



جمهورية العراق
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة كربلاء
كلية الإدارة والاقتصاد
قسم الإحصاء
الدراسات العليا



تقدير معلمات توزيع كاما المعكوس نصف الدائري مع تطبيق عملي

رسالة

مقدمة الى مجلس كلية الإدارة والاقتصاد في جامعة كربلاء
وهي جزء من متطلبات نيل درجة ماجستير في علوم الإحصاء
تقدم بها

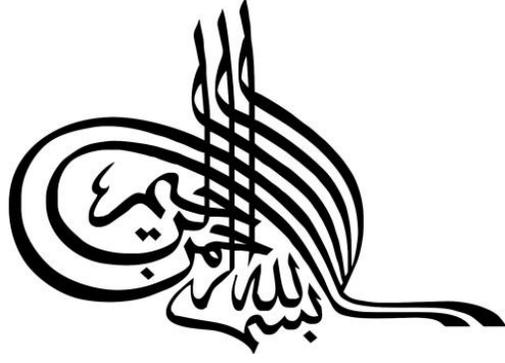
عمار محمد جاسم

إشراف

أ. د. مهدي وهاب نعمة

2023 م

1444 هـ



﴿إِنَّ فِي خَلْقِ السَّمَاوَاتِ وَالْأَرْضِ وَاخْتِلَافِ
اللَّيْلِ وَالنَّهَارِ، لآيَاتٍ لِأُولِي الْأَبْصَارِ، الَّذِينَ
يَذْكُرُونَ اللَّهَ قِيَامًا، وَقُعُودًا وَعَلَىٰ جُنُوبِهِمْ
وَيَتَفَكَّرُونَ فِي خَلْقِ السَّمَاوَاتِ، وَالْأَرْضِ رَبَّنَا مَا
خَلَقْتَ هَذَا بَاطِلًا سُبْحَانَكَ فَقِنَا عَذَابَ
النَّارِ﴾

صدق الله العلي العظيم

(آل عمران ١٩٠ و ١٩١)

إقرار المشرف

أشهد أن إعداد هذه الرسالة الموسومة (تقدير معلمات توزيع كاما المعكوس نصف الدائري مع تطبيق عملي) والتي تقدم بها الطالب "عمار محمد جاسم" قد جرى بإشرافي في قسم الاحصاء - كلية الإدارة والاقتصاد - جامعة كربلاء، وهي جزء من متطلبات نيل درجة ماجستير علوم في الاحصاء.



أ.د. مهدي وهاب نعمة

التاريخ: / / 2023

توصية رئيس قسم الاحصاء

بناءً على توصية الاستاذ المشرف، أرشح الرسالة للمناقشة.



أ.د. شروق عبد الرضا السبيح

رئيس قسم الاحصاء

التاريخ: / / 2023

إقرار الخبير اللغوي

أشهد أن الرسالة الموسومة (تقدير معلمات توزيع كاما المعكوس نصف الدائري مع تطبيق عملي) قد جرى مراجعتها من الناحية اللغوية تحت إشرافي إذ أصبحت خالية من الأخطاء اللغوية ولأجله وقعت.


الخبير اللغوي
م. صلاح مهدي جابر

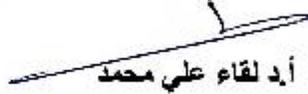
إقرار لجنة المناقشة

نشهد نحن أعضاء لجنة المناقشة بأننا قد اطلعنا على الرسالة الموسومة (تقدير
معلومات توزيع كاما نصف الدائري مع تطبيق عملي) والمقدمة من قبل الطالب
"عمار محمد جاسم" وناقشنا الطالب في محتوياتها وفيما له علاقة بها، ووجدنا بأنها
جديرة بنيل درجة ماجستير علوم في الإحصاء بتقدير).


أ.م.د ايناس عبدالحافظ محمد

عضواً

2023 / 4 / 27


أ.د لقاء علي محمد

رئيساً

2023 / 4 / 27


أ.د مهدي وهاب نعمة

عضواً ومشرفاً

2023 / /


أ.م.د صدى فايز محمد

عضواً

2023 / 4 / 27

إقرار رئيس لجنة الدراسات العليا

بناءً على اقرار المشرف العلمي والخبير اللغوي على رسالة الماجستير للطالب
" عمار محمد جاسم " الموسومة بـ (تقدير معلمات توزيع كاما نصف الدائري
مع تطبيق عملي) ارشح هذه الرسالة للمناقشة.

أ.د محمد حسين كاظم الجبوري

رئيس لجنة الدراسات العليا

معاون العميد للشؤون العلمية والدراسات العليا

مصادقة مجلس الكلية

صادق مجلس كلية الادارة والاقتصاد/ جامعة كربلاء على قرار لجنة المناقشة.

أ.د محمد حسين كاظم الجبوري

عميد كلية الادارة والاقتصاد- جامعة كربلاء

2023 / 4 / 27

الإهداء ...

إلهي لا يطيب الليل إلا بشكرك ولا يطيب النهار إلا بطاعتك.. ولا تطيب اللحظات إلا بذكرك ...

ولا تطيب الآخرة إلا بعفوك ... ولا تطيب الجنة إلا برؤيتك

الله جل جلاله

إلى من بلغ الرسالة وأدى الأمانة ... ونصح الأمة ... نبي الرحمة ونور العالمين...

النبي محمد صلى الله عليه وآله الطيبين الطاهرين

إلى سيد الشهداء الامام الحسين عليه السلام... إلى ساقى عطاشى كربلاء أبى الفضل العباس عليه

السلام...

أهدي ثمرة جهدي البسيط معبراً عن ولائي العميق

إلى كنز التضحية والإيثار، صاحب القلب الكبير، تاج الزمان ومعلمي وملهمي، الاب المثالي...

والذي العزيز

إلى ملاكي في الحياة ... معنى الحب والحنان والتفاني ... بسمة الحياة وسر الوجود

من كان دعائها سر نجاحي وحنانها بلسم جراحي والأغلى من روحي...

أمي الحبيبة

إلى من زرع العلم والأمل... من علمنا أن النجاح له قيمة ... منارة العلم التي تضيء الطريق

منك تعلمنا أنّ الأفكار الملهمة تحتاج إلى من يغرسها

أ. د مهدي وهاب نصر الله..

الى رفيقة الدرب وشريكة حياتي ... زوجتي الغالية

إلى ثمرة الحياة أبنائي

(مصطفى - محمد جواد - درة)

فالكلمة لها أفق محدود قد لا ترقى لمستوى أن تحاكي مقام الجهاد والشهادة

وفاءً مني لهم أقدم ثمرة جهدي هذا تكريماً وتقديراً

عمار

شكر وإمتنان ...

لا يسعني وأنا أنتهي من إعداد هذه الرسالة إلا أن أتقدم بجزيل شكري وخالص أمتناني وعظيم تقديري إلى أستاذي الفاضل (أ. د مهدي وهاب نصر الله) لقبوله الاشراف على هذه الرسالة بجهوده القيمة في التوجيه والمتابعة والمساعدة الصادقة في اتمام هذه الرسالة سائلاً العلي القدير أن يحفظه وينعم عليه بالصحة والعافية إنه سميع بصير.

كما يسعدني ويشرفني أن أتقدم بوافر الشكر والتقدير الى أساتذتي الكرام رئيس واعضاء لجنة المناقشة لتفضلهم بالموافقة على مناقشة هذه الرسالة.

ومن الواجب ان اتوجه بشكري وتقديري الى رئيس وأساتيذ وموظفي قسم الاحصاء الكرام.

والشكر الجزيل لملاك مختبر عيون كربلاء للفحوصات التشخيصية المتقدمة لأمراض العيون لتزويدنا بالبيانات.

ولاننسى تقديم الشكر والامتنان الى المقيمين اللغوي والعلمي لإسهامهما في إظهار الرسالة بالصورة الجيدة.

ومن الله التوفيق

الباحث

قائمة المحتويات

الصفحة	الموضوع
ب	الآية القرآنية
ج	الإهداء
د	شكر وامتنان
هـ-ح	قائمة المحتويات
ط	قائمة الجداول
ي-م	قائمة الاشكال
ن-س	قائمة المصطلحات والرموز
ع-ف	المستخلص
8-1	الفصل الأول (منهجية الرسالة والإستعراض المرجعي)
1	1.1 المقدمة
2	2.1 مشكلة الرسالة
2	3.1 هدف الرسالة
3	4.1 الاستعراض المرجعي
43-9	الفصل الثاني (الجانب النظري)
9	1.2 تمهيد
9	2.2 بعض المفاهيم الأساسية للمتجهات

9	1.2.2 طول المتجه Norm of Vector
9	2.2.2 المسافة بين متجهين
10	3.2.2 المتجهات المتعامدة
10	4.2.2 القياسية (المعيارية)
10	5.2.2 الضرب الداخلي الأقليدي لمتجهين
10	6.2.2 الضرب الداخلي القياسي لمتجهين
11	7.2.2 متجه الوحدة
11	8.2.2 متجهات الوحدة القياسية
12	9.2.2 قانون الجيب تمام
13	3.2 الدائري و الدرجات
17	4.2 كرة الوحدة
18	5.2 دائرة الوحدة
20	6.2 الإحصاء الدائري
21	7.2 البيانات الدائرية والنصف دائرية
21	8.2 التوزيع الدائري
25	9.2 إسقاط المجسم العكسية
26	10.2 توزيع كاما المعكوس
28	11.2 توزيع كاما المعكوس المحول النصف دائري المقترح
33	12.2 طرائق التقدير

33	1.12.2 طريقة الامكان الأعظم
35	2.12.2 مقدر أقل مسافة ذو الخطوة الواحدة
41	3.12.2 مقدر المسافة العامة
62-44	الفصل الثالث المبحث الأول (الجانب التجريبي)
44	1.1.3 تمهيد
44	2.1.3 المحاكاة
45	3.1.3 مراحل تطبيق تجارب المحاكاة
50	4.1.3 مناقشة نتائج المحاكاة
81-63	الفصل الثالث المبحث الثاني (الجانب التطبيقي)
63	1.2.3 التمهيد
63	2.2.3 انحناء القرنية الخلفي
69	3.2.3 البيانات الحقيقية
72	4.2.3 اختبار ملائمة البيانات
74	5.2.3 المفاضلة بين التوزيع المقترح وباقي التوزيعات
74	6.2.3 تحليل البيانات الحقيقية
83-82	الفصل الرابع (الاستنتاجات والتوصيات)
82	1.4 الإستنتاجات (Conclusions)
83	2.4 التوصيات (Recommendations)
	المصادر

A

Abstract

قائمة الجداول

الصفحة	عنوان الجدول	رقم الجدول
48	قيم المعلمات الافتراضية	(3-1)
53	متوسط تقديرات معلمات توزيع كاما المعكوس النصف دائري ومتوسط مربعت الخطأ ومقدار التحيز ونسبة التغطية عند مدة (فترة) ثقة 95% عندما $\alpha = 1$ وقيم $\beta = 0.5, 1, 2, 3$	(3-2)
55	متوسط تقديرات معلمات توزيع كاما المعكوس النصف دائري ومتوسط مربعت الخطأ ومقدار التحيز ونسبة التغطية عند مدة (فترة) ثقة 95% عندما $\alpha = 2.5$ وقيم $\beta = 0.5, 1, 2, 3$	(3-3)
57	متوسط تقديرات معلمات توزيع كاما المعكوس النصف دائري ومتوسط مربعت الخطأ ومقدار التحيز ونسبة التغطية عند مدة (فترة) ثقة 95% عندما $\alpha = 0.5$ وقيم $\beta = 1.5, 2, 4, 5$	(3-4)
60	متوسط تقديرات معلمات توزيع كاما المعكوس النصف دائري ومتوسط مربعت الخطأ ومقدار التحيز ونسبة التغطية عند مدة (فترة) ثقة 95% عندما $\alpha = 4$ وقيم $\beta = 1.5, 2, 4, 5$	(3-5)
63	متوسط تقديرات معلمات توزيع كاما المعكوس النصف دائري ومتوسط مربعت الخطأ ومقدار التحيز ونسبة التغطية عند مدة (فترة) ثقة 95% عندما $\alpha = 1.5$ وقيم $\beta = 1.5, 3.5, 5.5, 8$	(3-6)
65	عدد مرات الأفضلية ونسبة الأفضلية لطرائق التقدير لجميع تجارب المحاكاة	(3-7)
73	زوايا انحناء القرنية الخلفي لعيون (100) مريض	(3-8)
75	نتائج إختبار ملائمة البيانات	(3-9)
77	نتائج إختبارات المقارنة والدقة والتي طبقت على البيانات الحقيقية	(3-10)
78	قيم دالة الكثافة الاحتمالية ودالة البقاء ودالة الكثافة الاحتمالية التجميعية المقدره بموجب طريقة أقل مسافة ذو الخطوة الواحدة للبيانات الحقيقية	(3-11)

قائمة الاشكال

الصفحة	عنوان الشكل	رقم الشكل
11	متجهات الوحدة	(2-1)
13	قانون جتا	(2-2)
14	القياس الدائري ضمن دائرة الوحدة	(2-3)
15	أطوال نصف القطر في دائرة كاملة	(2-4)
15	حساب محيط الدائرة بالقياس الدائري مقابل الدرجات	(2-5)
16	القياس الدائري مقابل الدرجات	(2-6)
18	كرة الوحدة	(2-7)
20	دائرة الوحدة والمثلث القائم الزاوية الذي له الزاوية θ	(2-8)
22	التمثيل الدائري للتوزيع الدائري المستمر	(2-9)
22	التمثيل الخطي للتوزيع الدائري المستمر	(2-10)
25	الاسقاط المجسم العكسي	(2-11)
27	منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع كاما المعكوس	(2-12)
27	منحنى دالة الكثافة الاحتمالية التجميعية لتوزيع كاما المعكوس	(2-13)
30	منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع كاما المعكوس النصف دائري المحول	(2-14)
31	منحنى دالة الكثافة الاحتمالية التجميعية لتوزيع كاما المعكوس النصف دائري المحول	(2-15)
31	منحنى دالة البقاء لتوزيع كاما المعكوس النصف دائري المحول	(2-16)

47	عينة توزيع كاما المعكوس النصف دائري المحول بحجم عينة n=10	(3-1)
47	عينة توزيع كاما المعكوس النصف دائري المحول بحجم عينة n=30	(3-2)
47	عينة توزيع كاما المعكوس النصف دائري المحول بحجم عينة n=50	(3-3)
47	عينة توزيع كاما المعكوس النصف دائري المحول بحجم عينة n=100	(3-4)
48	عينة توزيع كاما المعكوس النصف دائري المحول بحجم عينة n=200	(3-5)
51	منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع HCTIG عند المعلمات الافتراضية $\alpha = 1$ و $\beta = 0.5$ عند حجم عينة (n=100)	(3-6)
51	منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع HCTIG عند المعلمات الافتراضية $\alpha = 1$ و $\beta = 1$ عند حجم عينة (n=100)	(3-7)
51	منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع HCTIG عند المعلمات الافتراضية $\alpha = 1$ و $\beta = 2$ عند حجم عينة (n=100)	(3-8)
51	منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع HCTIG عند المعلمات الافتراضية $\alpha = 1$ و $\beta = 3$ عند حجم عينة (n=100)	(3-9)
54	منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع HCTIG عند المعلمات الافتراضية $\alpha = 2.5$ و $\beta = 0.5$ عند حجم عينة (n=100)	(3-10)
54	منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع HCTIG عند المعلمات الافتراضية $\alpha = 2.5$ و $\beta = 1$ عند حجم عينة (n=100)	(3-11)
54	منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع HCTIG عند المعلمات الافتراضية $\alpha = 2.5$ و $\beta = 2$ عند حجم عينة (n=100)	(3-12)

56	منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع HCTIG عند المعلمات الافتراضية $\alpha = 2.5$ و $\beta = 3$ عند حجم عينة (n=100)	(3-13)
56	منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع HCTIG عند المعلمات الافتراضية $\alpha = 0.5$ و $\beta = 1.5$ عند حجم عينة (n=100)	(3-14)
56	منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع HCTIG عند المعلمات الافتراضية $\alpha = 0.5$ و $\beta = 2$ عند حجم عينة (n=100)	(3-15)
56	منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع HCTIG عند المعلمات الافتراضية $\alpha = 0.5$ و $\beta = 4$ عند حجم عينة (n=100)	(3-16)
58	منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع HCTIG عند المعلمات الافتراضية $\alpha = 4$ و $\beta = 1.5$ عند حجم عينة (n=100)	(3-17)
58	منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع HCTIG عند المعلمات الافتراضية $\alpha = 4$ و $\beta = 2$ عند حجم عينة (n=100)	(3-18)
58	منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع HCTIG عند المعلمات الافتراضية $\alpha = 4$ و $\beta = 4$ عند حجم عينة (n=100)	(3-19)
58	منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع HCTIG عند المعلمات الافتراضية $\alpha = 4$ و $\beta = 5$ عند حجم عينة (n=100)	(3-20)
60	منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع HCTIG عند المعلمات الافتراضية $\alpha = 1.5$ و $\beta = 1.5$ عند حجم عينة (n=100)	(3-21)
60	منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع HCTIG عند المعلمات الافتراضية $\alpha = 1.5$ و $\beta = 3.5$ عند حجم عينة (n=100)	(3-22)
61	منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع HCTIG عند المعلمات الافتراضية $\alpha = 1.5$ و $\beta = 5.5$ عند حجم عينة (n=100)	(3-23)
61	منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع HCTIG عند المعلمات الافتراضية $\alpha = 1.5$ و $\beta = 8$ عند حجم عينة (n=100)	(3-24)
70	قياس انحناء القرنية الخلفي	(3-25)

71	البيانات الحقيقية ضمن دائرة الوحدة	(3-26)
73	منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع كاما المعكوس النصف دائري المحول للبيانات الحقيقية	(3-27)
73	منحنى دالة الكثافة الاحتمالية التجميعية لتوزيع كاما المعكوس النصف دائري المحول للبيانات الحقيقية	(3-28)
73	منحنى دالة البقاء لتوزيع كاما بثلاث معلمات للبيانات الحقيقية	(3-29)
80	منحنى دالة الكثافة الاحتمالية بموجب طريقة اقل مسافة ذو الخطوة الواحدة	(3-30)
80	منحنى دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طريقة اقل مسافة ذو الخطوة الواحدة	(3-31)

المصطلحات والرموز المستعملة في هذا البحث

المصطلح باللغة العربية	المصطلح باللغة الانكليزية	رمز المصطلح
توزيع كاما المعكوس نصف الدائري المحول	Half Circular Transformed Inverted Gamma Distribution	HCTIGD
تقدير الأماكن الاعظم	Maximum Likelihood estimation	MIE
تقدير اقل مسافة Hellinger ذو الخطوة الواحدة	The One-Step Minimum Hellinger Distance Estimator	OHD
تقدير المسافة العامة	The General spacing estimator	GS
التصوير البصري المقطعي التوافقي	Optical coherence tomography	OCT
الدالة المميزة	Characteristic function	$\varphi_{\theta}(t)$
الفضاء الاقليدي	Euclidean space	p^n
متجه مشاهدات العينة	sample Observation Vector	x
دالة المسافة	Distence function	$D_{i,m}^{NOL}$
دالة التوزيع التراكمية	Cumulative distribution function	$F(\theta)$
كاي سكوير المحتسبة	Chi-square	χ_c^2
معلمة الشكل	Shape Parameter	α
معلمة القياس	Scale Parameter	β

متوسط الخطأ النسبي المطلق	Mean Absolut Proportional Error	MAPE
اختبار اكيكي لحسن المطابقة	Akaike's test to goodnice of fit	AIC
اختبار بيز اكيكي لحسن المطابقة	Akaike Bays test to goodnice of fit	BIC
اختبار اكيكي المتسق لحسن المطابقة	Consist Akaike Bays test to goodnice of fit	CAIC
اختبار حنان كوين لحسن المطابقة	Hannan–Quinn test to goodnice of fit	HQIC
متوسط مربعات الخطأ	Mean square of error	MSE
مقدار التغطية لكل معلمة مقدرة	The actual coverage probabilites	CP
الوسيط الاعظم	The arguments of the maxima	argmax

في الكثير من التطبيقات العملية وفي واقع حياتنا قد نواجه بيانات تقاس بوحدات القياس الزاوي مثل (degrees ,Radians)، وهذه البيانات ممكن ان تقع ضمن المدى الدائري الكامل اي $(0, 2\pi)$ ويطلق على مثل هكذا بيانات بالبيانات الدائرية (The Circular data) إذ إن فضاء البيانات الدائرية هو دائرة الوحدة بينما للبيانات الخطية يكون الفضاء هو خط الأعداد الحقيقي R ، ومصطلح البيانات الدائرية يستعمل لغرض تمييزها عن البيانات الخطية (Linear Data) المعتاد عليها كثيراً في التحليلات، او قد تقع في نصف المدى الدائري $(0, \pi)$ إذ يطلق على هكذا نوع من البيانات بالبيانات النصف دائرية (Half Circular Data) ففي حالة البيانات النصف دائرية يجب إيجاد إنموذج لغرض دراسة وتحليل مثل هكذا بيانات. لذلك جاءت هذه الرسالة لإيجاد تقدير معلمات توزيع كاما المعكوس نصف الدائري بالاعتماد على خاصية اسقاط الجسم العكسية (Inverse stereographic projection) والتي تختص بتحويل البيانات الاعتيادية (الديكارتية) الى بيانات قطبية (مقاسة بالزوايا) ومن ثم ايجاد خصائص التوزيع الجديد النصف دائري ومن ثم تقدير معلمات التوزيع الجديد بالاعتماد على ثلاث طرائق في التقدير وهي طريقة الامكان الاعظم الاعتيادية (Maximum Likelihood) وطريقة أقل مسافة ذو الخطوة الواحدة (The One-Step Minimum Hellinger Distance Estimator) ومقدر المسافة العامة (The General spacing estimator) ومن ثم تطبيق المقدرات المستخرجة على بيانات حقيقية وباستعمال تجارب محاكاة، تم المقارنة بين الطرائق الثلاث وتوصلنا إلى إن أفضل طريقة لتقدير معلمات توزيع كاما المعكوس المحول النصف دائري هي طريقة أقل مسافة ذو الخطوة الواحدة (OHD) بنسبة افضل (50%) وتليها طريقة الامكان الاعظم (MLE) بنسبة افضل بلغت (35%) ، واخيرا طريقة المسافة العامة (GS) بنسبة افضل (15%) . وكذلك استعمال بيانات حقيقية (بيانات زوايا انحناء القرنية الخلفي) باستعمال جهاز OCT للتصوير المقطعي ثلاثي الابعاد والتي تم التقاط صور للجزء الخلفي من

عيون (100) مريض. والمتغير الذي يمثل البيانات المدروسة هو الزاوية مقاسة ب(Radians) والتي تقيس الانحناء الخلفي للقرنية وتم التوصل الى ملائمة البيانات الحقيقية لتوزيع كاما المعكوس نصف الدائري المحول.

الفصل الأول

منهجية الرسالة

والإستعراض المرجعي

1-1 مقدمة (Introduction):

القياس في الاتجاه شائع جدا في مختلف مجالات العلوم الحياتية ورصد البيانات الحقيقية، قد تكون هذه البيانات مرتبطة باتجاه طيران الطيور أو اتجاه المجال المغناطيسي أو اتجاه سقوط الضوء على الاجسام وما الى ذلك وهذه الاتجاهات تكون ثنائية الابعاد أو ثلاثية بحسب طبيعة الاتجاهات، ومن تطبيقاتها قياس إنحناء القرنية الخلفي، والعديد من البيانات الطبية الاخرى والبيئية التي يكون نطاقها اقل من π ، هذه البيانات تسمى بالبيانات النصف دائرية (Rao and Gupta,2001)، ويمكن تمثيل الاتجاهات ذات البعدين كنقاط على محيط دائرة الوحدة، تسمى النماذج الخاصة بتمثيل مثل هذه البيانات بالتوزيعات الدائرية أو النصف دائرية، التوزيع الدائري هو توزيع احتمالي لزاوية عشوائية مجموع احتمالها يتركز على محيط دائرة الوحدة، إذ يمكن تحويل التوزيع الخطي إلى توزيع دائري بواسطة تقنية "الاسقاط المجسم" والتوزيع الناتج الذي يتم الحصول عليه هو عبارة عن توزيع احتمالي دائري أو نصف دائري. لذا تؤدي التوزيعات الدائرية دورًا مهمًا في نمذجة البيانات الزاوية (الدائرية) والتي تنشأ في مختلف المجالات.

لم تتلقَ نمذجة البيانات النصف دائرية اهتماما كبيرا من الباحثين في حين انها من التقنيات التطبيقية الوثيقة الصلة والمهمة للغاية في العديد من المجالات مثل العلوم الفيزيائية والعلوم الطبية وعلم الارصاد الجوي وعلم النفس وغيرها من العلوم. وعلى هذا الأساس صار من المهم البحث عن طرق لأنتاج عائلات من التوزيعات الدائرية القادرة على نمذجة مجموعة متنوعة من البيانات الزاوية. لذا جاءت هذه الرسالة لإيجاد تقدير معلمات توزيع كاما المعكوس نصف الدائري المحول (HCTIG) متضمنة اربعة فصول:

الاول، منهجية الرسالة وبعض الدراسات السابقة ذات الصلة بموضوع الرسالة، الثاني الجانب النظري الذي شمل عرضاً لاهم المبادئ الاساسية في نظرية المتجهات وقوانينها، وكذلك عرضاً لتعريف البيانات الدائرية والتوزيع الدائري والتوزيع النصف دائري وتوزيع كاما المعكوس وكذلك التوزيع المقترح (HCTIG) وطرائق التقدير المستعملة في تقدير معلمات التوزيع المقترح.

الثالث تألف من مبحثين، المبحث الاول الجانب التجريبي تضمن تجارب محاكاة مونت-كارلوا لغرض تقدير معالم التوزيع المقترح.

المبحث الثاني شمل الجانب التطبيقي والذي تم فيه استعمال بيانات حقيقية تمثل بيانات عن العين تم الحصول عليها من مختبر عيون كربلاء باستعمال جهاز مفروس الشبكية OCT للتصوير المقطعي ثلاثي الابعاد لعيون (100) مريض باستعمال التصوير المقطعي للجزء الأمامي من المدى البصري. والمتغير الذي يمثل البيانات المدروسة هو الزاوية مقاسة بالرادين والتي تقيس الانحناء الخلفي للقرنية وتم التوصل الى ملائمة البيانات الحقيقية لتوزيع كاما المعكوس النصف دائري المحول. الخامس شمل اهم الاستنتاجات التي تم التوصل اليها في الجانبين التجريبي والتطبيقي كذلك اهم التوصيات التي تم ادراجها.

2-1 مشكلة الرسالة (Problem of the thesis)

التوزيعات التقليدية (الخطية) غير كافية لتلبية جميع الظواهر الطبيعية وعلى وجه الخصوص تلك التي تقع ضمن المدى الدائري الكامل $(0, 2\pi)$ أو النصف دائري $(0, \pi)$ ، بسبب الخواص الدورية لبيانات تلك الظواهر، لذا ظهرت الحاجة الى اقتراح (استعمال) التوزيعات النصف دائرية (Half Circular distribution) لتكون أكثر مرونة في تمثيل ونمذجة بيانات مثل تلك الظواهر وتقدير معالمها.

3-1 هدف الرسالة (Aim of the thesis)

ترمي الرسالة الى ايجاد تقدير معالم توزيع كاما معكوس نصف الدائري والذي له القابلية والمرونة على نمذجة البيانات النصف دائرية، بالاعتماد على خاصية اسقاط المجسم العكسية Inverse (stereographic projection) والتي تختص بتحويل البيانات الاعتيادية (الديكارتية) الى بيانات قطبية (مقاسة بالزوايا) ، بالاعتماد على ثلاث طرائق في التقدير وهي طريقة الامكان الاعظم الاعتيادية (Maximum Likelihood) وطريقة اقل مسافة ذو الخطوة الواحدة (The One-Step Minimum Hellinger Distance Estimator) ومقدر المسافة العامة (The General spacing estimator) ومن ثم تطبيق المقدرات المستخرجة على بيانات حقيقية دائرية.

