



جمهورية العراق

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة كربلاء

كلية الإدارة والاقتصاد

قسم الإحصاء

بناء وتقدير نموذج انحدار تراوي للبيانات الدائرية مع تطبيق عملي

اطروحة مقدمة إلى مجلس كلية الإدارة والاقتصاد في جامعة كربلاء وهي جزء من

متطلبات نيل درجة الدكتوراه فلسفة في علوم الإحصاء

تقدمها

علي محمد جواد

بإشراف

أ.د. جاسم ناصر حسين

2023 م

1444 هـ

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

﴿ فَتَعَالَى اللَّهُ الْمَلِكُ الْحَقُّ وَلَا تَعْجَلْ

بِالْقُرْآنِ مِنْ قَبْلِ أَنْ يُقْضَىٰ إِلَيْكَ وَحْيُهُ

﴿ وَقُلْ رَبِّ زِدْنِي عِلْمًا

بِسْمِ اللَّهِ
الْعَظِيمِ

من سورة طه : الآية (114)

الاهداء

إلى سيد المرسلين وحبيب الله العالمين أفضل الخلق أجمعين محمد ﷺ

وحنونه الطاهرين واصحابه المنتجبين

إلى صاحب العصر وناموس الدرر بقية الله في أرضه وحجة علي عباؤه

إلى والدي ووالدي حبا وبراً وعرفاناً بالجميل

إلى النبي استمد منها عزمي وسر يكتني في السراء والضراء زوجتي

إلى الأخصاء المتدنية إخواني وأخواتي

إلى كل أحببني وخاصتي ومن وقف بجانبني

أهدي إليهم جميعاً ثمرة جهدي وصبري.

علي

الشكر و التقدير

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على حبيب أله العالمين خير الخلق اجمين نبي الرحمة محمد واله الطيبين الطاهرين وبعد

لا يسعني إلا أن اقدم شكري وامتناني الى استاذي الفاضل الدكتور جاسم ناصر حسين بالإشراف على اطروحتي وعلى جهوده المبذولة طوال مدة إعداد الاطروحة سائلاً العزيز القدير أن يديم توفيقه لكل خير .

وكما اقدم شكري الى جميع اساتذتي في قسم الاحصاء جامعة كربلاء على الجهود التي بذلوها طوال سنوات الدراسة .

وكذلك اقدم كل الشكر والامتنان الى زملائي في الدراسة لجهودهم ومواقفهم الطيبة والمساعدة التي ابدوها لي طوال مدة الدراسة

وأخيراً اقدم كل الشكر والتقدير والعرفان بالجميل الى جميع افراد عائلتي الحبيبة سائلاً الله العلي القدير ان يعم الامن والأمان على عراقنا الحبيب والحمد لله رب العالمين .

علي

إقرار رئيس لجنة الدراسات العليا

بناء على اقرار المشرف العلمي والخبير اللغوي على اطروحة الدكتوراه
للطالب " علي محمد جواد " الموسومة بـ (بناء وتقدير انموذج إحدار زاوي للبيانات
الدائرية مع تطبيق عملي) ارشح هذه الاطروحة للمناقشة.

د. علي أحمد فارس

رئيس لجنة الدراسات العليا

معاون العميد للشؤون العلمية والدراسات العليا

مصادقة مجلس الكلية

صادق مجلس كلية الادارة والاقتصاد/ جامعة كربلاء على قرار لجنة المناقشة.

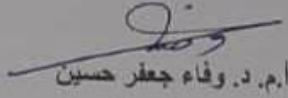
د. ا.ب. محمد حسين كاظم الجبوري

عميد كلية الادارة والاقتصاد- جامعة كربلاء

2023 / /

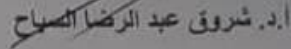
إقرار لجنة المناقشة

نشهد نحن أعضاء لجنة المناقشة بأننا قد اطلعنا على الاطروحة الموسومة
(بناء وتقدير إنموذج إنحدار زاوي للبيانات الدائرية مع تطبيق عملي)
والمقدمة من قبل الطالب "علي محمد جواد" وناقشنا الطالب في محتوياتها
وفيما له علاقة بها، ووجدنا بأنها حديرة بنيل درجة الدكتوراه فلسفة في علوم
الإحصاء بتقدير (جيد جداً).


أ.م.د. وفاء جعفر حسين


عضواً

2023 / /


أ.د. شروق عبد الرضا الصباح

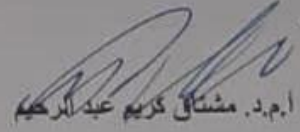
رئيساً

2023 / /


أ.م.د. صدى فايز محمد

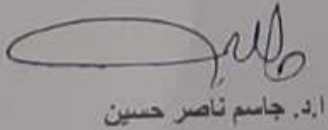
عضواً

2023 / /


أ.م.د. مشتاق كريم عبد الرحيم

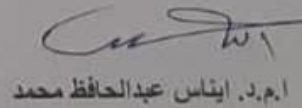
عضواً

2023 / /


أ.د. جاسم ناصر حسين

عضواً ومشرفاً

2023 / /


أ.م.د. ايناس عبد الحافظ محمد

عضواً

2023 / /

إقرار المشرف

أشهد بأن إعداد هذه الأطروحة الموسومة (بناء وتقدير
إنموذج إحدار زاوي للبيانات الدائرية مع تطبيق عملي) والتي تقدم
بها الطالب " علي محمد جواد " قد جرى بإشرافي في قسم
الإحصاء - كلية الإدارة والاقتصاد - جامعة كربلاء، وهي جزء من
متطلبات نيل درجة الدكتوراه علوم في الإحصاء.

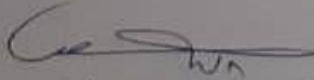


أ.د. جاسم ناصر حسين

التاريخ: / / 2023

توصية رئيس قسم الإحصاء

بناء على توصية الأستاذ المشرف، أرحب الأطروحة للمناقشة.



أ.د. أfnاس عبد الحافظ محمد

رئيس قسم الإحصاء

التاريخ: / / 2023

إقرار الخبير اللغوي

أشهد بأن الاطروحة الموسومة (بناء وتقدير إنموذج إنحدار زاوي للبيانات الدائرية مع تطبيق عملي) قد جرى مراجعتها من الناحية اللغوية تحت اشرافي اذ أصبحت خالية من الاخطاء اللغوية ولأجله وقعت.



الخبير اللغوي

م. صلاح مهدي جابر

جامعة كربلاء – كلية العلوم الاسلامية

المستخلص

أن دراسة المتغيرات التي تحدث بشكل دوري وتجمعها نقطة اصل واحدة والتي يطلق عليها المتغيرات الدائرية من العمليات المهمة في وقتنا الحاضر لوجود بعض الظواهر التي توصف بهذا النوع من البيانات و يعد الانحدار الزاوي (الدائري) من اهم الاساليب الاحصائية لتمثيل هذا النوع من الظواهر , وتوصف طريقة الامكان الاعظم من اهم الطرائق التي تستعمل لتقدير معالمته. كما يعد التوزيع الذي يتبعه الخطأ العشوائي لأنموذج الانحدار الزاوي من الامور المهمة لان طريقة الإمكان الأعظم تعتمد بشكل اساسي على تعظيم دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع الخطأ العشوائي .

لذا تضمنت الدراسة استعمال ثلاثة نماذج انحدار زاوي (دائري) وهي أنموذج الانحدار الزاوي بخطأ فون ميزيس وانموذج الانحدار الزاوي البسيط بخطأ يتبع توزيع كوشي الملفوف و الأنموذج المقترح وهو أنموذج الانحدار الزاوي البسيط بخطأ يتبع التوزيع الطبيعي الملفوف .

وتم اقتراح اختبار لجودة التوفيق للنماذج الثلاثة يعتمد على توزيع فشر لبيان مدى معنوية كل نموذج من النماذج الثلاثة. و تمت المقارنة بين النماذج الثلاثة باستعمال معيارين هما معيار المعلومات البيزي ((Bayesian Information Criterion (BIC) و معيار المعلومات لـ اكاكي المصحح ((Akaike's Debuger Information criterion(AIC_C)

و بينت النتائج في الجانب التجريبي انه كل ما تم التطابق بين توزيع المتغير التابع مع توزيع الخطأ العشوائي يكون الأنموذج هو الأنموذج الافضل وذلك حسب ما بينته قيمة معيار (BIC) ومعيار(AIC_C) و بين اختبار جودة التوفيق للنماذج أن اغلب النماذج هي نماذج معنوية .

