حيث يتم وضع كل تجربة عند مستويات التباين $\sigma^2 = (0.1, 0.3, 0.5)$ وباستعمال حجوم عينات مختلفة n=(10,25,50,100,250) وتكرار كل تجربة 1000 مرة من اجل الوصول الى مستوى افضل من التجانس.

جدول (3-1) القيم الافتراضية للمعلمة والقيمة الابتدائية والنماذج المفترضة في تجربة المحاكاة لأنموذج Malthus. كما في المعادلة (2-15)

انموذج Malthus		
Model	y_0	k
1	1	0.03
2	1	0.1
3	2	0.03
4	2	0.1
5	3.5	0.05
6	3.5	0.1

جدول (3-2) القيم الافتراضية للمعلمة والقيمة الابتدائية والنماذج المفترضة في تجربة المحاكاة للأنموذج اللوجستي.كما في المعادلة (2-33)

الانموذج اللوجستي			
Model	y_0	r	a
1	2	0.1	5
2	2	0.5	25
3	1	0.03	2
4	1	0.5	10
5	0.2	0.2	4
6	0.2	0.1	2

ولغرض الوصول للمقدر الافضل من خلال المفاضلة بين طرائق التقدير المدروسة، فقد جرى الاعتماد بشكل عام على معيار متوسط مربعات الخطأ MSE وكما في المعادلة (2-45)

3-3 مناقشة نتائج تجربة المحاكاة:

يتم عرض نتائج تجارب المحاكاة وتحليلها لتقدير معلمات نماذج المعادلة التفاضلية الاعتيادية المتمثلة بمسألة القيمة الاولية و لكل من طريقتي التقدير المبينة في الجانب النظري ولكل انموذج على حدة وكما يتم توظيحه في الجداول (3-3) الى(3-16) وكالآتي:

3-3-1 انموذج Malthus

جدول (3-3) القيم المقدرة لمعلمة أنموذج Malthus ولكلا طريقتي التقدير ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) للانموذج الاول

Model 1 (k=0.03)							
σ^2	n	I.V	NLS		MAP		Best
			k	MSE(k)	k	MSE(k)	
0.1	10	$y_0=1$	0.07129	0.21392	0.02617	0.40125	NLS
	25		0.00502	0.01323	0.00825	0.02659	NLS
	50		0.02484	0.00035	0.03331	0.00373	NLS
	100		0.02831	0.00047	0.02707	0.00051	NLS
	250		0.02813	0.00003	0.03008	0.00003	MAP
0.3	10		-0.23469	3.10449	0.42046	2.79029	MAP
	25		0.06285	0.24222	0.07097	0.25479	NLS
	50		0.03121	0.03487	0.02885	0.04080	NLS
	100		0.01909	0.00548	0.03432	0.00527	MAP
	250		0.02899	0.00028	0.02675	0.00026	MAP
0.5	10		0.10560	5.94347	0.19094	6.34336	NLS
	25		0.04076	0.54271	0.07375	0.46999	MAP
	50		0.03543	0.07625	0.05062	0.06950	MAP
	100		0.05235	0.01020	0.02241	0.00939	MAP
	250		0.02143	0.00065	0.02029	0.00074	NLS

جدول (3-4) القيم المقدرة لمعلمة أنموذج Malthus ولكلا طريقتي التقدير ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) للانموذج الثاني

Model 2 (k=0.1)							
σ^2	n	I.V	NLS		MAP		Best(k)
			k	MSE(k)	k	MSE(k)	
0.1	10	y0=1	0.05142	0.41871	0.02342	0.42677	NLS
	25		0.11542	0.02803	0.10434	0.03432	NLS
	50		0.10022	0.00387	0.09846	0.00454	NLS
	100		0.09645	0.00051	0.10008	0.00045	MAP
	250		0.09482	0.00006	0.09493	0.00005	MAP
0.3	10		0.14715	2.68117	0.08577	3.80097	NLS
	25		0.14798	0.22776	0.10083	0.26769	NLS
	50		0.09537	0.03804	0.08136	0.03512	MAP
	100		0.09492	0.00356	0.09038	0.00397	NLS
	250		0.08599	0.00002	0.09053	0.00039	NLS
0.5	10		0.04379	9.91814	0.21465	7.76064	MAP
	25		0.13366	0.56130	0.12834	0.48919	MAP
	50		0.06890	0.06602	0.09050	0.06645	NLS
	100		0.08032	0.00760	0.08910	0.00887	NLS
	250		0.07790	0.00107	0.07728	0.00110	NLS

جدول (5-3) القيم المقدرة لمعلمة أنموذج Malthus ولكلا طريقتي التقدير ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) للانموذج الثالث

Model 3 (k=0.03)							
σ^2	n	I.V	NLS		MAP		Best(k)
			k	MSE(k)	k	MSE(k)	
0.1	10	y0=2	0.07026	0.12121	0.03156	0.12495	NLS
	25		0.03159	0.00837	0.03038	0.00690	MAP
	50		0.02900	0.00055	0.02695	0.00094	NLS
	100		0.02854	0.00004	0.02930	0.00013	NLS
	250		0.02956	0.00001	0.03011	0.00001	NLS
0.3	10		0.11840	1.00349	0.03914	0.71949	MAP
	25		0.07216	0.08640	0.01677	0.06277	MAP
	50		0.03202	0.00860	0.04007	0.00994	NLS
	100		0.02654	0.00138	0.03350	0.00147	NLS
	250		0.02578	0.00008	0.02849	0.00008	MAP
0.5	10		0.13276	2.17987	0.04187	2.85874	NLS
	25		0.05513	0.15286	0.00315	0.21071	NLS
	50		0.02284	0.01092	0.01390	0.01815	NLS
	100		0.02166	0.00159	0.02692	0.00320	NLS
	250		0.02673	0.00015	0.02614	0.00019	NLS

جدول (3-6) القيم المقدرة لمعلمة أنموذج Malthus ولكلا طريقتي التقدير ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) للانموذج الرابع

Model 4 (k=0.1)							
σ^2	n	I.V	NLS		MAP		Best(k)
			k	MSE(k)	k	MSE(k)	
0.1	10	y0=2	0.08297	0.14069	0.04192	0.13490	MAP
	25		0.08515	0.00971	0.10176	0.00693	MAP
	50		0.10231	0.00096	0.10263	0.00133	NLS
	100		0.09847	0.00014	0.09830	0.00016	NLS
	250		0.09762	0.00001	0.09781	0.00001	MAP
0.3	10		0.14014	1.26081	0.13818	0.79744	MAP
	25		0.09472	0.06352	0.07398	0.05068	MAP
	50		0.08985	0.00043	0.09096	0.00898	NLS
	100		0.09423	0.00107	0.09499	0.00104	MAP
	250		0.09280	0.00011	0.09370	0.00012	NLS
0.5	10		0.13205	2.39407	0.06818	2.20437	MAP
	25		0.10221	0.16300	0.10570	0.18212	NLS
	50		0.09716	0.02085	0.10621	0.02221	NLS
	100		0.09520	0.00244	0.09281	0.00315	NLS
	250		0.09131	0.00024	0.09002	0.00025	NLS

جدول (3-7) القيم المقدرة لمعلمة أنموذج Malthus ولكلا طريقتي التقدير ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) للانموذج الخامس

Model 5 (k=0.05)							
σ^2	n	I.V	NLS		MAP		Best(k)
			k	MSE(k)	k	MSE(k)	
0.1	10	y0=3.5	0.04495	0.04588	0.05628	0.03976	MAP
	25		0.04785	0.00315	0.04888	0.00278	MAP
	50		0.04820	0.00033	0.05073	0.00050	NLS
	100		0.04817	0.00005	0.04905	0.00004	MAP
	250		0.04933	0.00004	0.04911	0.00003	MAP
0.3	10		0.03821	0.34430	0.01931	0.24621	MAP
	25		0.02400	0.02944	0.04383	0.03132	NLS
	50		0.04965	0.00320	0.04446	0.00324	NLS
	100		0.04754	0.00034	0.04876	0.00041	NLS
	250		0.04776	0.00002	0.04840	0.00003	NLS
0.5	10		0.05007	0.82207	0.10855	0.79942	MAP
	25		0.05996	0.07120	0.02610	0.05818	MAP
	50		0.03537	0.00717	0.03735	0.00767	NLS
	100		0.04823	0.00106	0.04804	0.00084	MAP
	250		0.04710	0.00006	0.04764	0.00005	MAP