4-1 الاستعراض المرجعي (Literature Review)

قام العديد من الباحثين بدراسة تقدير معلمات التوزيعات الدائرية ودرسوا خصائص هذه التوزيعات، فمن ثم بعض من البحوث التي اجراها بعض الباحثين:

1. في عام (2005) قدم (JONES & Pewsey)⁽²²⁾ عائلة من التوزيعات الدائرية احادية القمة (Circular Unimodal distributions) وهي التوزيع الدائري المنتظم , توزيع Von-Mises الدائري وتوزيع cardioid الدائري وتوزيع كوشي الملفت الدائري (Circular Wrapped Cauchy distribution) التي اشتقت عن طريق التكييف وإسقاط بعض التوزيعات المتماثلة ثنائية المتغير كروياً وبيضاوياً على دائرة الوحدة وناقشا خصائص هذه التوزيعات وقدرنا معلمات هذه التوزيعات باستعمال طريقة الإمكان الأعظم, واستعملا بيانات حقيقية تمثل زوايا تلاشي طائر البط عددها $n=714$, وتوصلا الى ان توزيع كوشي الملفت الدائري افضل من باقي التوزيعات ملائمة لبيانات زوايا تلاشي البط . (JONES & Pewsey, 2005)
2. في عام (2013) قدم (phani et al.)⁽³¹⁾ وآخرون توزيع ويبيل النصف دائري المجسم والتوزيع الأسّي النصف دائري المجسم باستعمال تقنية الاستقاط المجسم العكسي ودرسوا خصائص هذه التوزيعات والعزوم المثلثية واثبتوا أن هذه التوزيعات ملائمة لنمذجة البيانات التي تقع على نصف دائرة الوحدة. (phani et al., 2017)
3. في عام (2014) اقترح (Girija et al.)⁽²⁰⁾ وآخرون التوزيع الاسي المزدوج الدائري باستعمال تقنية إسقاط المجسم العكسي وتحويله (Mobius) وطبقوا التوزيع المقترح على بيانات حقيقية تمثل زوايا طيران (13) طائر من حمام الزاجل في جبال الألب, وتمت اختبار ملائمة البيانات للتوزيع المقترح باستعمال مجموعة من الاختبارات وتم مقارنة التوزيع المقترح مع التوزيعات (Circular Logistic, Double Weibull, Circular Logistic) باستعمال المعايير (Log Maximum Likelihood, AIC, BIC) وتوصلوا الى ان التوزيع المقترح ملائم للبيانات اكثر من باقي التوزيعات لانه حقق اقل معايير المقارنة. (Girija et al., 2014)
4. في عام (2016) قدم (Rao et al.)⁽⁴¹⁾ وآخرون التوزيع اللوجستي الدائري المجسم باستعمال التحويل ثنائي الخطية (Mobius) واختبروا ملائمة التوزيع المقترح على بيانات لـ (50) طائرا تم إطلاقهم على طول ضفة بركان وقياس زوايا طيران الطيور هرباً من صخب البركان باستعمال معايير الاختبار (Kuiper's test, Watson's U2 test), ومن ثم قارنوا التوزيع المقترح مع

التوزيع الاسي المزدوج المجسم (Stereographic Double exponential distribution) والتوزيع اللوجستي المجسم (Stereographic Logistic distribution) باستعمال المعايير (Log Likelihood, AIC, BIC) حيث توصلوا بان التوزيع المقترح الجديد افضل من التوزيعات الباقية ملائمة للبيانات الدائرية. (Rao et al., 2016)

5. في العام نفسه (2016) قدم (phani et al.)⁽³¹⁾ وآخرون توزيع ويبيل الدائري المجسم لنمذجة البيانات الدائرية ودرسوا خصائص التوزيع الجديد مثل دالة الكثافة الاحتمالية والدالة التوزيعية والدالة المميزة والعزوم المثلثية وقدروا معاملات الانموذج الجديد باستعمال طريقة الامكان الأعظم واستنتجوا ان التوزيع الاسي الدائري المجسم وتوزيع رايلي الدائري المجسم هما حالة خاصة من توزيع ويبيل الدائري المجسم الجديد وكون التوزيع غير متمائل فهو مناسب لنمذجة البيانات الاتجاهية غير المتكافئة وانه ملائم للبيانات الدائرية. (phani et al., 2016)

6. في عام (2017) اقترح (Abuzaid)⁽²⁾ التوزيع النصف الدائري Burr-XII (Half Circular Bur-XII distribution) عن طريق استعمال تقنية اسقاط المجسم العكسية وقدر معلماته باستعمال طريقة الامكان الأعظم وقام بتقييم اداء التقديرات باستعمال تجارب محاكاة مونت كارلو على خمسة احجام عينات (n=10, 30, 50, 100, 200) التي تم توليدها من توزيع Burr-XII النصف دائري, وتم تطبيقه على مجموعة بيانات حقيقية لـ (23) مصاب بانحناء القرنية الخلفي. وتم مقارنة تقديرات توزيع Burr-XII مع توزيعات أخرى باستعمال معيار معلومة اكاكي (AIC), وتم التوصل عن طريق تطبيق البيانات الحقيقية بان توزيع Burr-XII النصف دائري اكثر ملائمة من باقي التوزيعات بحيث حقق اقل قيمة لمعيار معلومة اكاكي (AIC). ومن تجارب المحاكاة تم التوصل الى أن هنالك علاقة دالية متزايدة بين حجم العينة ومعدل التحيز ومتوسط مربعات الخطأ التي اكدت خاصية الاتساق لمقدرات الامكان الأعظم. (Abuzaid, 2017)

7. في العام نفسه (2017) قدم (phani et al.)⁽³³⁾ وآخرون التوزيع النصف لوجستي النصف دائري المجسم (Stereographic Semicircular Half Logistic distribution) لنمذجة البيانات النصف دائرية التي لها توزيع نصف لوجستي عن طريق استعمال تقنية اسقاط المجسم العكسية المعدلة واشتقوا العزوم الثلاثة الاولى للتوزيع النصف لوجستي النصف دائري الجديد ودرسوا بعض الخصائص الأساسية له وقاموا بإثبات بعض الفرضيات التي تميز التوزيع النصف اللوجستي الشبه دائري. (phani et al., 2017)

8. وفي العام نفسه (2017) اقترح (Phani et al.)⁽³⁴⁾ وآخرون توزيع كما النصف الدائري المجسم (Stereographic semicircular Gamma distribution) لنمذجة البيانات النصف دائرية التي لها توزيع كما والذي يعد إعماما للتوزيع الاسي النصف الدائري المجسم الذي اقترحه (Phani et al., 2013) باستعمال تقنية اسقاط المجسم العكسية المعدلة واشتقوا عزوم التوزيع ودرسوا بعض الخصائص الأساسية له وتوصلوا أن التوزيع المقترح ملائم بشكل جيد للبيانات الاتجاهية الملتوية (Skewed directional data). (Phani et al., 2017).
9. في العام نفسه (2018) اقترح (Pramesti G)⁽³⁷⁾ نموذج دائري جديد بالاستناد إلى تقنية اسقاط المجسم العكسية لتوزيع Erlang، والذي يعد حالة خاصة لتوزيع كما واوجد الخصائص الأساسية للتوزيع الدائري الجديد وهي المتوسط والتباين الاتجاهي والعزوم المثلثية، وتوصل الى ان طريقة اسقاط المجسم العكسية فعالة في بناء التوزيعات الدائرية واستنتاج خصائصها واكد على أن التوزيع الجديد فعال بالنسبة للبيانات الدائرية. (Pramesti G, 2018).
10. في عام (2019) اقترح (Rambli et al.)⁽³⁸⁾ وآخرون توزيع كما النصف الدائري (Half Circular Gamma distribution) عن طريق استعمال تقنية اسقاط المجسم العكسية على متغير عشوائي له توزيع كما واستخرجوا الخصائص الأساسية للتوزيع وتقدير معلماته باستعمال طريقة الامكان الأعظم، وتم تطبيقه على مجموعة بيانات العين التي تم الحصول عليها من عيادة الجلوكوما في المركز الطبي بجامعة مالايا في ماليزيا. وتوصلوا الى ان التوزيع المقترح ملائم لنمذجة البيانات التي تمثل نصف قطر دائرة الوحدة، وان التوزيع المقترح أكثر فائدة لنمذجة مجموعات البيانات التي قد تحتوي على ذيول ثقيلة و / أو قيم متطرفة. وأظهرت تطبيق البيانات الحقيقية أن التوزيع المدروس مفيد جداً في التطبيقات الحقيقية ويمكن أن يقدم أيضاً ملاءمة أفضل من التوزيع الدائري. (Rambli et al., 2019)
11. في العام نفسه (2019) قدم (Al-Mofleh & Sen)⁽⁴⁾ توزيع اكس-كما الملتف الدائري (circular wrapped x-gamma distribution) ودرسوا الخصائص الأساسية للتوزيع الجديد، وقدرنا معلمات التوزيع باستعمال طريقة الامكان الأعظم (Maximum Likelihood Method)، واستعملا محاكاة مونت كارلوا لغرض معرفة سلوك مقدرات معلمات التوزيع الدائري (WRXG)، ومقارنة التقديرات باستعمال معيار مطلق معدل التحيز (Absolute mean of Bias) ومعيار متوسط مربعات الخطأ (MSE) باستعمال برنامج R. وتم التوصل الى ان معيار معدل التحيز ومتوسط مربعات الخطأ تتناقص بزيادة حجم العينة وان طريقة الامكان الاعظم تحافظ على اتساق

المعلومات المقدرة. وتم استعمال بيانات حقيقية تمثل اتجاه المحور الطويل لشرائح الفلنبار في صخور البازلت ومقارنتها بتوزيع ليندلي الملفت (Wrapped Lindley distribution) والتوزيع الأسي الملفت (Wrapped exponential distribution) وتوصلا الى ان توزيع (WRXG) حقق أفضل ملائمة من التوزيعات (WL) و (WE) لانه حقق اقل معايير المقارنة. (Al-Moeh & Sin, 2019).

12. في العام نفسه (2019) اقترح (Srinivas R. et al.)⁽⁴⁸⁾ وآخرون توزيع القيم المتطرفة الشبه دائري (Semicircular Extreme-Value distribution) بتطبيق طريقة الاسقاط البسيطة على توزيع القيم المتطرفة. وتم استخراج الخصائص الاساسية للتوزيع المقترح مثل الدالة المميزة والعزوم المركزية المثلثية الثلاثة الأولى والوسط الاتجاهي والتباين الاتجاهي والانحراف المعياري الاتجاهي ومعامل الارتباط المثلثي واختبار ملائمة التوزيع المقترح بمحاكاة اطوال زوايا مختلفة الدرجات، وتوصلوا بان الانموذج الجديد ملائم لنمذجة البيانات النصف دائرية. (Srinivas R. et al. 2019)

13. في العام (2021) اقترح (Bapat R.)⁽¹¹⁾ التوزيع الأسي الملفت النصف دائري (Half-circular wrapped-exponential distribution) لغرض تقدير عمر جائحة كورونا (Corona virus pandemic) وذلك باستعمال بيانات تمثل عمر قطرة اللعاب للأشخاص المصابين بالفايروس عن طريق تحديد زاوية تلامس قطرة اللعاب المصابة بالفايروس على اسطح القماش لغرض تقدير وقت جفاف القطرة باستعمال فترات الثقة عند مستوى معنوية (0.05) عن طريق محاكاة آلية مفترضة لوقت الجفاف ومن ثم تقدير نمو الجائحة. وقارن التوزيع المقترح مع توزيع (von-mises, wrapped-exponential, transmuted wrapped-exponential) باستعمال معايير المقارنة (log likelihood, AIC) وتبين ان التوزيع المقترح أكثر ملائمة من باقي التوزيعات. (Bapat R., 2021)

نلاحظ من الدراسات السابقة انه لا توجد دراسة تناولت موضوع تقدير معلومات توزيع كاما المعكوس نصف الدائري المحول فهو لم يستعمل من الباحثين الذي سبقوه في هذا العمل، فضلا عن أن بعض طرائق التقدير التي استعملت في هذه الدراسة لم يتم استعمالها من قبل على البيانات الدائرية او النصف دائرية.

الفصل الثاني

الجانب النظري

1.2 تمهيد:

تنشأ البيانات الدائرية (Circular data) عندما تنتشر قيم المتغير العشوائي على محيط دائرة الوحدة وتكون مقاسة بزوايا ذات قيم تتراوح بين 0 و 2π أو 0 درجة و 360 درجة وتستعمل المشاهدات الدائرية (الاتجاهية) في مختلف الظواهر والتي تكون في صيغة متغير واحد أو أكثر من متغير. في هذا الفصل تم عرض بعض المفاهيم الأساسية للمتجهات ، ومفهوم البيانات الدائرية والنصف دائرية والتوزيع الدائري والتوزيع المحول النصف دائري كما المعكوس وعرض بعض الخصائص الأساسية له وكذلك عرضاً لطرائق تقدير معالم التوزيع النصف دائري المحول.

2.2 بعض المفاهيم الأساسية للمتجهات Some basic principles of vectors

1.2.2 طول المتجه Norm of Vector

هو الجذر التربيعي لمجموع مربعات عناصر المتجه ، فإذا كان لدينا متجه غير صفري (Non-zero) مثل x اذ ان :

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

فان طول المتجه يعبر عنه كالآتي:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \quad \dots (2-1)$$

(Axler, 2016, 164)

2.2.2 المسافة بين متجهين The distance between two vectors

هو الجذر التربيعي لمجموع مربعات الفرق بين متجهين، فإذا كان لدينا متجهان غير صفريين (Non-) (Zero):

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

فأن المسافة بين المتجهين يعبر عنها كالاتي:

$$\|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \dots (2-2)$$

(Andreescu & Andrica, 2014, 28)

3.2.2 المتجهات المتعامدة Orthogonal Vectors

يقال أن المتجهين متعامدان $u \perp v$ اذا كان حاصل الضرب القياسي الداخلي بينهما يساوي صفرا, فاذا كان لدينا متجهين غير صفريين (No-singular):

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

فان:

$x \perp y$ if $x \cdot y = 0$ (Gentle E, 2017, 33)

فاذا كانت θ تمثل الزاوية بين المتجهين $\cos \theta = 0$ أي أن $\theta = 90^\circ$. (C. Rencher & Schaalje , 2012,11)

4.2.2 القياسية (المعيارية) Normalization

هي تقسيم المتجه حسب طوله، وهي حاصل قسمة كل عنصر من عناصر المتجه على طوله، فاذا كان لدينا متجه مثل x إذ إن:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

فان المتجه القياسي (المعيارية) للمتجه x نحصل عليه كالاتي:

$$\underline{x}^* = \frac{x_i}{\|x\|} \dots (2-3)$$

(Strang, 2022, 202)

5.2.2 الضرب الداخلي الأقليدي لمتجهين

Euclidian Inner product of two vectors

فاذا كان لدينا متجهين:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

فإن الضرب الداخلي للمتجهين يعرف كالاتي:

$$x'y = x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n = \sum_{i=1}^n x_iy_i \quad \dots (2-4)$$

(Anton & Rorres, 2010, 608)

6.2.2 الضرب الداخلي القياسي لمتجهين Normalized Inner product of two vectors

او يسمى متباينة كوشي شوارتز (Cauchy–Schwarz Inequality) فاذا كان لدينا متجهان:

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

وكانت θ هي الزاوية المحصورة بين المتجهين , فإن الضرب الداخلي القياسي بينهما هو:

$$uv = \begin{cases} \|u\|\|v\| \cos \theta & \text{if } \underline{u} \neq 0 \quad \underline{v} \neq 0 \\ 0 & \text{if } \underline{u} = 0 \quad \underline{v} = 0 \end{cases} \quad \dots (2-5)$$

إذ أن :

$$\cos \theta = \frac{uv}{\|u\|\|v\|} = 0 \quad \dots (2-6)$$

If u,v indep.

Cos (90)= 0

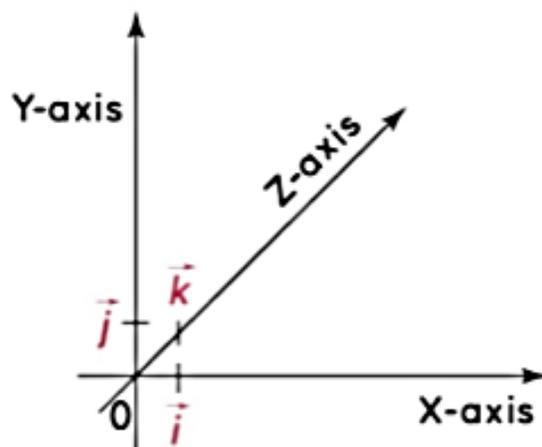
(Anton & Rorres, 2010, 625)

7.2.2 متجه الوحدة Unit Vector

المتجه بصورة عامة هو كيان هندسي له مقدار وإتجاه، والمتجهات لها نقطة بداية ونقطة طرفية تمثل الموضع النهائي للنقطة. ويمكن تطبيق عمليات حسابية مختلفة على المتجهات مثل الجمع والطرح والضرب ، ومتجه الوحدة (Unit Vector) أو المتجه الإتجاهي (Direction vector) في فضاء المتجه المعياري على أنه متجه له طول (Norm) يساوي 1 . يرمز إلى متجه الوحدة عادة بالرمز \hat{v} .

يمثل الضرب الداخلي لمتجهي وحدة في الفضاء الإقليدي جيب تمام (Cos) الزاوية الحاصلة

بينهما. (G. B. Arfken & H. J. Weber ,2000, 77)



شكل (2-1) متجهات الوحدة

(G. B. Arfken & H. J. Weber ,2000, 78)

8.2.2 متجهات الوحدة القياسية Orthonormal vectors

فانهما يطلق عليهما متجهات وحدة قياسية إذا كان طول كل متجه يساوي 1, وتكون متعامدة (Orthogonal) على بعضها.

فاذا كان لدينا متجهان غير صفريين (Non-Zero) :

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

فانهما يكونان متجهين متعامدة طبيعية (orthonormal) اذا كان :

$$x'y = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad \dots (2-7)$$

(Ali, et al., 2019, 13)

9.2.2 قانون الجيب تمام (Law of Cosines)

في هندسة المثلثات فان قانون جتا أو يدعى نظرية الكاشي (Al-Kashi's theorem) هو قانون يربط ضلع اي مثلث بضلعيه الآخرين وجتا الزاوية المحصورة بينهما، وينص قانون جتا على أنه في أي مثلث أطوال اضلاعه a, b, c المقابلة للزاويا α, β, γ على التوالي وحسب الشكل (2-2) فأن:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \quad \dots (2-8)$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta \quad \dots (2-9)$$

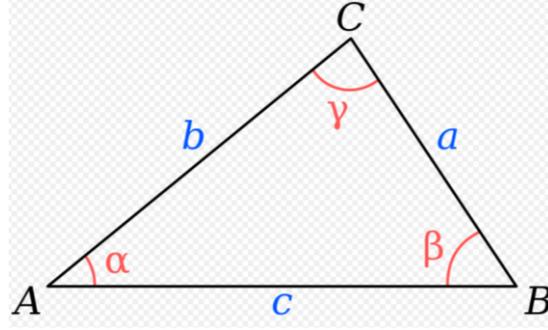
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \quad \dots (2-10)$$

اذ أن قانون جتا هو إعمام لنظرية فيثاغورس التي تنطبق على المثلثات القائمة الزاوية , فاذا كانت الزاوية γ زاوية قائمة (90 درجة او $\frac{\pi}{2}$ rad) , فاذا كان $\cos \gamma = 0$, فان قانون الجيب تمام يتحول الى نظرية فيثاغورس وكالآتي:

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \dots (2-11)$$

يعد قانون جيب تمام مفيداً لحساب الضلع الثالث من المثلث عندما يكون الضلعان والزاوية المغلقة معروفتين، وفي حساب زوايا المثلث إذا كانت الأضلاع الثلاثة معروفة.

(Pickover, 2009, 106)



شكل (2-2) قانون جيب تمام

3.2 الدائري و الدرجات Radians and degrees

توجد وحدتان لقياس الزوايا هي (Radians) و (Degrees). أول من طرح فكرة القياس بـ

(Radians) هو الرياضي البريطاني روجر كوتس، عام (1714). مع أنه لم يطلق على الفكرة كلمة

(Radians)، فقد فهم كوتس مدى بديهية المفهوم كوحدة للقياس الزاوي.

الزاوية نصف القطرية أو القياس الدائري أو التقدير الدائري ويرمز له بـ (rad) أو (°) وأي زاوية

تكتب بدون اي وحدة قياس فهذا معناه انها مقاسة بـ (Radians). وهي الوحدة الاساسية

لقياس الزوايا في المستوي وهي الوحدة الرسمية المعتمدة ضمن النظام الدولي للوحدات المستعملة

في الرياضيات والفيزياء .

وبشكل عام، فإن مقدار أي زاوية مركزيّة يحصرها نصف قطر ما بالراديان تساوي النسبة بين طول

القوس المقابل للزاوية وبين نصف قطر الدائرة، أي أن:

$$\theta = \frac{s}{r}$$

اذ ان:

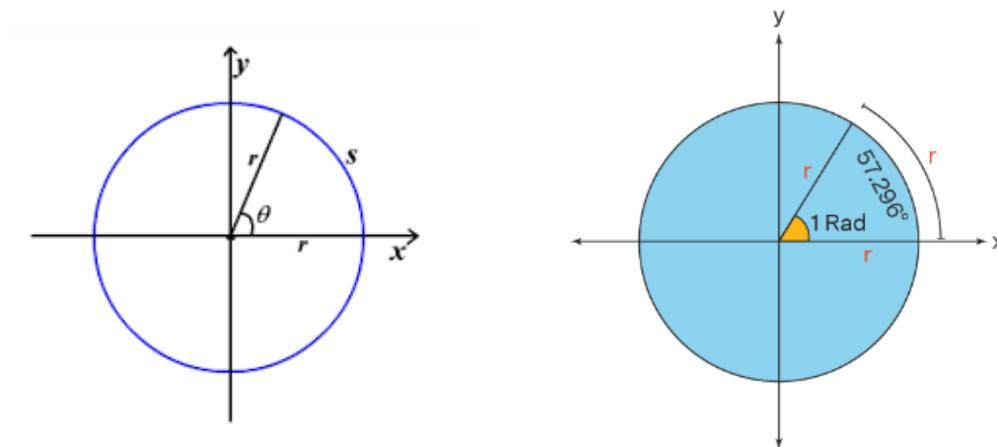
θ هي الزاوية المركزية

s طول القوس

r طول نصف قطر الدائرة

فبالإمكان حساب طول قوس في دائرة نصف قطرها r يقابل زاوية مركزية مقدارها θ :

$$s = r\theta$$

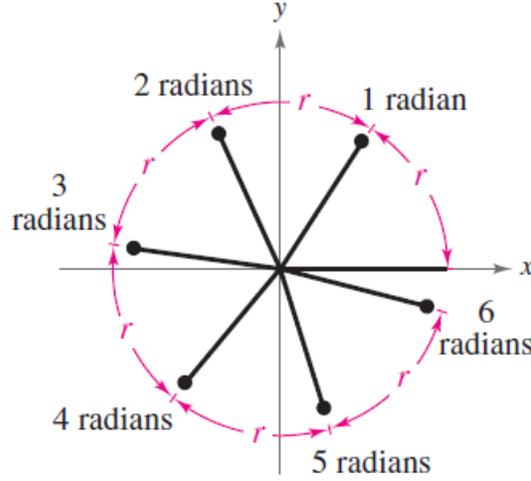


شكل (2-3) الدائري ضمن دائرة الوحدة

ونظراً لوجود ما يزيد عن ستة أطوال نصف قطر في دائرة كاملة، كما هو موضح في الشكل

(2-4). نظراً لأن وحدات القياس s و r هي نفسها ، فإن النسبة $\frac{s}{r}$ لا تحتوي على وحدات . أي إنها

رقم حقيقي.

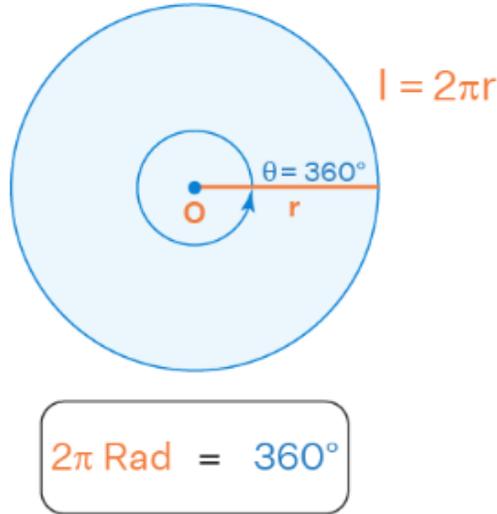


شكل (2-4) أطوال نصف القطر في دائرة كاملة

من هذا القانون بالإمكان الاستدلال على مقدار الراديان الواحد. فإنّ زاوية دائرية كاملة تعادل

360^0 ، وهي تقابل قوسًا يساوي كل محيط الدائرة، لذا فإنّ مقدارها بالراديان هو $2\pi = \frac{2\pi r}{r}$. إذا كانت

زاوية مقدارها 360^0 تعادل 2π راديان، فيعادل الراديان الواحد $\frac{180}{\pi}$.



شكل (2-5) حساب محيط الدائرة بالقياس الدائري مقابل الدرجات

وللتحويل من القياس الدائري الى درجات يجب ان نضرب الراديان بالقيمة $\frac{180}{\pi}$ لذلك فان :

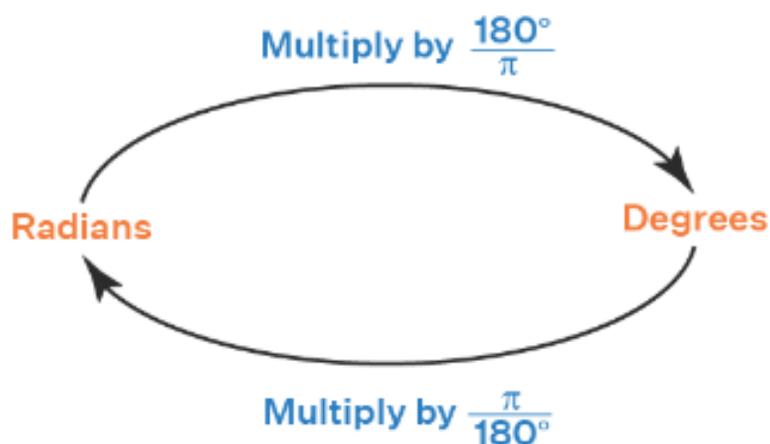
$$1 \text{ rad} = \frac{180}{\pi}$$

$$\frac{\pi}{3} \text{ rad} = \frac{\pi}{3} \frac{180}{\pi} = 60^{\circ}$$

وبالمقابل يمكن تحويل الدرجات الى القياس الدائري نضرب القيمة $\frac{\pi}{180}$ اي ان :

$$1^{\circ} = \frac{\pi}{180}$$

$$90^{\circ} = 90 \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$



شكل (2-6) القياس الدائري مقابل الدرجات

وفي حساب التفاضل والتكامل والتحليل الرياضي، يُنظر إلى الدوال المثلثية عمومًا على أنها دوال لأرقام حقيقية أو مركبة، بدلاً من الزوايا. في الواقع، يمكن تعريف الدالتين \sin و \cos لجميع الأعداد المركبة عن طريق الدالة الأسية عبر سلسلة القوى أو كحلول للمعادلات التفاضلية مع إعطاء قيم أولية معينة، دون الرجوع إلى مفاهيم هندسية. يمكن تعريف الدوال المثلثية الأربعة الأخرى (\tan ،

cot ، sec ، csc) على أنها حاصل قسمة ومقلوب للجيب وجيب التمام ، لذلك يُنظر إلى القياس الدائري (rad) على أنها الوحدة الطبيعية رياضياً لوصف قياسات الزاوية.

(Larson et al., 2008, 258-260) (Paul A., Michael A., 2011, 408-412)

4.2 كرة الوحدة (Unit Sphere)

هي كرة نصف قطرها (1) حول مركز معين، وبشكل عام هي مجموعة نقاط تكوّن المسافة بين نقطة مركزية ثابتة (نقطة الأصل) وأي نقطة على محيط الكرة تساوي (1) وهي مهمة في تحويل أي مجال إلى مجال وحدة عن طريق تركيبة من القياسات.

ليكن لدينا الفضاء الإقليدي R^n ، فان $(n - 1)$ من أبعاد كرة الوحدة هي مجموعة كل النقاط (x_1, x_2, \dots, x_n) حسب نظرية فيثاغورس تحقق المعادلة الآتية:

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1 \quad \dots (2-12)$$

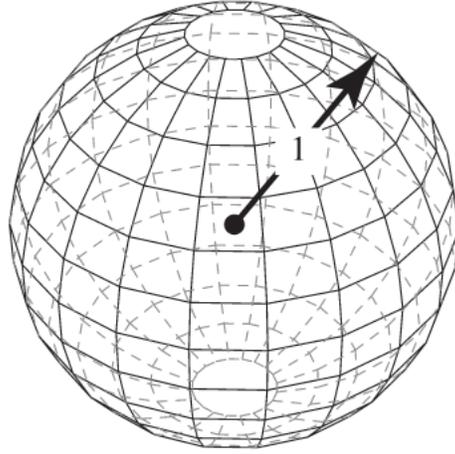
يظهر حجم كرة الوحدة في الفضاء الإقليدي متعدد الأبعاد، ومساحة سطح كرة الوحدة، في العديد من الصيغ المهمة للتحليل. إذ يمكن التعبير عن حجم كرة الوحدة ذات بعد n عن طريق استعمال دالة كاما وكالاتي: (R. Parks, 2014, 270)

$$v_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(1+\frac{n}{2})} = \begin{cases} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{(n/2)!} & \text{if } n \geq 0 \text{ is even} \\ \frac{\pi^{\frac{n}{2}} 2^{\frac{n}{2}}}{n!!} & \text{if } n \geq 0 \text{ is odd} \end{cases} \quad \dots (2-13)$$

إذ أن $n!!$ هو المفكوك المزدوج (Double factorial) أو شبه المفكوك (Semi Factorial) وهو حاصل ضرب جميع الأعداد الصحيحة من 1 إلى n التي تكافؤ رقم (زوجي أو فردي) من n وصيغته العامة كالاتي: (Callan, 2009, 5)

$$n!! = \prod_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} (n - 2k) = n(n - 2)(n - 4) \dots \quad \dots (2-14)$$

(Barrer, 2014, 115)



شكل (2-7) كرة الوحدة

5.2 دائرة الوحدة (Unit circle)

وهي حالة خاصة من كرة الوحدة (Unit Sphere) وتسمى أيضاً الدائرة المثلثية (Rectangular cycle) هي دائرة نصف قطرها يساوي الواحد في الفضاء الإقليدي R^n . أي أن المسافة من مركز الدائرة (نقطة الصفر) إلى أي نقطة في محيط الدائرة تساوي واحداً. وهي تسهل حسابات رياضية كثيرة تعتمد على حساب المثلثات إذ أن الوتر فيها يساوي 1.