وتم التطبيق العملي على متغيرين دائريين هما اتجاه الرياح في مدينة الناصرية كمتغير معتمد واتجاه الضغط الجوي المرتفع كمتغير مستقل . و بينت النتائج ان جميع النماذج مثلت البيانات بصوره صحيحة عن طريق اجتياز النماذج المقدره لاختبار جودة التوفيق و أن العلاقة بين اتجاه الضغط الجوي المرتفع واتجاه الرياح في مدينة الناصرية هي علاقة طردية . ويعد الأنموذج المقترح وهو أنموذج الانحدار الزاوي البسيط بخطأ يتبع التوزيع الطبيعي الملفوف هو الأنموذج الامثل لهذه البيانات حسب ما بينته قيمة معيار (BIC) ومعيار (AIC_C)

قائمة المحتويات

الموضوع	رقم الصفحة
الآية	أ
الاهداء	ب
الشكر والتقدير	ج
المستخلص	د
قائمة المحتويات	هـ
قائمة الجداول	ز
قائمة الاشكال	ح
قائمة المصطلحات	ح
الفصل الاول : منهجية الاطروحة و الاستعراض المرجعي	
1-1 المقدمة	2
2-1 اهمية الاطروحة	3
3-1 مشكلة الاطروحة	4
4-1 هدف الاطروحة	4
5-1 الاستعراض المرجعي	4
الفصل الثاني : الجانب النظري	
المبحث الاول : مفهوم البيانات الدائرية والاحتمال الدائري	
1-1-2 مفهوم البيانات الدائرية	10 - 33
2-1-2 الإحصاء الوصفي للبيانات الدائرية	11
1-2-1-2 الوسط الحسابي الدائري	11
2-2-1-2 الوسيط الدائري	17
3-2-1-2 التباين الدائري	18
4-2-1-2 الانحراف المعياري الدائري	21
5-2-1-2 العزوم	22
3-1-2 مفهوم التوزيع الاحتمالي الدائري مع بعض التوزيعات الاحتمالية الدائرية	23
1-3-1-2 مفهوم التوزيع الاحتمالي الدائري	23
2-3-1-2 بعض التوزيعات الاحتمالية الدائرية	25
1-2-3-1-2 التوزيع المنتظم الدائري	26
2-2-3-1-2 التوزيع الآسي الملفوف	26

28	التوزيع الطبيعي الملفوف	3-2-3-1-2
31	توزيع فون ميزيس	4-2-3-1-2
33	توزيع كوشي الملفوف	5-2-3-1-2
53-33	المبحث الثاني : الانحدار الدائري	
34	مفهوم الانحدار و أنواعه	1-2-2
35	أنموذج الانحدار الزاوي البسيط	2-2-2
36	أنموذج الانحدار الزاوي البسيط بخطأ فون ميزيس	1-2-2-2
41	أنموذج الانحدار الزاوي البسيط بخطأ كوشي الملفوف	2-2-2-2
48	أنموذج الانحدار الزاوي بخطأ التوزيع الطبيعي الملفوف	3-2-2-2
50	اختبار جودة التوفيق للنماذج المقدره	3-2-2
52	المفاضلة بين النماذج	4-2-2
52	معيار المعلومات لـ أكاي المصحح	1-4-2-2
53	معيار المعلومات البيزي	2-4-2-2
80-54	الفصل الثالث : الجانب العملي	
69-54	المبحث الاول : الاسلوب التجريبي	
55	التمهيد	1-1-3
55	الاسلوب التجريبي (المحاكاة)	2-1-3
55	توليد البيانات	1-2-1-3
56	النتائج	2-2-1-3
79-70	المبحث الثاني : الاسلوب التطبيقي	
70	التمهيد	1-2-3
70	طرائق تحديد اتجاه الرياح	2-2-3
71	اهم العوامل المؤثرة باتجاه الرياح	3-2-3
71	وصف البيانات	4-2-3
72	النتائج	5-2-3
82 -80	الفصل الرابع : الاستنتاجات والتوصيات	
81	الاستنتاجات	1-4
82	التوصيات	2-4
	المصادر	
	الملاحق	

قائمة الجداول

رقم الصفحة	اسم الجدول	رقم الجدول
57	اختبار جودة التوفيق للنماذج المقدره بين المتغير المستقل x والمتغير المعتمد y_1 حسب نوع الخطأ عند حجم عينة 40	1-3
58	اختبار جودة التوفيق للنماذج المقدره بين المتغير المستقل x والمتغير المعتمد y_2 حسب نوع الخطأ عند حجم عينة 40	2-3
59	اختبار جودة التوفيق للنماذج المقدره بين المتغير المستقل x والمتغير المعتمد y_3 حسب نوع الخطأ عند حجم عينة 40	3-3
60	معايير المقارنة بين النماذج للعينة بحجم 40	4-3
62	اختبار جودة التوفيق للنماذج المقدره بين المتغير المستقل x والمتغير المعتمد y_1 حسب نوع الخطأ عند حجم عينة 100	5-3
63	اختبار جودة التوفيق للنماذج المقدره بين المتغير المستقل x والمتغير المعتمد y_2 حسب نوع الخطأ عند حجم عينة 100	6-3
64	اختبار جودة التوفيق للنماذج المقدره بين المتغير المستقل x والمتغير المعتمد y_3 حسب نوع الخطأ عند حجم عينة 100	7-3
65	معايير المقارنة بين النماذج للعينة بحجم 100	8-3
66	اختبار جودة التوفيق للنماذج المقدره بين المتغير المستقل x والمتغير المعتمد y_1 حسب نوع الخطأ عند حجم عينة 500	9-3
67	اختبار جودة التوفيق للنماذج المقدره بين المتغير المستقل x والمتغير المعتمد y_2 حسب نوع الخطأ عند حجم عينة 500	10-3
68	اختبار جودة التوفيق للنماذج المقدره بين المتغير المستقل x والمتغير المعتمد y_3 حسب نوع الخطأ عند حجم عينة 500	11-3
69	معايير المقارنة بين النماذج للعينة بحجم 500	12-3
73	الاحصاءات الوصفية لاتجاه الرياح في مدينتي الناصرية و اتجاه الضغط الجوي المرتفع	13-3
77	اختبار جودة التوفيق لأنموذج الانحدار الزاوي بخطأ فون ميزيس	14-3
77	اختبار جودة التوفيق لأنموذج الانحدار الزاوي بخطأ كوشي الملفوف	15-3
78	اختبار جودة التوفيق لأنموذج الانحدار الزاوي بخطأ التوزيع الطبيعي الملفوف	16-3
79	معايير المقارنة بين النماذج للبيانات الحقيقية	17-3

قائمة الاشكال

رقم الصفحة	اسم الشكل	رقم الشكل
10	قيمة الزاوية بالاعتماد على نقطة الأصل و اتجاه الدوران	1-2
12	قيمة الوسط الحسابي	2-2
18	المسافة الدائرية بين نقطتين	3-2
19	المسافة الدائرية بين U_i و V	4-2
27	دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع (WE) عندما تأخذ المعلمة قيم مختلفة	5-2
28	الدالة التراكمية لتوزيع (WE) عندما تأخذ المعلمة قيم مختلفة	6-2
30	الدالة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي الملفوف عندما تأخذ المعلمة قيم مختلفة	7-2
30	الدالة التراكمية لتوزيع الطبيعي الملفوف عندما تأخذ المعلمة قيم مختلفة	8-2
31	الدالة الاحتمالية لتوزيع فون ميزيس عندما تأخذ المعلمة k قيم مختلفة	9-2
32	الدالة التراكمية لتوزيع فون ميزيس عندما تأخذ المعلمة k قيم مختلفة	10-2
72	الاتجاهات وقياس الزاوية الخاصة بها	1-3
74	الاتجاه المفضل للرياح في مدينة الناصرية	2-3
74	الاتجاه المفضل للضغط الجوي المرتفع	3-3

قائمة المصطلحات

اسم المصطلح بالإنكليزي	اسم المصطلح بالعربي	التسلسل
Angular Regression	الانحدار الزاوي	1
Circular Data	البيانات الدائرية	2
Maximum Likelihood Method	طريقة الامكان الاعظم	3
Circular Arithmetic mean	الوسط الحسابي الدائري	4
Circular Variance	التباين الدائري	5
Circular Median	الوسيط الدائري	6
Circular Standard Deviation	الانحراف المعياري الدائري	7
Bayesian Information Criterion	معياري المعلومات البيزي	8
Akaikes Debugger Information Criterion	معياري المعلومات لـ أكاكي المصحح	9
Goodness-of-fit Test	اختبار جودة التوفيق	10
Circular probability	الاحتمال الدائري	11
Circular Uniform Distribution	التوزيع المنتظم الدائري	12
Wrapped exponential Distribution	التوزيع الاسي الملفوف	13
Wrapped normal Distribution	التوزيع الطبيعي الملفوف	14
The wrapped Cauchy Distribution	توزيع كوشي الملفوف	15
The Von mises Distribution	توزيع فون ميزيس	16

الفصل الأول

منهجية الأطروحة والاستعراض
المرجعي

الفصل الاول

منهجية الاطروحة والاستعراض المرجعي

Introduction

1-1 المقدمة [23]

يهتم الكثير من الباحثين عند تحليل مجموعة من المتغيرات الى الوصول الى طبيعة العلاقة التي تربط بين هذه المتغيرات , ويعد تحليل الانحدار واحداً من اهم الموضوعات التي تدرس شكل العلاقة بين متغير واحد يسمى المتغير التابع ومتغير واحد او اكثر من المتغيرات التي تسمى المتغيرات المستقلة , وذلك عن طريق ايجاد معادلة رياضية تربط بين هذه المتغيرات , وهذه المعادلة تعتمد بشكل اساس على القيم التي يأخذها المتغير التابع , فعندما تكون القيم كمية يمكن استعمال اغلب انواع نماذج الانحدار اما اذا كانت القيم وصفية فهناك نماذج انحدار خاصة بهذا النوع من البيانات , أما اذا كانت هذه القيم هي عباره عن بيانات دائرية فأن الانموذج الملائم لهذا النوع من البيانات هو انموذج الانحدار الزاوي .