جدول (3-8) القيم المقدرة لمعلمة أنموذج Malthus ولكلا طريقتي التقدير ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) للانموذج السادس

Model 6 (k=0.1)							
σ^2	n	I.V	NLS		MAP		Best(k)
			k	MSE(k)	k	MSE(k)	
0.1	10	y0=3.5	0.08038	0.03246	0.10994	0.03557	NLS
	25		0.09348	0.00299	0.09715	0.00271	MAP
	50		0.10033	0.00034	0.10134	0.00028	MAP
	100		0.09914	0.00004	0.09959	0.00005	NLS
	250		0.09858	0.00000	0.09859	0.00001	NLS
0.3	10		0.14525	0.32693	0.17898	0.33167	NLS
	25		0.12583	0.02284	0.10671	0.02174	MAP
	50		0.10333	0.00344	0.09405	0.00334	MAP
	100		0.09276	0.00050	0.09272	0.00039	MAP
	250		0.09533	0.00002	0.09607	0.00004	NLS
0.5	10		0.08375	0.73483	0.12757	0.77796	NLS
	25		0.05656	0.06159	0.08447	0.06586	NLS
	50		0.08765	0.01027	0.09616	0.01062	NLS
	100		0.09571	0.00110	0.09164	0.00125	NLS
	250		0.09332	0.00010	0.09418	0.00009	MAP

جدول (3-9) عدد مرات ونسب الافضلية حسب حجوم العينات و مستويات التشويش لكلا طريقتي التقدير لأنموذج Malthus.

σ^2	n	NLS	MAP
0.1	10	4	2
	25	2	4
	50	5	1
	100	4	2
	250	2	4
عدد مرات الافضلية		11	19
0.3	10	2	4
	25	3	3
	50	4	2
	100	3	3
	250	4	2
عدد مرات الافضلية		13	17
0.5	10	3	3
	25	3	3
	50	5	1
	100	4	2
	250	4	2
عدد مرات الافضلية		17	13
SUM			
	10	9	9
	25	8	10
	50	14	4
	100	11	7
	250	10	8
عدد مرات الافضلية		52	38
نسبة الافضلية		58%	42%

يتضح من الجدول (3-9) ما يأتي:

1- تفوق طريقة NLS على طريقة MAP بعد مرات الافضلية في تقدير معلمة انموذج Malthus.
2- عند مستوى تشويش 0.1 تفوقت طريقة MAP على طريقة NLS عند حجوم العينات (25,250) في حين تفوقت طريقة NLS حجوم عينات (10, 50,100).
3- عند مستوى تشويش 0.3 تفوقت طريقة MAP على طريقة NLS عند حجم عينة (10) وتفوقت طريقة NLS عند حجوم العينات (250,50,) حين تساوت الطريقتين عند حجوم عينات (25, 100).
4- عند مستوى تشويش 0.5 تفوقت طريقة NLS على طريقة MAP عند حجوم العينات (50,100,250) في حين تساوت الطريقتين عند حجوم عينات (10,25).
5- عند حجم عينة 10 تساوت عدد مرات افضلية الطريقتين في تقدير معلمة انموذج Malthus.
6- عند حجم عينة 25 تفوقت طريقة MAP على طريقة NLS في تقدير معلمة انموذج Malthus.
7- تفوقت طريقة NLS على طريقة MAP في تقدير معلمة انموذج Malthus عند حجوم العينات (50,100,250).

2-3-3 الانموذج اللوجستي Logistic model

جدول (3-10) القيم المقدرة لمعلمات الانموذج اللوجستي ولكلا طريقتي التقدير ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) للانموذج الاول

Model 1 (r=0.1 , a=5)											
σ^2	n	I.V	NLS				MAP				Best
			r	MSE(r)	a	MSE(a)	r	MSE(r)	a	MSE(a)	
0.1	10	y0=2	0.25917	0.02804	3.03968	3.90287	0.26621	0.02957	3.00862	4.02248	NLS
	25		0.11815	0.00035	4.57024	0.19994	0.11823	0.00036	4.57139	0.20644	NLS
	50		0.10589	0.00004	4.95522	0.00258	0.10589	0.00004	4.95925	0.00213	MAP
	100		0.10279	0.00001	5.03790	0.00146	0.10273	0.00001	5.03340	0.00117	MAP
	250		0.10203	0.00000	5.04852	0.00236	0.10193	0.00000	5.04843	0.00235	MAP
0.3	10		0.45092	0.13941	2.88231	4.50327	0.57576	0.31306	2.88587	4.53515	NLS
	25		0.15316	0.00300	4.23622	0.61152	0.15755	0.00345	4.15448	0.74570	NLS
	50		0.11685	0.00019	4.93439	0.00699	0.11609	0.00027	4.94377	0.00979	NLS
	100		0.10828	0.00007	5.10427	0.01108	0.10854	0.00007	5.10569	0.01130	NLS
	250		0.10602	0.00004	5.14279	0.02044	0.10643	0.00004	5.14054	0.02981	NLS
0.5	10		0.75624	1.17939	3.10674	3.72865	1.23270	4.42187	3.15457	4.20146	NLS
	25		0.20499	0.01176	3.91692	1.21187	0.18903	0.00846	4.03279	0.97879	MAP
	50		0.13120	0.00100	4.85536	0.02723	0.12944	0.00091	4.89190	0.01788	MAP
	100		0.11289	0.00018	5.19446	0.03879	0.11383	0.00020	5.18106	0.03451	NLS
	250		0.11030	0.00011	5.23781	0.05677	0.11125	0.00013	5.23863	0.05714	NLS

جدول (3-11) القيم المقدرة لمعلمات الانموذج اللوجستي ولكلا طريقتي التقدير ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) للانموذج الثاني

Model 2 (r=0.5 , a=25)											
σ^2	n	I.V	NLS				MAP				Best
			r	MSE(r)	a	MSE(a)	r	MSE(r)	a	MSE(a)	
0.1	10	y0=2	0.50598	0.00004	24.42170	0.45104	0.50751	0.00006	24.21570	0.70936	NLS
	25		0.50144	0.00000	25.02590	0.00077	0.50142	0.00001	25.02760	0.00094	NLS
	50		0.50114	0.00000	25.04550	0.00211	0.50110	0.00000	25.04830	0.00237	NLS
	100		0.50118	0.00000	25.04810	0.00233	0.50103	0.00000	25.04870	0.00237	NLS
	250		0.50101	0.00000	25.04990	0.00249	0.50101	0.00000	25.04960	0.00546	NLS
0.3	10		0.51655	0.00031	23.60580	2.77925	0.51627	0.00033	23.62940	2.89547	NLS
	25		0.50408	0.00002	25.09280	0.00993	0.50424	0.00002	25.09030	0.01028	NLS
	50		0.50328	0.00001	25.14280	0.02072	0.50289	0.00001	25.14680	0.00204	MAP
	100		0.50298	0.00001	25.15080	0.02278	0.50332	0.00001	25.14590	0.03137	NLS
	250		0.50315	0.00001	25.14480	0.02098	0.50247	0.00002	25.15210	0.02316	NLS
0.5	10		0.53312	0.00133	22.15760	10.98050	0.54087	0.00181	21.58880	13.10210	NLS
	25		0.50625	0.00006	25.17470	0.03351	0.50753	0.00006	25.12130	0.01683	MAP
	50		0.50529	0.00006	25.23620	0.05645	0.50615	0.00004	25.21780	0.04823	MAP
	100		0.50548	0.00003	25.24490	0.06018	0.50526	0.00003	25.24620	0.02103	MAP
	250		0.50475	0.00004	25.24870	0.06196	0.50553	0.00003	25.24820	0.06164	MAP

جدول (3-12) القيم المقدرة لمعلمات الانموذج اللوجستي ولكلا طريقتي التقدير ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) للانموذج الثالث