تستعمل دائرة الوحدة في حساب المثلثات إذ يكون مركزها يقع في النقطة المتمركزة في الأصل $(0,0)$ في نظام الإحداثيات الديكارتية في المستوى الإقليدي، وطول نصف قطرها يساوي الواحد. يرمز لدائرة الوحدة في المستوى الإقليدي بالرمز S^1 والتعميم للأبعاد الثلاثية، الرباعية، ينتج كرة الوحدة (Unit sphere). وتستعمل في وصف ظواهر طبيعية كثيرة مثل الانتشار "الكروي" لأشعة الشمس أو أشعة النجوم، وكذلك في حل مسائل تصادم الجسيمات الأولية أو تشتتها أو انتشار الصوت حول مصدر للصوت.

إذا كانت النقطة (x, y) هي نقطة على محيط دائرة الوحدة، وكان $\|x\|$ و $\|y\|$ هي أطوال أرجل مثلث قائم الزاوية الذي وتره يساوي واحداً والذي يبدأ من النقطة $(0, 0)$ إلى النقطة (x, y) تشكل زاوية (θ) مع محور x الموجب. عندها يكون وحسب نظرية فيثاغورس التي تنص على ان مربع الوتر يساوي مجموع مربعي الظلعيين القائمين فان :

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \dots (2-15)$$

ومادامت $x^2 = (-x)^2$ فان انعكاس اي نقطة على دائرة الوحدة حول المحور x, y هو ايضاً انعكاس على دائرة الوحدة فان المعادلة (2-16) تنطبق على جميع النقاط (x, y) على دائرة الوحدة وليس فقط على النقاط الموجودة في الربع الأول من الدائرة .

ويمكن تعريف الدوال المثلثية الأساسية ببساطة باستعمال دائرة الوحدة. كما هو مبين في الشكل (2-8) ، فإن النقطة P على الجانب النهائي للزاوية (θ) في الموضع القياسي للزاوية المقاسة على طول قوس دائرة الوحدة لها إحداثياتها $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ بحيث يكون $\cos(\theta)$ هو الإحداثي الأفقي لـ P و $\sin(\theta)$ هو الإحداثي العمودي. بحيث ان:

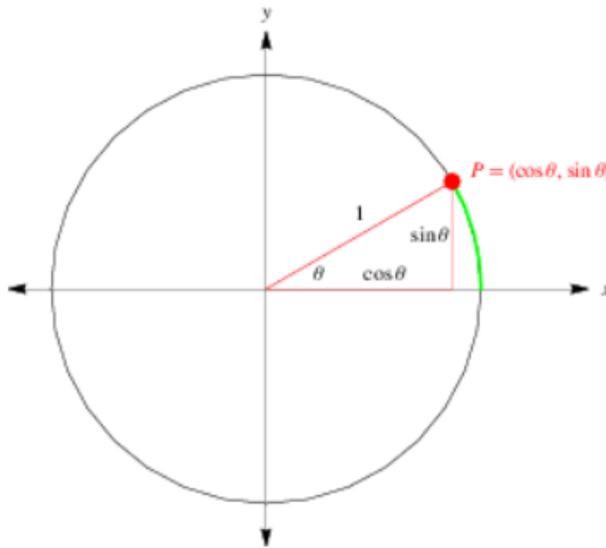
$$\cos(\theta) = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{x}{1} = x$$

$$\sin(\theta) = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{y}{1} = y$$

ونتيجة لذلك فان:

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1 \quad \dots (2-17)$$

وتكون الدوال المثلثية دورية على المدة (2π) .



شكل (2-8) دائرة الوحدة والمثلث القائم الزاوية الذي له الزاوية θ

(Weinstein, 2021, 32-33) (Binnenfeld et al., 2020, 22)

6.2 الإحصاء الدائري (Circular Statistics)

يشير مصطلح الإحصاء الدائري إلى فرع معين من فرع الإحصاء الذي يتعامل مع البيانات التي يمكن تمثيلها كنقاط على محيط دائرة الوحدة (Unit Circle). إذ يطلق على هكذا نوع من البيانات بالبيانات الدائرية (The Circular data). ومصطلح البيانات الدائرية يستعمل لغرض تمييزها عن البيانات الخطية (Linear Data) المعتاد عليها كثيراً في التحليلات. إذ إن فضاء البيانات الدائرية هو دائرة الوحدة، بينما للبيانات الخطية يكون الفضاء هو خط الأعداد الحقيقي R .

تدخل البيانات الدائرية في مختلف التخصصات مثل علم الأحياء، الطب، تحليل الصور، علوم الأرض، الفيزياء، الدراسات السياسية، وعلم الفلك، وفي الفضاء ثنائي الأبعاد، ويمكن تمثيل أي نقطة إما بإحداثياتها الديكارتية (x, y) أو بإحداثياتها القطبية (r, θ) .

في التحليل الدائري، يتم التركيز على الاتجاه فقط، لذلك يعد المتجه r بطول الوحدة (أي $r = 1$). لذلك، يمكن تمثيل أي نقطة على الدائرة كـ $(\cos \theta, \sin \theta)$.

ومن الأمثلة على البيانات الدائرية الاتجاهات المقاسة باستعمال أدوات مثل البوصلة أو المنقلة أو ريشة الطقس أو الفرجال. فمن المعتاد تسجيل مثل هذه الاتجاهات بالزوايا المعبر عنها بالدرجات (Degrees) أو الراديان (Radians) إما في اتجاه عقارب الساعة أو عكس اتجاه عقارب الساعة من نقطة أصل الدائرة، والتي يشار إليها باسم الاتجاه الصفري. فالمطلوب هو تحديد موقع النقطة والاتجاه وليس كما في البيانات على الخط الحقيقي؛ فالقيم الموجودة على يسار نقطة الأصل (0) تكون سالبة والقيم الموجودة على اليمين تكون موجبة. وبالنسبة للبيانات الدائرية، كل زاوية تعرف كنقطة على محيط دائرة الوحدة، تمامًا كما تحدد كل قيمة لمتغير خطي كنقطة على الخط الحقيقي. ومع زيادة القيمة المطلقة للمتغير الخطي، نبتعد عن نقطة الأصل. لذلك، في الخط الحقيقي، تكون القيمة 360 قريبة نسبيًا من القيمة 355 ولكنها بعيدة نسبيًا عن نقطة الأصل. ولكن بالنسبة للمتغيرات الدائرية تقابل الزاوية 355^0 نقطة على محيط دائرة الوحدة قريبة من تلك المقابلة لـ 360^0 ، وإن الزاويتين 0^0 و 360^0 تحددان النقطة نفسها بالضبط. هذه الطبيعة الدورية (Periodical) للبيانات الدائرية هي التي تجبرنا على التخلي عن الأساليب الإحصائية التقليدية المصممة للبيانات الخطية وتجعلنا نبحث عن تلك التي تخدم البيانات الدائرية وتأخذ هذه الأساليب في نظر الاعتبار بنية هذه البيانات. (Pewsey et al., 2013, 16)

7.2 البيانات الدائرية والنصف دائرية (Circular and semi-Circular data)

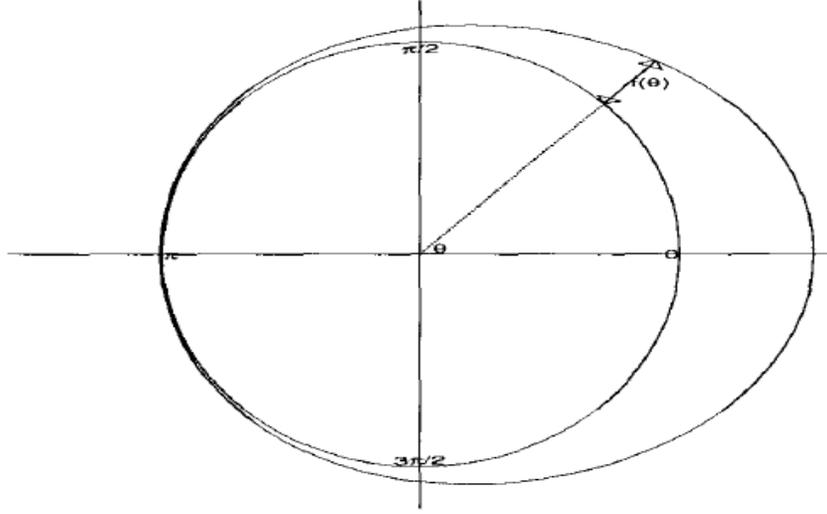
غالباً ما يتم تمثيل القياسات في أي مجال بعداً حقيقي، ولكن في الواقع وفي العديد من المجالات المتنوعة يمكن قياس أي مشاهدة على أنها اتجاه (Direction)، على سبيل المثال اتجاه الرياح، اتجاه الطيور المهاجرة كبيانات دائرية يمكن قياسها بالبوصلية أو الساعة، ويمكن أيضاً عدّ عمر الكون واتجاهات الكائنات الحية واتجاه الملوثات عدّها مشاهدات اتجاهية ويشار إلى مثل هذه البيانات بالبيانات الاتجاهية (Direction data)، إذ يمكن تمثيل الاتجاه كنقاط على محيط دائرة الوحدة أو متجهات وحدة تربط نقطة الأصل بهذه النقاط. ومن ثمّ تسمى البيانات ثنائية الأبعاد بالبيانات الدائرية (circular data) وتسمى المشاهدات في متعددة الأبعاد بالبيانات الكروية (Spherical data). ويمكن تمثيل البيانات الدائرية بالزاوية θ والتي مداها $[0, 2\pi]$ أو $[-\pi, \pi]$. والزاوية θ تكون دورية إذ أن $\theta = \theta + k2\pi$. وبجانب البيانات الدائرية فإن المتغير العشوائي الذي له قيمة على نصف دائرة الوحدة والتي لها المجال $[0, \pi]$ والتي تدعى بالبيانات المحورية (Axial) أو البيانات النصف دائرية (Half-Circular data) أما البيانات التي لها المدى $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ فتدعى بالبيانات الشبه دائرية (Semi-Circular data)

(Pramesti G, 2018, 2-3)

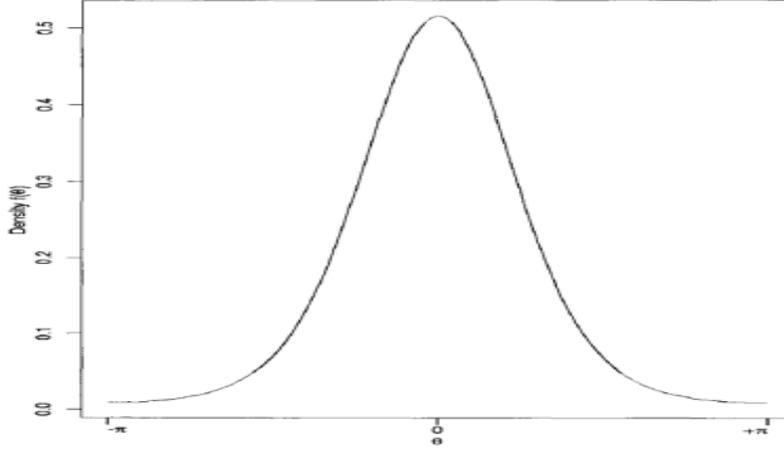
8.2 التوزيع الدائري (Circular distribution)

التوزيع الدائري هو توزيع احتمالي تتوزع احتمالاته على محيط دائرة الوحدة إذ كل نقطة على محيطها تُمثل باتجاه. لذلك تعدّ التوزيعات الدائرية طريقة لتعيين الاحتمالات ولمختلف الاتجاهات. ويكون مدى المتغير العشوائي الدائري (Circular random variable) (θ) الذي يكون مقياس بالراديان هو $[0, 2\pi]$ أو $[-\pi, \pi]$. وتقسّم التوزيعات الاحتمالية الدائرية إلى قسمين، الأول توزيعات دائرية متقطعة والتي تعين كتلة احتمالية قابلة للعد، وتوزيعات دائرية مستمرة (نسبة إلى مقياس Lebesgue على محيط الدائرة) وفي حالة البيانات الدائرية المستمرة فإن دالة الكثافة الاحتمالية الدائرية للمتغير العشوائي الدائري (θ) لها الخصائص الآتية:

1. $f(\theta) \geq 0$
2. $\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)d\theta = 1$; $-\infty < \theta < \infty$
3. $f(\theta) = f(\theta + k. 2\pi)$ for any integer k is periodical



شكل (2-9) التمثيل الدائري للتوزيع الدائري المستمر

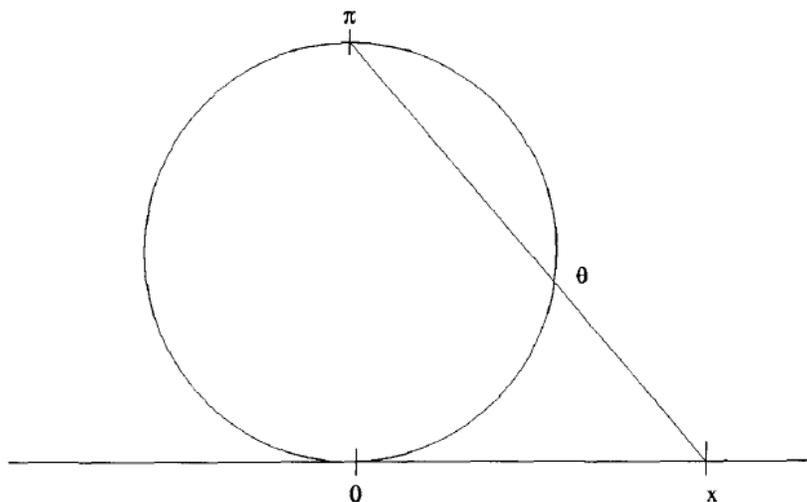


شكل (2-10) التمثيل الخطي للتوزيع الدائري المستمر

9.2 إسقاط المجسم العكسية (Inverse stereographic projection)

إن إسقاط خريطة لنصف الكرة الأرضية يوضح خطوط الأرض؛ لخط العرض وخط الطول المسقط على مستوى مماس بواسطة شعاع من نقطة على سطح الكرة المقابلة لنقطة التماس، كما في الشكل (2-11) فإن إسقاط المجسم هو تعيين دالة معينة تقوم بإسقاط شكل كروي على مستوى إقليدي. إذ يتم تحديد الإسقاط على الكرة بأكملها، باستثناء نقطة واحدة يتم تحديدها وهي نقطة الإسقاط. وهو طريقة لتصوير الكرة على أنها المستوى الاحداثي الذي منه نحصل على البيانات الدائرية. أي ان طريقة إسقاط المجسم العكسية طريقة لإسقاط المتغير العشوائي من خط الأعداد الحقيقية إلى البيانات الاحداثية على دائرة الوحدة بحيث يمكن استعمال الاحصاءات الدائرية لإنشاء التوزيعات الدائرية أو النصف دائرية عن طريق دالة تحويل تحول من البيانات على خط الأعداد الحقيقية إلى بيانات اتجاهية مقاسة بالزوايا.

إذا كان لدينا المتغير العشوائي المقاس على خط الأعداد الحقيقية R فعند إسقاط خط من نقطة من نقاط المتغير العشوائي x إلى دائرة الوحدة فإن هذا الخط يصنع زاوية في نقطة تقاطع الخط المماس مع محيط دائرة الوحدة، إن طريقة الإسقاط العكسية تتم عن طريق الدالة $x = \tan(\theta)$ فإن الدالة العكسية لهذه الدالة هي $\theta = \tan^{-1}(x)$ كما موضح بالشكل (2-11)



شكل (2-11) الإسقاط المجسم العكسي

(S. Girija, & Yedlapalli, 2017) (Yedlapalli & P. , Sastry, 2019)

10.2 توزيع كاما المعكوس (Inverted Gamma distribution)

يعد توزيع كاما المقلوب (المعكوس) من التوزيعات الاحتمالية المستمرة بمعلمتين على خط الأعداد الحقيقية الموجب وهو التوزيع المقلوب للمتغير العشوائي الذي له توزيع كاما (Gamma distribution) . (Abid & Alhassany, 2016, 17)

إن دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع كاما (Gamma distribution) تعطى وفق الصيغة الآتية:

$$f(x, \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \quad ; 0 < x < \infty \quad \dots (2-29)$$

إذ أن α هي معلمة الشكل (Shape parameter) و β معلمة الـ rdhs (Scale parameter)

إذ أن $\Gamma(\alpha)$ تعرف بدالة كاما والتي تحسب كما يأتي :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx = (\alpha - 1)! \quad \dots (2-30)$$

عندما تكون قيمة α عدد صحيح موجب ، أما عندما تكون قيمة α عدد غير صحيح عندئذ يتم احتسابها كالاتي:

$$\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) = \frac{1.3.5...(2\alpha-1)}{2^\alpha} \dots (2-31)$$

ويعرف توزيع كما بأسم توزيع إيرلانك (Erlang distribution) إذا كانت قيمة (α) عدد صحيح وغالباً ما يتم الإشارة إلى المتغير (x) الذي يتبع توزيع كما ذي المعلمتين (α, β) بالرمز الآتي:

$$X \sim \Gamma(\alpha, \beta) \text{ or } X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$$

إذا عرفنا $Y = g(X) = \frac{1}{X}$ فان دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي Y تعرف كالتالي:

$$f(y, \alpha, \beta) = f(x, \alpha, \beta) \left| \frac{\partial}{\partial y} g(X)^{-1}(Y) \right|$$

$$Y = g(X) = \frac{1}{X} \Rightarrow X = \frac{1}{g(X)} \Rightarrow X = \frac{1}{Y} \Rightarrow dX = -\frac{1}{Y^2} dY$$

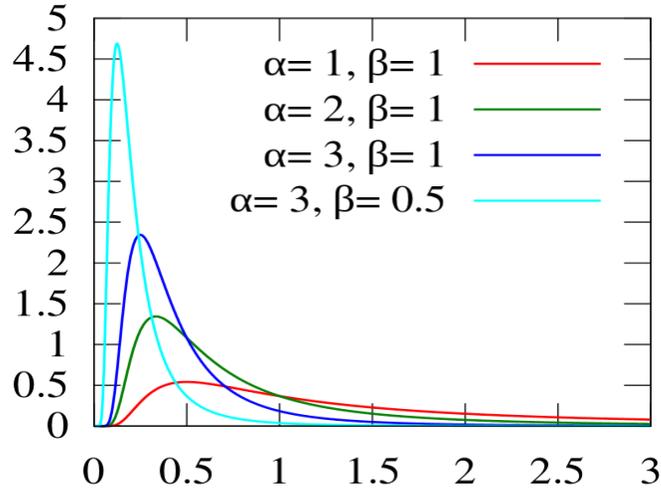
$$\left| \frac{\partial}{\partial y} g(X)^{-1}(Y) \right| = \left| -\frac{1}{Y^2} \right| = \frac{1}{Y^2}$$

$$= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1} e^{-\beta\left(\frac{1}{y}\right)} \frac{1}{y^2}$$

$$\therefore f(y, \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{y}} ; \quad 0 < y < \infty \quad \dots (2-32)$$

إذ أن α هي معلمة الشكل (Shape parameter) و β معلمة القياس (Scale parameter) , ويرمز

له بالرمز $Y \sim \text{IG}(\alpha, \beta)$



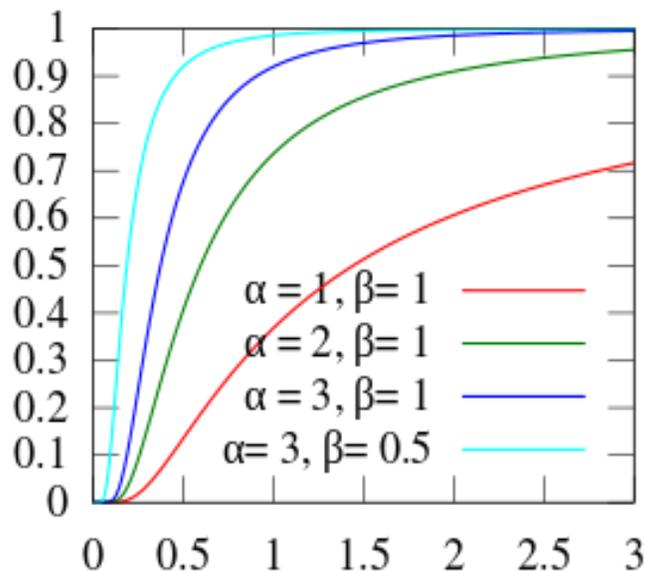
شكل (2-12) منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع كما المعكوس

وان دالة الكثافة الاحتمالية التراكمية لتوزيع كما المعكوس (C.D.F) هي:

$$F(y) = \frac{\Gamma(\alpha, \frac{\beta}{y})}{\Gamma(\alpha)} \quad y, \alpha, \beta > 0 ; \quad \dots (2-33)$$

اذ أن $\Gamma(\alpha, \frac{\beta}{y})$ هي دالة كاما الناقصة العليا وهي :

$$\Gamma(S, y) = \int_y^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt \quad \dots (2-34)$$



شكل (2-13) منحنى دالة الكثافة الاحتمالية التجميعية لتوزيع كاما المعكوس

أما العزوم ذو الرتبة r حول نقطة الاصل (r 'th moment about origin) :

$$\begin{aligned} E(Y^r) &= \int_{-\infty}^{\infty} y^r f(y) dy = \int_0^{\infty} y^r \frac{\beta^\alpha}{\Gamma\alpha} y^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{y}} dy \\ &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma\alpha} \int_0^{\infty} y^{r-\alpha-1} e^{-\frac{\beta}{y}} dy \\ &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma\alpha} \int_0^{\infty} y^{-(\alpha-r+1)} e^{-\frac{\beta}{y}} dy \\ &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma\alpha} \Gamma(\alpha - r) \\ &= \frac{\beta^\alpha}{(\alpha-1)!} (\alpha - r - 1)! \quad \dots (2-35) \end{aligned}$$

فاذا كان $r = 1$ فان التوقع للمتغير العشوائي الذي له توزيع كاما المعكوس يكون كالاتي :

$$E(y) = \frac{\beta}{\alpha-1} \quad \text{for } \alpha > 1 \quad \dots (2-36)$$

$$V(y) = \frac{\beta^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)} \quad \text{for } \alpha > 2 \quad \dots (2-37)$$

(Rivera et al., 2021,1) (Abid & Alhassany, 2016, 17)

11.2 توزيع كاما المعكوس المحول النصف دائري المقترح

(Suggested Half Circular Transformed Inverted Gamma distribution)

إذا كان المتغير العشوائي Y له توزيع كاما المعكوس بدالة الكثافة الإحتمالية الآتية:

$$\therefore f(y, \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{y}} ; \quad 0 < y < \infty \quad \dots (2-38)$$

فان توزيع كاما المعكوس المحول النصف دائري والذي يرمز له بالرمز $HCTIG(\alpha, \beta)$ يمكن الحصول عليه باستعمال تقنية التحويل الى نصف دائري عن طريق التحويلة الآتية: (Rambli et al.,)

(2019)

$$\theta = 2 \tan^{-1}(y) \quad ; \quad 0 < \theta < \pi \quad \dots (2-39)$$

$$y = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad \dots (2-40)$$

ليكن:

$$m(\theta) = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad \dots (2-41)$$

فإن دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع المحول النصف دائري كالاتي:

$$g(\theta) = f(m(\theta)) |m'(\theta)| \quad \dots (2-42)$$

إذ إن:

$$\begin{aligned} |m'(\theta)| &= \left| \frac{1}{2} \sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right| \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1 - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right] \\ &= \frac{1}{1 + \cos(\theta)} \quad \dots (2-43) \end{aligned}$$

(Abuzaid,2017,3-4)

$$\begin{aligned} \therefore f(\theta, \alpha, \beta) &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}} \frac{1}{1 + \cos(\theta)} \\ &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)(1 + \cos(\theta))} \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}} ; \quad 0 < \theta < \pi \quad \dots (2-44) \end{aligned}$$

ولاثبات ان توزيع HCTIG بانه دالة احتمالية نتبع الآتي:

$$\int_0^\pi \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))} \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan(\frac{\theta}{2})}} d\theta \quad \dots (2-45)$$

ولاثبات هذا التكامل (2-45) نحتاج الى استعمال بعض العلاقات بين الدوال المثلثية وكما يأتي:

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1-\cos(\theta)}{2}} \quad \dots (2-46)$$

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1+\cos(\theta)}{2}} \quad \dots (2-47)$$

$$2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 1 + \cos(\theta) \quad \dots (2-48)$$

وباستعمال العلاقة (2-48) فان التكامل في المعادلة (2-45) يصبح بدلالة نصف الزاوية وكالآتي:

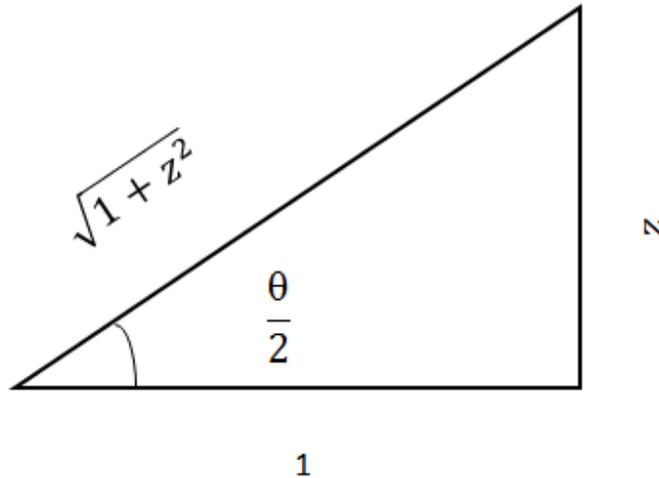
$$\int_0^\pi \frac{\beta^\alpha}{2\Gamma(\alpha)\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan(\frac{\theta}{2})}} d\theta \quad \dots (2-49)$$

ولاثبات ان التكامل (2-49) يساوي الواحد نستعمل طريقة التحويل المثلثي الآتي:

$$\text{Let } z = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \Rightarrow \theta = 2 \tan^{-1}(z) \Rightarrow d\theta = \frac{2}{1+z^2} dz$$

وان :

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \quad \dots (2-50)$$



شكل (2-2) يوضح العلاقة (2-50)

بما $\theta \in (0, \pi)$ اذن $z \in (0, \infty)$, لذلك يكون

$$\begin{aligned}
 & \therefore \int_0^\pi \frac{\beta^\alpha}{2\Gamma(\alpha) \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}} d\theta \\
 & = \int_0^\infty \frac{\beta^\alpha}{2\Gamma(\alpha) \frac{1}{1+z^2}} z^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{z}} \frac{2}{1+z^2} dz \\
 & = \int_0^\infty \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} z^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{z}} dz \quad \dots (2-51)
 \end{aligned}$$

والآن:

$$\text{Let } y = \frac{\beta}{z} \Rightarrow z = \frac{\beta}{y}$$

$$|J| = \left| \frac{\partial z}{\partial y} \right| = \left| \frac{-\beta}{y^2} \right| = \frac{\beta}{y^2} \Rightarrow y \in (0, \infty)$$

$$\begin{aligned}
 & \therefore \int_0^\infty \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} z^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{z}} dz \\
 & = \int_0^\infty \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{\beta}{y}\right)^{-(\alpha+1)} e^{-y} \frac{\beta}{y^2} dy \\
 & = \frac{\beta^\alpha \beta^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y} dy \\
 & = \frac{\beta^\alpha \beta^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha) = 1
 \end{aligned}$$

وان الدالة التوزيعية لتوزيع HCTIG يمكن ان تستخرج كلاتي:

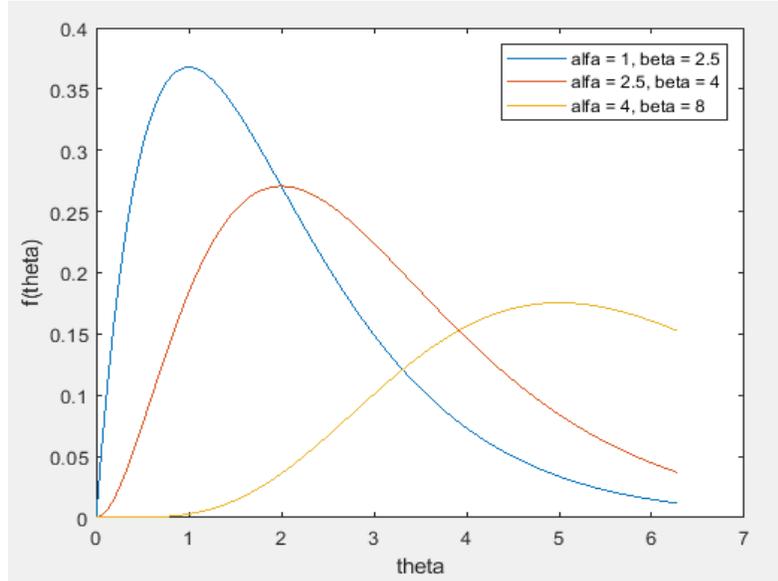
$$\begin{aligned}
 G(\theta) & = p(\Theta \leq \theta) = p(2 \tan^{-1}(y)) = p\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \\
 & = \int_0^{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{y}} dy \\
 & = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)} y^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{y}} dy
 \end{aligned}$$

$$\text{Let } u = \frac{\beta}{y} \Rightarrow y = \frac{\beta}{u} \Rightarrow dy = -\frac{\beta}{u^2} du$$