ويمكن وصف البيانات الدائرية على انها البيانات التي تكون على شكل متجهات تجمعها نقطة اصل واحدة وتقاس بالقياس الزاوي إذ يمثل بعد كل متجه عن المتجه المحدد بالاتجاه الصفري و اتجاه الدوران مقدار الزاوية التي تدل على اتجاه ذلك المتجه , وان أقل مقدار ممكن تأخذه هذه الزاوية هو الصفر درجة واعلى مقدار هو 360 درجة , مختلفة عن البيانات الاعتيادية التي يكون مداها بين $(-\infty, \infty)$, وان مقدار هذه الزاوية لا يعبر عن مقدار الإزاحة بين المتجه الصفري والمتجه نفسه فوجد اكبر ازاحة هي عندما يكون مقدار الزاوية 180 وليس 360 التي تعد اقل ازاحة بينها وبين المتجه الصفري , فمقدار الزاوية يعتمد بصورة دقيقة على امرين الأول هو النقطة التي تحدد ليمر بها الاتجاه الصفري والامر الاخر هو اتجاه الدوران هل هو باتجاه دوران عقارب الساعة او عكس اتجاه دوران عقارب الساعة .

أن تحديد أنموذج انحدار مناسب لهذا النوع من البيانات يحتاج إلى التعرف إلى شيئين الأول هو الصيغة الرياضية التي تربط بين المتغير المعتمد والمتغير او المتغيرات المستقلة والاخرى التوزيع الذي يتبعه الخطأ العشوائي للأنموذج المقدر وذلك لان عن طريق توزيع الخطأ العشوائي يمكن إيجاد تقدير للمعلمات المجهولة التي يتضمنها

الأنموذج باستعمال طريقة الإمكان الأعظم للتقدير التي تتطلب وجود توزيع لتعتمد عليه في إيجاد هذه المقدرات , وكما اختلف التوزيع تختلف التقديرات تبعاً لذلك وفي هذه الاطروحة سنعتمد على ثلاث توزيعات دائرية للخطأ العشوائي ينتج عنها ثلاث نماذج مختلفة بالتقدير وسنقارن بين مخرجات هذه النماذج باستعمال معايير مفاضلة بين هذه النماذج الثلاثة . وتضمنت هيكله الاطروحة اربعة فصول :

الفصل الأول منهجية الاطروحة وضم المقدمة و اهمية الاطروحة و مشكلة الاطروحة وهدف الاطروحة و الاستعراض المرجعي للبحوث والدراسات السابقة التي لها صلة بموضوع الاطروحة .

الفصل الثاني الذي ضم الجانب النظري وتم تقسيمه على مبحثين الأول يحتوي على مفهوم البيانات الدائرية وبعض المقاييس الوصفية لها , ومفهوم الاحتمال الدائري مع بعض التوزيعات الدائرية, وضم المبحث الاخر مفهوم الانحدار بشكل عام والانحدار الزاوي بشكل خاص وتم طرح ثلاث نماذج للانحدار الزاوي ومعايير للمفاضلة بين هذه النماذج .

الفصل الثالث الجانب العملي وتم تقسيمه على مبحثين أيضاً ضم الأول الجانب التجريبي اذا تم الاعتماد على اسلوب المحاكاة في توليد البيانات وبحجوم عينات مختلفة أما الاخر فقد ضم الجانب التطبيقي وقد تم التطبيق على اتجاه الرياح في مدينة الناصرية كتغير معتمد والضغط الجوي المرتفع كمتغير مستقل .

الفصل الرابع الاستنتاجات والتوصيات وضم اهم الاستنتاجات التي تم استخلاصها من الاطروحة والتوصيات التي نعتقد انها مهمة .

Importance of Thesis

2-1 اهمية الاطروحة

تكمن اهمية الاطروحة في بوجود بعض الظواهر التي لا يمكن دراسة خصائصها الا من خلال النماذج الخاصة بها ومنها البيانات الدائرية التي لها أنموذج انحدار زاوي بسيط يتناسب مع طبيعتها وله خصائص تتناسب مع خصائص البيانات الدائرية

Problem of Thesis**3-1 مشكلة الاطروحة**

تكمن مشكلة الاطروحة بوجود متغير استجابة بياناته دائرية تتبع التوزيع الطبيعي الملفوف تم تقدير معالمته في الأنموذج الانحدار الزاوي بخطأ يتبع توزيع فون ميزيس او خطاييع توزيع كوشي الملفوف ومن الممكن يكون هناك توزيع للخطأ ينتج عنه تقدير للمعلمات افضل وخطأ اقل . اضافة إلى ذلك لا وجود اختبار لبيان جودة التوفيق للنماذج الانحدار الزاوي يبين هل النماذج المقدره معنوية او غير معنوية .

Aim of Thesis**4-1 هدف الاطروحة**

- 1- التعرف على خصائص البيانات الدائرية .
- 2- بناء أنموذج انحدار زاوي بسيط بتوزيع خطا مختلف عن التوزيعات الخطأ المقترحة سابقا .
- 3- اقتراح اختبار لمعرفة جودة التوفيق لنماذج الانحدار الزاوي .
- 4- اختيار افضل أنموذج يلائم الظاهر المدروسة بالاعتماد على معيار (BIC) ومعيار (AIC_C) للمفاضلة بين النماذج .

Review of Literature**الاستعراض المرجعي**

حاول الباحثون تطوير الانحدار واستعماله في جميع مجالات الحياة التي يمكن استخدامه فيها ويعتبر الانحدار الزاوي من أنواع الانحدار التي حاول الباحثون تطويره إذ تمت أول محاولة بواسطة^[10] (Gould) في عام (1969) وقدر معالمات الأنموذج البسيط بطريقة تكرارية باستعمال طريقة الإمكان الأعظم (maximum likelihood estimator) و قدمت بعض طرائق الاستدلال التقريبية للحالة عندما يمكن اعتبار معلمة التركيز k كبيره . يستعمل أنموذج الانحدار الدائري للتنبؤ بالاتجاه المتوسط μ لمتغير دائري y من مجموعة من المتغيرات الكمية أو متغير كمي واحد (x_1, x_2, \dots, x_k) إذ أن y يتبع توزيع فون ميزيس (von mises distribution) بمتوسط μ ومعلمة تركيز k وفي عام (1972) قدم^[29] (mardia) نموذج موسع لأنموذج (Gould) إذ أعطى أرقما معلومة للمعلمات غير المعلومة . وان كلتا المحاولتين السابقتين تعمل على متغير دائري معتمد ومتغير كمي مستقل. بعدها جاء (Laycock) في عام 1975 بأول محاولة لتضمين أنموذج لتأثير متغير دائري على متغير دائري آخر معتمد في عمله

على الأنموذج الذي قدره (Gould) وبين أن تقديرات دالة الإمكان الأعظم مساوية إلى تقديرات المربعات الصغرى عندما يكون حجم العينة كبير .

وهناك مجموعة من الدراسات السابقة الحديثة التي استعملت الانحدار لدراسة العلاقة بين المتغيرات سوا كانت هذه المتغيرات جميعها ذات بيانات الدائرية أو احد هذه المتغيرات هو دائري و الآخر هو خطي وفي مجالات تطبيقية مختلفة و نوجز منها ما يأتي:

في عام (1988) قام كل من Kent & Tyler^[26] بإيجاد تقديرات لمعاملات توزيع كوشي الملفوف (wrapped Cauchy distribution) باستخدام طريقة الإمكان الأعظم (Maximum likelihood estimator method) واثبتا أن طريقة الإمكان الأعظم تعتبر بديلا قويا للاتجاه المتوسط المستخدم في تقدير موقع البيانات على الدائرة واثبتا أيضا في حالة كون حجم العينة اكبر من اثنين فان تقديرات الإمكان الأعظم ستكون موجودة وحيدة .

في عام (2002) أجرى الباحثان Downs & Mardia^[15] دراسة اقترحا فيها أنموذج الانحدار دائري الذي يحتوي ثلاث معاملات هي (α, β, w) إذ تم إضافة المعلمة w وأسموها معلمة التركيز الدائري وتم اشتقاق تقديرات لهذه المعلمات على وفق طريقة الإمكان الأعظم والخطأ العشوائي يتبع توزيع فين موزيس (von mises distribution) .

في عام (2004) قام الباحث Hussain^[21] باقتراح أنموذج انحدار زاوي بسيط كلا المتغيرين فيه التابع و المستقل هما متغيران دائريان وهو مشابه تماما لأنموذج الانحدار الخطي البسيط وفكرته مأخوذة منه إذ أن في الانحدار البسيط يشترط أن يكون الخطأ يتوزع توزيعاً طبيعياً وبما أن توزيع فون ميزيس (von mises) يعد كالتوزيع الطبيعي للبيانات الدائرية لذلك تم افتراض الخطأ يتوزع توزيع فون ميزيس (von mises) وقدره معاملات هذا الأنموذج باستعمال طريقة الإمكان الأعظم .

في عام (2006) أجرى الباحث نفسه Hussain^[20] اختبار الفرضيات للمعاملات المقدرة للانحدار الزاوي البسيط بافتراض الخطأ العشوائي الدائري يتبع توزيع فين ميزيس (von mises distribution) وتوصل الى صيغة عامة للاختبار لكل معلمة من المعلمات المقدرة وهذه الصيغة لها توزيع F (Fisher Distribution) بعد تقدير المعلمات باستعمال طريقة الإمكان الأعظم وطبقه عمليا على بيانات اتجاه الرياح التي تم تسجيلها بواسطة تقنيتين مختلفتين هما نظام الرادار (HF) و عوامة الموجة الرأسية .