Model 3 (r=0.03 , a=2)											
σ^2	n	I.V	NLS				MAP				Best
			r	MSE(r)	a	MSE(a)	r	MSE(r)	a	MSE(a)	
	10		0.75350	0.59258	1.12597	0.76442	0.73529	0.64119	1.13526	0.94898	NLS
	25		0.18893	0.02786	1.25228	0.56067	0.17756	0.02620	1.27279	0.53133	MAP
0.1	50		0.06677	0.00139	1.53738	0.21587	0.07061	0.00174	1.52439	0.22959	NLS
	100		0.04107	0.00012	1.84618	0.02397	0.04039	0.00011	1.86276	0.01930	MAP
	250		0.06032	0.00092	1.70924	0.08454	0.06022	0.00091	1.70768	0.04546	MAP
	10		5.98259	68.02120	1.20320	0.63654	5.09798	70.15420	1.20352	0.73556	NLS
	25		2.72484	23.20420	1.29138	0.50354	1.31153	1.93848	1.27146	0.23106	MAP
0.3	50	y0=1	0.17759	0.02689	1.46177	0.29299	0.16131	0.02171	1.46485	0.28826	MAP
	100		0.06225	0.00107	1.80527	0.03906	0.06706	0.00187	1.78534	0.05568	NLS
	250		0.06736	0.00140	1.80898	0.03651	0.06672	0.00135	1.80788	0.02695	MAP
	10		7.25640	90.61840	1.32780	0.45541	9.40016	126.27000	1.32229	0.48850	NLS
	25		4.11971	58.30660	1.38687	0.37857	4.54330	61.80170	1.34497	0.42960	NLS
0.5	50		0.40423	0.54673	1.57657	0.18624	0.38257	0.19727	1.52760	0.02268	MAP
	100		0.08874	0.00389	1.81446	0.04008	0.08974	0.00377	1.82166	0.03473	MAP
	250		0.07601	0.00212	1.90540	0.00905	0.07347	0.00189	1.90549	0.00901	MAP

جدول (3-13) القيم المقدرة لمعلمات الانموذج اللوجستي ولكلا طريقتي التقدير ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) للانموذج الرابع

Model 4 (r=0.5 , a=10)											
σ^2	n	I.V	NLS				MAP				Best
			r	MSE(r)	a	MSE(a)	r	MSE(r)	a	MSE(a)	
0.1	10	y0=1	0.51617	0.00030	9.54702	0.28467	0.51366	0.00022	9.56918	0.23292	MAP
	25		0.50388	0.00002	10.02810	0.00092	0.50327	0.00001	10.03110	0.00010	MAP
	50		0.50306	0.00001	10.04380	0.00194	0.50290	0.00001	10.04640	0.00219	NLS
	100		0.50311	0.00001	10.04900	0.00241	0.50263	0.00001	10.04860	0.00238	MAP
	250		0.50244	0.00000	10.04930	0.00243	0.50259	0.00001	10.05000	0.00250	NLS
0.3	10		0.54012	0.00093	9.17589	1.02016	0.54042	0.00178	8.98470	1.17127	NLS
	25		0.51101	0.00013	10.08770	0.00940	0.50999	0.00011	10.12150	0.00656	MAP
	50		0.50743	0.00006	10.14950	0.02255	0.51017	0.00011	10.13590	0.05868	NLS
	100		0.50890	0.00008	10.14520	0.02114	0.50887	0.00008	10.14500	0.02107	MAP
	250		0.50699	0.00006	10.15060	0.02271	0.50768	0.00007	10.14960	0.04241	NLS
0.5	10		0.57677	0.00617	8.40694	2.69543	0.57869	0.00634	8.31223	2.94844	NLS
	25		0.51992	0.00041	10.14680	0.02352	0.51977	0.00042	10.14550	0.02514	NLS
	50		0.51388	0.00022	10.23440	0.05591	0.51374	0.00021	10.23420	0.05500	MAP
	100		0.51344	0.00019	10.24680	0.06123	0.51401	0.00021	10.24300	0.07938	NLS
	250		0.51376	0.00010	10.24930	0.06216	0.51269	0.00017	10.25080	0.06293	NLS

جدول (3-14) القيم المقدرة لمعلمات الانموذج اللوجستي ولكلا طريقتي التقدير ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) للانموذج الخامس

Model 5 (r=0.2 , a=4)											
σ^2	n	I.V	NLS				MAP				Best
			r	MSE(r)	a	MSE(a)	r	MSE(r)	a	MSE(a)	
0.1	10	y0=0.2	0.41526	0.05064	0.77556	10.43320	0.49166	0.08951	0.64728	11.24840	NLS
	25		0.22017	0.00043	3.07392	0.91847	0.22419	0.00059	2.87066	1.28500	NLS
	50		0.20456	0.00002	3.97844	0.00090	0.20455	0.00002	3.98464	0.00043	MAP
	100		0.20266	0.00001	4.04460	0.00203	0.20304	0.00001	4.04104	0.00470	NLS
	250		0.20241	0.00001	4.04777	0.00229	0.20234	0.00001	4.04967	0.00047	MAP
0.3	10		0.78421	0.44696	0.77069	10.45500	0.96047	0.79024	0.66831	11.11240	NLS
	25		0.26807	0.00468	2.27081	3.00777	0.26574	0.00450	2.31222	2.93424	MAP
	50		0.21285	0.00017	3.98765	0.00275	0.21418	0.00021	3.94927	0.00639	NLS
	100		0.20782	0.00006	4.13998	0.01976	0.20819	0.00007	4.13279	0.03777	NLS
	250		0.20688	0.00005	4.14627	0.02141	0.20679	0.00005	4.14720	0.01171	MAP
0.5	10		4.36988	3.94770	0.67268	1.07810	4.63945	4.67100	0.99939	2.69050	NLS
	25		0.30576	0.01184	2.09039	3.71263	0.31040	0.01266	2.05263	3.82648	NLS
	50		0.22343	0.00056	3.96779	0.00373	0.22096	0.00047	3.99485	0.00354	MAP
	100		0.21299	0.00017	4.21656	0.04736	0.21545	0.00024	4.21097	0.05481	NLS
	250		0.21252	0.00016	4.23690	0.05617	0.21176	0.00015	4.24406	0.02964	MAP

جدول (3-15) القيم المقدرة لمعلمات الانموذج اللوجستي ولكلا طريقتي التقدير ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) للانموذج السادس

Model 6 (r=0.1 , a=2)												
σ^2	n	I.V	NLS				MAP				Best
			r	MSE(r)	a	MSE(a)	r	MSE(r)	a	MSE(a)	
0.1	10	y0=0.5	0.48952	0.19238	0.82342	1.39334	0.35032	0.07063	0.87462	1.27477	MAP
	25		0.14321	0.00212	1.52863	0.26326	0.15494	0.00315	1.39079	0.37656	NLS
	50		0.11241	0.00016	1.92801	0.00654	0.11338	0.00019	1.91036	0.00987	NLS
	100		0.10555	0.00003	2.02985	0.00093	0.10558	0.00003	2.03011	0.00098	NLS
	250		0.10409	0.00002	2.04677	0.00219	0.10373	0.00001	2.04743	0.00026	MAP
0.3	10		1.44087	2.41408	0.85399	1.32195	2.95966	20.92270	0.85545	1.32746	NLS
	25		0.27871	0.03392	1.22584	0.60288	0.27320	0.03181	1.20865	0.23342	MAP
	50		0.14496	0.00213	1.82156	0.03557	0.14452	0.00202	1.80952	0.01846	MAP
	100		0.11737	0.00031	2.09569	0.00942	0.11671	0.00029	2.10242	0.00120	MAP
	250		0.11267	0.00017	2.14293	0.02047	0.11177	0.00014	2.14212	0.02022	MAP
0.5	10		4.77963	66.39100	0.89983	1.21721	4.83910	49.23130	0.94748	1.11627	MAP
	25		0.42479	0.13361	1.27906	0.53730	0.77373	1.38443	1.18679	0.66826	NLS
	50		0.16696	0.00473	1.87178	0.02342	0.16770	0.00481	1.85502	0.03305	NLS
	100		0.12782	0.00081	2.17206	0.03031	0.12873	0.00084	2.16816	0.05847	NLS
	250		0.11969	0.00040	2.24431	0.05984	0.11862	0.00036	2.23919	0.05725	MAP

جدول (3-16) عدد مرات ونسب الافضلية حسب حجوم العينات و مستويات التشويش لكلا طريقتي التقدير للأنموذج اللوجستي.