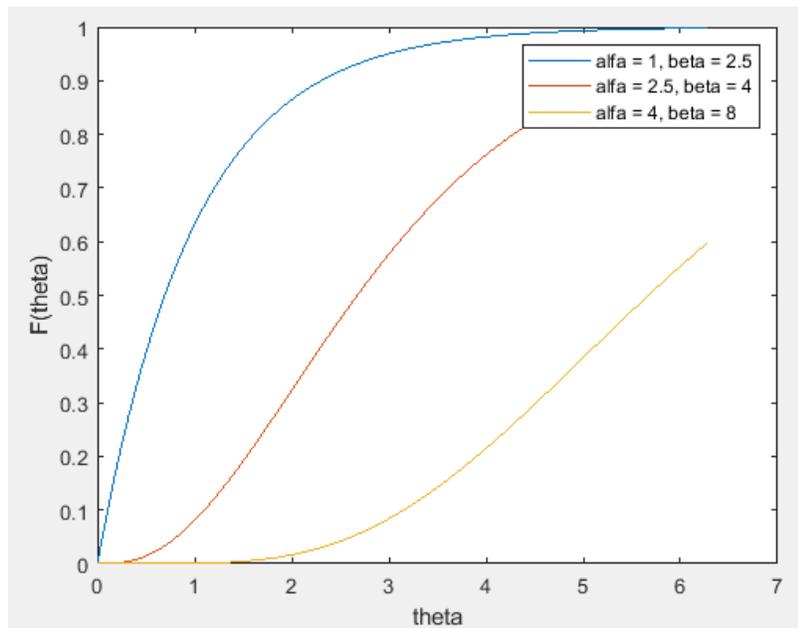
$$\therefore G(\theta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)} \left(\frac{\beta}{u}\right)^{-(\alpha+1)} e^{-u} -\frac{\beta}{u^2} du$$

$$= \frac{-1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\tan(\frac{\theta}{2})} u^{\alpha-1} e^{-u} du$$

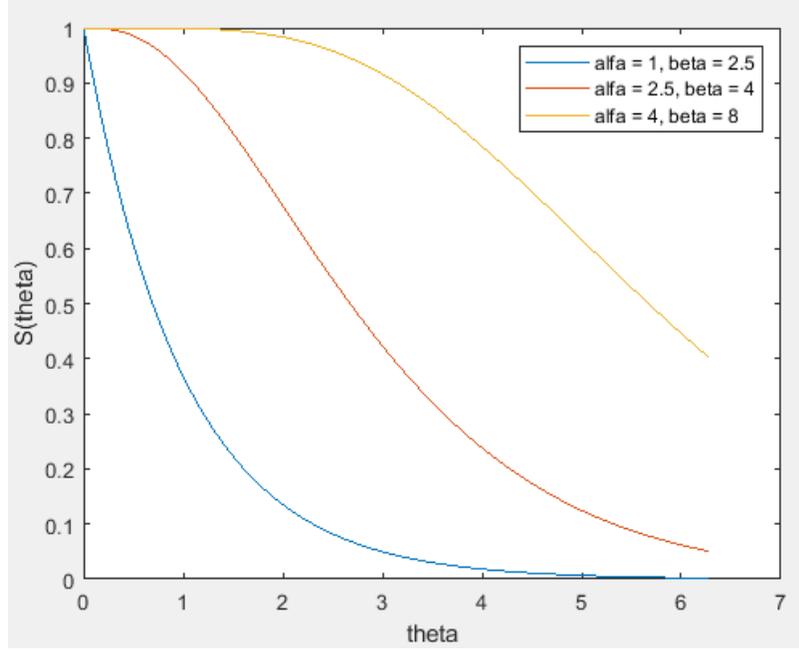
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\tan(\frac{\theta}{2}), \alpha) \quad \dots (2-52)$$



شكل (2-14) منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع كاما المعكوس النصف دائري المحول



شكل (2-15) منحنى دالة الكثافة الاحتمالية التجميعية لتوزيع كاما المعكوس النصف دائري المحول



شكل (2-16) منحنى دالة البقاء لتوزيع كاما المعكوس النصف دائري المحول

اما العزوم المثلثية (Trigonometric moments) لتوزيع HCTIG بموجب دورية الـ \sin و \cos وبالزاوية العشوائية θ كالاتي:

$$\varphi_m = \alpha_m + i\beta_m \quad \dots (2-53)$$

اذ أن الجزء الحقيقي للعزوم المثلثية كالاتي:

$$\alpha_m = E(\cos(m^\theta)) = \int_0^\pi \cos(m^\theta) dF(\theta)$$

$$= \int_0^\pi \cos(m^\theta) \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)(1 + \cos(\theta))} \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan(\frac{\theta}{2})}}$$

$$= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\pi \frac{1}{\left(2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)} \cos(m^\theta) \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan(\frac{\theta}{2})}} d\theta \quad \dots (2-54)$$

وان الجزء التخيلي للعزوم المثلثية يعطي كالاتي:

$$\begin{aligned}\beta_m &= E(\cos(m^\theta)) = \int_0^\pi \sin(m^\theta) dF(\theta) \\ &= \int_0^\pi \sin(m^\theta) \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)(1 + \cos(\theta))} \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan(\frac{\theta}{2})}} \\ &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\pi \frac{1}{(2\cos^2(\frac{\theta}{2}))} \sin(m^\theta) \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan(\frac{\theta}{2})}} d\theta \quad \dots (2-55)\end{aligned}$$

لذلك فان العزم المثلثي من الدرجة m يعطى كالآتي:

$$\begin{aligned}\varphi_m &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\pi \frac{1}{(2\cos^2(\frac{\theta}{2}))} \cos(m^\theta) \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan(\frac{\theta}{2})}} d\theta + \\ &+ i \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\pi \frac{1}{(2\cos^2(\frac{\theta}{2}))} \sin(m^\theta) \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan(\frac{\theta}{2})}} d\theta \quad \dots (2-56)\end{aligned}$$

فان الوسط المثلثي نحصل عليه عندما m=1 وكالآتي:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\pi \frac{1}{(2\cos^2(\frac{\theta}{2}))} \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan(\frac{\theta}{2})}} d\theta + \\ &+ i \sin(1) \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\pi \frac{1}{(2\cos^2(\frac{\theta}{2}))} \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan(\frac{\theta}{2})}} d\theta \quad \dots (2-57)\end{aligned}$$

والعزم المثلثي الثاني نعوض m=2 وكالآتي:

$$\begin{aligned}\varphi_2 &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\pi \frac{1}{(2\cos^2(\frac{\theta}{2}))} \cos(2^\theta) \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan(\frac{\theta}{2})}} d\theta + \\ &+ i \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\pi \frac{1}{(2\cos^2(\frac{\theta}{2}))} \sin(2^\theta) \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan(\frac{\theta}{2})}} d\theta \quad \dots (2-58)\end{aligned}$$

وعليه فان التباين المثلثي نحصل عليه كالآتي:

$$\begin{aligned}
 Var(\theta) &= \varphi_2 - (\varphi_1)^2 \\
 &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\pi \frac{1}{(2\cos^2(\frac{\theta}{2}))} \cos(2\theta) \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan(\frac{\theta}{2})}} d\theta + \\
 & i \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\pi \frac{1}{(2\cos^2(\frac{\theta}{2}))} \sin(2\theta) \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan(\frac{\theta}{2})}} d\theta - \\
 & \left(\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\pi \frac{1}{(2\cos^2(\frac{\theta}{2}))} \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan(\frac{\theta}{2})}} d\theta + \right. \\
 & \left. i \sin(1) \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\pi \frac{1}{(2\cos^2(\frac{\theta}{2}))} \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan(\frac{\theta}{2})}} d\theta \right)^2 \quad \dots (2-59)
 \end{aligned}$$

12.2 طرق التقدير Estimation Methods

1.12.2 طريقة الامكان الأعظم (Maximum Likelihood Method)

قدمت طريقة الإمكان الأعظم لأول مرة من العالم (Fisher, 1922) وتعد هذه الطريقة من

الطرائق المهمة في التقدير لأنها تعطي مقدرات لها خصائص جيدة مثل خاصية الثبات (Invariant)،

الكفاءة والكفاية واحياناً خاصية الاتساق، وان مبدأ هذه الطريقة يكمن في إيجاد مقدر المعلمة

(المعلمات) الذي تجعل دالة الإمكان في نهايتها العظمى.

وتعد دالة الامكان (Likelihood function) دالة احتمالية مشتركة لـ \mathbf{p} من المتغيرات

العشوائية والتي تستعمل في تقدير المعلمات وهي:

$$L = L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p) \quad \dots (2-60)$$

وان (P) من المعادلات الناتجة من المشتقة الجزئية للوغاريتم دالة الامكان ومساواتها بالصفر بالشكل الآتي:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \text{Log}L}{\partial \theta_1} &= 0 \\ \frac{\partial \text{Log}L}{\partial \theta_2} &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial \text{Log}L}{\partial \theta_p} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots (2-61)$$

وبحل المعادلات (2-61) نحصل على مقدرات الامكان الاعظم (MLE):

$$\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_p$$

(Rohatgi,., & A.K.Md.E., 2015)

فاذا كانت لدينا عينة عشوائية $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ من توزيع معكوس كما النصف دائري المحول (HCTIG) بدالة كثافة احتمالية كما في معادلة (2-44), فان دالة الامكان يمكن ان تكتب بالشكل الآتي :

$$L = \prod_{i=1}^n f(\theta_i) \quad \dots (2-62)$$

$$\begin{aligned} &= \prod_{i=1}^n \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))} \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan(\frac{\theta}{2})}} \\ &= \frac{\beta^{n\alpha}}{\Gamma(\alpha)^n} \prod_{i=1}^n \frac{1}{(1+\cos(\theta_i))} \left(\tan\left(\frac{\theta_i}{2}\right) \right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan(\frac{\theta_i}{2})}} \end{aligned}$$

$$l = \ln(L) = n\alpha \ln(\beta) - n \ln \Gamma(\alpha) - \sum_{i=1}^n \ln((1 + \cos(\theta_i))) - (\alpha + 1) \sum_{i=1}^n \ln \left(\tan \left(\frac{\theta_i}{2} \right) \right) - \beta \sum_{i=1}^n \frac{1}{\tan \left(\frac{\theta_i}{2} \right)} \quad \dots (2-63)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \alpha} = 0$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \alpha} = n \ln(\hat{\beta}) - n \Psi(\alpha) - \sum_{i=1}^n \ln \left(\tan \left(\frac{\theta_i}{2} \right) \right) = 0 \quad \dots (2-64)$$

اذ أن: $\Psi(\alpha) = \frac{\Gamma'(\hat{\alpha})}{\Gamma(\hat{\alpha})}$ وان $\Gamma'(\hat{\alpha})$ هي (Digamma function) والتي تمثل المشتقة الاولى

لدالة كما . وان $\Gamma(\hat{\alpha})$ هي دالة كما (Gamma function) والتي تساوي $\int_0^{\infty} \theta^{\hat{\alpha}-1} e^{-\theta} d\theta$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \beta} = \frac{n\hat{\alpha}}{\hat{\beta}} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{\tan \left(\frac{\theta_i}{2} \right)} = 0$$

$$\hat{\beta} = \frac{n\hat{\alpha}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\tan \left(\frac{\theta_i}{2} \right)}} \quad \dots (2-65)$$

نلاحظ ان المعادلتين (2-64) و(2-65) لا يمكن ان تحل باستعمال الطرائق التحليلية الاعتيادية لذلك

سيتم الحصول على مقدر α و β بأحدى الطرائق العددية التكرارية المستعملة لحل المعادلات الرياضية

غير الخطية في برنامج ماتلاب.

2.12.2 مقدر اقل مسافة Hellinger ذو الخطوة الواحدة

(The One-Step Minimum Hellinger Distance Estimator)

قدمت هذه الطريقة من قبل (Beran, 1977) لايجاد مقدرات فعالة وذات كفاية عالية ومبدأ هذه

الطريقة هو استعمال طريقة نيوتن رافسون لمرة واحدة فقط بافتراض تقدير اولي للمعلمة (المعلمات) المراد

تقديرها والتي تجعل مسافة Hellinger (مصطلح يستخدم لتحديد التشابه بين توزيعين احتماليين) اقل

ما يمكن بين مقدر كثافة معلمي $f_{\delta}(\theta)$ ومقدر لامعلمي $f_n(\theta)$ بالاستناد إلى زاوية دائرية (θ) أي أن:

$$\hat{\delta}_{OHD} = \operatorname{argmax}_{\delta \in \Theta} \int_0^{\pi} f_{\delta}(\theta)^{\frac{1}{2}} f_n(\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta \quad \dots (2-61)$$

اذ أن (argmax) مختصر لـ $(\text{The arguments of the maxima})$ يمثل الوسيط الاعظم وهو دالة رياضية تبحث عن قيمة المقدر الذي يحقق اقصى نهاية عظمى للدالة.

وليجاد مقدر **OHD** نحتاج الى الآتي:

مقدر كثافة لبية (نواة) والذي يعتمد على دالة وزن تستعمل في تقدير الدالة اللامعلمية وهو يعطي اوزان لنقاط البيانات المجاورة في اجراء التقدير ودوال **(Kernel)** تكون مستمرة ومحدودة ومتماثلة حول نقطة الصفر وقيمتها حقيقية وتكاملها مساو للواحد، وهي دالة الكثافة الاحتمالية المتماثلة $g_n(\theta)$ والذي يمكن ان يستعمل كمقدر كثافة لامعلمي $f_n(\theta)$. وبما ان التوزيع المدروس نصف دائري، وهذا يتطلب ان يكون مقدر الكثافة اللبي دائريا ايضاً.

فليكن لدينا الكثافة اللبية الدائرية في زاوية معينة كالآتي:

$$g_n(\beta) = \frac{C_{\gamma}(k_c)^n}{n} \sum_{i=1}^n k_c \left(\frac{1 - \cos(\beta - \theta)}{\gamma^2} \right) \quad \dots (2-62)$$

اذ ان:

n حجم العينة

k_c الدالة اللبية من الدرجة C

C_{γ} ثابت يحدد مجال التكامل لدالة الكثافة اللبية $g_n(\beta)$.

γ معلمة التمهيد التي تسيطر على تمهيد المعلمة (Smoothing Parameter) والتي تدعى

(Bandwidth) اي عرض الحزمة او تسمى سعة القيد او حجم النافذة او معلمة الانتشار،

ومن خصائصها ان تكون غير عشوائية ومتماثلة وموجبة الحدود.

سيتم استعمال النواة الدائرية Von-misses الشائعة وهي $k_c(\theta) = e^{-\theta}$ وتبقى المسألة الأهم هي

كيفية اختيار معلمة الحزمة γ والذي يكون مهمة لكيفية سلوك مقدر كثافة النواة . هنالك العديد من

الطرق لاختيار معلمة الحزمة، نختار منها طريقة الاختيار التلقائي عن طريق الدالة الآتية:

$$\gamma_{Auto} = \left(\frac{4\pi^{0.5}(I_0(\bar{k}))}{\bar{k}(2I_1(2\bar{k})+3\bar{k}I_2(2\bar{k}))n} \right)^{\frac{1}{5}} \quad \dots (2-63)$$

اذ أن:

\bar{k} مقدر مناسب لمعلمة كثافة Von-misses k يتم افتراضه لتحقيق خصائص الدالة.

$I_0(\bar{k})$ دالة بسل من النوع الأول

وبذلك يكون مقدر المعلمة حسب طريقة OHD كالآتي:

$$\hat{\delta} = \hat{\delta}_{in} - \frac{\int_0^\pi \dot{S}_{\hat{\delta}_{in}}(\theta) g_n(\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta}{\int_0^\pi \ddot{S}_{\hat{\delta}_{in}}(\theta) g_n(\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta} \quad \dots (2-64)$$

اذ ان:

$$S_{\hat{\delta}_{in}}(\theta) = f_\delta(\theta)^{\frac{1}{2}}$$

$\dot{S}_{\hat{\delta}_{in}}(\theta)$ المشتقة الاولى لل $S_{\hat{\delta}_{in}}(\theta)$ بالنسبة للمعلمة δ

$\ddot{S}_{\hat{\delta}_{in}}(\theta)$ المشتقة الثانية لل $S_{\hat{\delta}_{in}}(\theta)$ بالنسبة للمعلمة δ

(Haocheng et al., 2018,19-20) (J. Karunamuni & Wu, 2011, 3-5)

$$S_{\delta_{in}}(\theta) = f_{\delta}(\theta)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)(1 + \cos(\theta))} \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)^{-\frac{(\alpha+1)}{2}} e^{-\frac{\beta}{2 \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}} \quad \dots (2-65)$$

$$\dot{S}_{\alpha_{in}}(\theta) = \frac{\left(\frac{\beta^{\alpha} \ln(\beta) \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))} \frac{\beta^{\alpha} \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))} \right)}{2 \left(\frac{\beta^{\alpha} \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))} \right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{\left(\frac{\beta^{\alpha} \ln(\beta) \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}} - \beta^{\alpha} \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))} \right)}{2 \left(\frac{\beta^{\alpha} \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))} \right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{\left(\frac{\beta^{\alpha} \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}} (\ln(\beta) - 1)}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))} \right)}{2 \left(\frac{\beta^{\alpha} \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))} \right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{(\ln(\beta) - 1)}{2} \sqrt{\frac{\beta^{\alpha} \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))}} \quad \dots (2-66)$$

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{S}_{\hat{\alpha}_{in}}(\theta) &= \frac{\left(\frac{\beta^\alpha \ln(\beta) \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))} - \frac{\beta^\alpha \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))} \right)^2}{4 \left(\frac{\beta^\alpha \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))} \right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2 \sqrt{\frac{\beta^\alpha \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))}}} \\
 &= \frac{2\beta^\alpha \ln(\beta) \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} \ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) e^{-\frac{\beta}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))} + \frac{\beta^\alpha \ln(\beta) \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))} \\
 &= \frac{\left(\frac{\beta^\alpha \ln(\beta) \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))} - \frac{\beta^\alpha \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))} \right)^2}{4 \left(\frac{\beta^\alpha \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))} \right)^{\frac{3}{2}}} + \\
 &\quad \frac{1}{2 \sqrt{\frac{\beta^\alpha \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))}}} - \frac{2\beta^\alpha \ln(\beta) \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} \ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) e^{-\frac{\beta}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))} + \\
 &\quad \frac{\beta^\alpha \ln(\beta) \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))} \\
 &= \frac{\left(\frac{\beta^\alpha \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}} (\ln(\beta)-1)}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))} \right)^2}{4 \left(\frac{\beta^\alpha \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))} \right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2 \sqrt{\frac{\beta^\alpha \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))}}} - \\
 &\quad \frac{2\beta^\alpha \ln(\beta) \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} \ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) e^{-\frac{\beta}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))} + \frac{\beta^\alpha \ln(\beta) \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\left(\beta^\alpha \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}} \right)^2 (\ln(\beta)-1)^2}{(\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta)))^2} \\
 = & \frac{\left(\beta^\alpha \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}} \right)^{\frac{3}{2}}}{4(\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta)))^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2\sqrt{\frac{\beta^\alpha \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))}}} - \\
 & \frac{2\beta^\alpha \ln(\beta) \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)^{-(\alpha+1)} \ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) e^{-\frac{\beta}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))} + \frac{\beta^\alpha \ln(\beta) \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))} \\
 = & \frac{(\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta)))^{\frac{3}{2}} \left(\beta^\alpha \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}} \right)^2 (\ln(\beta)-1)^2}{(\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta)))^2} + \\
 & \frac{1}{2\sqrt{\frac{\beta^\alpha \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))}}} - \frac{2\beta^\alpha \ln(\beta) \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)^{-(\alpha+1)} \ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) e^{-\frac{\beta}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))} + \\
 & \frac{\beta^\alpha \ln(\beta) \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))} \\
 = & \frac{(\ln(\beta)-1)^2}{\sqrt{(\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))) \left(\beta^\alpha \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}} \right)}} + \frac{1}{2\sqrt{\frac{\beta^\alpha \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))}}} - \\
 & \frac{2\beta^\alpha \ln(\beta) \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)^{-(\alpha+1)} \ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) e^{-\frac{\beta}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))} + \frac{\beta^\alpha \ln(\beta) \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(\ln(\beta)-1)^2}{\sqrt{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta)) \left(\beta^\alpha \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}} \right)}} + \frac{1}{2\sqrt{\frac{\beta^\alpha \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))}}} \\
 &\frac{2\beta^\alpha \ln(\beta) \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} \ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) e^{-\frac{\beta}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}} + \beta^\alpha \ln(\beta) \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))} \\
 &= \frac{(\ln(\beta)-1)^2}{\sqrt{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta)) \left(\beta^\alpha \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}} \right)}} + \frac{1}{2\sqrt{\frac{\beta^\alpha \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))}}} \\
 &\frac{\beta^\alpha \ln(\beta) \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{1}{\beta} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)} (2 \ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) + 1)}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))} \dots (2-67)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{S}_{\beta_{in}}(\theta) &= \frac{\left(\frac{\beta^\alpha \alpha \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}}{\beta \Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))} - \frac{\beta^\alpha \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} \ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) e^{-\frac{\beta}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}}{\beta^2 \Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))} \right)}{2 \left(\frac{\beta^\alpha \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))} \right)^{\frac{1}{2}}} \\
 &= \frac{\left(\frac{\beta^{\alpha+1} \alpha \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}} - \beta^\alpha \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} \ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) e^{-\frac{\beta}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}}{\beta^2 \Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))} \right)}{2 \left(\frac{\beta^\alpha \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))} \right)^{\frac{1}{2}}} \\
 &= \frac{\left(\beta^{\alpha+1} \alpha \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}} - \beta^\alpha \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} \ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) e^{-\frac{\beta}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}} \right)}{2\beta^2 \left(\beta^\alpha \Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta)) \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}} \right)^{\frac{1}{2}}} \dots (2-68)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{S}_{\beta_{in}}(\theta) = & - \left(\frac{\beta^\alpha \alpha (\tan(\frac{\theta}{2}))^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan(\frac{\theta}{2})}}}{\beta \Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))} + \frac{\beta^\alpha \alpha (\tan(\frac{\theta}{2}))^{-(\alpha+1)} \ln(\tan(\frac{\theta}{2})) e^{-\frac{\beta}{\tan(\frac{\theta}{2})}}}{\beta^2 \Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))} \right)^2 \\ & + \left(\frac{\beta^\alpha \alpha (\tan(\frac{\theta}{2}))^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan(\frac{\theta}{2})}}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))} \right)^{\frac{3}{2}} \\ & + \frac{1}{\sqrt{\frac{\beta^\alpha \alpha (\tan(\frac{\theta}{2}))^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan(\frac{\theta}{2})}}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))}}} \left(\frac{\beta^\alpha \alpha^2 (\tan(\frac{\theta}{2}))^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan(\frac{\theta}{2})}}}{\beta^2 \Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))} - \frac{\beta^\alpha \alpha (\tan(\frac{\theta}{2}))^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{\beta}{\tan(\frac{\theta}{2})}}}{\beta^2 \Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))} + \right. \\ & \left. \frac{2\beta^\alpha \alpha (\tan(\frac{\theta}{2}))^{-(\alpha+1)} \tan(\frac{\theta}{2}) e^{-\frac{\beta}{\tan(\frac{\theta}{2})}}}{\beta^3 \Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))} + \frac{\beta^\alpha \alpha (\tan(\frac{\theta}{2}))^{-(\alpha+1)} \tan(\frac{\theta}{2})^2 e^{-\frac{\beta}{\tan(\frac{\theta}{2})}}}{\beta^4 \Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))} \right) \dots (2-69) \end{aligned}$$

3.12.2 مقدر المسافة العامة (The General spacing estimator)

قدمت هذه الطريقة من (BRÄNNSTRÖM,2011,15) لايجاد مقدرات فعّالة باستعمال المسافات المتداخلة والمسافات غير المتداخلة بين القياسات الدائرية.

ليكن لدينا قياسات نصف دائرية θ_i مرتبة من الاصغر الى الاعلى وكالاتي

$$0 < \theta_{(1)} < \theta_{(2)} \dots < \theta_{(n)} < \pi$$

ومن ثم تحويلها الى الاحتمالات المقابلة لكل مشاهدة حسب الدالة التراكمية للتوزيع المدروس وكالاتي:

$$0 < F_{\theta_{(1)}} < F_{\theta_{(2)}} \dots < F_{\theta_{(n)}} < \pi$$

وستكون لدينا حالتان لـ m من المسافات المرتبة، الاولى تعتمد على المسافات المتداخلة والثانية تعتمد على المسافات غير المتداخلة ومنهما نحصل على مقدر لمعاملات التوزيع النصف دائري المدروس وكالاتي:

الحالة الاولى: مقدر المسافة العامة المعتمد على المسافات الغير المتداخلة الذي قدم من (Ekstrom, 1997), ليكن لدينا m من المسافات المرتبة الغير متداخلة والمعرفة كالاتي:

$$D_{i,m}^{NOL} = \begin{cases} (F_{\delta}(\theta_{(i+1)m}) - F_{\delta}(\theta_{im})) & i = 1, 2, \dots, k-1 \\ 1 - F_{\delta}(\theta_{km}) + F_{\delta}(\theta_m) & i = k \end{cases} \dots (2-70)$$

اذ ان m عدد صحيح بما فيه الكفاية ليكون أصغر من n

$$K = \frac{n}{m}$$

الحالة الثانية: مقدر المسافة العامة المعتمد على المسافات المتداخلة الذي قدم من (Ekstrom, 1997) , ليكن لدينا m من المسافات المرتبة المتداخلة والمعرفة كالاتي:

$$D_{i,m}^{OL}(\delta) = \begin{cases} (F_{\delta}(\theta_{i+m}) - F_{\delta}(\theta_i)) & i = 1, 2, \dots, n - m \\ 1 - F_{\delta}(\theta_i) + F_{\delta}(\theta_{i+m-n}) & i = n - m + 1 \dots n \end{cases} \dots (2-71)$$

فاذا كان $m=3$ فان المسافة الاولى $F_{\delta}(\theta_4) - F_{\delta}(\theta_1)$ في كلتا الحالتين و المسافة الاثنية :

$$D_{2,3}^{NOL}(\delta) = F_{\delta}(\theta_7) - F_{\delta}(\theta_4)$$

$$D_{2,3}^{OL}(\delta) = F_{\delta}(\theta_5) - F_{\delta}(\theta_2)$$

وعموماً , ليكن لدينا مسافات مرتبة عامة من الدرجة m يرمز لها $D_{i,m}$ التي تقابل $D_{i,m}^{NOL}(\delta)$ و $D_{i,m}^{OL}(\delta)$ فان دالة المسافة تعرف كالاتي:

$$S_{h,n}(\delta) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^S h(k D_{i,m}(\delta)) \dots (2-72)$$

اذ إن:

في حالة المسافات الغير متداخلة $S=K$

في حالة المسافات المتداخلة $S=n$

$h(\cdot)$ دالة محدبة تخضع لبعض القيود العامة والتي تساوي:

$$h(\theta) = h_{\lambda}(\theta) = \begin{cases} \frac{\theta^{\lambda+1}-1}{\lambda(\lambda+1)} & \text{if } \lambda \neq -1, 0 \\ -\log(\theta) & \text{if } \lambda = -1 \\ \theta \log(\theta) & \text{if } \lambda = 0 \end{cases} \dots (2-73)$$

وتكون قيم $(\lambda = -1, 0)$ (Ekström et al. 2018), فباستعمال الحقيقة الرياضية التي تنص على

$$\log(\theta) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\theta^p - 1}{p} \quad \text{ان}$$

فان مقدر GS يكون كالاتي:

$$\hat{\delta}_{\theta} = \underset{\delta \in \theta}{\operatorname{argmin}} S_{h,n}(\delta) \dots (2-74)$$

اذ أن (argmin) مختصر لـ $(\text{The arguments of the maine})$ يمثل الوسيط الاعظم وهو دالة رياضية تبحث عن قيمة المقدر الذي يحقق ادنى نهاية عظمى للدالة.

(BRÄNNSTRÖM, 2018, 16-17)

وتطبيق هذه الطرائق تمثل في شكل (3-1) الذي يمثل المخطط الانسيابي لعملية المحاكاة في تقدير المعلمات صفحة (50).

13.2 معايير المقارنة:

1- **معدل التحيز Bias**: يمثل معدل التحيز مطلق مجموع الفرق بين القيمة المقدرة والقيمة الحقيقية مقسوماً على عدد مرات تكرار التجربة وصيغته كالاتي:

$$\text{Bias} = \left| \frac{\sum_{i=1}^r (\hat{\phi} - \phi)}{r} \right| \quad \dots (3-3)$$

r عدد مرات تكرار تجارب المحاكاة

ϕ القيمة الحقيقية

2- **متوسط مربعات الخطأ (MSE) Mean Square of Errors**: هو معدل مجموع مربعات الفرق بين المعلمة المقدرة والمعلمة الحقيقية مضافاً له مربع التحيز, وصيغته كالاتي:

$$\text{MSE} = \text{Var} + \text{Bias}^2 \quad \dots (3-4)$$

(Ali H. Abuzaid, 2017, 12)

3- نسبة التغطية للمعلمة المقدرة CP

The actual coverage probabilities (CP) of nominal 95% credible/confidence intervals

في الإحصاء احتمالية التغطية هي تقنية لحساب مقدار الثقة، وهو نسبة عدد مرات ظهور المعلمة ضمن الفترة المقدرة الى عدد مرات التجربة، ويعطى بالصيغة الاتية:

$$\text{CP} = \frac{\text{عدد مرات ظهور المعلمة}}{\text{عدد مرات التجربة}} \quad \dots (3-5)$$

فكلما كان احتمال التغطية عاليا كانت المعلمات المقدرة أفضل.