في عام (2008) قدما ^[25] Kato, Shimizu & Shieh أنموذجاً للانحدار الزاوي يكون فيه كلا المتغيرات في الأنموذج سواء كان المتغير تابعاً أو المستقلاً هي متغيرات زاوية و أن منحنى الانحدار الدائري هو شكل من أشكال تحويل موبايوس الدائري (circle mobius transformation). وافترضنا أن الخطأ العشوائي يتبع توزيع كوشي الملفوف. وتم الحصول على بعض خصائص الانحدار مثل إجراءات التقدير للمعلمات المجهولة . وتم تطبيق الطرائق المقترحة على البيولوجيا البحرية وبيانات اتجاه الرياح.

وفي عام (2008) أيضاً قام الباحث ^[36] Zubairi وآخرون بتحليل للمتغيرات الدائرية باستعمال الرسوم البيانية بواسطة التحليل الاستكشافي لإيجاد علاقة بين متغيرين إن وجد , مقترحان تمثيلاً رسوميًا لمتغيرين دائريين كتحليل أولي باستعمال بيئة ماتلاب وعرض العلاقة بيانياً بين دائرة المتغيرات والدائرة التي تصنع بواسطة الارتباط الخطي. و تم استعمال بيانات الرياح في ماليزيا في التحليل الأولي للبيانات الدائرية

و في عام (2013) : قام الباحث Abuzaid وآخرون ^[12] , بدراسة الكشف عن القيم المتطرفة في الانحدار الخطي البسيط بواسطة متوسط الخطأ الدائري إذ تمكن من توسيع دراسة القيم المتطرفة في الانحدار البسيط إلى تلك الخاصة بحالة الانحدار الدائري. وأقترح إحصائية رقمية جديدة تسمى الخطأ الدائري المتوسط لتحديد القيم المتطرفة المحتملة في نماذج الانحدار الدائري باستعمال نهج حذف الصف. عن طريق دراسات المحاكاة المكثفة، و تم الحصول على النقاط الفاصلة للإحصاء والتحقق من قوة الأداء. ووجد أن الأداء يتحسن عندما تصبح معامل تركيز البواقي الدائرية أكبر أو يصبح حجم العينة أصغر.

و في العام نفسه (2013) قام ^[10] Abuzaid بدراسة النقاط المؤثرة في أنموذج دالة العلاقة الدائرية وكشف النقاط المؤثرة في أنموذج العلاقة وانموذج الدالة للمتغيرات الدائرية. تم تطوير أنموذج العلاقة بناءً على أنموذج الانحدار الدائري البسيط، بينما تم اشتقاق أنموذج الدالة من أنموذج الانحدار الخطي المتعدد، وتم اشتقاق مصفوفات التغاير ثم صياغة إحصاءات COVRATIO لكلا الأنموذجين. وقام بالحصول على نقاط التوقف وفحص قوة الأداء عن طريق دراسات المحاكاة. واثبت في حالة العلاقة الخطية بين متغيرين دائريين، فإن إحصاءات COVRATIO لأنموذج الدالة للمتغيرات الدائرية تعمل بشكل أفضل من أنموذج العلاقة للمتغيرات الدائرية.

في عام (2014) قام الباحثان ^[18] Guerrero, & del Solar بدراسة الانحدار الدائري على أساس عمليات كاوس (Gaussian Processes) إذ قدما طريقتين جديدتين للاعتماد

الانحدار على أساس العمليات كاوس. الطريقة الأولى تعتمد على جيب وجيب تمام الزاوية (\sin & \cos) والطريقة الاخرى تعتمد على الزاوية نفسها (Angel) إذ استعملا تجارب محاكاة وقد أظهرت كلتا الطريقتين أداء فائقا مع عمليات كاوس وان الطريقة الاخرى وهي طريقة الزاوية تعطي نتائج أفضل من الطريقة الأولى التي تعتمد على جيب وجيب تمام الزاوية

في عام (2015) قام كل من ^[11] Abuzaid & Allahham باقتراح أنموذج انحدار دائري بسيط يكون في المتغير العشوائي يتبع توزيع كوشي الملفوف (wrapped Cauchy distribution) وقاما بإيجاد تقديرات للمعلمات الخاصة بالأنموذج باستعمال طريقة الإمكان الأعظم للتقدير (Maximum likelihood estimator method) وتمكنا من حساب الانحراف المعياري (Standard deviation) لهذه التقديرات و كذلك حساب فترات الثقة لها (confidence interval), واستعملا المحاكاة للتأكد من الخصائص هذه المقدرات من عدم التحيز والاتساق والمتانة .

في عام (2016) قام الباحث ^[31] Mutwiri بدراسة تطبيقية على بيانات حركة الحيوانات ذات المتغيرات المشتركة مستعمل أنموذج الانحدار الخطي الزاوي متعدد , إذ استعمل أنموذج انحدار المتغير المعتمد فيه هو متغير دائري اما المتغيرات المستقلة فهي متغيرات خطية واطلق عليه تسمية أنموذج الانحدار الدائري الخطي (Linear circular regression model) مستعمل طريقة الإمكان الأعظم للتقدير معلماته, وطبقه عمليا على اتجاه حركة الفيل كمتغير معتمد و مجموعة من المتغيرات الخطية كمتغيرات مستقلة تم جمعها من حديقة كروجر الوطنية في جنوب أفريقيا . وتوصل الى أنموذج احصائي جديد لفهم حركة هذه الحيوانات .

في عام (2017) قاما الباحثان ^[13] Al-Daffaie, & Khan بدراسة أنموذج انحدار لوجستي للبيانات الدائرية , في هذا الأنموذج أفترض الباحثان أن المتغير المعتمد هو متغير متقطع يأخذ قيمتين هما الصفر لعدم حدوث الحدث والواحد الصحيح لحدوث الحدث اما المتغير المستقل فهو متغير دائري وقد تمكنا من التوصل إلى نتائج اهمها هي أن الأنموذج يمكن عن طريقه التنبؤ باحتمال حدوث ذلك الحدث مستعملين طريقة الإمكان الأعظم لتقدير معلماته عن طريق طريقة تكرارية هي طريقة نيوتن- رافسن (Newton-Rafson method)

في عام (2020) قام الباحث ^[19] Hussein بدراسة نهج إحصائي للبيانات الدائرية ثنائية المتغير مقترحا في طريقة لتقدير دالة الكثافة الاحتمالية للبيانات الدائرية ثنائية المتغير باستعمال طريقة تقدير تسمى طريقة دالة الكثافة النواة و بمعلمات تركيز مختلفة و دوال النواة مختلفة ، مستعملاً

من اجل ذلك توزيعين هما توزيع كوشي الملفوف والتوزيع الطبيعي الملفوف , مقترحا نهجا لتحديد معامل التنعيم الأمثل (عرض الحزمة الأمثل) وقام بتطبيقها لحساب النطاق الترددي الأمثل لزوايا ثنائية الأضلاع لبعض أنواع البروتينات لتسليط الضوء على تقدير دالة كثافة النواة على هذه البروتينات تحت النطاق الترددي الأمثل.

في عام (2021) قام الباحث^[30] Mohammad و آخرون بدراسة مراجعة لنماذج الانحدار الدائري _ الخطي وقد بين عن طريقهما أن للمتغيرات الدائرية خصائص تختلف عن نظيرتها من المتغيرات الخطية عندما يكون المتغير التابع المدروس هو متغير دائري , وهذا يؤدي إلى أن الأنموذج الخطي المعروف غير مناسب مع هذا النوع من البيانات وتوصلوا إلى أن الأنموذج الأنسب لهذا النوع من البيانات هو الأنموذج الانحدار الدائري الخطي (Linear circular regression model).

نلاحظ من الدراسات والبحوث السابقة أن مجموعة من الدراسات اهتمت بدراسة البيانات الدائرية والتوزيعات التي تخضع لها هذا النوع من البيانات وطرائق تقدير معالم هذه التوزيعات وهناك مجموعة من الدراسات درست الانحدار للبيانات الدائرية من طرف المتغير المعتمد فقط أي أن المتغير المعتمد هو متغير دائري أما المتغير المستقل فهو متغير خطي , كما أن هناك دراسة اخذت المتغير المعتمد كمتغير وصفي يأخذ قيمتين فقط هما الصفر لعدم حدوث الحدث والواحد الصحيح لحدوث ذلك الحدث والمتغير المستقل هو متغير دائري , وتعد الدراسة التي قام بها الباحث Hussain و الباحثان Abuzaid & Allahham من اقرب الدراسات الى الاطروحة اذا قدم الباحث Hussain أنموذج انحدار زاوي بسيط بخطأ يتبع توزيع فون ميزيس أما الباحثان Abuzaid & Allahham فقد قدما أنموذج انحدار زاوي بسيط بخطأ عشوائي يتبع توزيع كوشي الملفوف وفي كلا الدارستين كان المتغيران التابع والمستقل متغيرين دائريين واستكمال لما سبق من البحوث سنتناول في هذه الاطروحة خصائص البيانات الدائرية و بعض الاحصاءات الوصفية والفرق بينها وبين البيانات الاعتيادية وكذلك بعض التوزيعات الاحتمالية الدائرية وبناء أنموذج انحدار زاوي بسيط بخطأ يتبع التوزيع الطبيعي الملفوف وتقدير معالمته و اختبار جودة التوفيق للأنموذج بشكل عام عن طريق اقتراح اختبار يعتمد على توزيع فشر ومقارنة النتائج التي يتم التوصل اليها مع الأنموذجين الذين تم اقتراحهما من الباحث Hussain و الباحثين Abuzaid & Allahham باستعمال معايير المفاضلة بين النماذج .