σ^2	n	NLS	MAP
0.1	10	4	2
	25	4	2
	50	4	2
	100	3	3
	250	2	4
عدد مرات الافضلية		17	13
0.3	10	6	0
	25	2	4
	50	3	3
	100	4	2
	250	3	3
عدد مرات الافضلية		18	12
0.5	10	5	1
	25	4	2
	50	1	5
	100	4	2
	250	2	4
عدد مرات الافضلية		16	14
SUM			
	10	15	3
	25	10	8
	50	8	10
	100	11	7
	250	7	11
عدد مرات الافضلية		51	39
نسبة الافضلية		57%	43%

يتضح من جدول (3-16) ما يأتي :

1- تفوق طريقة NLS على طريقة MAP بعد مرات الافضلية في تقدير معلمات الانموذج اللوجستي.

2- عند مستوى تشويش 0.1 تفوقت طريقة NLS عند حجوم العينات (10,25,50) وتفوقت طريقة MAP عند حجم العينة 250 في حين تساوت الطريقتين عند حجم العينة (100).

3- عند مستوى تشويش 0.3 تفوقت طريقة NLS عند حجوم العينات (10,100) وتفوقت طريقة MAP عند حجم العينة 25 في حين تساوت الطريقتين عند حجم العينة (50,250).

4- عند مستوى تشويش 0.5 تفوقت طريقة NLS عند حجوم العينات (10,25,100) وتفوقت طريقة MAP عند حجم العينة (250,50,) .

5- تفوقت طريقة NLS بعدد مرات الافضلية على طريقة MAP عند حجوم العينات (10,25,100) في تقدير معلمات الانموذج اللوجستي.

6- تفوقت طريقة MAP بعدد مرات الافضلية على طريقة NLS عند حجوم العينات (50,250) في تقدير معلمات الانموذج اللوجستي.

4-3 الجانب التطبيقي

مما لا شك فيه أن لتقديرات السكان المستقبلية أهمية كبيرة خاصة في الدول التي تخطط تطورها الاقتصادي والاجتماعي. ولما كان هدف الخطة دائماً هو الانسان واشباع حاجاته الأولية ورفع مستوى معيشته وتحقيق الرفاهية له، ولما كان السكان هم هدف الخطة ووسيلة تحقيقها فمن الضروري معرفة حجم وتركيب هؤلاء السكان المتوقع، كما إن الموارد القومية لا يمكن تقديرها بشكل مقبول دون الأخذ بعين الاعتبار حجم السكان وتركيبهم، فإذا لم تتوافر تقديرات مبنية على تحليل منظم للاتجاهات السكانية فإنه لا سبيل أمام المخططين إلا العمل على افتراضات او آراء غامضة فيما يتعلق بحجم الاحتياجات والموارد. [5]

وفي ضوء تلك الأسباب لم يعد غريباً زيادة الاهتمام بالنمو السكاني وتحديد مقداره واتجاهه عن طريق الدراسة التفصيلية لكل عنصر من عناصره بهدف الاستفادة من هذه الدراسات في وضع حد للتسابق غير المتوازن بين الانتاج والسكان. حيث عني العديد من الفلاسفة والمفكرين بالسكان ودراسة خصائصهم ومعالجة القضايا المتعلقة بهم حتى احتل الإحصاء الديموغرافي في الوقت الحاضر مكاناً بارزاً بين العلوم الحيوية، ويمكن ملاحظة ذلك من خلال التطور الذي حدث في مجال البحث في الإحصاءات السكانية، إذ أدخلت تحسينات كبيرة على البيانات السكانية، فتنوعت المصادر التي تستقى منها البيانات وتطورت أساليب جمعها كما تعددت التبويبات التي تغطي خصائص السكان المختلفة، وقد انعكس هذا التطور على كثير من الدراسات الاجتماعية والاقتصادية وبعض مجالات البحث الطبي. كما كان من نتائج هذا التطور شيوع عدد من المصطلحات الفنية كان أكثرها انتشاراً مصطلح الإحصاء الحيوي Vital Statistic الذي يتناول بصورة أساسية إحصاءات المواليد والوفيات إلى جانب واقعات أخرى كالزواج والطلاق ووفيات الأجنة وغيرها.

وكذلك مصطلح الديموغرافية أي دراسة السكان في تطوره الاجتماعي وهو مصطلح مكوّن من كلمتين يونانيتين الأولى "Demo" ومعناها شعب أو ناس والثانية "graph" ومعناها الوصف. [9]

إن الحقيقة التي لا تقبل الشك إن سكان العالم آخذون بالزيادة منذ مدة طويلة بشكل ظاهر ومخيف خلال المدة الأخيرة وبالتحديد خلال القرن الماضي وتشير الحقيقة أيضا إن سكان العالم صار يتزايد طردياً بحسب درجة المستوى الاقتصادي والاجتماعي والصحي في العالم إلى أن وصل هذا المستوى في المجتمعات المتقدمة حداً معيناً من الزيادة ثم توقفت بعدها أو قلت نسبتها مقارنة بالسابق ولكن تلك الزيادة استمرت بالارتفاع بالنسبة للشعوب والمجتمعات التي مازالت ترزخ تحت وطأة التخلف أو تلك السائرة في طريق النمو ، ولان آثار التقدم الصحي قد غزت كل العالم تقريباً وصارت تعمل فيه بصورة شاملة ، بما تتضمنه من اللقاحات والادوية للأمراض والأوبئة التي كانت تفتك بالبشرية وامكانية وصولها إلى اغلب مناطق العالم وليس بقائها حكراً على العالم المتقدم ، آدت بكل نتائجها إلى تقليل الوفيات بنسبة كبيرة وزيادة أمد الحياة (متوسط العمر المتوقع)مع بقاء المستوى الثقافي والاقتصادي منخفضاً بدرجة كبيرة واستمرارهم بالتكاثر مع ما ذكرناه من التطور في الخدمات الصحية والبيئة الاجتماعية الذي أدى بدوره إلـــى تنامي أعــــداد الـــسكان بدرجة كبيرة وملموسة فــــظهر ما يطلق عليه بالانفجار السكاني (population explosive) في تلك المناطق ، ويمكن ملاحظة ذلك من خلال الفارق الواسع بين البلدان المتقدمة والبلدان المتأخرة وبسبب تلك الحقيقة الصعبة وقلة الموارد الغذائية للسكان ومحدودية القدرة الإنتاجية الامر الذي أدى بهؤلاء إلى إطلاق الأفكار والحلول والنظريات ومن خلال تبيان المراحل الزمنية التي نما بها السكان والتعرف على معدلات نمو السكان وهيكلهم.

3-4-1مفهوم السكان

أن اصل كلمة سكان (Population) هي لاتينية ، ويرى البعض إنها مشتقة من كلمة (Populous) أي الشعب، ولكنها استعملت بمعنى الاستيطان في فرنسا قبل منتصف القرن الثامن عشر الميلادي [4]. واستعملت هذه الكلمة فيما بعد للدلالة على الجماعات البشرية التي تقطن أرضا معينة وحركاتهم وحياتهم الاقتصادية والاجتماعية، وفي العربية لفظة السكان مشتقة من (سكن) ومن سكن الشيء دخله والسكان جمع ساكن والمسكن يعني المنزل والسكان هم ثروة الدولة البشرية، فهم يبعثون الحياة فيها، والعنصر البشري من عناصر الدولة ومقوماتها الفعالة والحاسمة في استثمار مقوماتها الأخرى قديماً وحديثاً، وهو الأكثر أهمية حتى من العناصر الطبيعية للدولة. وفي الغالب فإن عدد السكان مهماً في توفير قاعدة لبناء دولة قوية، فأهمية هذا العدد في أية دولة

تبرز في مقدار قوتها العاملة على شرط أن يتم رفع مستواها النوعي وقدرتها الفنية والعلمية والثقافية من خلال التدريب والتأهيل والتطوير.

3-4-2 نمو السكان

يعد نمو السكان من أبرز الظواهر الديموغرافية أهمية في العصر الحديث، إذ يمثل تحدياً هاماً للبشرية، وخاصة لشعوب البلدان النامية والتي يتزايد سكانها بمعدل كبير يزيد عن معدل التنمية الاقتصادية فيها وتوفير الغذاء لسكانها، ويرتبط نمو السكان بالزيادة الطبيعية – الفرق بين المواليد والوفيات دون أن تدخل الهجرة في حسابها لهذا فإن دراسة النمو السكاني القائم على أساس الزيادة الطبيعية في بلد ما يسهم في تحديد المدة التي يستغرقها هذا البلد في الوصول إلى حجم معلوم إذا استمرت المعدلات على المستوى نفسه.