(Panichkitkosolkul, W., 2016, 110)



الفصل الثالث

المبحث الأول

الجانب التجريبي

1.1.3 تمهيد (Preface)

أستعمل أسلوب المحاكاة مونت-كارلو لاختبار قابلية طرائق تقدير معاملات توزيع كما النصف دائري المحول والتي تم عرضها في الجانب النظري من الرسالة، ثم المقارنة بين هذه الطرائق عن طريق معيار معدل تحيز (Bias) ومعيار متوسط مربعات خطأ (MSE) ومعيار نسبة التغطية (CP)، وكذلك شمل هذا الفصل بعض المفاهيم العامة للمحاكاة وكذلك وصف لتجربة المحاكاة الخاصة بالرسالة من حيث أحجام العينات وكذلك النماذج الافتراضية الخاصة بقيم المعلمات الافتراضية، وتم عرض نتائج تجربة المحاكاة في جداول.

2.1.3 المحاكاة (Simulation)

تعد دراسات المحاكاة أداة مهمة للبحث الإحصائي. إذ إنها تساعدنا على فهم خصائص الأساليب الإحصائية ومقارنة الطرائق المختلفة. وهي عملية تطبيق للخيال على واقع افتراضي تجريبي لغرض فحص مشكلة معينة أو قياس أداء معين لغرض دراسة السلوك وبإعطاء النتائج على الواقع الحقيقي، أي هو عملية تقليد لنظام معين ينطوي بناء تاريخ اصطناعي مع مميزات النظام الحقيقي لغرض فهم ذلك النظام أفضل ما يكون ودراسة سلوكه وتطوره بمرور الوقت. وكثيراً ما نجد في الواقع الحقيقي أن هناك عمليات تكون معقدة الفهم والتحليل لذلك فمن الأفضل أن نوصف هذه العمليات بصورة مشابهة للصور الحقيقية بنماذج معينة، ففهم النموذج يحقق لنا قدرًا من الإدراك للعملية الأصلية أو الواقع الحقيقي عن طريق محاكاة النموذج، ومن الطبيعي أن درجة المشابهة بين أي تجربة محاكاة والواقع الحقيقي تعتمد على مدى مطابقتها أو مشابهة نموذج المحاكاة للنظام الحقيقي. لقد تعددت أساليب المحاكاة ولاسيما بعد التطور السريع الذي حصل في استعمال الحاسبة الإلكترونية ولكونها الأسلوب الفعال الذي يمكننا من إدارته بشكل تطبيقي واسع في التطبيق العملي.

ومن المبادئ الأساسية للمحاكاة باستعمال الحاسبة وضع برنامج يمثل أو يشابه سلوك العملية الحقيقية بشكل مقارب للواقع الحقيقي قدر الامكان، وغالباً ما يكون هذا الواقع معقداً جداً لتمثيله أو تقليده بصورة متقنة في برنامج الحاسبة وعلى الرغم من ذلك فإن أسلوب المحاكاة يمكن أن يعطي معلومات مفيدة عن الواقع الحقيقي الذي يشابهه، ونماذج المحاكاة الأكثر شبه للواقع الحقيقي تكون أكثر دقة في النتائج والمعلومات المستخلصة منها. إن أول مراحل استعمال أسلوب المحاكاة هو توليد المتغيرات العشوائية قيد الدراسة، كما أن أي تجربة محاكاة ما هي إلا عبارة عن نوع معين من أنواع المعاينة إذ تسحب هذه العينة من المجتمع الافتراضي الممثل للظاهرة المدروسة بأحجام مختلفة من العينات، وتكرار العملية مرات كثيرة بدلاً من أن تسحب من المجتمع الحقيقي وبذلك فإن أسلوب المحاكاة يمكن أن يحقق للباحثين حلولاً تحليلية

وكذلك يؤمن قاعدة تجريبية تكون دليلاً لهم مع القاعدة النظرية لاختيار الاسلوب الملائم او الطريقة الملائمة لتحليل ودراسة بيانات الظواهر التي يدرسونها عن طريق مطابقة خصائصها مع الانواع التي طبقت المحاكاة عليها. (Silva & et al., 2010 ,429-430)

3.1.3 مراحل تطبيق تجارب المحاكاة:

تتضمن تجارب المحاكاة المراحل الاتية:

المرحلة الأولى: تعد هذه المرحلة من اهم المراحل التي تعتمد عليها المراحل اللاحقة إذ يتم فيها اختيار القيم الافتراضية، أي تعيين احجام العينات المفترضة وكما يأتي:

$$n = 10, 30, 50, 100, 200$$

اذ تم الحصول على القيم الافتراضية تجريبياً من إجراء تجارب عدة واختيار القيم التي إستقرت عندها التقديرات وأعطت أفضل النتائج كما مبينة بالجدول الاتي:

جدول (3-1) قيم المعلمات الافتراضية

Parameter	Model			
α	1			
β	0.5	1	2	3
α	2.5			
β	0.5	1	2.5	3.5
α	0.5			
β	1.5	2	4	5
α	4			
β	1.5	2	4	5
α	1.5			
β	1.5	3.5	5.5	8

الجدول (3-1) يمثل القيم للمعلمات الافتراضية التي حصلنا عليها بتكرار تجارب المحاكاة مساوياً لـ (r = 1000) لكل تجربة.

المرحلة الثانية: توليد البيانات:

لغرض توليد بيانات توزيع HCTIG سيتم استعمال قاعدة الرفض والقبول (Accept and Reject) بالاعتماد على التوزيع الأسي العمومي (Generalized exponential distribution) وفقاً للخطوات

الآتية: (Kundu & D. Gupta, 2007)

1. نضع:

$$\alpha = \frac{\left(1 - e^{-\frac{1}{2}}\right)^\alpha}{\left(1 - e^{-\frac{1}{2}}\right)^\alpha + \frac{\alpha e^{-1}}{2^\alpha}} \quad \dots (3-1)$$

$$\beta = \left(1 - e^{-\frac{1}{2}}\right)^\alpha + \frac{\alpha e^{-1}}{2^\alpha} \quad \dots (3-2)$$

2. نوّلد متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع المنتظم U على المدة (الفترة (0, 1))

$$3. \text{ إذا كان } U \leq a, \text{ فإن } y = -2 \ln \left[1 - (Ub)^{\frac{1}{\alpha}}\right]$$

4. نوّلد متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع المنتظم V على الفترة (0, 1) ويكون مستقلاً عن U.

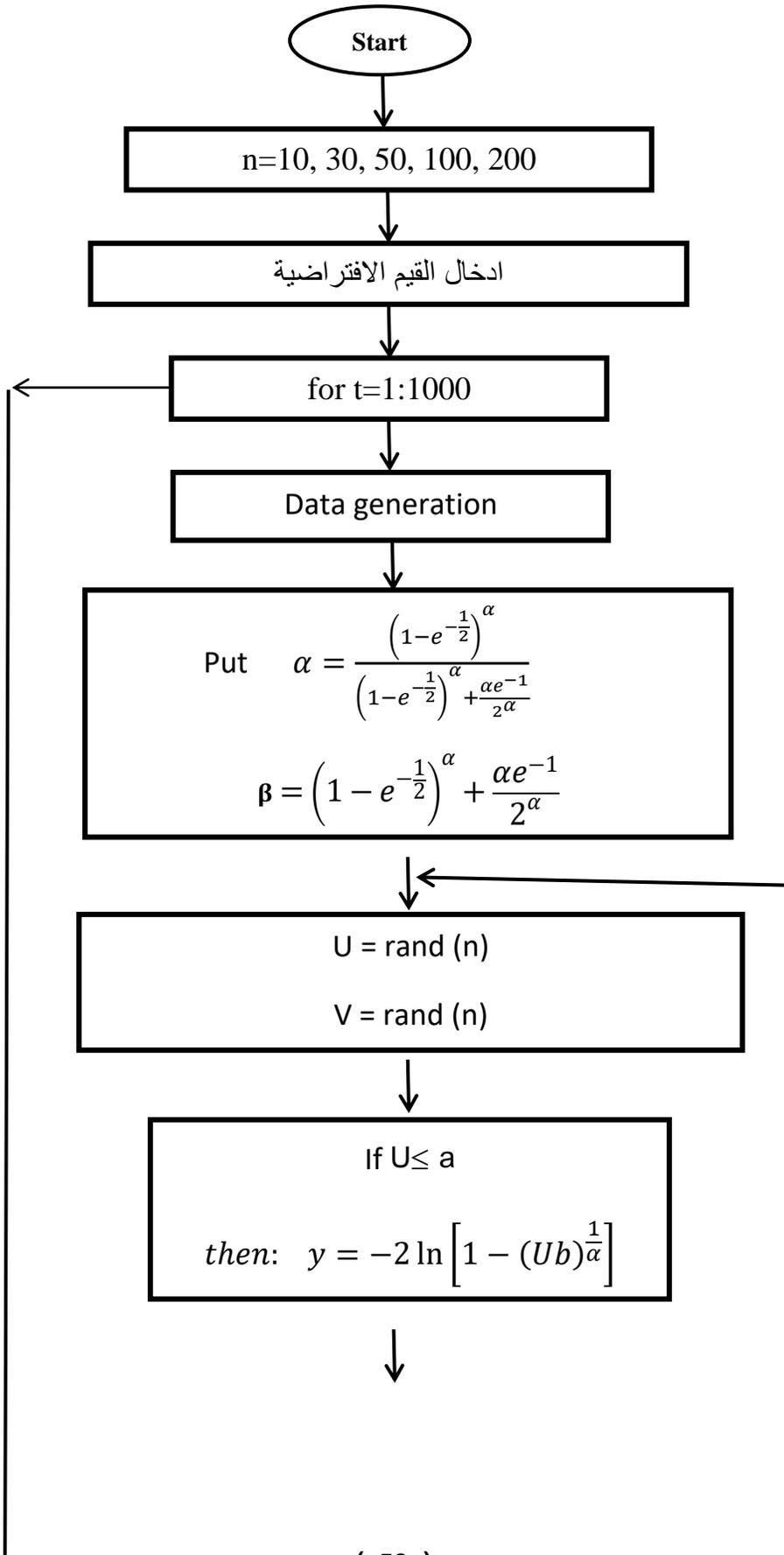
$$5. \text{ إذا كان } V \leq \frac{y^{\alpha-1} e^{-\frac{y}{2}}}{2^{\alpha-1} \left(1 - e^{-\frac{y}{2}}\right)^{\alpha-1}} \text{ فإن } V \text{ هو توزيع كما بمعلمتين, عدا ذلك نعود الى الخطوة 2.}$$

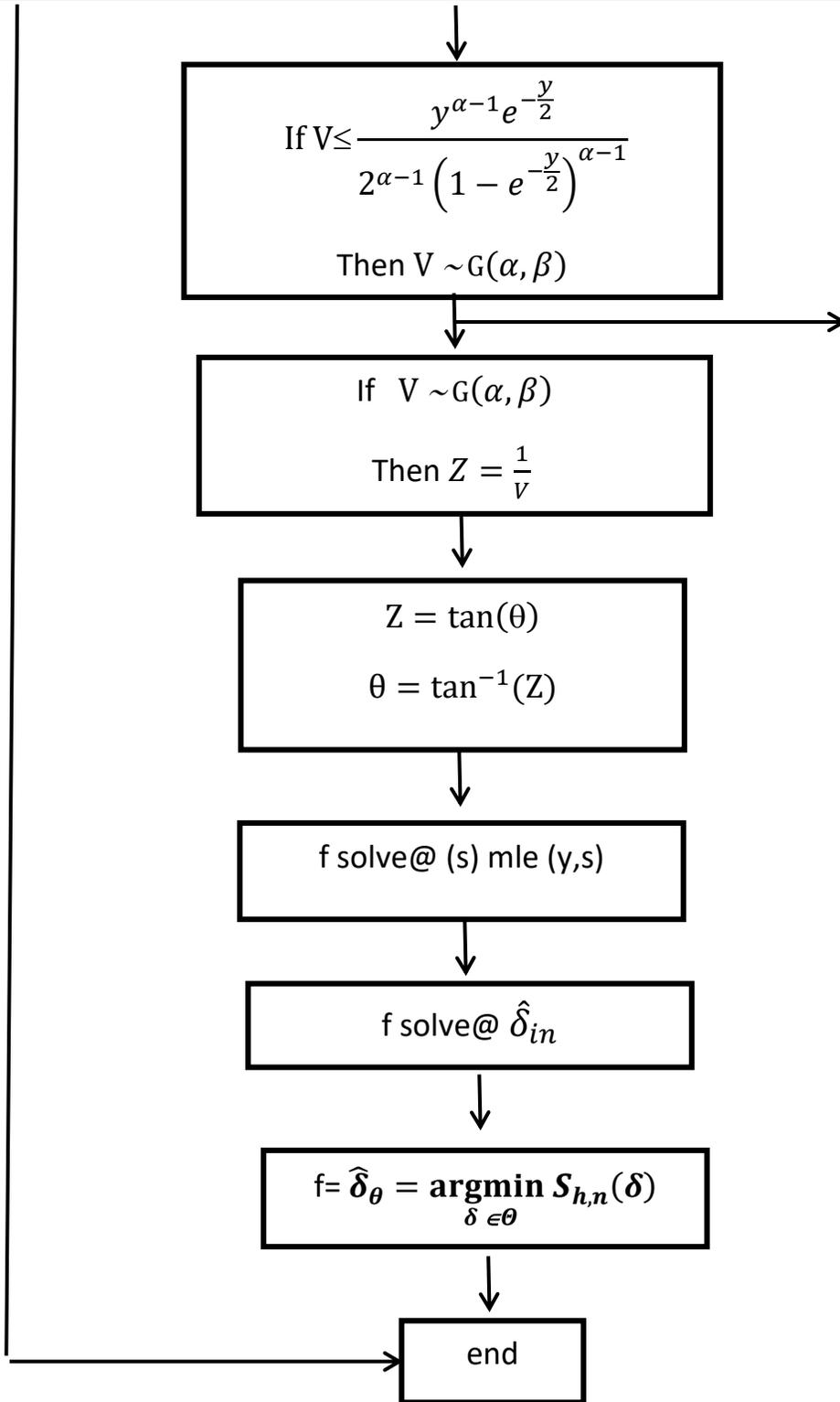
$$6. \text{ إذا كان } V \text{ هو توزيع كما فان } Z = \frac{1}{V} \text{ هو توزيع كما المعكوس بمعلمتين.}$$

7. باستعمال تقنية اسقاط المجسم العكسي عن طريق الدالة $Z = \tan(\theta)$ فان الدالة العكسية

$$\text{لهذه الدالة هي } \theta = \tan^{-1}(Z)$$

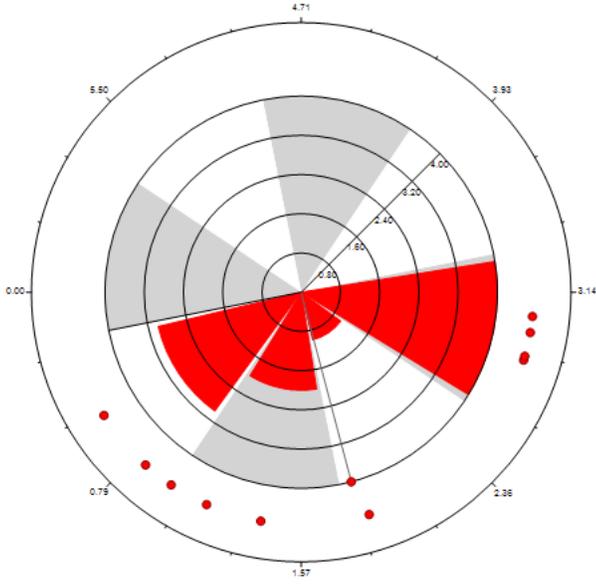
والاشكال (3-1) الى (3-5) توضح البيانات الدائرية التي تم توليدها حسب احجام العينات المفترضة



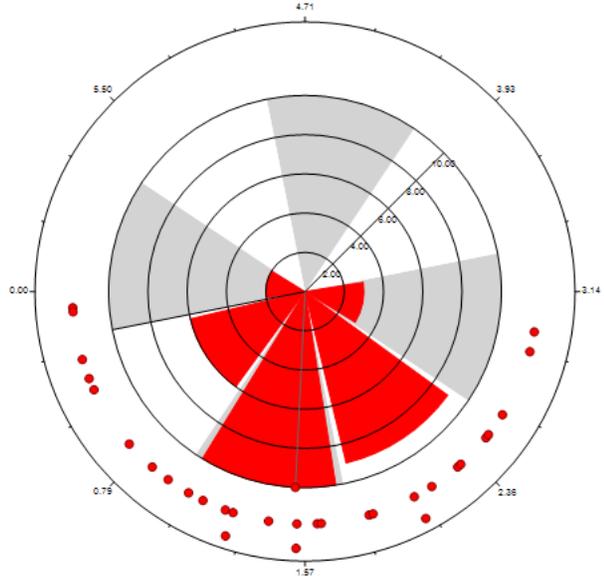


شكل (3-1) مخطط انسيابي لعملية المحاكاة

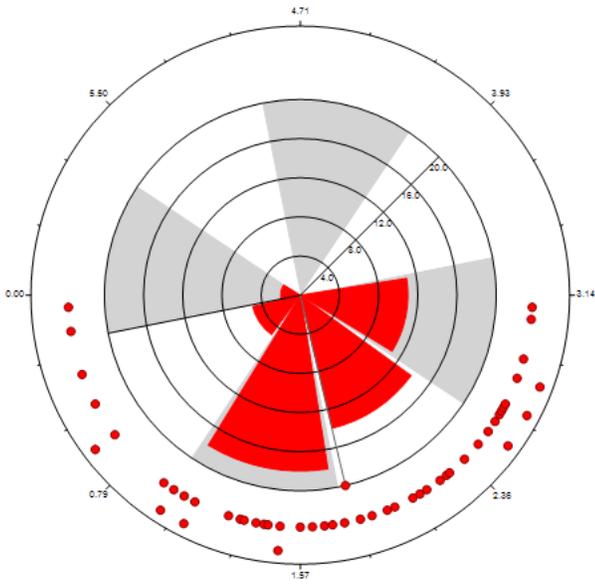
(الباحث)



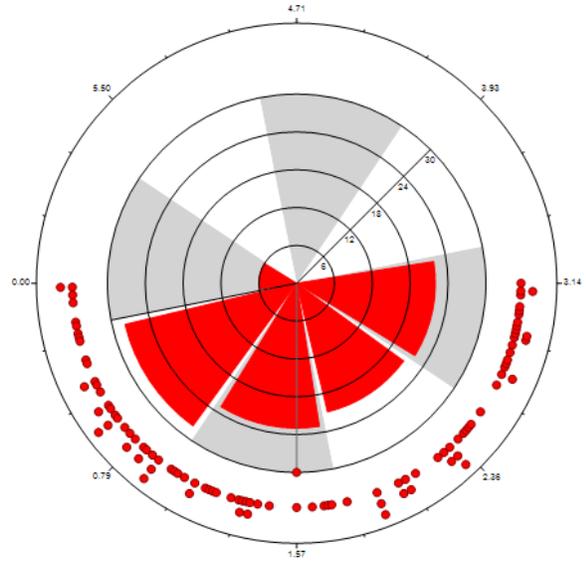
شكل (3-1) عينة توزيع معكوس كاما النصف دائري
المحول بحجم عينة $n=10$



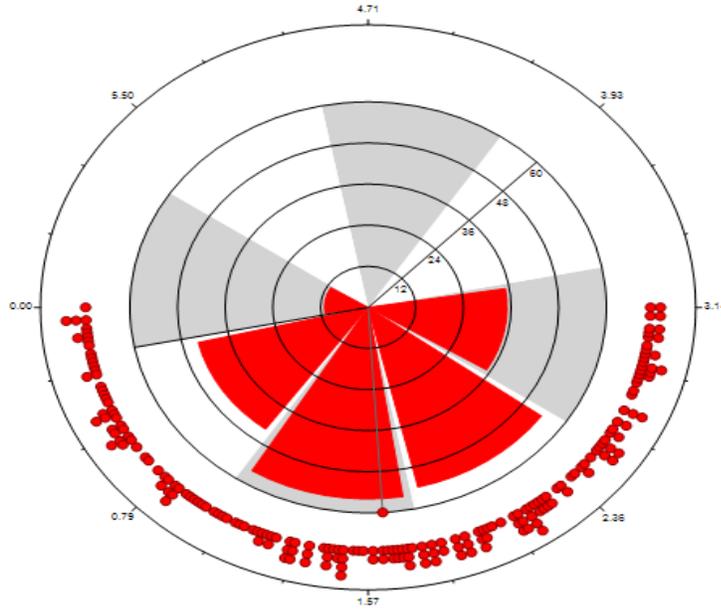
شكل (3-2) عينة توزيع معكوس كاما النصف دائري
المحول بحجم عينة $n=30$



شكل (3-3) عينة توزيع معكوس كاما النصف دائري
المحول بحجم عينة $n=50$



شكل (3-4) عينة توزيع معكوس كاما النصف دائري
المحول بحجم عينة $n=100$



شكل (3-5) عينة توزيع معكوس كما النصف دائري
المحول بحجم عينة $n=200$

ومن الاشكال (3-1) الى (3-5) نلاحظ ان البيانات تتوزع في الربع الثالث والرابع من الدائرة أي انها توزعت في نصف دائرة وهو مايمثل سلوك البيانات للتوزيع النصف دائري حسب حجم العينات المفترضة.

المرحلة الثالثة:

في هذه المرحلة يتم تقدير معلمات توزيع HCTIG بموجب طرائق التقدير الآتية:

1- طريقة الامكان الأعظم (Maximum Likelihood Method)

2- مقدر اقل مسافة ذو الخطوة الواحدة

(The One-Step Minimum Hellinger Distance Estimator)

3- مقدر المسافة العامة (The General spacing estimator)

تم الحصول على مقدرات معلمات توزيع HCTIG بأحدى الطرائق العددية المستعملة لحل المعادلات الرياضية غير الخطية عن طريق استعمال الدالة *fsolve* في برنامج ماتلاب ولطرائق التقدير المذكورة انفا كافة.

المرحلة الرابعة: لغرض الوصول للمقدر الافضل عن طريق المفاضلة بين طرائق التقدير المدروسة، فقد جرى الاعتماد بشكل عام على مجموعة من امعايير تم ذكره في الفصل الثاني الفقرة (2-13).

4.1.3 مناقشة نتائج المحاكاة:

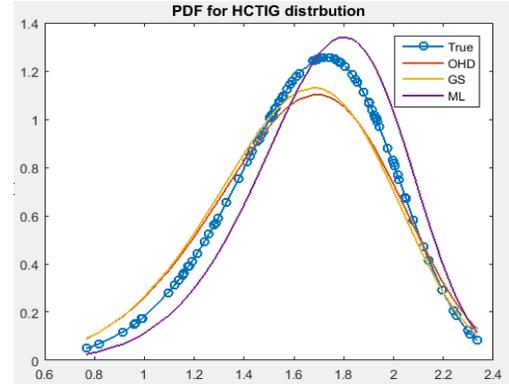
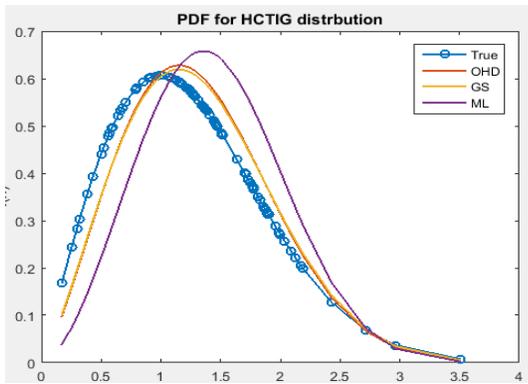
تم عرض نتائج تجارب المحاكاة وتحليلها لتقدير معالم توزيع HCTIG في الجداول التي سيتم تحليلها بحسب التسلسل، ولحجوم العينات المختلفة والحالات المختلفة للقيم الافتراضية الأولية كافة والموضحة في الجداول (2-3) الى (6-3) ولتجربة عدد مكرراتها (1000) مرة، وفيما يأتي النتائج الموضحة في الجداول التي سيتم تحليلها وكما يأتي:

1.4.1.3 تقديرات معالم توزيع HCTIG عندما $\alpha = 1$ وقيم $\beta = 0.5, 1, 2, 3$

جدول (2-3) متوسط تقديرات معالم توزيع HCTIG ومتوسط مربعات الخطأ ومقدار التحيز ونسبة التغطية عند مدة (فترة) ثقة 95% عندما $\alpha = 1$ وقيم $\beta = 0.5, 1, 2, 3$

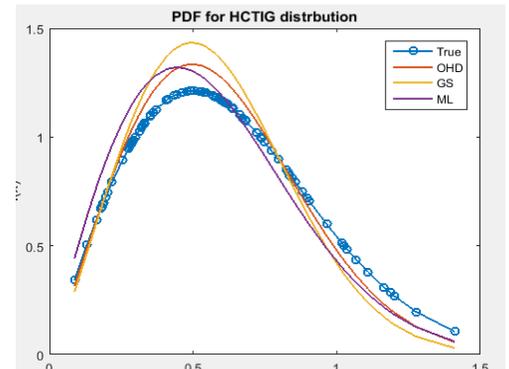
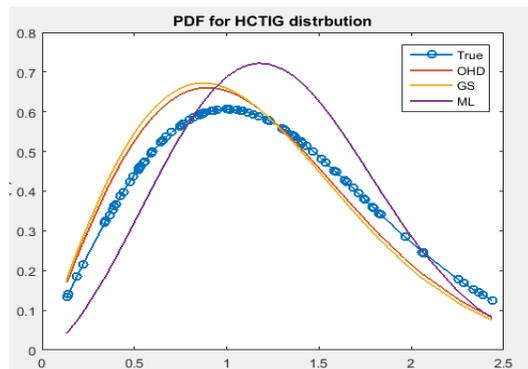
β	Method	Index	n										Best
			10		30		50		100		200		
			α	β									
0.5	MLE	Mean	0.85	0.88	0.87	0.85	0.99	0.63	1.02	0.56	1.01	0.53	OHD
		Bias	0.15	0.38	0.13	0.35	0.01	0.13	0.02	0.06	0.01	0.03	
		MSE	0.181	0.119	0.033	0.113	0.029	0.056	0.014	0.018	0.014	0.013	
		CP %	92	93	93	93	95	95	95	95	95	95	
	OHD	Mean	0.84	0.86	0.85	0.83	1.04	0.59	1.01	0.52	1.00	0.51	
		Bias	0.16	0.36	0.15	0.33	0.04	0.09	0.02	0.02	0.00	0.01	
		MSE	0.178	0.115	0.031	0.111	0.024	0.045	0.012	0.013	0.014	0.010	
		CP %	94	94	94	94	95	95	95	95	95	95	
	GS	Mean	0.86	0.89	0.87	0.84	0.99	0.60	1.03	0.53	1.01	0.52	
		Bias	0.14	0.39	0.13	0.34	0.01	0.10	0.03	0.03	0.01	0.02	
		MSE	0.180	0.119	0.033	0.111	0.029	0.045	0.013	0.014	0.015	0.011	
		CP %	93	94	94	94	95	95	95	95	95	95	
1	MLE	Mean	0.78	0.86	0.80	0.81	0.98	0.90	1.11	0.99	1.10	1.11	OHD
		Bias	0.22	0.14	0.20	0.19	0.02	0.10	0.11	0.01	0.10	0.11	
		MSE	0.235	0.181	0.123	0.087	0.031	0.077	0.027	0.015	0.013	0.011	
		CP %	93	93	93	94	95	95	95	95	95	95	
	OHD	Mean	0.88	0.87	0.84	0.85	0.99	0.97	1.10	0.99	1.01	1.10	
		Bias	0.12	0.13	0.16	0.15	0.01	0.03	0.10	0.01	0.01	0.10	
		MSE	0.113	0.057	0.123	0.056	0.021	0.055	0.018	0.014	0.012	0.001	
		CP %	94	94	94	94	95	95	95	95	95	95	
	GS	Mean	0.75	0.78	0.79	0.80	0.97	0.89	1.21	0.98	1.13	1.13	
		Bias	0.25	0.22	0.21	0.20	0.03	0.11	0.21	0.02	0.13	0.13	
		MSE	0.244	0.217	0.221	0.098	0.054	0.065	0.031	0.024	0.022	0.012	
		CP %	92	92	92	92	95	95	95	95	95	95	
2	MLE	Mean	0.86	2.82	0.83	2.56	0.98	2.28	1.21	2.15	1.13	2.14	MLE
		Bias	0.14	1.64	1.82	1.67	1.56	1.52	1.28	1.29	1.15	1.37	
		MSE	0.119	0.785	0.117	0.654	0.104	0.334	0.102	0.212	0.101	0.117	
		CP %	94	94	94	95	95	95	95	95	95	95	
	OHD	Mean	0.82	2.99	0.81	2.66	0.97	2.14	1.19	2.13	1.14	2.12	
		Bias	0.18	0.49	0.19	0.16	0.03	0.36	0.19	0.37	0.14	0.38	
		MSE	0.122	0.982	0.121	0.872	0.111	0.512	0.111	0.311	0.101	0.122	
		CP %	93	93	93	94	94	95	95	95	95	95	
	GS	Mean	0.93	3.12	0.87	2.98	0.98	2.72	1.21	2.43	1.15	2.33	
		Bias	0.07	0.62	0.13	0.48	0.02	0.22	0.21	0.07	0.15	0.17	