الفصل الثاني

الجانب النظري

الفصل الثاني

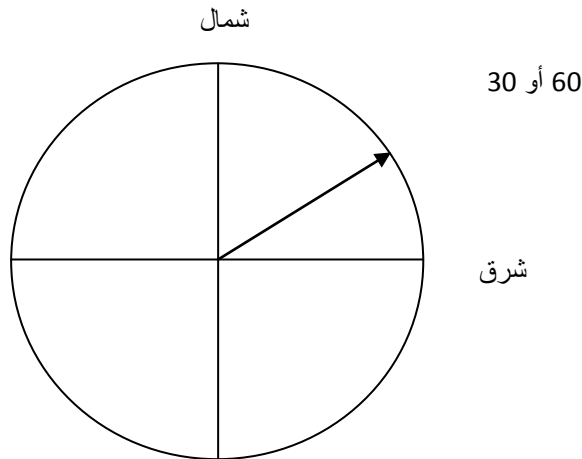
المبحث الأول

مفهوم البيانات الدائرية والاحتمال الدائري

Circular Data Concept

1-1-2 مفهوم البيانات الدائرية [23]

في العديد من المجالات العلمية يتم قياس الظواهر بقياسات معينة منها على شكل كمي ومنها على شكل وصفي ومنها على شكل اتجاه الخ . فعندما يتم قياس الظاهر بشكل متجه فتسمى البيانات عند إذ بالبيانات الاتجاهية أو الدائرية . و يمكن وصفها على أنها البيانات التي يتم تمثيلها كنقاط على محيط دائرة الوحدة المتمركزة في الأصل أو كمتجهات وحدة تربط الأصل بهذه النقاط ومن الأمثلة عليها اتجاه الطائر أو اتجاه حيوان أو اتجاه الرياح وغيرها من الظواهر. هذه الأمثلة ذات بعدين يمكن أن تمثل بشكل زاوية يمكن قياسها ، و قد تكون الاتجاهات في ثلاثة أبعاد ممثلة بزوايتين (على غرار تمثيل النقاط على الأرض حسب خطوط الطول والعرض الخاصة بهم) ، كمتجهات وحدة في ثلاثة أبعاد وهذا يسمى بالبيانات الكروية .. أن مدى البيانات الدائرية يختلف عن نظيرتها في البيانات الاعتيادية إذ إن مدى البيانات الاعتيادية ممكن أن يكون بين السالب ما لانهاية إلى ما لانهاية ($-\infty$, ∞) بينما البيانات الدائرية يكون مداها محصوراً بين الصفر و 360 درجة (0° , 360°) . كما هناك فرق آخر وهو أن مقدار الزاوية ليس فريداً وإنما تتغير من قيمة إلى قيمة أخرى لأن قيمة الزاوية تعتمد على اختيار ما يسمى بالاتجاه الصفري واتجاه الدوران فما يعد 30 درجة عندما يأخذ الشرق الحقيقي باعتباره الاتجاه الصفري والدوران عكس اتجاه عقارب الساعة يمكن أن يكون هو 60 درجة بالنسبة للذي يأخذ الشمال الحقيقي على أنه الصفر والدوران مع اتجاه عقارب الساعة هو الاتجاه الموجب وكما موضح بالشكل الآتي



الشكل (1-2) قيمة الزاوية بالاعتماد على نقطة الأصل واتجاه الدوران

وينطبق الشيء نفسه على القيم المحددة المخصصة لأي بيانات دائرية . وهذا يعطي أهمية بالنسبة لاتجاه الدوران سواء أكان باتجاه عقارب الساعة أو عكس عقارب الساعة وهو ما يفسر أن 60 درجة من الشمال مساوي إلى 30 درجة من الشرق وكذلك 0 درجة مساوي إلى $\pi/2$ وكذلك θ مساوية إلى $\theta + \pi/2$. إذ أن θ هي قياس أي زاوية . هذا الاختلاف في البيانات الدائرية عن البيانات الاعتيادية جعل التحليل الإحصائي مختلفاً لهذه البيانات اختلافاً كبيراً عما هو عليه في البيانات الاعتيادية ، إذ يجب أن تأخذ طرائق التعامل مع البيانات الاتجاهية بعين الاعتبار الاختلاف بين هذا النوع من البيانات والبيانات الاعتيادية التي يجدها المرء في معظم كتب الإحصاء، سواء أكان التحليل لمتغير واحد أم متعدد المتغيرات. وسنتطرق إلى بعض المقاييس الإحصائية الوصفية للبيانات الدائرية

2-1-2 الإحصاء الوصفي للبيانات الدائرية Descriptive Statistics for Circular

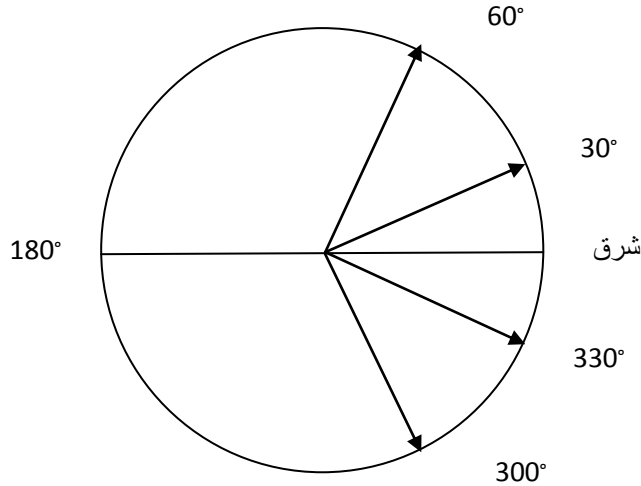
Data

في الإحصاء الوصفي عادةً ما يكون البحث عن ثلاث قيم الأولى هي القيمة التي تتمركز حولها اغلب القيم وتسمى بالمتوسط وتسمى المقاييس الخاصة بها بمقاييس النزعة المركزية والثانية تمثل مقدار التشتت بين القيم الأصلية وتسمى المقاييس الخاصة بها بمقاييس التشتت والثالثة تبحث عن تماثل التوزيع حول قيمة المتوسط وتسمى مقاييس الالتواء. وسنتطرق لبعض المقاييس للقيمة الأولى والثانية .

Circular Arithmetic Mean

1-2-1-2 الوسط الحسابي الدائري [23]

وقد يسمى بمتوسط الاتجاه (Average Direction) أو الاتجاه المفضل (Preferred Direction) قد يتبادر إلى الأذهان لحساب متوسط الاتجاه هو حساب الوسط الحسابي للزوايا بطريقة البيانات الاعتيادية وهو اعتقاد خاطئ بسبب الاختلاف بطبيعة البيانات فالبيانات الدائرية تحتاج إلى تحديد نقطة الصفر و اتجاه الدوران فعلى سبيل المثال لو كانت لدينا طائران يطيران بالزاويتين (30° , 330°) مع افتراض الشرق هو نقطة الصفر و اتجاه الدوران عكس عقرب الساعة فلو تم حساب الوسط لهم بطريقة البيانات الاعتيادية فان قيمته ستكون (180°) أي باتجاه الغرب تماماً بينما اتجاه الطيران إلى الشرق ، وكذلك لو كان لدينا الزوايا الآتية (30° , 60° , 300° , 330°) فالوسط لها حسب البيانات الاعتيادية هو (180°) وهو الغرب و بافتراض الشرق هو نقطة الصفر والدوران عكس عقرب الساعة لذا فان الغرب كمتوسط يكون مستبعداً تماماً و كما مبين بالشكل الآتي



الشكل (2-2) قيمة الوسط الحسابي

من الأمثلة السابقة يتضح أن الوسط الحسابي الشائع المستعمل في البيانات الاعتيادية، لا يعد مقياساً لمجموعة معينة من الاتجاهات ومن هنا بدأت فكرة إيجاد صيغة خاصة لحساب الاتجاه المفضل للبيانات الدائرية، عن طريق معالجة البيانات كمتجهات وحدة. و لحساب الاتجاه المفضل يتم عمل المتجهات لكل مجموعة البيانات طولها واحد وجمع جيب الزوايا و جيب تمامها وحساب الطول الناتج وكما في الصيغة الآتية:

$$R = \sqrt{C^2 + S^2} \quad \dots \dots \dots (1 - 2)$$

أذ أن S تمثل مجموع جيب الزوايا $\sum_{i=1}^n \sin X_i$

C تمثل مجموع جيب تمام الزوايا $\sum_{i=1}^n \cos X_i$

ولحساب الاتجاه المفضل نستعمل الصيغة الآتية

$$\sin \bar{x} = \frac{S}{R} \quad \dots \quad (2 - 2)$$

أو

$$\cos \bar{x} = \frac{C}{R} \quad \dots \quad (3 - 2)$$

وبأخذ معكوس الجيب او الجيب تمام يتم الحصول على الوسط الحسابي الدائري

$$\bar{x} = \sin^{-1} \frac{S}{R} \quad \dots \quad (4 - 2)$$

$$\bar{x} = \cos^{-1} \frac{C}{R} \quad \dots \quad (5 - 2)$$

كما يمكن الحصول على الوسط الحسابي الدائري عن طريق ظل الزاوية وذلك بقسمة المعادلة (2-2) على المعادلة (3-2) وكما يأتي

$$\frac{\sin \bar{x}}{\cos \bar{x}} = \frac{\frac{S}{R}}{\frac{C}{R}} \rightarrow \tan \bar{x} = \frac{S}{C} \rightarrow \bar{x} = \tan^{-1} \frac{S}{C} \quad \dots \dots \dots (6 - 2)$$