ويمكن ان يعرف السكان على انهم مجموعة من البشر تقطن أرضاً معينة، في ظل ظروف سياسية واقتصادية واجتماعية وتاريخية معينة، ولا يخرج من هذا التعريف إلا من يسكن هذه الارض بصورة مؤقتة، إن هذا التعريف هو تعريف عام للسكان باعتبارهم مجموعة من الناس يسكنون ارضا محددة ويشتركون في صفات وعادات متقاربة إلى حد ما، إلا أن هنالك العديد من التعاريف الأخرى الاقتصادية والاجتماعية والسياسية وكل حسب منطلقاته النظرية وافقه الفكري والفلسفي [6].

3-4-3 البيانات الحقيقية

اهتمت الدراسات السكانية بمتابعة التغيرات التي تحصل في إجمالي السكان ومكوناته الأساسية واحتساب المؤشرات التي تكشف وتيرة النمو السكاني بهدف تقدير عدد السكان خلال المدة بين تعدادين أو التنبؤ بحجم السكان خارج هذه المدة للافادة منها لأغراض التخطيط المستقبلي ووضع برامج خطط التنمية المتوسطة والبعيدة المدى بما ينسجم والموارد البشرية المتاحة بغية توظيفها بما يفيد العملية التنموية في المجتمع كما وإنها توفر بيانات ومؤشرات عن مدى صحة التقديرات والتخمينات السكانية الماضية.

وتستند عملية أعداد الخطط التنموية وتكوين برامج السياسات السكانية وتقويمها ومتابعتها في مختلف المجالات وعلى كل المستويات الى البيانات والمعلومات الاحصائية، ان معظم البيانات

والمعلومات عن السكان وخصائصهم وتوزيعهم الجغرافي والأنشطة التي يقومون بها يتم الحصول عليها من التعدادات السكانية والمسوح الإحصائية العينة تجرى في الغالب على فترات متباعدة ، وعلى الأخص التعدادات التي يتم تنفيذها كل عشر سنوات في حين ان القائمين على وضع برامج وخطط التنمية بحاجة الى بيانات دورية بشكل سنوي مستمر عن عدد السكان وتوزيعهم الجغرافي وتركيبهم العمري والنوعي وغيرها من الخصائص، كما يتطلب تلبية احتياجات المجتمع من الخدمات الصحية والتعليمية الى توفر البيانات التفصيلية بشكل دوري وسنوي، ونتيجة لعدم امكانية توفرها بتلك الصفة فإنه يتم اللجوء الى عمل تقديرات سكانية لتلبية الغرض وتغطية الفجوة الحاصلة فيما بين التعدادات والمسوح .

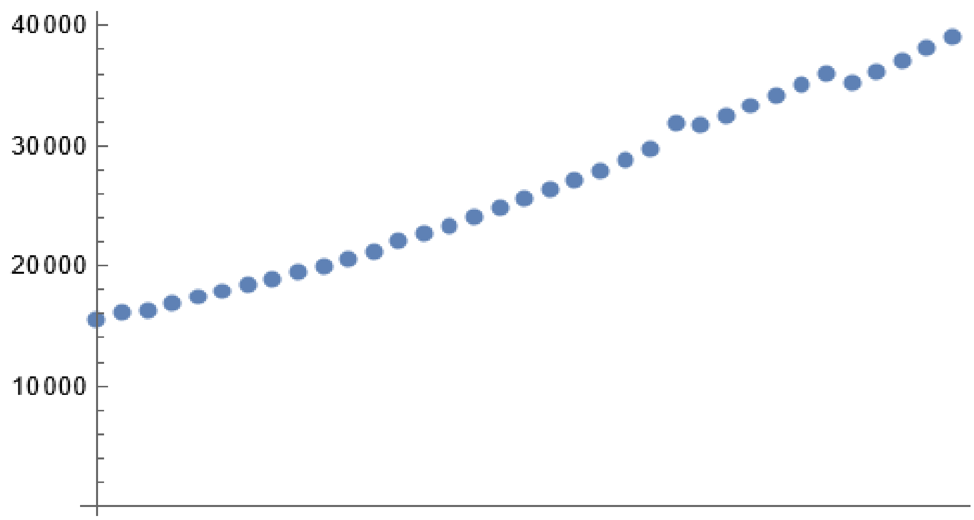
جدول رقم (3-17) يوضح العدد الكلي للسكان (بالالف) في العراق للفترة (1985-2018)

عدد السكان بالالف	السنة	عدد السكان بالالف	السنة
25565	2002	15585	1985
26340	2003	16110	1986
27139	2004	16335	1987
27963	2005	16882	1988
28810	2006	17428	1989
29682	2007	17890	1990
31895	2008	18419	1991
31664	2009	18949	1992
32490	2010	19478	1993
33338	2011	20007	1994
34208	2012	20536	1995
35096	2013	21124	1996
36005	2014	22046	1997
35213	2015	22702	1998
36169	2016	23382	1999
37140	2017	24086	2000
38124	2018	24813	2001

المصدر: بيانات وزارة التخطيط (المجموعة الاحصائية السنوية 2018) [2]

3-4-4 التطبيق العملي لتقدير معلمات نماذج المعادلات التفاضلية الاعتيادية:

في البداية ولتحليل بيانات جدول رقم (3-17) تم توضيحها من خلال الرسم البياني كما في الشكل (3-1) لملاحظة حالة النمو لسكان العراق وفيما يلي نوضح الخطوات لتقدير معلمات كل انموذج من تلك النماذج.



شكل (3-1) البيانات الحقيقية لسكان العراق للفترة (1985-2018)

اولا: انموذج Malthus:

$$y = y_0\, e^{kt}$$

كانت القيم المقدرة لمعلمة أنموذج *Malthus* كما في الجدول الآتي:

جدول (3-18) يمثل القيمة المقدرة لمعلمة أنموذج Malthus والخطأ المعياري وفترة الثقة

Parameter	Estimate	Standard Error	Confidence Interval
k	0.0281918	0.00019479	{0.0277959,0.0285876}

بعد تقدير معلمات الأنموذج الأسي والتوصل الى النتائج الموضحة كما في الجدول (3-5).وباستعمال هذا الأنموذج تم التوصل الى القيم المقدرة والموضحة في الجدول (3-19) ادناه.

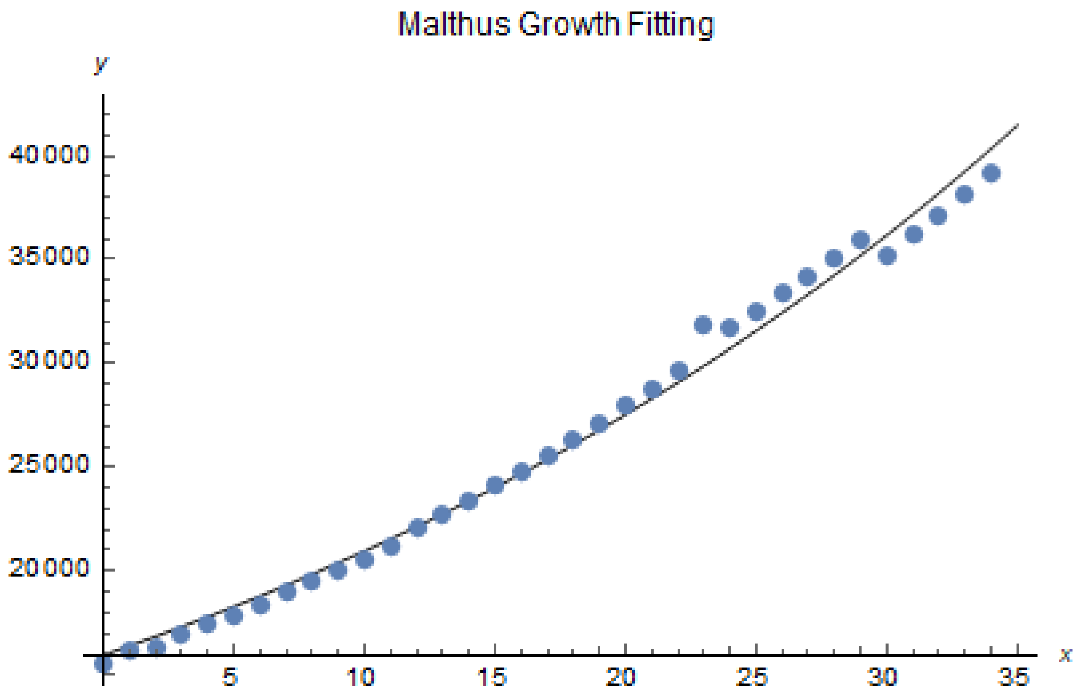
جدول (3-19) يمثل القيم المقدرة أنموذج Malthus