3	MLE	MSE	0.128	0.987	0.123	0.875	0.114	0.544	0.112	0.334	0.102	0.129	MLE	
		CP %	93	93	92	94	94	95	95	95	95	95		95
		Mean	0.45	3.88	0.56	3.56	0.78	3.41	1.32	3.21	1.24	3.11		
		Bias	0.55	0.88	0.44	0.56	0.22	0.41	0.32	0.21	0.24	0.11		
		MSE	0.345	0.334	0.231	0.221	0.219	0.114	0.110	0.112	0.101	0.102		
		CP %	91	93	93	94	95	95	95	95	95	95		
	OHD	Mean	0.41	3.89	0.61	3.50	0.75	3.47	1.42	3.33	1.33	3.23		
		Bias	0.59	0.89	0.39	0.50	0.25	0.47	0.42	0.33	0.33	0.23		
		MSE	0.444	0.357	0.342	0.232	0.331	0.211	0.131	0.114	0.121	0.111		
		CP %	90	92	92	93	94	94	95	95	95	95		
	GS	Mean	0.43	3.89	0.59	3.77	0.72	3.57	1.56	3.44	1.43	3.33		
		Bias	0.57	0.89	0.41	0.77	0.28	0.57	0.56	0.44	0.43	0.33		
MSE		0.545	0.418	0.443	0.323	0.389	0.319	0.214	0.210	0.212	0.129			
CP %		90	91	91	92	95	95	95	95	95	95			



شكل (3-6) منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع HCTIG عند المعلمات الافتراضية $\alpha=1$ و $\beta=0.5$ عند حجم عينة $(n=100)$

شكل (3-7) منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع HCTIG عند المعلمات الافتراضية $\alpha=1$ و $\beta=1$ عند حجم عينة $(n=100)$



شكل (3-8) منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع HCTIG عند المعلمات الافتراضية $\alpha=1$ و $\beta=2$ عند حجم عينة $(n=100)$

شكل (3-9) منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع HCTIG عند المعلمات الافتراضية $\alpha=1$ و $\beta=3$ عند حجم عينة $(n=100)$

من جدول (3-2) والاشكال من (3-6) الى (3-9) وعند القيم الافتراضية $\alpha = 1$ و $\beta = 0.5, 1, 2, 3$ يتضح ما يأتي:

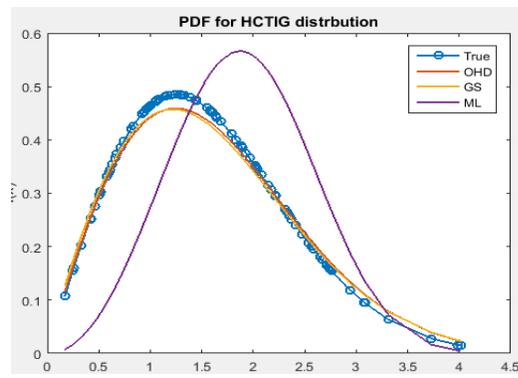
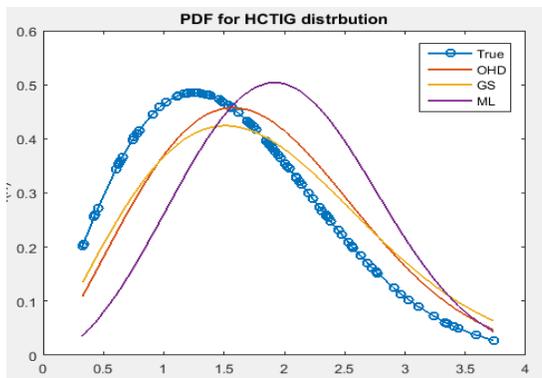
1. القيم التقديرية تبدو غير متناسقة مع القيم الافتراضية في احجام العينات الصغيرة وكلما زاد حجم العينة اقتربت المعلمات المقدرة من المعلمات الافتراضية وخصوصا لطرائق التقدير الفضلى.
2. تفوق طريقة مقدر اقل مسافة Hellinger نو الخطوة الواحدة (OHD) على باقي طرائق التقدير عند القيم الافتراضية $\alpha = 1$ و $\beta = 0.5, 1$, اذ سجلت هذه الطريقة اقل معدل تحيز (Bias) واقل متوسط مربعات خطأ (MSE) واكبر نسبة تغطية (CP) لكافة القيم التقديرية.
3. تفوق طريقة الامكان الأعظم (MLE) على باقي طرائق التقدير عند القيم الافتراضية $\alpha = 1$ و $\beta = 2, 3$, اذ سجلت هذه الطريقة اقل معدل تحيز (Bias) واقل متوسط مربعات خطأ (MSE) واكبر نسبة تغطية (CP) عند احجام القيم التقديرية كافة.
4. نلاحظ وجود دالة متناقصة بين حجم العينة ومعدل التحيز ومتوسط مربعات الخطأ. وان نسبة التغطية مغلقة جداً عند (95%) لاجسام العينات (n=50, 100, 200) مع تغيرات طفيفة عند احجام العينات (n=10, 30).
5. كلما زادت قيم المعلمات الافتراضية فان القيم التقديرية لطريقة الامكان الاعظم تكون أفضل بأقل مقدار لمعدل التحيز واقل متوسط مربعات خطأ (MSE) وأكبر نسبة تغطية (CP).

2-3-4 تقديرات معلمات توزيع HCTIG عندما $\alpha = 2.5$ وقيم $\beta = 0.5, 1, 2.5, 3.5$:

جدول (3-3) متوسط تقديرات معلمات توزيع كما المعكوس النصف دائري ومتوسط مربعات الخطأ ومقدار التحيز ونسبة التغطية عند فترة ثقة 95% عندما $\alpha = 2.5$ وقيم $\beta = 0.5, 1, 2.5, 3.5$

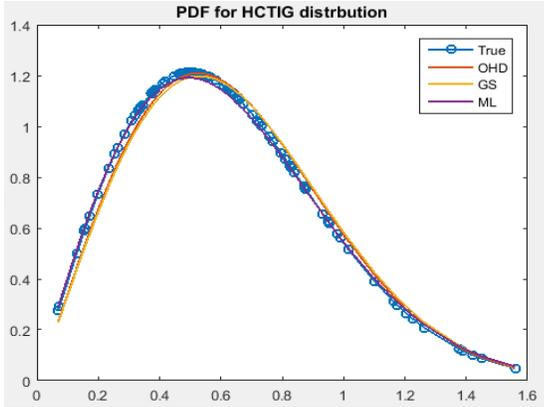
β	Method	Index	n										Best
			10		30		50		100		200		
			α	β									
0.5	MLE	Mean	2.92	0.78	2.89	0.65	2.78	0.62	2.57	0.57	2.55	0.52	OHD
		Bias	0.42	0.28	0.39	0.15	0.28	0.12	0.07	0.07	0.05	0.02	
		MSE	0.176	0.078	0.152	0.023	0.078	0.014	0.005	0.005	0.002	0.000	
		CP %	93	93	93	93	95	95	95	95	95	95	
	OHD	Mean	2.78	0.67	2.45	0.59	2.56	0.56	2.54	0.52	2.54	0.51	
		Bias	0.28	0.17	0.05	0.09	0.06	0.06	0.04	0.02	0.04	0.01	
		MSE	0.078	0.029	0.002	0.008	0.004	0.004	0.002	0.000	0.002	0.000	
		CP %	94	94	94	94	95	95	95	95	95	95	
	GS	Mean	2.87	0.71	2.65	0.66	2.61	0.57	2.60	0.53	2.55	0.52	
		Bias	0.37	0.21	0.15	0.16	0.11	0.07	0.10	0.03	0.05	0.02	
		MSE	0.137	0.044	0.023	0.026	0.012	0.005	0.010	0.001	0.002	0.000	
		CP %	94	94	94	94	95	95	95	95	95	95	
1	MLE	Mean	2.98	0.81	2.77	1.24	2.73	1.23	2.61	1.12	2.55	1.11	OHD
		Bias	0.48	0.19	0.27	0.24	0.23	0.23	0.11	0.12	0.05	0.11	
		MSE	0.230	0.036	0.073	0.058	0.053	0.053	0.012	0.014	0.002	0.012	
		CP %	92	93	93	93	95	95	95	95	95	95	
	OHD	Mean	2.88	0.84	2.65	1.13	2.68	1.12	2.56	1.11	2.54	1.10	

2.5	GS	Bias	0.38	0.16	0.15	0.13	0.18	0.12	0.06	0.11	0.04	0.10	OHD
		MSE	0.144	0.026	0.023	0.017	0.052	0.014	0.004	0.012	0.002	0.010	
		CP %	94	94	94	94	95	95	95	95	95	95	
	MLE	Mean	2.85	0.86	2.66	1.23	2.64	1.22	2.58	1.21	2.56	1.11	
		Bias	0.35	0.14	0.16	0.23	0.14	0.22	0.08	0.21	0.06	0.11	
		MSE	0.123	0.020	0.026	0.053	0.020	0.048	0.006	0.044	0.004	0.012	
	OHD	CP	93	94	94	94	95	95	95	95	95	95	
		Mean	2.89	2.72	2.66	2.70	2.63	2.66	2.61	2.63	2.58	2.58	
		Bias	0.35	0.22	0.16	0.20	0.13	0.16	0.11	0.13	0.08	0.08	
	GS	MSE	0.148	0.048	0.026	0.040	0.017	0.026	0.012	0.017	0.006	0.006	
		CP %	93	93	93	93	95	95	95	95	95	95	
		Mean	2.67	2.59	2.64	2.56	2.58	2.54	2.55	2.53	2.52	2.51	
OHD	Bias	0.17	0.09	0.14	0.06	0.08	0.04	0.05	0.03	0.02	0.01		
	MSE	0.029	0.008	0.020	0.004	0.006	0.002	0.002	0.001	0.000	0.000		
	CP %	94	94	94	94	95	95	95	95	95	95		
GS	Mean	2.75	2.66	2.71	2.61	2.59	2.57	2.56	2.56	2.53	2.52		
	Bias	0.25	0.16	0.21	0.11	0.09	0.07	0.06	0.06	0.03	0.02		
	MSE	0.063	0.026	0.044	0.012	0.008	0.005	0.004	0.004	0.001	0.000		
MLE	CP %	94	94	94	94	95	95	95	95	95	95		
	Mean	2.99	3.66	2.78	3.56	2.61	3.54	2.58	3.53	2.54	3.52		
	Bias	0.49	0.66	0.28	0.56	0.11	0.54	0.08	0.53	0.04	0.52		
OHD	MSE	0.240	0.436	0.078	0.314	0.012	0.292	0.006	0.281	0.002	0.270		
	CP %	94	94	94	94	95	95	95	95	95	95		
	Mean	2.84	3.56	2.74	3.55	2.57	3.52	2.54	3.52	2.53	3.51		
GS	Bias	0.34	0.56	0.24	0.55	0.07	0.52	0.04	0.52	0.03	0.51		
	MSE	0.116	0.314	0.058	0.303	0.005	0.270	0.002	0.270	0.001	0.260		
	CP %	94	94	94	94	95	95	95	95	95	95		
MLE	Mean	2.85	3.57	2.75	3.56	2.58	3.53	2.55	3.53	2.54	3.52		
	Bias	0.35	0.57	0.25	0.56	0.08	0.53	0.05	0.53	0.04	0.52		
	MSE	0.123	0.325	0.063	0.314	0.006	0.281	0.002	0.281	0.002	0.270		
OHD	CP %	94	94	94	94	95	95	95	95	95	95		
	Mean	2.85	3.57	2.75	3.56	2.58	3.53	2.55	3.53	2.54	3.52		
	Bias	0.35	0.57	0.25	0.56	0.08	0.53	0.05	0.53	0.04	0.52		
GS	MSE	0.123	0.325	0.063	0.314	0.006	0.281	0.002	0.281	0.002	0.270		
	CP %	94	94	94	94	95	95	95	95	95	95		
	Mean	2.85	3.57	2.75	3.56	2.58	3.53	2.55	3.53	2.54	3.52		

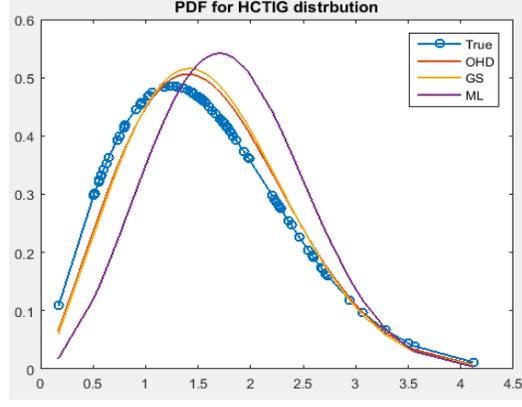


شكل (3-10) منحني دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع HCTIG عند المعلمات الافتراضية $\alpha=2.5$ و $\beta=0.5$ عند حجم عينة

شكل (3-11) منحني دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع HCTIG عند المعلمات الافتراضية $\alpha=2.5$ و $\beta=1$ عند حجم عينة (n=100)



شكل (3-12) منحى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع HCTIG عند المعلمات الافتراضية $\alpha = 2.5$ و $\beta = 2.5$ عند حجم عينة $(n=100)$



شكل (3-13) منحى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع HCTIG عند المعلمات الافتراضية $\alpha = 2.5$ و $\beta = 3$ عند حجم عينة $(n=100)$

من جدول (3-3) والاشكال من (3-10) الى (3-13) وعند حجم المعلمات الافتراضية $\alpha = 2.5$ و $\beta = 0.5, 1, 2.5, 3.5$ يتضح ما يأتي:

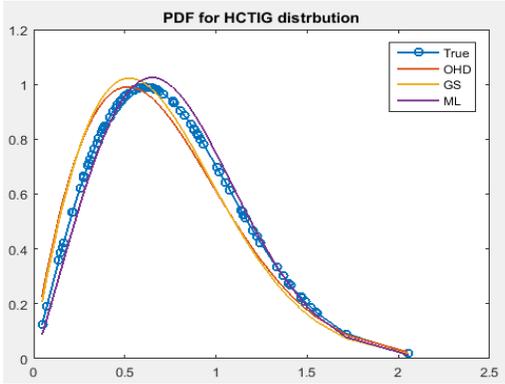
- القيم التقديرية تبدو غير متناسقة مع القيم الافتراضية في احجام العينات الصغيرة وكلما زاد حجم العينة اقتربت المعلمات المقدره من المعلمات الافتراضية وخصوصا لطرائق التقدير الفضلى.
- تفوق طريقة مقدر اقل مسافة Hellinger نو الخطوة الواحدة (OHD) على باقي طرائق التقدير اذ سجلت هذه الطريقة اقل معدل تحيز (Bias) واقل متوسط مربعات خطأ (MSE) وأكبر نسبة تغطية (CP) عند كافة احجام العينات التقديرية.
- نلاحظ وجود دالة متناقصة بين حجم العينة ومعدل التحيز ومتوسط مربعات الخطأ. وان نسبة التغطية مغلقة جداً عند (95%) لاجسام العينات (50, 100, 200) مع تغيرات طفيفة عند احجام العينات (10, 30).

3-4-3 تقديرات معلمات توزيع HCTIG دائري عندما $\alpha = 0.5$ وقيم $\beta = 1.5, 2, 4, 5$:

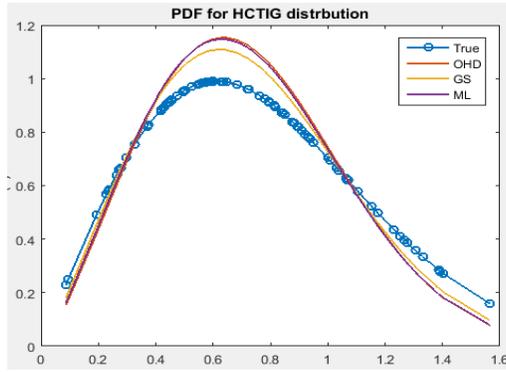
جدول (3-4) متوسط تقديرات معلمات توزيع كاما المعكوس النصف دائري ومتوسط مربعات الخطأ ومقدار التحيز ونسبة التغطية عند مدة (فترة ثقة 95%) عندما $\alpha = 0.5$ وقيم $\beta = 1.5, 2, 4, 5$

β	Method	Index	n										Best
			10		30		50		100		200		
			α	β									
1.5	MLE	Mean	1.44	1.98	1.13	1.68	0.78	1.59	0.64	1.56	0.56	1.54	GS
		Bias	0.94	0.48	0.63	0.18	0.28	0.09	0.14	0.06	0.06	0.04	
		MSE	0.884	0.230	0.397	0.032	0.078	0.008	0.020	0.004	0.004	0.002	
		CP %	93	93	93	93	95	95	95	95	95	95	
	OHD	Mean	1.14	1.77	1.11	1.61	0.66	1.56	0.57	1.55	0.55	1.52	

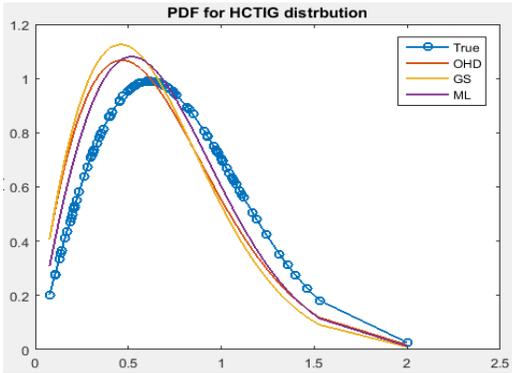
2		Bias	0.64	0.27	0.61	0.11	0.16	0.06	0.07	0.05	0.05	0.02	GS	
		MSE	0.410	0.073	0.372	0.012	0.026	0.004	0.005	0.003	0.003	0.003		0.000
		CP %	94	94	94	94	95	95	95	95	95	95		95
	GS	Mean	1.11	1.43	1.01	1.58	0.54	1.54	0.56	1.53	0.53	1.51		
		Bias	0.61	0.07	0.51	0.08	0.04	0.04	0.06	0.03	0.03	0.01		
		MSE	0.372	0.005	0.260	0.006	0.002	0.002	0.004	0.001	0.001	0.000		
	MLE	CP %	94	94	94	94	95	95	95	95	95	95		
		Mean	0.77	2.55	0.56	2.45	0.55	2.41	0.54	2.33	0.53	2.21		
		Bias	1.27	0.55	1.06	0.45	1.05	0.41	1.04	0.33	1.03	0.21		
	OHD	MSE	1.27	0.55	1.06	0.45	1.05	0.41	1.04	0.33	1.03	0.21		
		CP %	94	94	94	94	95	95	95	95	95	95		
		Mean	0.43	2.33	0.55	2.41	0.53	2.31	0.52	2.22	0.51	2.11		
GS	Bias	0.93	0.33	1.05	0.41	1.03	0.31	1.02	0.22	1.01	0.11			
	MSE	0.865	0.109	1.103	0.168	1.061	0.096	1.040	0.048	1.020	0.012			
	CP %	94	94	94	94	95	95	95	95	95	95			
GS	Mean	0.22	2.12	0.53	2.23	0.51	2.23	0.51	2.10	0.51	2.01			
	Bias	0.72	0.12	1.03	0.23	1.01	0.23	1.01	0.10	1.01	0.01			
	MSE	0.518	0.014	1.061	0.053	1.020	0.053	1.020	0.010	1.020	0.000			
MLE	CP %	94	94	94	94	95	95	95	95	95	95			
	Mean	1.55	4.65	1.45	4.31	1.33	4.11	0.88	4.10	0.61	4.01			
	Bias	1.05	0.65	0.95	0.31	0.83	0.11	0.38	0.10	0.11	0.01			
OHD	MSE	1.103	0.423	0.903	0.096	0.689	0.012	0.144	0.010	0.012	0.000			
	CP %	94	94	94	95	95	95	95	95	95	95			
	Mean	1.61	4.67	1.56	4.44	1.44	4.23	0.95	4.11	0.62	4.31			
GS	Bias	1.11	0.67	1.06	0.44	0.94	0.23	0.45	0.11	0.12	0.31			
	MSE	1.232	0.449	1.124	0.194	0.884	0.053	0.203	0.012	0.014	0.096			
	CP %	93	93	94	95	95	95	95	95	95	95			
MLE	Mean	1.77	4.68	1.66	4.56	1.45	4.44	0.99	4.23	0.77	4.44			
	Bias	1.27	0.68	1.16	0.56	0.95	0.44	0.49	0.23	0.27	0.44			
	MSE	1.613	0.462	1.346	0.314	0.903	0.194	0.240	0.053	0.073	0.194			
OHD	CP %	93	93	94	95	95	95	95	95	95	95			
	Mean	0.78	5.21	0.57	5.12	0.54	5.11	0.52	5.10	0.51	5.01			
	Bias	0.28	0.21	0.07	0.12	0.04	0.11	0.02	0.10	0.01	0.01			
GS	MSE	0.078	0.044	0.005	0.014	0.002	0.012	0.000	0.010	0.000	0.000			
	CP %	94	94	94	95	95	95	95	95	95	95			
	Mean	0.99	5.41	0.67	5.45	0.64	5.61	0.56	5.21	0.53	5.11			
MLE	Bias	0.49	0.41	0.17	0.45	0.14	0.61	0.06	0.21	0.03	0.11			
	MSE	0.240	0.168	0.029	0.203	0.020	0.372	0.004	0.044	0.001	0.012			
	CP %	94	94	94	95	95	95	95	95	95	95			
OHD	Mean	0.84	5.39	0.65	5.44	0.63	5.58	0.57	5.33	0.54	5.23			
	Bias	0.34	0.39	0.15	0.44	0.13	0.58	0.07	0.33	0.04	0.23			
	MSE	0.116	0.152	0.023	0.194	0.017	0.336	0.005	0.109	0.002	0.053			
GS	CP %	94	94	94	95	95	95	95	95	95	95			



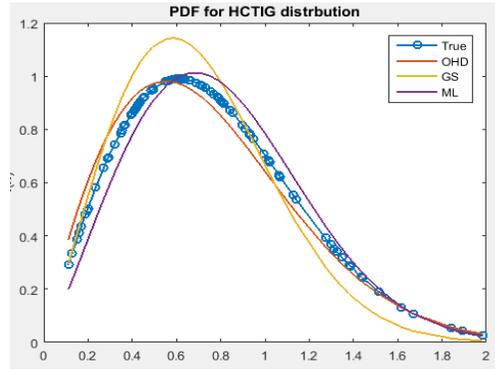
شكل (3-14) منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع HCTIG عند المعلمات الافتراضية $\alpha = 0.5$ و $\beta = 1.5$ عند حجم عينة $(n=100)$



شكل (3-15) منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع HCTIG عند المعلمات الافتراضية $\alpha = 0.5$ و $\beta = 2$ عند حجم عينة $(n=100)$



شكل (3-16) منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع HCTIG عند المعلمات الافتراضية $\alpha = 0.5$ و $\beta = 4$ عند حجم عينة $(n=100)$



شكل (3-17) منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع HCTIG عند المعلمات الافتراضية $\alpha = 0.5$ و $\beta = 5$ عند حجم عينة $(n=100)$

من جدول (3-4) والاشكال من (3-14) الى (3-17) وعند حجم القيم الافتراضية $\alpha = 0.5$ و $\beta = 1.5$ من جدول 2, 4,5 يتضح ما يأتي:

1. القيم التقديرية تبدو غير متناسقة مع القيم الافتراضية في احجام العينات الصغيرة وكلما زاد حجم العينة اقتربت المعلمات المقدره من المعلمات الافتراضية وخصوصا لطرائق التقدير الفضلى.

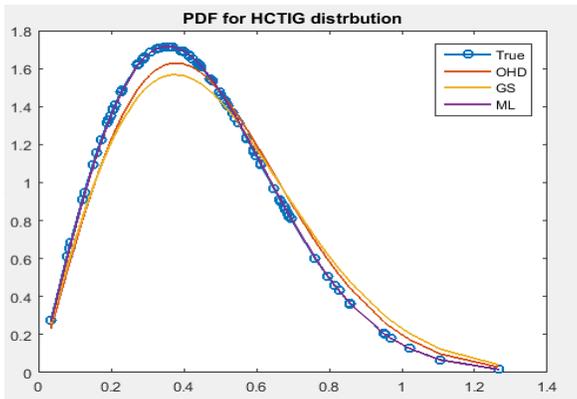
2. تفوق طريقة المسافة العامة (GS) على باقي طرائق التقدير عند القيم الافتراضية $\alpha = 0.5$ وقيم $\beta = 1.5, 2$ اذ سجلت هذه الطريقة اقل معدل تحيز (Bias) واقل متوسط مربعات خطأ (MSE) وأكبر نسبة تغطية (CP) عند احجام العينات التقديرية كافة.
3. تفوق طريقة الامكان الأعظم (MLE) على باقي طرائق التقدير عند القيم الافتراضية $\alpha = 0.5$ وقيم $\beta = 4, 5$ اذ سجلت هذه الطريقة اقل معدل تحيز (Bias) واقل متوسط مربعات خطأ (MSE) وأكبر نسبة تغطية (CP) عند احجام العينات التقديرية كافة.
4. نلاحظ وجود دالة متناقصة بين حجم العينة ومعدل التحيز ومتوسط مربعات الخطأ. وان نسبة التغطية مغلقة جداً عند (95%) لاجسام العينات (n=50, 100, 200) مع تغيرات طفيفة عند احجام العينات (n=10, 30).
5. كلما زادت قيم المعلمات الافتراضية فان القيم التقديرية لطريقة الامكان الاعظم تكون أفضل بأقل مقدار لمعدل التحيز واقل متوسط مربعات خطأ (MSE) وأكبر نسبة تغطية (CP).