المعادلة (4-2) يمكن تطبيقها في حالة كون قيمة S سالبة وقيمة C موجبة فقط أما المعادلة (5-2) فيمكن تطبيقها عندما تكون قيمة C سالبة وقيمة S موجبة فقط أما المعادلة (6-2) يمكن حساب الوسط الحسابي الدائري منها في حالة كون قيمتي S و S موجبتين فقط أما اذا كانت قيمهما اقل او يساوي صفرًا فيحسب حسب المعادلة ادناه

$$\bar{x} = \begin{cases} \tan^{-1} \frac{S}{C} & \text{if } c > 0 \text{ and } s \geq 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{if } c = 0 \text{ and } s > 0 \\ \tan^{-1} \left(\frac{S}{C} \right) + \pi & \text{if } c < 0 \dots \dots \dots (7-2) \\ \tan^{-1} \left(\frac{S}{C} \right) + 2\pi & \text{if } c \geq 0 \text{ and } s < 0 \\ \text{undefined} & \text{if } c = 0 \text{ and } s = 0 \end{cases}$$

وهناك بعض الخصائص الخاصة بالوسط الحسابي الدائري نورد منها ما يأتي

الخاصية الأولى [24][23]:

أذا تم إضافة أو طرح قيمة معين إلى البيانات الدائرية فان قيمة الوسط الحسابي الدائري تتغير بمقدار تلك القيمة اي لو كانت لدينا البيانات الأتية ($x_1+a, x_2+a, x_3+a, \dots, x_n+a$) فان الوسط الحسابي الدائري لها يساوي $\bar{x} + a$ ويمكن اثبات ذلك كما يأتي :

$$c^* = \sum_{i=1}^n \cos (X_i + a)$$

باستعمال العلاقة الآتية :

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B \dots (8-2)$$

$$c^* = \sum_{i=1}^n (\cos x_i \cos a - \sin x_i \sin a)$$

$$c^* = \cos a \sum_{i=1}^n \cos x_i - \sin a \sum_{i=1}^n \sin x_i$$

$$c^* = \cos(a) c - \sin(a) s$$

من المعادلتين (3-2) و (4-2) نعوض عن قيم c و s ما يساويهما

$$c^* = \cos(a) R \cos \bar{x} - \sin(a) R \sin \bar{x}$$

$$c^* = R(\cos(a) \cos \bar{x} - \sin(a) \sin \bar{x})$$

و بتطبيق المعادلة (8-2)

$$c^* = R \cos(\bar{x} + a)$$

$$\cos(\bar{x} + a) = \frac{c^*}{R}$$

$$\bar{x} + a = \cos^{-1} \frac{c^*}{R}$$

علماً أن

$$R^* = \sqrt{C^{*2} + s^{*2}} = R = \sqrt{C^2 + S^2}$$

فأن

$$\bar{x} + a = \cos^{-1} \frac{c^*}{R^*} \dots (9 - 2)$$

وبنفس الطريقة يمكن إثبات $\bar{x} + a = \sin^{-1} \frac{s^*}{R^*}$

$$s^* = \sum_{i=1}^n \sin (X_i + a)$$

باستعمال العلاقة التالية

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B \dots\dots\dots (10-2)$$

$$s^* = \sum_{i=1}^n (\sin X_i \cos a + \cos x_i \sin a)$$

$$s^* = \cos a \sum_{i=1}^n \sin x_i + \sin a \sum_{i=1}^n \cos x_i$$

$$s^* = \cos a s + \sin a c$$

$$s^* = \cos a R \sin \bar{x} + \sin a R \cos \bar{x}$$

$$s^* = R(\cos a \sin \bar{x} + \sin a \cos \bar{x})$$

و بتطبيق المعادلة (10-2)

$$s^* = R \sin (\bar{x} + a)$$

$$\sin (\bar{x} + a) = \frac{c^*}{R}$$

$$\bar{x} + a = \cos^{-1} \frac{c^*}{R}$$

$$\bar{x} + a = \cos^{-1} \frac{c^*}{R^*} \dots\dots\dots (11 - 2)$$

وبنفس الطريقة يمكن أثبات لو كانت طرح مقدار وليس جمع

الخاصية الثانية [24][23].

مجموع جيب انحراف الزوايا عن وسطها الحسابي يساوي صفراً $\sum_{i=1}^n \sin(x_i - \bar{x}) = 0$

ويمكن إثبات ذلك عن طريق استعمال العلاقة الآتية:

$$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B \quad \dots \dots \dots (12 - 2)$$

$$\sum_{i=1}^n \sin(x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^n (\sin x_i \cos \bar{x} - \cos x_i \sin \bar{x})$$

$$\sum_{i=1}^n \sin(x_i - \bar{x}) = \cos \bar{x} \sum_{i=1}^n \sin x_i - \sin \bar{x} \sum_{i=1}^n \cos x_i$$

$$\sum_{i=1}^n \sin(x_i - \bar{x}) = \cos(\bar{x}) s - \sin(\bar{x}) c$$

$$\sum_{i=1}^n \sin(x_i - \bar{x}) = \cos(\bar{x}) \sin(\bar{x}) R - \sin(\bar{x}) \cos(\bar{x}) R$$

$$\sum_{i=1}^n \sin(x_i - \bar{x}) = 0$$

الخاصية الثالثة [32][23].

مجموع جيب تمام الزوايا عن وسطها الحسابي يساوي (R) $\sum_{i=1}^n \cos(x_i - \bar{x}) = R$ ويمكن إثبات

ذلك عن طريق استعمال العلاقة الآتية

$$\cos(A - B) = \sin A \sin B + \cos A \cos B \quad \dots \quad (13 - 2)$$

$$\sum_{i=1}^n \cos(x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^n (\sin(x_i) \sin \bar{x} + \cos(x_i) \cos \bar{x})$$

$$\sum_{i=1}^n \cos(x_i - \bar{x}) = \sin \bar{x} \sum_{i=1}^n \sin x_i + \cos \bar{x} \sum_{i=1}^n \cos x_i$$

$$\sum_{i=1}^n \cos(x_i - \bar{x}) = \sin(\bar{x})s + \cos \bar{x} c$$

$$\sum_{i=1}^n \cos(x_i - \bar{x}) = \sin(\bar{x}) \sin(\bar{x}) R + \cos(\bar{x}) \cos(\bar{x}) R$$

$$\sum_{i=1}^n \cos(x_i - \bar{x}) = R(\sin^2(\bar{x}) + \cos^2(\bar{x}))$$

وبما ان

$$\sin^2(\bar{x}) + \cos^2(\bar{x}) = 1 \quad \dots \dots \dots (14 - 2)$$

$$\sum_{i=1}^n \cos(x_i - \bar{x}) = R \quad \dots \dots \dots (15 - 2)$$

Circular Median

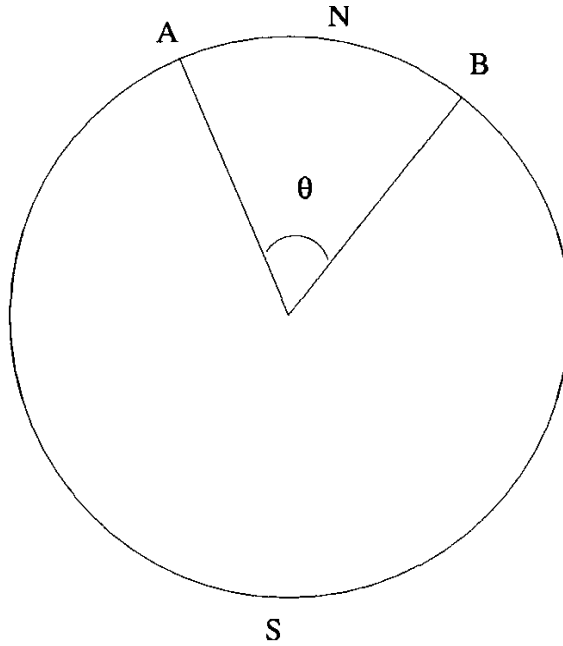
2-2-1-2 الوسيط الدائري [16]

ويسمى أيضا اتجاه الوسيط (The median direction) لا يختلف الوسيط في البيانات الدائرية عنه في البيانات الاعتيادية فهو الاتجاه الذي يقسم البيانات على قسمين متساويين بعد ترتيبها تصاعديا أو تنازليا إذا كان عدد البيانات فردياً أو النقطة التي تقع بالمنتصف للاتجاهين الوسيطين إذا كان عدد البيانات زوجيا ويستعمل في حالة وجود قيم شاذة عن البيانات المراد استخراج الوسيط لها لان لو تم استخدام الوسيط الدائري يعطي قيمة مائلة اكثر نحو القيم الشاذة أما الوسيط فلا يتأثر بالقيم الشاذة .