year	(t)	Observed	Predicted	Standard Error	Confidence Interval
1985	0	15585	15585.	0.	{15585.,15585.}
1986	1	16110	16030.6	3.1226	{16024.3,16037.}
1987	2	16335	16489.	6.42377	{16475.9,16502.}
1988	3	16882	16960.5	9.91116	{16940.3,16980.6}
1989	4	17428	17445.4	13.5927	{17417.8,17473.}
1990	5	17890	17944.2	17.4767	{17908.7,17979.7}
1991	6	18419	18457.3	21.5717	{18413.5,18501.1}
1992	7	18949	18985.	25.8867	{18932.4,19037.7}
1993	8	19478	19527.9	30.4306	{19466.,19589.7}
1994	9	20007	20086.2	35.2133	{20014.7,20157.8}
1995	10	20536	20660.6	40.2447	{20578.8,20742.4}
1996	11	21124	21251.3	45.5349	{21158.8,21343.8}
1997	12	22046	21858.9	51.0948	{21755.1,21962.8}
1998	13	22702	22484.	56.9353	{22368.3,22599.7}
1999	14	23382	23126.8	63.0683	{22998.7,23255.}
2000	15	24086	23788.1	69.505	{23646.9,23929.4}
2001	16	24813	24468.3	76.2588	{24313.3,24623.3}
2002	17	25565	25167.9	83.3414	{24998.5,25337.3}
2003	18	26340	25887.5	90.7673	{25703.1,26072.}

ملحق جدول (3-19)

year	(t)	Observed	Predicted	Standard Error	Confidence Interval
2004	19	27139	26627.7	98.549	{26427.4,26828.}
2005	20	27963	27389.1	106.701	{27172.2,27605.9}
2006	21	28810	28172.2	115.241	{27938.,28406.4}
2007	22	29682	28977.7	124.181	{28725.4,29230.1}
2008	23	31895	29806.3	133.536	{29534.9,30077.7}
2009	24	31664	30658.6	143.327	{30367.3,30949.8}
2010	25	32490	31535.2	153.569	{31223.1,31847.3}
2011	26	33338	32436.9	164.277	{32103.,32770.7}
2012	27	34208	33364.3	175.473	{33007.7,33720.9}
2013	28	35096	34318.3	187.176	{33937.9,34698.7}
2014	30	36005	35299.6	199.404	{34894.3,35704.8}
2015	31	35213	36308.9	212.177	{35877.7,36740.1}
2016	32	36169	37347.1	225.519	{36888.8,37805.4}
2017	33	37140	38414.9	239.451	{37928.3,38901.6}
2018	34	38124	39513.3	253.993	{38997.1,40029.5}

نلاحظ من الجدول (3-19) ان القيم المتوقعة (المقدرة) لاعداد السكان متقاربة للقيم الحقيقية (المسجلة) وانها تقع ضمن فترات الثقة حسب انموذج *Malthus* مما يدل على ملائمة الانموذج للبيانات.



شكل (3-2) يوضح ملائمة انموذج Malthus المقدرللبيانات الحقيقية.

ثانيا: الانموذج اللوجستي:

$$y = \frac{ry_0}{ay_0 + (r - ay_0)e^{-rt}}$$

كانت القيم المقدرة لمعلمات الأنموذج اللوجستي كما في الجدول الآتي:

جدول (3-20) يمثل القيم المقدرة والخطأ المعياري وفترات الثقة لمعلمات الأنموذج اللوجستي Logistic model

Parameter	Estimate	Standard Error	Confidence Interval
r	0.0378593	0.00177815	{0.0342417,0.041477}
a	94813.	12791.5	{68788.4,120838.}

بعد تقدير معلمات الأنموذج اللوجستي والتوصل الى النتائج الموضحة كما في الجدول (3-20).

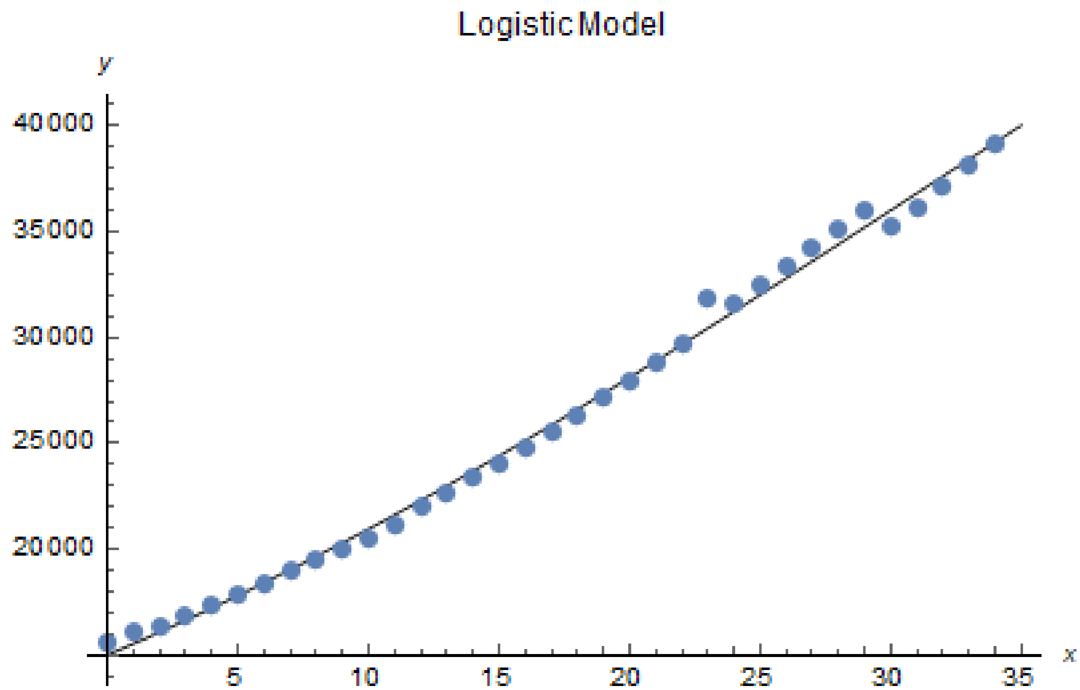
وباستعمال هذا الأنموذج تم التوصل الى القيم المقدرة والموضحة في الجدول (3-21) ادناه.

جدول (3-21) يمثل القيم المقدرة للأنموذج اللوجستي Logistic model

year	(t)	Observed	Predicted	Standard Error	Confidence Interval
1985	0	15585	15585.	0.	{15585.,15585.}
1986	1	16110	16084.3	10.4488	{16063.1,16105.6}
1987	2	16335	16596.3	20.7673	{16554.1,16638.6}
1988	3	16882	17121.1	31.0351	{17057.9,17184.2}
1989	4	17428	17658.6	41.1975	{17574.8,17742.4}
1990	5	17890	18209.1	51.1959	{18105.,18313.3}
1991	6	18419	18772.6	60.9676	{18648.6,18896.7}
1992	7	18949	19349.1	70.4493	{19205.8,19492.5}
1993	8	19478	19938.7	79.5686	{19776.8,20100.6}
1994	9	20007	20541.4	88.2562	{20361.8,20721.}
1995	10	20536	21157.1	96.4381	{20960.9,21353.3}
1996	11	21124	21785.9	104.037	{21574.2,21997.6}
1997	12	22046	22427.7	110.978	{22201.9,22653.4}
1998	13	22702	23082.4	117.185	{22843.9,23320.8}
1999	14	23382	23749.9	122.585	{23500.5,23999.3}
2000	15	24086	24430.2	127.11	{24171.6,24688.8}
2001	16	24813	25123.	130.699	{24857.1,25388.9}
2002	17	25565	25828.3	133.303	{25557.1,26099.5}
2003	18	26340	26545.9	134.894	{26271.5,26820.3}

year	(t)	Observed	Predicted	Standard Error	Confidence Interval
2004	19	27139	27275.5	135.471	{26999.9,27551.1}
2005	20	27963	28017.	135.074	{27742.1,28291.8}
2006	21	28810	28770.	133.802	{28497.7,29042.2}
2007	22	29682	29534.3	131.838	{29266.,29802.5}
2008	23	31895	30309.6	129.488	{30046.1,30573.}
2009	24	31664	31095.5	127.219	{30836.7,31354.3}
2010	25	32490	31891.7	125.701	{31636.,32147.5}
2011	26	33338	32697.9	125.828	{32441.9,32953.9}
2012	27	34208	33513.6	128.653	{33251.9,33775.4}
2013	28	35096	34338.4	135.252	{34063.2,34613.6}
2014	30	36005	35171.9	146.491	{34873.8,35469.9}
2015	31	35213	36013.5	162.88	{35682.1,36344.9}
2016	32	36169	36862.8	184.565	{36487.3,37238.3}
2017	33	37140	37719.3	211.445	{37289.1,38149.5}
2018	34	38124	38582.5	243.32	{38087.4,39077.5}