3-4-4 تقديرات معلمات توزيع HCTIG عندما $\alpha = 4$ وقيم $\beta = 1.5, 2, 4, 5$:

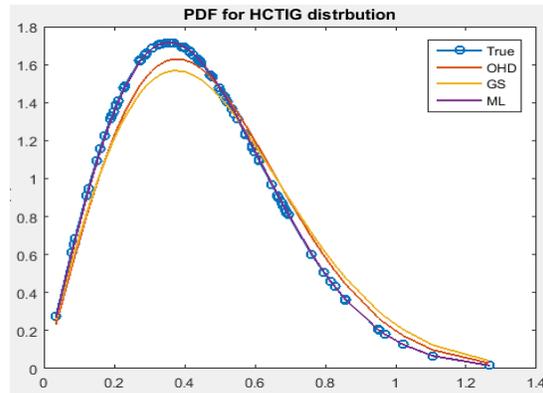
جدول (3-5) متوسط تقديرات معلمات توزيع كاما المعكوس النصف دائري ومتوسط مربعات الخطأ ومقدار التحيز ونسبة التغطية عند مدة (فترة ثقة 95%) عندما $\alpha = 4$ وقيم $\beta = 1.5, 2, 4, 5$

β	Method	Index	n										Best
			10		30		50		100		200		
			α	β									
1.5	MLE	Mean	4.55	1.76	4.44	1.66	4.32	1.56	4.21	1.55	4.11	1.53	MLE
		Bias	0.55	0.26	0.44	0.16	0.32	0.06	0.21	0.05	0.11	0.03	
		MSE	0.303	0.068	0.194	0.026	0.102	0.004	0.044	0.003	0.012	0.001	
		CP %	94	94	94	94	95	95	95	95	95	95	
	OHD	Mean	4.76	1.98	4.56	1.77	4.52	1.56	4.44	1.53	4.33	1.52	
		Bias	0.76	0.48	0.56	0.27	0.52	0.06	0.44	0.03	0.33	0.02	
		MSE	0.578	0.230	0.314	0.073	0.270	0.004	0.194	0.001	0.109	0.000	
		CP %	93	93	93	93	95	95	95	95	95	95	
	GS	Mean	4.79	1.99	4.65	1.87	4.56	1.67	4.52	1.59	4.42	1.53	
		Bias	0.79	0.49	0.65	0.37	0.56	0.17	0.52	0.09	0.42	0.03	
		MSE	0.624	0.240	0.423	0.137	0.314	0.029	0.270	0.008	0.176	0.001	
		CP %	93	93	93	93	95	95	95	95	95	95	
2	MLE	Mean	4.67	2.45	4.55	2.47	4.42	2.44	4.22	2.41	4.10	2.24	MLE
		Bias	0.67	0.05	0.55	0.03	0.42	0.06	0.22	0.09	0.10	0.26	
		MSE	0.449	0.002	0.303	0.001	0.176	0.004	0.048	0.008	0.010	0.068	
		CP %	94	94	94	94	95	95	95	95	95	95	
	OHD	Mean	4.78	2.55	4.67	2.54	4.55	2.42	4.44	2.32	4.21	2.33	
		Bias	0.78	0.55	0.67	0.54	0.55	0.42	0.44	0.32	0.21	0.33	
		MSE	0.608	0.303	0.449	0.292	0.303	0.176	0.194	0.102	0.044	0.109	
		CP %	93	93	93	93	95	95	95	95	95	95	
	GS	Mean	4.66	2.57	4.77	2.56	4.61	2.54	4.46	2.35	4.23	2.35	
		Bias	0.66	0.57	0.77	0.56	0.61	0.54	0.46	0.35	0.23	0.35	
		MSE	0.436	0.325	0.593	0.314	0.372	0.292	0.212	0.123	0.053	0.123	
		CP %	93	93	93	93	95	95	95	95	95	95	

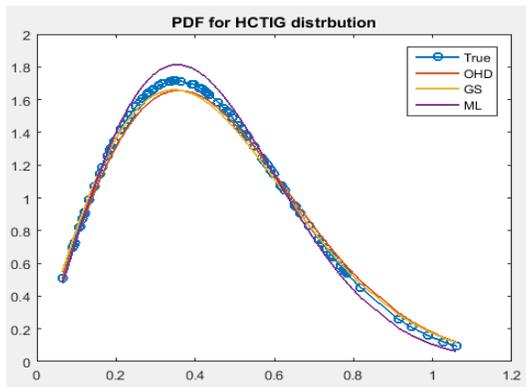
4	MLE	CP	93	93	93	93	95	95	95	95	95	95	MLE
		Mean	4.31	4.33	4.21	4.11	4.14	4.12	4.20	4.11	4.01	4.01	
		Bias	0.31	0.33	0.21	0.11	0.14	0.12	0.20	0.11	0.01	0.01	
		MSE	0.096	0.109	0.044	0.012	0.020	0.014	0.040	0.012	0.000	0.000	
	OHD	CP %	94	94	94	94	95	95	95	95	95	95	
		Mean	4.44	4.34	4.34	4.21	4.31	4.20	4.22	4.12	4.01	4.11	
		Bias	0.44	0.34	0.34	0.21	0.31	0.20	0.22	0.12	0.01	0.11	
		MSE	0.194	0.116	0.116	0.044	0.096	0.040	0.048	0.014	0.000	0.012	
	GS	CP %	93	93	93	93	95	95	95	95	95	95	
		Mean	4.45	4.45	4.41	4.31	4.41	4.23	4.33	4.24	4.22	4.31	
		Bias	0.45	0.45	0.41	0.31	0.41	0.23	0.33	0.24	0.22	0.31	
		MSE	0.203	0.203	0.168	0.096	0.168	0.053	0.109	0.058	0.048	0.096	
5	MLE	CP %	93	92	93	93	95	95	95	95	95	95	OHD
		Mean	4.87	5.56	4.67	5.51	4.44	5.43	4.33	5.33	4.21	5.21	
		Bias	0.87	0.56	0.67	0.51	0.44	0.43	0.33	0.33	0.21	0.21	
		MSE	0.757	0.314	0.449	0.260	0.194	0.185	0.109	0.109	0.044	0.044	
	OHD	CP %	94	94	94	94	95	95	95	95	95	95	
		Mean	4.38	5.44	4.34	5.31	4.22	5.21	4.21	5.11	4.11	5.01	
		Bias	0.38	0.44	0.34	0.31	0.22	0.21	0.21	0.11	0.11	0.01	
		MSE	0.144	0.194	0.116	0.096	0.048	0.044	0.044	0.012	0.012	0.000	
	GS	CP %	94	94	94	94	95	95	95	95	95	95	
		Mean	4.40	5.45	4.37	5.38	4.33	5.31	4.34	5.23	4.22	5.11	
		Bias	0.40	0.45	0.37	0.38	0.33	0.31	0.34	0.23	0.22	0.11	
		MSE	0.160	0.203	0.137	0.144	0.109	0.096	0.116	0.053	0.048	0.012	
		CP %	94	94	94	94	95	95	95	95	95	95	



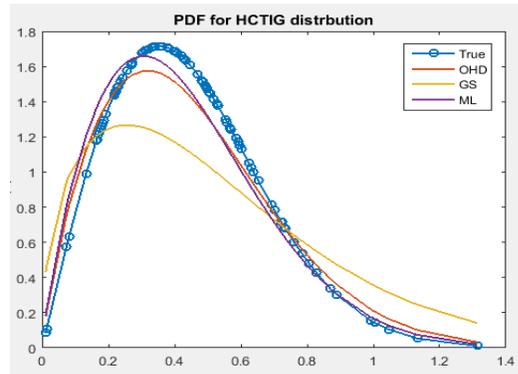
شكل (3-18) منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع HCTIG عند المعلمات الافتراضية $\alpha=4$ و $\beta=1.5$ عند حجم عينة (n=100)



شكل (3-19) منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع HCTIG عند المعلمات الافتراضية $\alpha=4$ و $\beta=2$ عند حجم عينة (n=100)



شكل (3-20) منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع HCTIG عند المعلمات الافتراضية $\alpha=4$ و $\beta=4$ عند حجم عينة $(n=100)$



شكل (3-21) منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع HCTIG عند المعلمات الافتراضية $\alpha=4$ و $\beta=5$ عند حجم عينة $(n=100)$

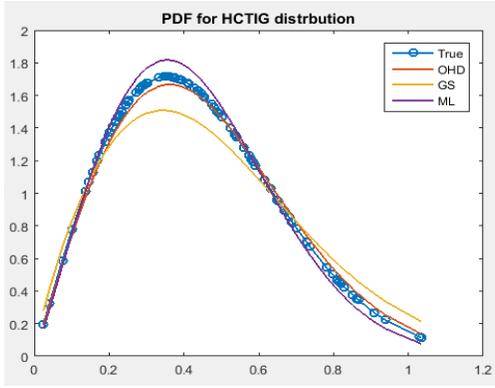
من جدول (3-5) والاشكال من (3-18) الى (3-21) وعند حجم المعلمات الافتراضية $\alpha=4$ و $\beta=1.5, 2, 4, 5$ يتضح ما يأتي:

1. القيم التقديرية تبدو غير متناسقة مع القيم الافتراضية في احجام العينات الصغيرة وكلما زاد حجم العينة اقتربت المعلمات المقدره من المعلمات الافتراضية وخصوصا لطرائق التقدير الفضلى.
2. تفوق طريقة طريقة الامكان الاعظم (MLE) على باقي طرائق التقدير عند القيم الافتراضية $\alpha=4$ و $\beta=1.5, 2, 4$ اذ سجلت هذه الطريقة اقل معدل تحيز (Bias) واقل متوسط مربعات خطأ (MSE) واكبر نسبة تغطية (CP) عند احجام العينات المفترضة كافة.
3. نلاحظ وجود دالة متناقصة بين حجم العينة ومعدل التحيز ومتوسط مربعات الخطأ. وان نسبة التغطية مغلقة جداً عند (95%) لاجسام العينات (50, 100, 200) مع تغيرات طفيفة عند احجام العينات (10, 30).
4. تفوق طريقة اقل مسافة Hellinger ذو الخطوة الواحدة (OHD) على باقي طرائق التقدير اذا سجلت هذه الطريقة اقل معدل تحيز (Bias) واقل متوسط مربعات خطأ (MSE) واكبر نسبة تغطية (CP) عند القيم الافتراضية $\alpha=4$ و $\beta=5$.

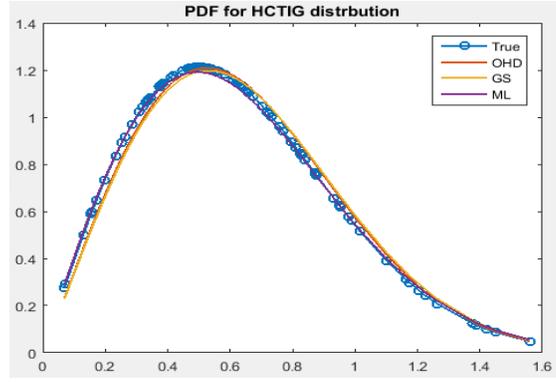
3-4-5 تقديرات معلمات توزيع HCTIG عندما $\alpha=1.5$ وقيم $\beta=1.5, 3.5, 5.5, 8$:

جدول (3-6) متوسط تقديرات معلمات توزيع كما المعكوس النصف دائري ومتوسط مربعات الخطأ ومقدار التحيز ونسبة التغطية عند مدة (فترة ثقة 95%) عندما $\alpha=1.5$ وقيم $\beta=1.5, 3.5, 5.5, 8$

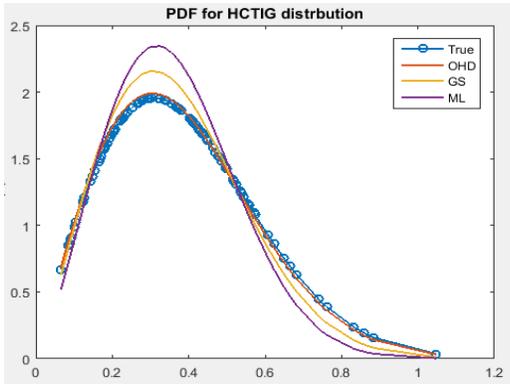
β	Method	Index	n										Best
			10		30		50		100		200		
			α	β									
1.5	MLE	Mean	2.3	2.5	2.1	2.4	1.9	1.8	1.8	1.7	1.6	1.6	OHD
		Bias	0.80	1.00	0.60	0.90	0.40	0.30	0.30	0.20	0.10	0.10	
		MSE	0.640	1.000	0.360	0.810	0.160	0.090	0.090	0.040	0.010	0.010	
		CP %	93	93	93	93	95	95	95	95	95	95	
	OHD	Mean	2.1	2.3	1.9	1.7	1.8	1.7	1.7	1.6	1.6	1.6	
		Bias	0.60	0.80	0.40	0.20	0.30	0.20	0.20	0.10	0.10	0.10	
		MSE	0.360	0.640	0.160	0.040	0.090	0.040	0.040	0.010	0.010	0.010	
		CP %	93	93	93	93	95	95	95	95	95	95	
	GS	Mean	2.4	2.6	2.3	2.5	2.0	1.9	1.9	1.8	1.7	1.7	
		Bias	0.90	1.10	0.80	1.00	0.50	0.40	0.40	0.30	0.20	0.20	
		MSE	0.810	1.210	0.640	1.000	0.250	0.160	0.160	0.090	0.040	0.040	
		CP %	93	93	93	93	95	95	95	95	95	95	
3.5	MLE	Mean	2.7	4.2	2.5	4.1	2.2	4.0	1.9	3.9	1.8	3.8	GS
		Bias	1.20	0.70	1.00	0.60	0.70	0.50	0.40	0.40	0.30	0.30	
		MSE	1.440	0.490	1.000	0.360	0.490	0.250	0.160	0.160	0.090	0.090	
		CP %	94	94	93	94	95	95	95	95	95	95	
	OHD	Mean	2.5	4.0	2.1	3.9	1.9	3.8	1.8	3.8	1.7	3.6	
		Bias	1.00	0.50	0.60	0.40	0.40	0.30	0.30	0.30	0.20	0.10	
		MSE	1.000	0.250	0.360	0.160	0.160	0.090	0.090	0.090	0.040	0.010	
		CP %	94	94	94	94	95	95	95	95	95	95	
	GS	Mean	2.4	3.9	1.9	3.8	1.8	3.7	1.7	3.6	1.6	3.5	
		Bias	0.90	0.40	0.40	0.30	0.30	0.20	0.20	0.10	0.10	0.00	
		MSE	0.810	0.160	0.160	0.090	0.090	0.040	0.040	0.010	0.010	0.000	
		CP %	94	94	94	94	95	95	95	95	95	95	
5.5	MLE	Mean	2.1	6.0	2.0	5.9	1.9	5.8	1.8	5.7	1.7	5.6	OHD
		Bias	0.60	0.50	0.50	0.40	0.40	0.30	0.30	0.20	0.20	0.10	
		MSE	0.360	0.250	0.250	0.160	0.160	0.090	0.090	0.040	0.040	0.010	
		CP %	94	94	94	94	95	95	95	95	95	95	
	OHD	Mean	1.9	5.9	1.8	5.8	1.7	5.8	1.6	5.7	1.6	5.5	
		Bias	0.40	0.40	0.30	0.30	0.20	0.30	0.10	0.20	0.10	0.00	
		MSE	0.160	0.160	0.090	0.090	0.040	0.090	0.010	0.040	0.010	0.000	
		CP %	94	94	94	94	95	95	95	95	95	95	
	GS	Mean	2.3	6.3	2.4	6.0	2.1	5.9	1.9	5.8	1.8	5.7	
		Bias	0.80	0.80	0.90	0.50	0.60	0.40	0.40	0.30	0.30	0.20	
		MSE	0.640	0.640	0.810	0.250	0.360	0.160	0.160	0.090	0.090	0.040	
		CP %	94	94	94	94	95	95	95	95	95	95	
8	MLE	Mean	2.5	9.5	2.4	9.3	2.0	9.2	1.7	9.1	1.6	8.9	OHD
		Bias	1.00	1.50	0.90	1.30	0.50	1.20	0.20	1.10	0.10	0.90	
		MSE	1.104	2.250	0.810	1.690	0.250	1.440	0.040	1.210	0.010	0.810	
		CP %	94	94	94	94	95	95	95	95	95	95	
	OHD	Mean	2.3	9.1	2.1	8.9	1.8	8.7	1.7	8.6	1.6	8.5	
		Bias	0.80	1.10	0.60	0.90	0.30	0.70	0.20	0.60	0.10	0.50	
		MSE	0.640	1.210	0.360	0.810	0.090	0.490	0.040	0.360	0.010	0.250	
		CP %	94	94	94	94	95	95	95	95	95	95	
	GS	Mean	2.7	9.8	2.5	9.4	2.4	9.3	1.9	9.0	1.8	8.8	
		Bias	1.20	1.80	1.00	1.40	0.90	1.30	0.40	1.00	0.30	0.80	
		MSE	1.440	3.240	1.000	1.960	0.810	1.690	0.160	1.000	0.090	0.640	
		CP %	94	94	94	94	95	95	95	95	95	95	



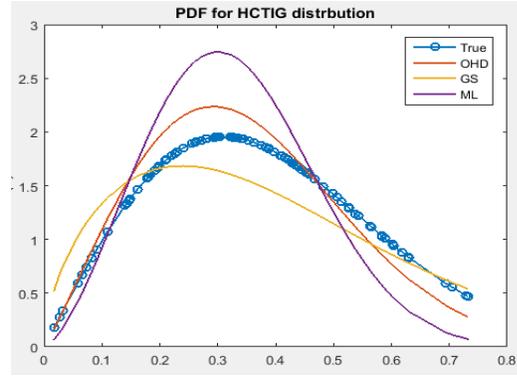
شكل (3-22) منحني دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع HCTIG عند المعلمات الافتراضية $\alpha = 1.5$ و $\beta = 1.5$ عند حجم عينة $(n=100)$



شكل (3-23) منحني دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع HCTIG عند المعلمات الافتراضية $\alpha = 1.5$ و $\beta = 3.5$ عند حجم عينة $(n=100)$



شكل (3-24) منحني دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع HCTIG عند المعلمات الافتراضية $\alpha = 1.5$ و $\beta = 5.5$ عند حجم عينة $(n=100)$



شكل (3-25) منحني دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع HCTIG عند المعلمات الافتراضية $\alpha = 1.5$ و $\beta = 8$ عند حجم عينة $(n=100)$

من جدول (3-6) والاشكال من (3-22) الى (3-25) وعند حجم المعلمات الافتراضية $\alpha = 1.5$ و $\beta = 1.5, 3.5, 5.5, 8$ يتضح ما يأتي:

1. القيم التقديرية تبدو غير متناسقة مع القيم الافتراضية في احجام العينات الصغيرة وكلما زاد حجم العينة اقتربت المعلمات المقدرة من المعلمات الافتراضية وخصوصا لطرائق التقدير الفضلى.
2. تفوق طريقة أقل مسافة Hellinger ذو الخطوة الواحدة (OHD) على باقي طرائق التقدير إذ سجلت هذه الطريقة اقل معدل تحيز (Bias) وأقل متوسط مربعات خطأ (MSE) وأكبر نسبة تغطية (CP) عند $\alpha = 1.5$ وقيم $\beta = 1.5, 5.5, 8$.

3. تفوق طريقة المسافة العامة (GS) على باقي طرائق التقدير إذ سجلت هذه الطريقة أقل معدل تحيز (Bias) وأقل متوسط مربعات خطأ (MSE) وأكبر نسبة تغطية (CP) عندما $\alpha = 1.5$ وقيم $\beta = 3.5$.

4. نلاحظ وجود دالة متناقصة بين حجم العينة ومعدل التحيز ومتوسط مربعات الخطأ. وإن نسبة التغطية مغلقة عند (95%) لأحجام العينات (n=50, 100, 200) مع تغيرات طفيفة عند أحجام العينات (n=10, 30).

ولبيان نسبة أفضلية كل طريقة، الجدول (3-7) يبين نسبة الأفضلية وعدد مرات الأفضلية لكل طريقة من طرائق التقدير وكما يأتي:

جدول (3-7) عدد مرات الافضلية ونسبة الافضلية لطرائق التقدير لجميع تجارب المحاكاة

الطريقة	عدد مرات الافضلية	نسبة الافضلية %
MLE	7	35
OHD	10	50
GS	3	15

يتضح من جدول (3-7) ان طريقة مقدر اقل مسافة Hellinger ذو الخطوة الواحدة (OHD)

حققت نسبة افضلية 50% تليها طريقة الامكان الاعظم (MLE) بنسبة افضلية 35%. واخيرا طريقة

المسافة العامة (GS) بنسبة افضلية 15%.



الفصل الثالث

المبحث الثاني

الجانب التطبيقي

1.2.3 تمهيد (Preface)

تم في هذا الفصل استعمال بعض المفاهيم الأساسية التي تخص القرنية (مكوناتها، الاعراض المصاحبة لها، أسباب تلفها، وغيرها). كذلك استعملت بيانات حقيقية عن العين (زاوية انحناء القرنية الخلفي)، إذ تم التقاط صور للجزء الخلفي من عيون (100) مريض باستعمال التصوير المقطعي للجزء الأمامي من المدى البصري. وتم ملائمة هذه البيانات لتوزيع كاما المعكوس النصف دائري المحول واستعملت طريقة (OHD) لتقدير معالم التوزيع. وتم استخراج دالة البقاء ودالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع المقترح.

2.2.3 انحناء القرنية الخلفي: (The posterior segment of the eyes)

تعرف القرنية بأنها الطبقة الخارجية الشفافة للعين التي تعمل مع بياض العين كحاجزٍ واقٍ يحمي مكونات العين الحساسة من تأثير الأوساخ والجراثيم والجزيئات الأخرى، ويمكن للقرنية أيضاً حجب كميات معينة من أشعة الشمس فوق البنفسجية. وتؤدي القرنية دوراً أساسياً في قدرة الشخص على الرؤية إذ ينكسر الضوء عند دخوله إلى العين نتيجة لشكلها الخارجي، إذ يحدد انحناء هذه الطبقة الخارجية جودة تركيز العين على الأجسام القريبة منها والبعيدة عنها. وعندما تتعرض القرنية للتلف جراء إصابتها بمرضٍ أو التهابٍ أو أذى يمكن أن تؤثر الندب أو تغييرات اللون في الرؤية عن طريق حجب الضوء أو حرقه لدى دخوله إلى العين . (Scott C. Litin M.D., 2018)

وتتكون القرنية من ثلاث طبقات رئيسة وهي :

- **الظهارة:** وهي الطبقة السطحية الخارجية للقرنية التي تمنع المواد الخارجية من دخول العين كما تمتص الأوكسجين والمواد المغذية من الدمع .
- **اللحمة:** وهي أثنى طبقات القرنية وتقع خلف الظهارة وتتكون في معظمها من الماء والبروتينات التي تمنحها شكلها المرن والصلب في الوقت نفسه .
- **البطانة الداخلية:** وهي طبقة واحدة من الخلايا تقع بين اللحمة وسائل العين (الخلط المائي)، وهو السائل الشفاف الموجود في حجرتي العين الأمامية والخلفية. وتعمل البطانة الداخلية كمضخة تطرح الماء الزائد عند امتصاصه باتجاه اللحمة. ولولا هذه الوظيفة المتخصصة لأصبحت اللحمة ليست فقط مغمورة بالماء وتعلوها الضبابية بل حتى تفقد مظهرها الشفاف مما يؤثر في جودة الرؤية .

ويشير مصطلح أمراض القرنية إلى عددٍ من الحالات المرضية التي تصيب قرنية العين بشكلٍ رئيسي، وتتضمن الالتهابات والتنكسات وغير ذلك من الحالات الأخرى التي غالبًا ما تنشأ نتيجة عوامل وراثية . (Taym et al.,2020)

3.2.3 اضطرابات تلف القرنية:

هنالك بعض الاسباب التي تؤدي الى تلف القرنية وهي:

أولاً: التهاب القرنية:

يعود التهاب قرنية العين في بعض الأحيان إلى العدوى بجراثيم أو فطريات تصيبها، وقد تدخل هذه الكائنات المجهرية الحية العين جراء التعرض لإصابة شديدة تؤدي إلى العدوى والتهابات وتقرحات في قرنية العين. وقد ينجم هذا النوع من الالتهاب أيضاً بعد التعرض للأذى نتيجة ارتداء العدسات اللاصقة لكن هذه ليست حالة شائعة.

وتتضمن أعراض التهاب القرنية ما يأتي:

- الشعور بالألم شديد.
- تضائل وضوح الرؤية.
- خروج إفرازات من القرنية.

ويجدر بالذكر أن المعالجة تشمل في العادة استعمال قطرات العين المضادة للفطريات أو الحاوية على المضادات الحيوية. (cornea,2019,14-12)

ثانياً: التهاب العين الفيروسي (هربس العين):

هو من الالتهابات الفيروسية التي قد تصيب العين بشكلٍ متكرر ويعزى هذا الالتهاب بصورةٍ رئيسة إلى فيروس الهربس البسيط من النمط الأول، ولهذا يُسمى بهربس العين، علماً أن هذا الفيروس هو ما يُسبب الإصابة بقروح الزكام التي تعرف محلياً بـ"عقبولة السخونة"، إلا أن التهاب العين الفيروسي قد ينجم أيضاً عن فيروس الهربس البسيط من النمط الثاني الذي ينتقل جنسياً ويؤدي إلى الإصابة بمرض الهربس التناسلي. ويسبب التهاب العين الفيروسي قروحاً على سطح القرنية وقد ينتشر الالتهاب مع مرور الوقت

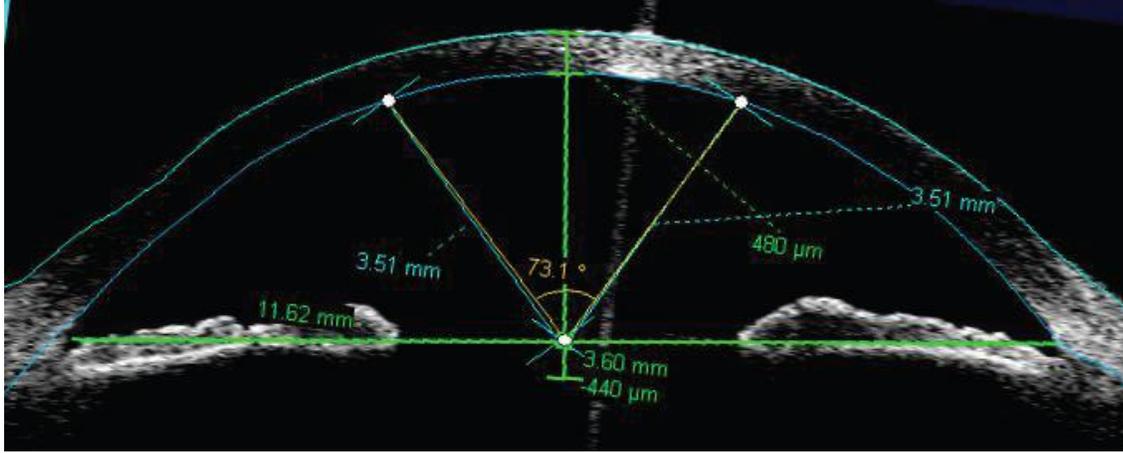
ليطال القرنية والعين، ولا يوجد علاج لالتهاب العين الذي يسببه فيروس الهربس ولكن يمكن السيطرة عليه بالعقاقير المضادة للفيروسات. (Mahmoud et al., 2020)

ثالثاً: القوباء المنطقية:

تتجم القوباء المنطقية عن فيروس جدري الماء لدى الشخص الذي أصيب به في السابق، فبعد نوبة الإصابة بجدري الماء عادةً ما يبقى هذا الفيروس في أعصاب الجسم غير أنه يكون خاملاً، ويمكنه أن ينتقل لاحقاً خلال هذه الأعصاب ليصيب أعضاء معينة من الجسم مثل العينين. وقد تسبب القوباء المنطقية ظهور البثور أو مناطق تالفة على القرنية فضلاً عن الحمى والألم الناشئ من الألياف العصبية. وفي العادة تشفى مناطق التلف التي تظهر على القرنية من تلقاء نفسها، أما بالنسبة للمعالجة المضادة للفيروسات فمن شأنها تقصير مدة المرض، وفي بعض حالات القوباء المنطقية التي تستدعي إستعمال قطرات العين لأجلٍ طويل تصاب قرنية العين بحالة مزمنة من الأرجية والالتهاب. ويمكن أن تصيب القوباء المنطقية جميع الأشخاص الذين سبق وأصيبوا بجدري الماء لكن يزداد خطر الإصابة بها بين الكبار الذين تجاوزوا سن الخامسة والستين على وجهٍ خاص والأشخاص الذين يعانون من ضعفٍ في الجهاز المناعي، وينبغي مراجعة الطبيب لدى ظهور أعراض القوباء المنطقية (Taym et al., 2020).

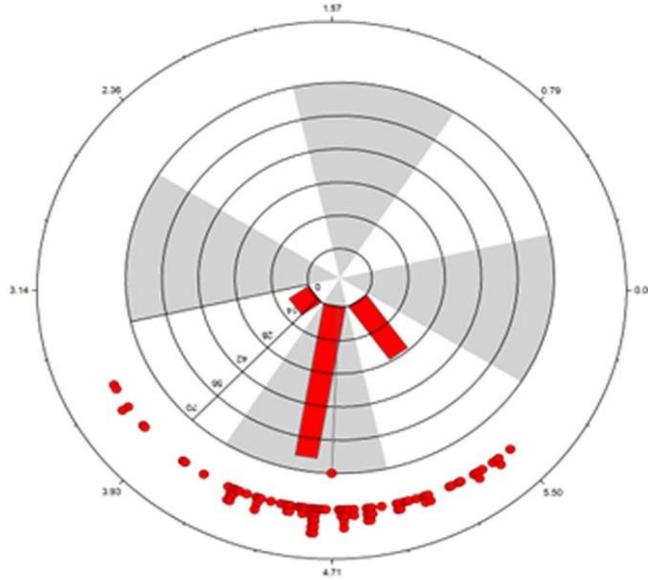
4.2.3 البيانات الحقيقية (Real Data)

أخذت مجموعة بيانات عن العين تم الحصول عليها من مختبر عيون كربلاء في محافظة كربلاء للفحوصات التشخيصية المتقدمة لأمراض العيون باستعمال جهاز مفروس الشبكية OCT للتصوير المقطعي ثلاثي الأبعاد المقدسة والتي تم التقاط صور للجزء الخلفي من عيون (100) مريض باستعمال التصوير المقطعي للجزء الأمامي من المدى البصري. والمتغير الذي يمثل البيانات المدروسة هو الزاوية مقاسة بالرادين والتي تقيس الانحناء الخلفي للقرنية الناتجة عن تقاطع المحور الهندسي للعين (الخط الأفقي) مع الخط المصنوع بين النتوءات الصلبة الأنفية والزمن (الخط العمودي). بحيث عندما نرسم نصف القطر إلى السطح الخلفي للقرنية بأطوال تتراوح بين [3.49، 3.51] ملم فإن الزاوية الممتدة بنصف القطر هي انحناء القرنية الخلفي كما مبين في الشكل (3-26). من المتوقع أن يكون للزاوية قيمة أعلى عندما تكون القرنية محدبة بشكل أكبر. والجدول (3-8) يمثل البيانات التطبيقية.



شكل (3-26) قياس انحناء القرنية الخلفي (Rambli et al., 2015, 4)

الجدول (3-8) يمثل بيانات الحقيقية لزوايا انحناء القرنية الخلفي لعيون (100) مريض مقاسة بالقياس الدائري (rad).



شكل (3-27) البيانات الحقيقية ضمن دائرة الوحدة

الشكل (3-27) يمثل البيانات الحقيقية وهي موزعة ضمن دائرة الوحدة إذ نلاحظ ان جميع البيانات تتوزع ضمن الربع الثالث والرابع أي في النصف الثاني لدائرة الوحدة، ما يدل على انها مثلت التوزيع المقترح (توزيع كاما المعكوس نصف الدائري) بصورة مناسبة.

4.2.3 Data Fitting: اختبار ملائمة البيانات

للتأكد من ان البيانات في الجدول (3-8) تتلائم مع التوزيع المدروس (*HCTIGD*)، تم استعمال اختبار Chi-square لحسن المطابقة وبموجب الفرضية الآتية:

H_0 : The data have the *HCTIGD*

H_1 : The data don't have the *HCTIGD*

ولاختبار هذه الفرضية الاحصائية سيتم احتساب قيمة إحصاءه χ_c^2 وحسب الصيغة الآتية:

$$\chi_c^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \quad \dots (4-1)$$

إذ ان:

O_i : تمثل القيم الحقيقية.