Circular Variance

3-2-1-2 التباين الدائري [23]

يعد التباين من المقاييس التي تقيس تشتت البيانات عن نقطة معينة والتي تأخذ عادةً متوسط هذه البيانات ومن ثم فهو يقيس مقدار بعد كل نقطة من نقاط البيانات عن وسطها الحسابي ، في البيانات الدائري هناك بعدين لكل اتجاه من اتجاه البيانات عن أي اتجاه آخر سواء أكان هذا الاتجاه هو اتجاه الوسط أو أي اتجاه، لو أخذنا النقطتين A و B على محيط الدائرة فيمكن أن تكون المسافة بين A و B هي طول القوس ANB وكذلك يمكن أن تكون طول القوس ASB وكما موضح بالشكل (2 - 3)



الشكل (2 - 3) المسافة الدائرية بين نقطتين

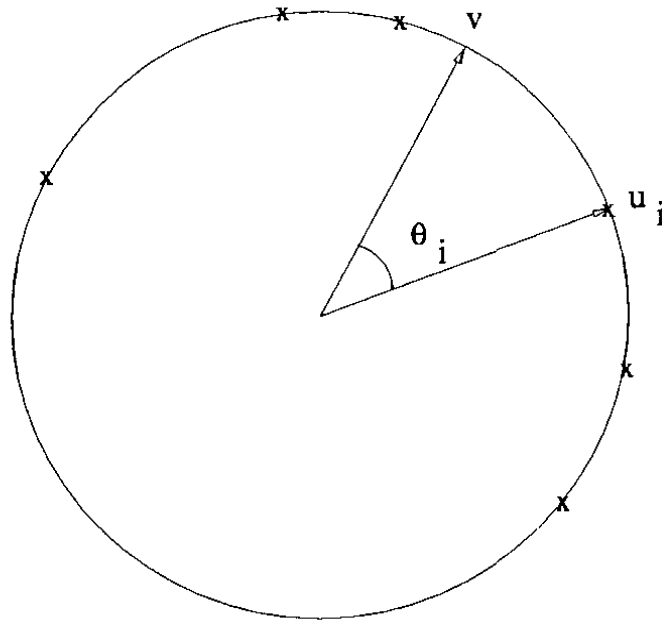
من الشكل (2- 3) يتضح ان المسافة الحقيقية هي طول القوس الأقصر وهو القوس ANB لذلك يمكن التعبير عن المسافة بين نقطتين بالآتي:

$$d(A, B) = \min((A - B), 2\pi - (A - B)) \quad \dots \quad (16 - 2)$$

يتضح من المعادلة السابقة أن طول أي قوس لا يمكن ألا أن يكون ضمن المدى $[0, \pi]$. لو افترضنا ان α هي الزاوية التي يصنعها المتجه A وان β هي الزاوية التي يصنعها المتجه B فيمكن تعريف المسافة بين A و B بالتالي

$$d(A, B) = (1 - \cos(\alpha - \beta)) \quad \dots \quad (17 - 2)$$

في المعادلة السابقة لدينا متجهين فقط فماذا لو كان لدينا اكثر من متجه ونريد ان نجد المسافة بين هذه المتجهات ومتجه معين ، نفرض ان المتجه الذي نريد نجد المسافة بينه وبين المتجهات الاخرى هو متجه الوحدة الذي تم تمثيله بالنقطة الأتية $v = (a, b)$ وأن u_i ($i= 1, 2, \dots, n$) هي المتجهات المطلوب قياس تشتتها وأن (θ_i) هي الزاوية المحصورة بين v و u_i والتي يكون قياسها ضمن الفترة $[0, \pi]$ وكما مبين في الشكل (4-2)



الشكل (2 - 4) المسافة الدائرية بين v و u_i

لذلك فإن المسافة الدائرية يمكن التعبير عنها بـ $d(v, u_i) = (1 - \cos(\theta_i))$ وذلك باستعمال المعادلة (17-2) وان مجموع المسافات الدائرية بين v و u_i يكون بالشكل الآتي:

$$d(v, u_1, u_2, \dots, u_n) = \sum_{i=1}^n (1 - \cos(\theta_i)) \dots \dots \dots (18 - 2)$$

وبإدخال المجموع على المعادلة

$$d(v, u_1, u_2, \dots, u_n) = n - \sum_{i=1}^n (\cos(\theta_i)) \dots \dots \dots (19 - 2)$$

عند مشابه حالة البيانات الدائرية مع البيانات الاعتيادية عن نقطة معينة مثل k فإن المقدار $\sum_{i=1}^n (x_i - k)^2$ يكون اقل ما يمكن عندما $k = \bar{x}$ وسنتبع الأسلوب نفسه مع البيانات الدائرية لذا فإن \bar{v} تعد اتجاه الوسط او الوسط الحسابي الدائري والذي يمكن تمثيله بالنقطة $\bar{v} = (\frac{c}{R}, \frac{s}{R})$ ونفرض ان $v = (a, b)$ و $u_i = (\cos \theta_i, \sin \theta_i) = (x_i, y_i)$ اذا ان

$$a^2 + b^2 = 1 \quad \dots \dots \dots (20 - 2)$$

فإن

$$d(v, u_i) = (1 - \cos(\theta_i)) = 1 - (v \cdot u_i) = 1 - (ax_i + by_i) \quad \dots \dots \dots (21 - 2)$$

و بتفاضل المعادلة (20 - 2)

$$2a (\partial a) + 2b(\partial b) = 0 \rightarrow \frac{\partial a}{\partial b} = -\frac{a}{b}$$

و بتفاضل المعادلة (21 - 2)

$$\frac{\partial d(v, u_i)}{\partial a} = -\left(x_i + y_i \frac{\partial a}{\partial b}\right)$$

وبالتعويض عن $\frac{\partial a}{\partial b}$ ومساوات المعادلة للصفر

$$0 = -\left(x_i - y_i \frac{a}{b}\right)$$

و بعد إدخال المجموع

$$0 = -\sum_{i=1}^n x_i + \frac{a}{b} \sum_{i=1}^n y_i \rightarrow \sum_{i=1}^n x_i = \frac{a}{b} \sum_{i=1}^n y_i$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n y_i} \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\sum_{i=1}^n \cos \alpha_i}{\sum_{i=1}^n \sin \alpha_i} \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{s}$$

$$a = \frac{c}{s} b \text{ and } b = \frac{c}{s} a$$

و بالتعويض بالمعادلة (20 - 2)

$$\left(\frac{c}{s} b\right)^2 + b^2 = 1 \rightarrow b^2 \left(\frac{c^2}{s^2} + 1\right) = 1 \rightarrow b^2 \left(\frac{c^2 + s^2}{s^2}\right) = 1$$

$$b^2 = \left(\frac{s^2}{c^2+s^2}\right) \rightarrow b^2 = \left(\frac{s^2}{R^2}\right) \quad b = \frac{s}{R}$$

وبالمثل فإن $a = \frac{c}{R}$

من السابق نستنتج ان $d(v, u_i)$ يكون اقل ما يمكن عندما تكون $\bar{v} = \left(\frac{C}{R}, \frac{S}{R}\right)$ هو مساوي لـ $v = (a, b)$ وان المسافة الدائرية ممكن التعبير عنها بالاتي

$$D_V = \sum_{i=1}^n d(v, u_i) = n - \sum_{i=1}^n (\cos(\theta_i)) = n - \sum_{i=1}^n (ax_i + by_i)$$

$$D_V = n - \left(a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n y_i \right) = n - \left(\frac{C}{R}C + \frac{S}{R}S \right) = n - \frac{C^2 + S^2}{R} = n - \frac{R^2}{R}$$

$$D_V = n - R \quad \dots \dots \dots (22 - 2)$$

وبقسمة الطرفين على n

$$\frac{D_V}{n} = 1 - \frac{R}{n}$$

$$Var = 1 - \bar{R} \quad \dots \quad (23 - 2)$$

وقيمته تكون محصورة بين الصفر والواحد الصحيح لان قيم R لا يمكن أن تكون اكبر من قيمة n و بالتالي عند تقسيمها على n يكون الناتج اقل من الواحد الصحيح .