نلاحظ من الجدول (3-21) ان القيم المتوقعة (المقدرة) لاعداد السكان متقاربة للقيم الحقيقية (المسجلة) وانها تقع ضمن فترات الثقة حسب الانموذج اللوجستي مما يدل على ملائمة الانموذج للبيانات.

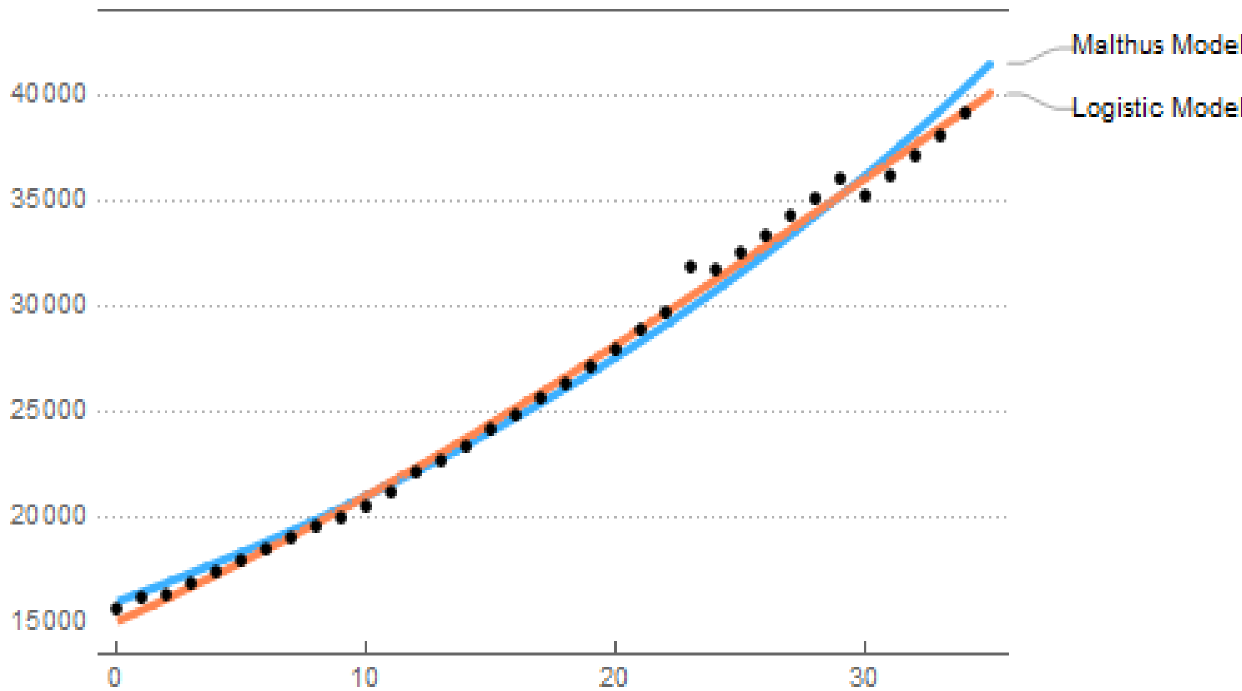


شكل (3-3) يوضح ملائمة الانموذج اللوجستي المقدر للبيانات الحقيقية.

3-4-6 مقارنة النتائج

جدول (3-22) معايير مقارنة النماذج المستخدمة

	Malthus Model	**Logistic Model**
AIC	566.671	544.419
AICc	567.046	545.193
BIC	569.781	549.085



شكل (3-4) مقارنة الانموذج اللوجستي وانموذج Malthus لملائمة البيانات الحقيقية

وعن طريق النتائج التي توصلنا اليها والمبينة في الجدول (3-22) وباستعمال المعايير الثلاثة (AIC, AICc, BIC) إذ اتفقت هذه المعايير على ان الأنموذج اللوجستي Logistic model هو أفضل أنموذج يلائم بيانات سكان العراق والذي يعطي اقل قيمة لهذه المعايير ولذلك يتم استعمال الانموذج اللوجستي للتنبؤ بعدد سكان العراق لغاية عام 2040 وكما يلي:

جدول (3-23) القيم التنبؤية لاعداد السكان في العراق حسب انموذج مالثوس و الانموذج اللوجستي

year	Logistic Model	Malthus Model
2019	40038.6	41480.6
2020	40832.2	42628.6
2021	41621.4	43808.5
2022	42405.5	45021.
2023	43183.8	46267.
2024	43955.5	47547.6
2025	44720.1	48863.6
2026	45476.8	50216.
2027	46225.1	51605.8
2028	46964.3	53034.1
2029	47694.	54502.
2030	48413.6	56010.4
2031	49122.6	57560.7
2032	49820.6	59153.8
2033	50507.2	60791.
2034	51181.9	62473.5
2035	51844.5	64202.6
2036	52494.6	65979.6
2037	53132.	67805.7
2038	53756.4	69682.4
2039	54367.6	71611.
2040	54965.5	73593.

من نتائج الجدول اعلاه يتم ملاحظة ان تنبؤات الانموذج اللوجستي اقرب الى الواقع مقارنة بتنبؤات انموذج مالثوس. ففي حالة استمرار معدل النمو السكاني بنفس الوتيرة وباتباع انموذ النمو

اللوجستي فان عدد سكان العراق سيبلغ (54965.5) بحلول عام (2040) في حين يشير انموذج مالثوس الى ان عدد سكان العراق سيبلغ (73593) بحلول عام (2040).

الفصل الرابع

الاستنتاجات والتوصيات

1-4 الاستنتاجات

يمكن تلخيص اهم ماتوصلت اليه الرسالة من استنتاجات في ضوء الجانب النظري والتطبيقي على النحو الاتي :-

1- هنالك تقارب كبير في مقدرات الطرائق المستعملة في الجانب التجريبي لتقدير معلمات المعادلات التفاضلية الاعتيادية مع تفوق لطريقة (NLS) في عدد مرات ونسبة الافضلية.
2- تزداد قيمة MSE لكل معلمة من معلمات نماذج المعادلات التفاضلية المستعملة في هذه الرسالة بزيادة مستوى تشويش البيانات.
3- ان الانموذج اللوجستي اكثر ملائمة لبيانات النمو السكاني في العراق مقارنة بأنموذج النمو الاسي وللفترة (1985-2018) ويتم ملاحظة ذلك من خلال مقارنة قيم المعايير الاحصائية (AIC, AICc, BIC)
4- هنالك تقارب بين القيم الحقيقية لبيانات النمو السكاني في العراق والقيم المقدرة ولكلا الانموذجين كما هو موضح في الجانب التطبيقي.
5- ملائمة الانموذج اللوجستي (المعادلة اللوجستية لبيانات السكان في العراق بشكل اكبر من انموذج النمو الاسي (انموذج Malthus).

2-4 التوصيات

في ضوء الاستنتاجات التي تم التوصل اليها قامت الباحثة بوضع عدة توصيات وكالآتي.