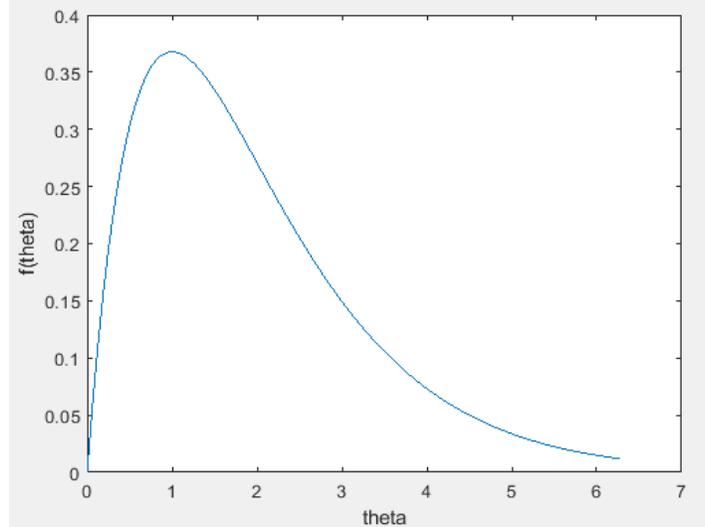
E_i : تمثل القيم المتوقعة.

إذ تم احتساب إحصاءه حسن المطابقة χ_c^2 في برنامج (MatLab) وكانت نتائج الاختبار كما في جدول (2-4):

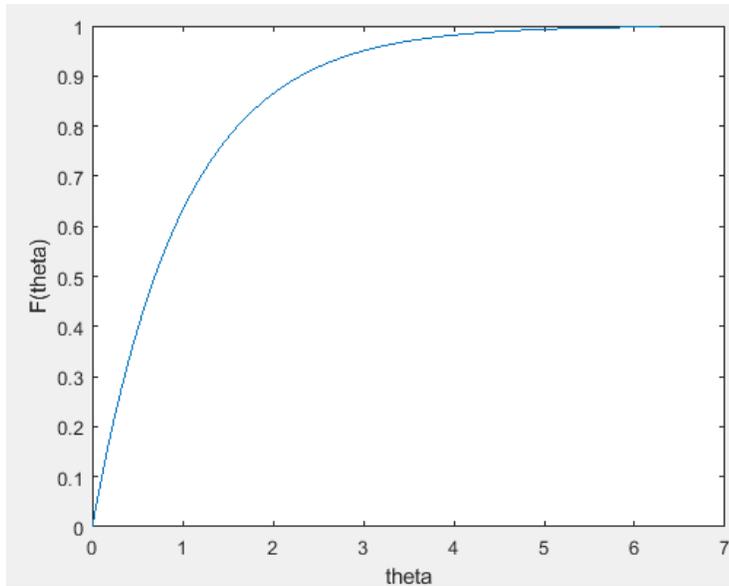
جدول (3-9) نتائج إختبار ملائمة البيانات

Distribution	χ_c^2	χ_t^2	Sig.	Decision
HCTIG	0.07855	15.51	0.44358	Don't reject H_0

نلاحظ من جدول (3-9) ان قيمة χ_c^2 المحسوبة لتوزيع كاما المعكوس النصف دائري المحول والبالغة (0.07855) اقل من قيمة χ_t^2 الجدولية عند مستوى معنوية (0.05) ودرجة حرية (8) والبالغة (15.51) وكانت قيمة Sig=0.44358 اكبر من مستوى المعنوية (0.05) وهذا يعني عدم رفض فرضية العدم اي ان البيانات الحقيقية تتوزع وفقاً لتوزيع كاما المعكوس النصف دائري المحول وهذا مايبثب صحة فرضية العدم.



شكل (3-28) منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع HCTIG للبيانات الحقيقية

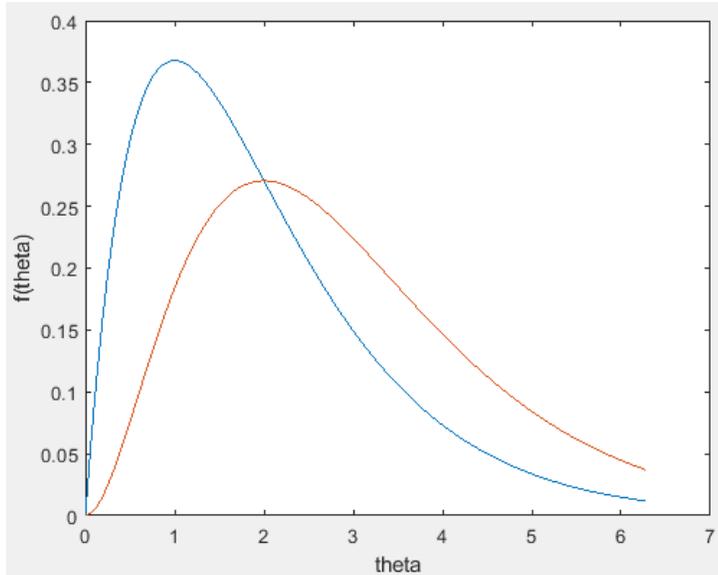


شكل (3-29) منحنى دالة الكثافة الاحتمالية التجميعية لتوزيع HCTIG للبيانات الحقيقية

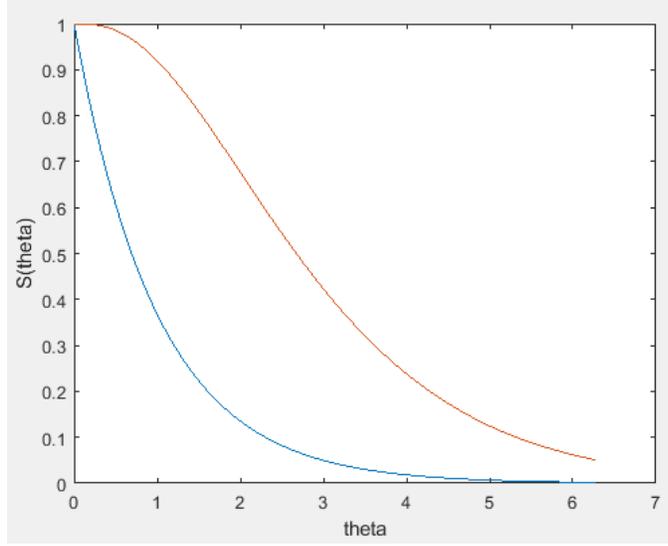
نلاحظ من جدول (3-10) بان معايير الاختبارات الخاصة بتوزيع كاما المعكوس النصف دائري المحول أفضل من توزيع كاما وتوزيع كاما المعكوس في ملائمة البيانات الحقيقية، وهذا يدل عن ملائمة البيانات الحقيقية الدائرية للتوزيع النصف دائري المحول على التوزيعات الخطية (Inverse Gamma, Gamma). ونلاحظ ايضاً ان المعلمات المقدرة بطريقة اقل مسافة ذو الخطوة الواحدة (OHD) للبيانات الحقيقية لتوزيع (HCTIG) أكثر اقتراباً للمعلمات الافتراضية في الجانب التجريبي عندما ($\alpha=2.5$ و $\beta=2.5$) بخلاف باقي التوزيعات التي نلاحظ ان المعلمات المقدرة أكثر ابتعاداً عن المعلمات الافتراضية.

6.2.3 تحليل البيانات الحقيقية: (Real data analysis)

بينت نتائج تجارب المحاكاة الموضحة في الفصل الثالث من هذه الرسالة أفضلية طريقة (OHD) في تقدير معلمات توزيع كاما المعكوس النصف دائري المحول عند احجام العينات المفترضة، وتبين كذلك من الجانب التطبيقي أفضلية كاما المعكوس النصف دائري المحول لتمثيل البيانات الحقيقية، وعلى ضوء ذلك تم تقدير المعلمات ودالة البقاء بطريقة اقل مسافة ذو الخطوة الواحدة (OHD) عند القيم الافتراضية ($\alpha=2.5$ و $\beta=2.5$) وكانت نتائج التقدير كما في جدول (3-11) أدناه:



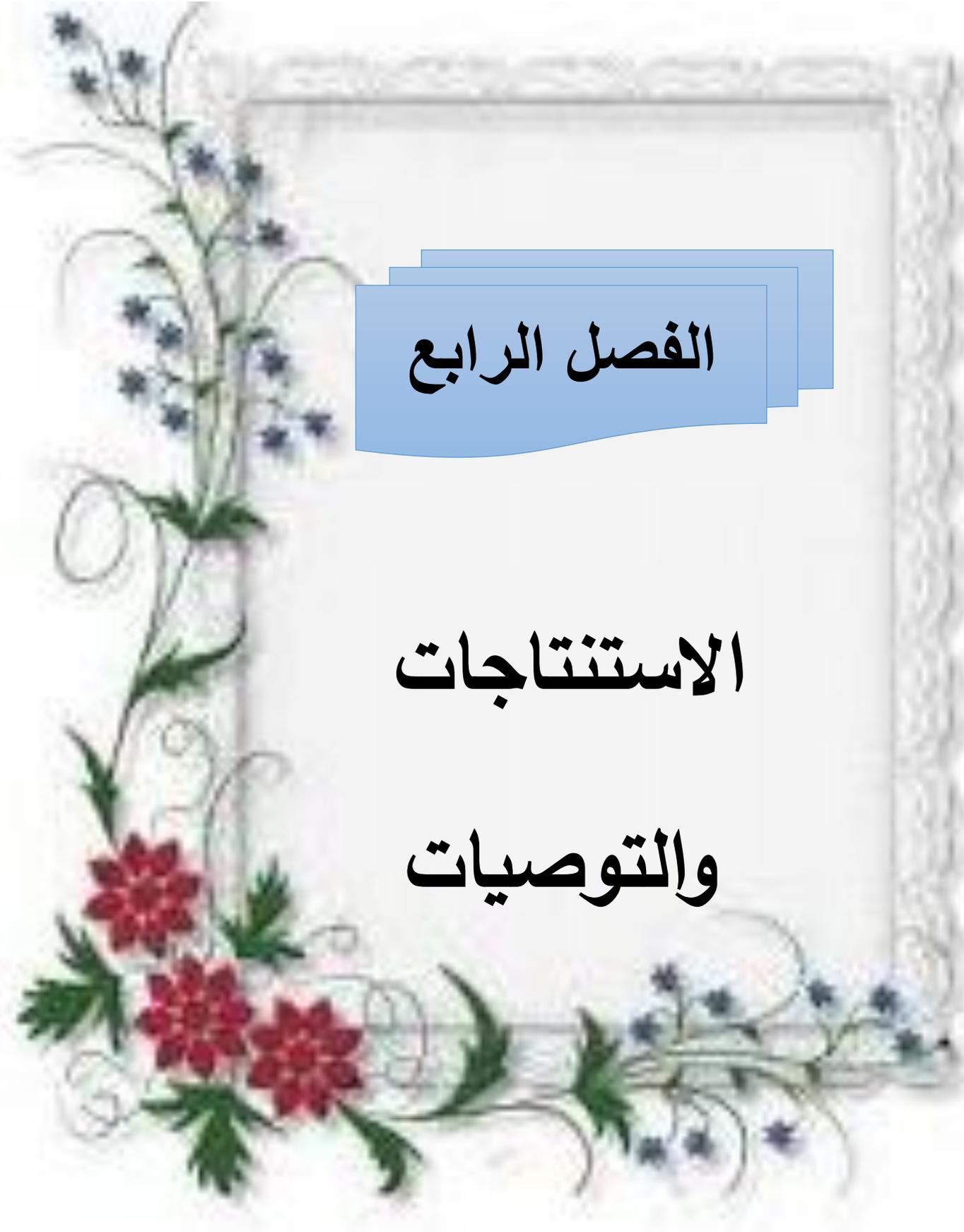
شكل (3-31) منحنى دالة الكثافة الاحتمالية بموجب طريقة اقل مسافة ذو الخطوة الواحدة



شكل (32-3) منحنى دالة البقاء الحقيقية والمقدرة بموجب طريقة أقل مسافة ذو الخطوة الواحدة

من الجدول (11-3) والأشكال (31-3) و (32-3) يتضح الآتي:

1. تتناقص قيم دالة البقاء المقدرة مع الزمن وبصورة واضحة وهذا ما يطابق سلوك هذه الدالة كونها متناقصة مع الزمن.
2. قيم دالة الكثافة الاحتمالية المقدرة بموجب طريقة (OHD) متقاربة مع قيم دالة الكثافة الاحتمالية للبيانات الحقيقية عند القيم (1-33) ومتباعدة عند القيم (34-87) ثم تقترب عند القيم (88-100).
3. كلما زادت زاوية انحناء القرنية الخلفي قل احتمال إصابة المريض بأمراض العين مثل الحول، الزرق (العمى). فعندما تكون زاوية انحناء القرنية الخلفي بمقدار (0.45) راديان فإن احتمال بقاء المريض مصاب (99%)، وعندما تكون زاوية انحناء القرنية الخلفي بمقدار (2.23) راديان فإن احتمال بقاء المريض مصاب (0.016%).



الفصل الرابع

الاستنتاجات

والتوصيات

1.4 الإستنتاجات (Conclusions)

بالاعتماد على ماتوصلنا اليه من نتائج في الجانبين التجريبي والتطبيقي تم التوصل الى الاستنتاجات الآتية:

1. تقنية الاسقاط المجسم العكسي كانت فعالة في تحويل التوزيع من خطي الى دائري.
2. تفوق طريقة مقدر اقل مسافة ذو الخطوة الواحدة (OHD) بنسبة 50% على باقي طرائق التقدير إذ سجلت هذه الطريقة اقل معدل تحيز (Bias) واقل متوسط مربعات خطأ (MSE) وأكبر نسبة تغطية (CP) عند احجام العينات المفترضة تليها طريقة الأماكن الأعظم (MLE) بنسبة 35% وأخيرا طريقة مقدر المسافة العامة (GS) بنسبة 15%.
3. من خلال معايير الاختبارات أثبت بأن توزيع كما المعكوس النصف دائري المحول أفضل من توزيع كما وتوزيع كما المعكوس في ملائمة البيانات الحقيقية.
4. وجود علاقة عكسية بين حجم العينة ومعدل التحيز ومتوسط مربعات الخطأ. وان نسبة التغطية مغلقة جداً عند (95%) لاجام العينات (n=50, 100, 200) مع تغيرات طفيفة عند احجام العينات (n=10, 30).
5. ان احتمال اصابة المريض بامراض العين مثل الحول، الزرق، العمى للمدى الذي تصل به زاوية انحناء القرنية الخلفي بمقدار (1) راديان فان احتمال بقاء المريض مصابا بامراض العين (94%) , وعندما يصل مدى زاوية انحناء القرنية الخلفي بمقدار (2) راديان كحد اقصى فان احتمال بقاء المريض مصابا (0.132%).

2.3 التوصيات (Recommendations)

من ماتم التوصل اليه من استنتاجات نوصي بالآتي:

1. استعمال تقنية الاسقاط العكسي لايجاد التوزيعات النصف دائرية المحولة والتوزيعات المركبة والتوزيعات المختلطة والتي تتضمن أكثر من معلمتين.
2. استعمال طريقة مقدر اقل مسافة ذو الخطوة الواحدة لتقدير المعلمات في التوزيعات الدائرية كونها أعطت نتائج أفضل من بقية الطرائق.
3. استعمال مبدأ الضبابية مع التوزيع النصف دائري المحول لايجاد توزيع يتمتع بمرونة ودقة أكبر في التعامل مع البيانات النصف دائرية في حالة كون البيانات غير دقيقة.
4. الزيارات المنتظمة لطبيب العيون وذلك للكشف المبكر عن المرض، خاصة إن بعض الأمراض تتطور بشكل تدريجي دون ظهور أعراض واضحة في البداية.
5. بعد الخضوع لتشخيص الإصابة بالقرنية لابد من مناقشة الطبيب في كيفية التعامل مع هذه الحالة وإتباع إرشاداته ومناقشته في أنسب طريقة ل علاج القرنية، حتى إذا كانت الخضوع لعملية زراعة القرنية.
6. نوصي وزارة الصحة العراقية بضرورة إعتداد نتائج هذه الرسالة لغرض تقدير احتمال الإصابة بأمراض العين بالاستناد إلى زاوية انحاء القرنية الخلفي.

المصادر



المصادر الأجنبية

1. Abid, S. H. , Al-Hassany, S. A., (2016), "On the Inverted Gamma Distribution", International Journal of Systems Science and Applied Mathematics 2016; 1(3): 16-22 [http:// www.sciencepublishinggroup.com/j/ijssam](http://www.sciencepublishinggroup.com/j/ijssam)
2. Abuzaid, A. H. (2017): A half circular distribution for modeling the posterior corneal curvature, Communications in Statistics – Theory and Methods, DOI: 10.1080/03610926.2017.1348521
3. Ali, O., Abdulmohsin, J., Asmma G., and Al-Sharif, J., Abdul-Hadi, (2019), "Multivariate analysis", first edition, Al-Daad Library for Publishing and Distribution, Baghdad.
4. Al-Mofleh, H. and Sen, S., (2019), "The wrapped xgamma distribution for modeling circular data appearing in geological context" ariv:1903.00177v1 stat.me.
5. Andreescu T., Andrica, D. (2014), "3.1.1 The Distance Between Two Points", Complex Numbers from A to ... Z (2nd ed.), Birkhäuser, pp. 57-58, [ISBN 978-0-8176-8415-0](#)
6. Anton, H., Rorres, C., (2010), "Elementary Linear Algebra "Copyright © 2010 John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.
7. Arfken G. B., & Weber H. J., (2000), "Mathematical Methods for Physicists" (5th ed.). Academic Press. [ISBN 0-12-059825-6](#).
8. Axler S., (2016), " Linear Algebra Done Right “, third edition, Springer, ISSN 0172-6056 ISSN 2197-5604 (electronic) ISBN 978-3-319-11079-0 ISBN 978-3-319-11080-6 (eBook) DOI 10.1007/978-3-319-11080-6 Springer Cham Heidelberg New York Dordrecht London Library of Congress Control Number: 2014954079

9. Bahlmann C., (2006), Directional features in online handwriting recognition (<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.330.9384&rep=rep1&type=pdf>), Pattern Recognition, 39.
 10. Barrera A., (2014), " Unit Circles and Inverse Trigonometric Functions , A method to determine all the inverse trigonometric functions directly from the unit circle ", The National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org
 11. Bapat R., (2021), "Sequentially estimating the dynamic contact angle of sessile saliva droplets in view of SARS-CoV-2" Indian Institute of Management, Indore, India.
 12. Beran R., (1977) "Minimum Hellinger Distance Estimates for Parametric Models,". The Annals of Statistics, 5: 445–463.
 13. Binnenfeld S. S. , and Zucker S., (2020), " Unit–sphere representation Period gram for full spectra ", A&A 642, A146 <https://doi.org/10.1051/0004-6361/202039001>, c ESO.
 14. BRÄNNSTRÖM A., (2018), " A Comparison of Three Methods of Estimation Applied to Contaminated Circular Data “, Master Thesis in Statistics, 15 hp Spring Term, 2018.
 15. Callan D., (2009). "A combinatorial survey of identities for the double factorial". [arXiv:0906.1317](https://arxiv.org/abs/0906.1317)
 16. Cornea " www.healthline.com, Retrieved 24-12-2019.
 17. Dodge Y. (2006). The Oxford Dictionary of Statistical Terms (<https://archive.org/details/oxforddictionary0000unse>). OUP. ISBN 0-19-920613-9.
 18. Ekstrom M., (1997),” Generalized maximum spacing estimators”, Research Report No.6, Department of Mathematical Statistics, Umea University.
-
-

19. Girija S., Rao A., Srihri G." On Wrapped Binomial Model Characteristics" Mathematics and Statistics 2(7): 231–234, 2014
<http://www.hrpub.org> DOI: 10.13189/ms.2014.020701
 20. [Girija S.](#), [Rao A. V.](#), [Phani Y.](#), (2014), " New Circular model induced by Inverse Stereographic projection on Double Exponential Model – Application to Birds Migration Data, Journal of Applied Mathematics, Statistics and Informatics.
 21. Haocheng L., Jingjing W., Jian Y., (2018), " MINIMUM PROFILE HELLINGER DISTANCE ESTIMATION FOR A TWO–SAMPLE LOCATION–SHIFTED MODEL ", Journal of Data Science, DOI: 10.6339/JDS.201807_16(3).0002
 22. Jones M.C. & Pewsey A. 2005. A family of symmetric distributions on the circle. Journal of the American Statistical Association 100: 1422–1428.
 23. Kundua, D., Guptab, D.R., (2007), "A Convenient Way of Generating Gamma Random Variables Using Generalized Exponential Distribution", [Computational Statistics & Data Analysis Volume 51, Issue 6](#), 1 March 2007, Pages 2796–2802.
 24. Larson, R. H., Robert H., Edwards, B., (2008),' Precalculus Functions and Graphs A Graphing Approach ' , Houghton Mifflin Company Boston New York, fifth edition , Houghton Mifflin.
 25. Mahmoud R., Habib Y., Asmaa S., [Electroretinogram and Visual Evoked Potentials in Patients with Type II Diabetes Mellitus](#) , [Tishreen University Journal –Medical Sciences Series: Vol. 42 No. 4 \(2020\): Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies – Medical Sciences Series](#)
 26. Najwa k., Habib Y., Yara D., [Study the effect of myopia on macular retinal thickness in adults by optical coherence tomography](#) , [Tishreen University](#)
-
-

Journal –Medical Sciences Series: Vol. 42 No. 1 (2020): Medical Sciences Series

27. Panichkitkosolkul W. (2016). Confidence intervals for the process capability index C_p based on confidence intervals for variance under non-normality. Malays. J. Math. Sci, 10(1), 101–115.
 28. Parks R. H., (2014), " The Volume of the Unit n -Ball" , MATHEMATICS MAGAZINE, This content downloaded from 129.93.16.3 on Thu, 10 Oct 2013 02:05:16 AM All use subject to JSTOR Terms and Conditions.
 29. Paul A., Cater M., MICHAEL A., (2011), " TECHNICAL MATHEMATICS WITH CALCULUS ", JOHN WILEY & SONS, INC.
 30. Pewsey A., Neuhuser M., Ruxton, G., (2013), " Circular Statistics in R", Library of Congress Control Number: 2013940576 ISBN 978–0–19–967113–7 Printed and bound by CPI Group UK) Ltd, Croydon, CR0 4YY.
 31. Phani Y., Girija S.V.S., and Rao A.V., On Construction of Stereographic Semi Circular Models, Journal of Applied Probability and Statistics. Vol 8, No. 1, (2013) 75–90.
 32. Phani Y., Girija, S.V.S. & Rao, A.V.D, (2016),” ON STEREOGRAPHIC CIRCULAR WEIBULL DISTRIBUTION”, Journal of New Theory.
 33. Phani Y., Subrahmanyam P. S., Girija S.V.S., and Rao A.V, (2017), “Stereographic Semicircular Half Logistic Distribution”, International Journal of Pure and Applied Mathematics Volume 113 No. 11 2017, 142 – 150 ISSN: 1311–8080.
 34. Phani Y., Radhika A.J.V., Girija S.V.S., and Rao A.V., (2017),” On Trigonometric Moments of the Stereographic Semicircular Gamma Distribution”, EUROPEAN JOURNAL OF PURE AND APPLIED MATHEMATICS Vol. 10, No. 5, 2017, 1124–1134.
 35. Phani Y., Sastry K. & Rao A. (2019).On Stereographic Semicircular Quasi Lindley Distribution. Journal of New Results in Science, 8 (1), 6–
-
-

13. Retrieved from [https://dergipark.org.tr /en/pub/jnrs/issue /49243 /395416](https://dergipark.org.tr/en/pub/jnrs/issue/49243/395416)
 36. Pickover Clifford A. (2009). [The Math Book: From Pythagoras to the 57th Dimension, 250 Milestones in the History of Mathematics](#). Sterling Publishing Company, Inc. p. 106. [ISBN 9781402757969](#).
 37. Pramesti1 G., (2018), "Erlang circular model motivated by inverse stereographic projection", IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1022 (2018) 012001 doi :10.1088/1742-6596/1022/1/012001.
 38. Rambli A., Mohamed I., Shimizu K., and Rambli N., (2019), "A half-circular distribution on a circle", Sains Malay., 48 (4), 887-892 .
 39. Rao J. S. and Sen Gupta, A. (2001). Topics in circular statistics. New York: World Scientific.
 40. Rao A.V.D., Girija S.V.S. & Phani Y.," Stereographic Logistic Model – Application to Noisy Scrub Birds Data" Chilean Journal of Statistics Vol. 7, No. 2, September 2016, 69-79.
 41. Rencher C. A., & Schaalje G. B., (2012), " LINEAR MODELS IN STATISTICS", Second Edition, Copyright # 2008 by John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved Published by John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey Published simultaneously in Canada.
 42. Rivera P. A., Calderín-Ojeda E., Gallardo D. I., and Gómez W. H., (2021), "A Compound Class of the Inverse Gamma and Power Series Distributions", Symmetry 2021, 13, 1328 [https://doi.org/ 10.3390 /sym 13081328](https://doi.org/10.3390/sym13081328) <https://www.mdpi.com/journal/symmetry>
 43. Rohana J. K., and Jingjing W., (2011), " One-step Minimum Hellinger Distance Estimation “, Computational Statistics & Data Analysis · December 2011 DOI: 10.1016/j.csda.2011.06.029 · Source: DBLP.
 44. Rohatgi V. K., & Saleh A.K., (2015). An Introduction to Probability and Statistics. Wiley Series.
-
-

45. [Scott C., Litin M.D.](#), (2018). 'Mayo Clinic Family Health ', 5th Edition: Completely Revised and Updated Hardcover – May 29.
 46. Silva P S., Trigo A., Varajão J., Pinto T., (2010) , " Simulation – Concepts and Applications" , M.D. Lytras et al. (Eds.): WSKS 2010, Part II, CCIS 112, pp. 429–434. Springer–Verlag Berlin Heidelberg.
 47. Sreekanth Y., Girija S.V.S., Phani Y. and Dattareya Rao A.V., (2018), “Semicircular Logistic Distribution induced by Simple Projection Method”, Mathematical Theory and Modeling www.iiste.org ISSN 2224–5804.
 48. Srinivas R., Phani.Y, Girija S.V.S., (2019), “On Semicircular Extreme-value distribution”, International Journal of Applied Engineering Research ISSN 0973–4562 Volume 14, Number 9 (2019) pp. 2182–2187 © Research India Publications. <http://www.ripublication.com>
 49. Strang G., (2022), " Linear Algebra and Its Applications ", Fifth Edition, ISBN–13: 978–0980232776, SBN–10: 0980232775.
 50. Subrahmanyam s.P., Dattareya Rao A.V.D Girija, S.V.S., (2017), “On Stereographic Semicircular New Weibull Pareto Model”, IJIRST – International Journal for Innovative Research in Science & Technology| Volume 3 | Issue 11 | April 2017 ISSN (online): 2349–6010.
 51. Taym D., Habib Y., Hiba H., [Dry Eye Evaluation after Trans epithelial Photorefractive Keratectomy](#) , [Tishreen University Journal –Medical Sciences Series: Vol. 42 No. 5 \(2020\): Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies – Medical Sciences Series](#)
 52. Weinstein E. W., "[Unit Circle](#)". mathworld.wolfram.com. Retrieved 2021–11–23.
-
-

In many practical applications and in the reality of our lives, we may encounter data measured in angular units such as degrees or radians, and this data can fall within the full circular range, i.e. $(0, 2\pi)$ and such data is called the circular data, as the supporter Support for circular data is the unit circle while for linear data the support is the real number line \mathbb{R} , The term circular data is used for the purpose of distinguishing it from linear data that is often used in analytics, or it may lie in the half-circular range $(0, \pi)$, as this type of data is called half-circular data. In the case of half-circular data Circular, A model should be found for the purpose of studying and analyzing such data. Therefore, this thesis came to find the semi-circular inverse gamma distribution based on the inverse stereographic projection property, which is concerned with converting the normal (Cartesian) data into polar data (measured by angles) and then finding the characteristics of the new semi-circular distribution, And then estimating the parameters of the new distribution based on three methods of estimation, namely the method of the maximum likelihood (Maximum Likelihood), the method of the least Hellinger distance with one step (The One-Step Minimum Hellinger Distance Estimator) and the method of general distance (The General spacing estimator) and then applying The estimations extracted on real data and using simulation experiments were compared between the three methods and we concluded that the best method for estimating the parameters of the semicircular inverted gamma distribution is the one-step Hellinger least distance method (OHD) with a better percentage (50%), followed by the greatest possibility method (MLE).) with a preference rate of (35%), and finally the general distance method (GS) with a preference rate of (15%). As well as the use of real data (data of angles of curvature of the cornea back) using a retinal scanner OCT device for three-dimensional tomography, in which pictures were taken of the back of the eyes of (100) patients. The variable that represents the studied data is the angle measured in radians, which measures the posterior curvature of the cornea, and it was found that the real data fit the distribution of the transformed semicircular inverse gamma.



Republic of Iraq
Ministry of Higher Education
And Scientific Research
University of Karbala
Faculty of Management
And Economics
Department of Statistics
Graduate Studies



Parameters Estimation of a Half Circular Inverse Gamma distribution With an application

A thesis

Submitted to the council of the college of Administration
& Economics\ University of Karbala as partial fulfillment of the
requirements for the Master degree in Statistics Sciences

By

Ammar Mohammed Jasim

Supervision

Prof. Dr. Mahdi Wahab Nea'ama

A.H. 1444

A.D. 2023