1- استعمال طرائق تقدير اخرى مثل الخوارزميات الجينية والشبكات العصبية ومقارنتها مع الطرائق المستعملة في هذه الرسالة.
2- دراسة أنموذجات اخرى من نماذج المعادلات التفاضلية الاعتيادية.
3- نوصي وزارة التخطيط والجهات المعنية بالاعتماد على نتائج القيم التنبؤية للأنموذج اللوجستي للتنبؤ ببيانات النمو السكاني في العراق ووضع الخطط المستقبلية على ضوء هذه البيانات.
4- تعميم هذه الدراسة الى دراسات مشابهة على مستوى بيانات كل محافظة والأخذ بالنتائج والأفادة منها في وضع الخطط المستقبلية.

المصادر

المصادر

اولا: المصادر العربية

القران الكريم

1- بوقفة، اسماعيل، الهنادوة، عايش ،" المعادلات التفاضلية الاعتيادية حلول وتطبيقات"، جامعة العلوم والتكنولوجيا، اليمن.

2- الجهاز المركزي للإحصاء، وزارة التخطيط والتعاون الإنمائي، المجموعة الإحصائية لسنة 2018

3- حسين، وفاء جعفر،(2018)،" تقدير المعلمات الثابتة ومتغيرة الزمن في نماذج المعادلات التفاضلية اللاخطية مع تطبيق عملي"، اطروحة دكتوره، كلية الاداة والاقتصاد، جامعة بغداد.

4- خديجة عبد الله يحمد،(2009), "أهمية المؤشرات الإحصائية في التنمية البشرية"، بحث مقدم إلى المؤتمر الإحصائي العربي الثاني، لا تنمية من دون إحصاء، المنعقد في ليبيا للمدة من 2-4 نوفمبر.

5- خواجه، د.خالد زهدي. " إسقاطات السكان حسب العمر ونوع الجنس" ، المعهد العربي للتدريب والبحوث الإحصائية، بغداد.

6- الربيعي محمد عريبي ياسر ،(2011) . " أثر الإنفاق الصحي الحكومي في التنمية البشرية المستدامة في العراق"، رسالة ماجستير ، كلية الإدارة والاقتصاد ، الجامعة المستنصرية.

7- روحي، ابراهيم الخطيب، (2012)،" مقدمة في المعادلات التفاضلية"، الطبعة الاولى، دار المسيرة.

8- الزركاني، جواد كاظم، (2015)،" تطبيقات المعادلات التفاضلية"، جامعة واسط، كلية التربية.

9- الشلقاني، د.مصطفى. " طرق التحليل الديموغرافي"، مطبوعات جامعة القاهرة، الكويت،(1985).

10- عزيز، ميسون مال الله، عبد الله، أسماء عبد المنعم، (2005)، " بناء نظام ديناميكي للسلاسل الزمنية بمعلمات قليلة"، المجلة العراقية للعلوم الإحصائية، العدد 8، ص: (140-165).

11- الناصر، عبد المجيد حمزة، جمعة، أحلام احمد (2007) "المقارنة بين طرائق تحديد رتبة انموذج الانحدار الذاتي الطبيعي باستعمال بيانات مولدة وبيانات لبعض العناصر المناخية في

العراق"، مجلة العلوم الاقتصادية والإدارية، كلية الإدارة والاقتصاد، جامعة بغداد، العراق، العدد (48)، ص: 251-272.

ثانيا: المصادر الاجنبية:

12- Abell, M. L., & Braselton, J. P. (2016). Differential equations with Mathematica. Academic Press.

13- Ascher, U. M., & Petzold, L. R. (1998). Computer methods for ordinary differential equations and differential-algebraic equations (Vol. 61). Siam.

14- Brunel, N. (2007), "Parameter Estimation of ODE's via Nonparametric Estimators". (Report Eurandom; Vol. 200705). Eindhoven: Eurandom General.

15- Cao, J., Wang, L., and Xu, J. (2011),"Robust Estimation for Ordinary Differential Equation Models". Biometrics, 67(4), 1305–1313.

16- Ding , A. and Wu,H.(2014)," Estimation Of Ordinary Differential Equation Parameters Using Constrained Local Polynomial Regression".Statistica Sinica 24 ,1613-1631.

17-Donnet, S., & Samson, A. (2007). Estimation of parameters in incomplete data models defined by dynamical systems. Journal of Statistical Planning and Inference, 137(9), 2815-2831.

18- Draper, N. R., & Smith, H. (1998). Applied regression analysis (Vol. 326). John Wiley & Sons.[SQR1]

19- Goshu, A. T., & Koya, P. R. (2013). Derivation of inflection points of nonlinear regression curves-implications to statistics. Am. J. Theor. Appl. Stat, 2(6), 268-272.[MAP]

20- Hemker, P. W. (1972). Numerical methods for differential equations in system simulation and in parameter estimation. Analysis and Simulation of biochemical systems, 28, 59-80.[SQR3]

21-Holte, S. E. (2016). A Consistent Direct Method for Estimating Parameters in Ordinary Differential Equations Models. arXiv preprint arXiv:1601.04736.

22- Hu,T.,Yanping ,Q., and Hengjian ,C., (2015)," Robust Estimation of Constant and Time-Varying Parameters In Nonlinear Ordinary Differential Equation Models". Journal of Nonparametric Statistics, DOI: 10.1080/10485252.2015.1042377.

23- Huang, H., Handel, A., & Song, X. (2020). A Bayesian approach to estimate parameters of ordinary differential equation. Computational statistics, 35(3), 1481-1499.[A]

24- Jennrich,R.I. (1995), "An Introduction to Computational Statistics-Regression Analysis", Prentice-Hall International ,INC

25-Kak, A. (2014). Ml, map, and bayesian the holy trinity of parameter estimation and data prediction. An RVL Tutorial Presentation at Purdue University, 10.[SQR2]

26- Liang, H., and Wu, H. (2008)," Parameter Estimation for Differential Equation Models Using a Framework of Measurement Error in

Regression Models”. Journal of the American Statistical Association. 103:484, 1570-158 .

27- Linga, P., Al-Saifi, N., & Englezos, P. (2006). Comparison of the Luus− Jaakola optimization and Gauss− Newton methods for parameter estimation in ordinary differential equation models. Industrial & engineering chemistry research, 45(13), 4716-4725.

28- Miao, H., Dykes, C., Demeter, L. and Wu, H. (2009),”Differential Equation Modeling of HIV Viral Fitness Experiments Model Identification”. Model Selection, And Multi-Model Inference. Biometrics 65 292-300.

29- Verhulst, P. F. (1847). Deuxième mèmoire sur la loi d’accroissement de la population. Nouv. Mém. Acad. R. Sci. Lett. B.-Arts Belg, 20, 142-173.

30-Verhulst, P. F. (1847). Recherches mathematiques sur la loi d'accroissement de la population.Nouv. mem. de l'Academie Royale des Sci. et Belles-Lettres de Bruxelles, 18:14.

الملاحق

Abstract

Ordinary differential equations (ODE) models are widely used to model dynamic processes in many scientific fields, but they usually depend on parameters that are of critical importance in terms of dynamics and need to be estimated directly from the data. Nonlinear Equation Models. In this thesis, the method of non-linear least squares (NLS) was used, which is considered the most common in estimating the parameters of ordinary differential equations and comparing them with the capabilities of the method of maximmum a posterior (MAP) using two models of ordinary differential equations. They are both (Malthus model and logistic model) and by employing the Monte Carlo simulation method using five different sample sizes and using the mean square error (MSE) standard, the results concluded that the nonlinear least squares method was more appropriate in estimating the parameters of these models.

And then a practical application was made of real data represented by the number of Iraq's population for the period (1985-2018) for the purpose of showing the best model in representing these data and using the best methods from the experimental side. His predictions, which are more accurate compared to the Malthus model, where the message found that the population of Iraq will reach 55 million by 2040.

Republic of Iraq
Ministry of higher Education and Scientific Research
University of Karbala
Faculty of Administration and Economics
Department of statistics

The use of some statistical methods for estimating the parameters of ordinary differential equations with practical application

A Thesis Submitted to
Council of The Administration and Economics/ Karbala University as Partial fulfillment of the Requirements for the Degree of Master of Science in Statistics
Presented by researcher

Israa Samad Dwayyeh Al-Safi

Supervised By
Ass. Prof. Dr. Mushtaq Kareem Abd Al-Rahem

2022 م **1443 هـ**

Holy Karbala