4-2-1-2 الانحراف المعياري الدائري [16][24] Circular Standard Deviation

الانحراف المعياري في البيانات الاعتيادية هو الجذر التربيعي للتباين أما في البيانات الدائرية فمن غير المستحسن اخذ جذر التباين وذلك لان اغلب البيانات الدائرية تتبع توزيع فين ميزيس (von Mises) وهو توزيع متماثل وغير مشنت و الحصول على تقديرات معقولة لنسب هذا التوزيع ولحسابه الانحراف المعياري الدائري نستعمل الصيغة الآتية

$$S.D = \sqrt{-2\log(1 - var)} \quad \dots \quad 0 < S.D < \infty \quad (24 - 2)$$

اذا ان

$S.D$ هي انحراف المعياري الدائري

var هي التباين الدائري

Moments

5-2-1-2 العزوم [8][23]

عرفنا C في السابق على انها مجموع جيب تمام الزاوية $\sum_{i=1}^n \cos X_i$ وكذلك S تم تعريفها بأنها مجموع جيب الزاوية $\sum_{i=1}^n \sin X_i$ ويمكن ايجاد متوسط لكل منها كما يأتي :

$$\bar{C} = \frac{\sum_{i=1}^n \cos X_i}{n} \quad \dots \dots \dots (25 - 2)$$

$$\bar{S} = \frac{\sum_{i=1}^n \sin X_i}{n} \quad \dots \dots \dots (26 - 2)$$

عن طريق صيغة اويلر (Euler's formula),

$$e^{ix} = \cos x_i + i \sin x_i \quad \dots \dots \dots (27 - 2)$$

وبإدخال المجموع

$$\sum_{i=1}^n e^{ix} = \sum_{i=1}^n \cos X_i + i \sum_{i=1}^n \sin X_i$$

بالقسمة على n

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{ix} = \frac{\sum_{i=1}^n \cos X_i}{n} + i \frac{\sum_{i=1}^n \sin X_i}{n}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{ix} = \bar{C} + i \bar{S}$$

وبالمثل يمكن تعريف العزوم العليا عن طريق دالة القوى

$$e^{iPx} = \cos P x_i + i \sin P x_i$$

اذ ان $P = 1, 2, \dots$

وعن طريق القاعدة السابقة فأن

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{iPx} = \frac{\sum_{i=1}^n \cos P X_i}{n} + i \frac{\sum_{i=1}^n \sin P X_i}{n}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{(ix)^P} = \bar{C}(P) + i \bar{S}(P) \quad \dots \quad (28 - 2)$$

إذ أن $\bar{C}(P)$ و $\bar{S}(P)$ تدعى الرتب للعزوم المثلثية حول الصفر أي عندما تأخذ P واحد يعني العزم الأول وعندما تأخذ اثنين تعني العزم الثاني وهكذا

3-1-2 مفهوم التوزيع الاحتمالي الدائري مع بعض التوزيعات الاحتمالية الدائرية

1-3-1-2 مفهوم التوزيع الاحتمالي الدائري [7][16][35] The Concept Of Circular Probability Distribution

يعرف الاحتمال بشكل عام بأنه " إمكانية وقوع حدث ما لسنا على ثقة تامة بأنه سوف يقع " والاحتمال الدائري (circular probability) لا يختلف عن الاحتمال الاعتيادي من حيث المدى إذ يقع مجاله بين الصفر والواحد الصحيح و يتركز الاحتمال الدائري على محيط الدائرة و أن كل نقطة على محيط الدائرة تمثل احتمال معين وبما أن كل نقطة على المحيط تمثل اتجاه فان التوزيع الاحتمالي الدائري هو طريقة لتعيين الاحتمالات للاتجاهات المختلفة . وأن المتغير العشوائي في التوزيع الاحتمالي الدائري يكون مداه $(0^\circ - 360^\circ)$ او $(0^\circ - 2\pi)$ وكما للتوزيعات الاحتمالية البسيطة نوعين هما التوزيعات الاحتمالية المتقطعة والتوزيعات الاحتمالية المستمرة فأن للتوزيع الاحتمالي الدائري نوعين أيضا هما التوزيعات الاحتمالية الدائرية المتقطعة التي يأخذ المتغير العشوائي قيما عددية صحيحة مداها $(0^\circ - 360^\circ)$ وله دالة كتلة احتمالية (mass function probability) من أهم خصائصها :

$$1-f(x) \geq 0$$

$$2- \sum_{i=0}^{360} f(x_i) = 1$$

$$3- P(x \in A) = \sum_{x \in A} f(x)$$

إذ أن A هي مجموعة جزئية من فضاء الاحتمال

اما النوع الثاني وهو التوزيع الاحتمالي الدائري المستمر التي يأخذ فيها المتغير العشوائي قيما مستمرة ضمن الفترة $(0^\circ - 360^\circ)$ ولها دالة كثافة احتمالية (Density Function Probability) لها الخصائص الآتية:

$$1- f(x) \geq 0$$

$$2- \int_0^{2\pi} f(x)dx = 1$$

$$3- f(x) = f(x + 2\pi k) \text{ where } k \text{ is any integer .}$$

كما ان لدالة التوزيع الاحتمالي الدائري دالة كثافة تراكمية (cumulative density function) (c.d.f) يمكن تعريفها بالشكل الآتية:

$$F(t) = P(0 \leq x \leq t) = \int_0^t f(x) dx \quad , t \in (0, 2\pi] \quad \dots \dots \dots (29 - 2)$$

اذ ان $F(2\pi) = 1$ و $F(0) = 0$

وللمتغير العشوائي الدائري دالة مميزة (characteristic function) يمكن تعريفها بالشكل الآتية:

$$\varphi(t) = E(e^{itx}) = \int_0^{2\pi} e^{itx} f(x) dx \quad \dots \dots \dots (30 - 2)$$

أذا أن i هو عدد تخيلي

وبتطبيق صيغة اويلر (Euler's formula) ينتج

$$E(e^{itx}) = E\{\cos(tx) + i \sin(tx)\}$$

$$E(e^{itx}) = \int_0^{2\pi} \{\cos(tx) + i \sin(tx)\} f(x) dx$$

$$E(e^{itx}) = \int_0^{2\pi} \cos(tx) f(x) dx + i \int_0^{2\pi} \sin(tx) f(x) dx$$

من هذا يمكن كتابة العزم المثلثي t^{th} بالصورة الآتية

$$\varphi(t) = E(e^{itx}) = \alpha_t + i \beta_t \quad \dots \dots \dots (31 - 2)$$

أذا أن

$$\alpha_t = E\{\cos(tx)\} = \int_0^{2\pi} \cos(tx) f(x) dx$$

$$\beta_t = E\{\sin(tx)\} = \int_0^{2\pi} \sin(tx) f(x) dx$$

Some Circular

2-3-1-2 بعض التوزيعات الاحتمالية الدائرية^{[23][35]}

Distributions Probability

بعض التوزيعات الاحتمالية الدائرية لها دالة كثافة أو دالة كتلة احتمالية خاصة بها والبعض الآخر من هذه التوزيعات يمكن الحصول عليها عن طريق عملية تغليف (لف) التوزيعات الاحتمالية الاعتيادية على الخط الحقيقي حول دائرة الوحدة وأن عملية التغليف هذه يمكن إجرائها عن طريق تطبيق أحدا القاعدتين الآتيتين:

$$f(x) = \sum_{k=\forall x} g(x + 2\pi k) \quad x \in [0, 2\pi) \quad \dots \quad (32 - 2)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \{ \alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx) \} \right\} \quad x \in [0, 2\pi) \quad \dots \quad (33 - 2)$$

اذ ان $g(x)$ هي دالة الكتلة او الكثافة الاحتمالية للتوزيع الأصلي (p.d.f)

$f(x)$ دالة الكتلة او الكثافة الاحتمالية للتوزيع الملفوف

α_k الجزء الحقيقي من الدالة المميزة للتوزيع الاصيلي

β_k الجزء التخيلي من الدالة المميزة للتوزيع الاصيلي

كما يمكن أيجاد الدالة التراكمية (c.d.f) للتوزيع الملفوف من الدالة التراكمية للتوزيع الأصلي عن طريق القاعدة الآتية:

$$F(x) = \sum_{k=\forall x} \{ G(x + 2\pi k) - G(2\pi k) \} \quad \dots \quad (34 - 2)$$

اذ ان $G(x)$ هي الدالة التراكمية للتوزيع الأصلي (c.d.f)

$F(x)$ الدالة التراكمية للتوزيع الملفوف

Circular Uniform Distribution

1-2-3-1-2 التوزيع المنتظم الدائري [23][35]

أذا تم توزيع الاحتمال الكلي بشكل منتظم على محيط الدائرة يمكن الحصول على التوزيع الدائري المنتظم بدالة كثافة احتمالية ثابتة ومعرفة بالشكل الآتي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & x \in [0, 2\pi) \\ 0 & \text{other way} \end{cases} \quad \dots \quad (35 - 2)$$

وله دالة كثافة تراكمية (cumulative density function) معرفة بالشكل الآتية :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & 0 > x \\ \frac{x}{2\pi} & 0 \leq x < 2\pi \\ 1 & x \geq 2\pi \end{cases} \quad \dots \quad (36 - 2)$$

وأن جميع العزوم المثلثية لـ $\bar{S}(P)$ و $\bar{C}(P)$ تساوي صفرًا وذلك لان مجموع أي جيب تمام (Cos) أو جيب (Sin) لزوايا تبدأ من الصفر وتزداد بصوره منتظمة إلى أن تصل للـ 2π يساوي صفر .

Wrapped Exponential Distribution

2-2-3-1-2 التوزيع الآسي الملفوف [22][35][33]

في نظرية الاحتمالات و الإحصاءات الاتجاهية يكون التوزيع الآسي الملفوف هو توزيع احتمالي ينتج عن التفاف التوزيع الآسي حول الدائرة ويمكن الحصول على دالة الكثافة الاحتمالية له باستعمال المعادلة (2-32) وتطبيقها على دالة كثافة احتمالية (p.d.f) للتوزيع الآسي الاعتيادي وكما يأتي:

$$g(x, \lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(x)} & 0 \leq x \leq \infty \\ 0 & \text{other way} \end{cases} \quad \dots \quad (37 - 2)$$

$$f(x, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda(x+2\pi k)}$$

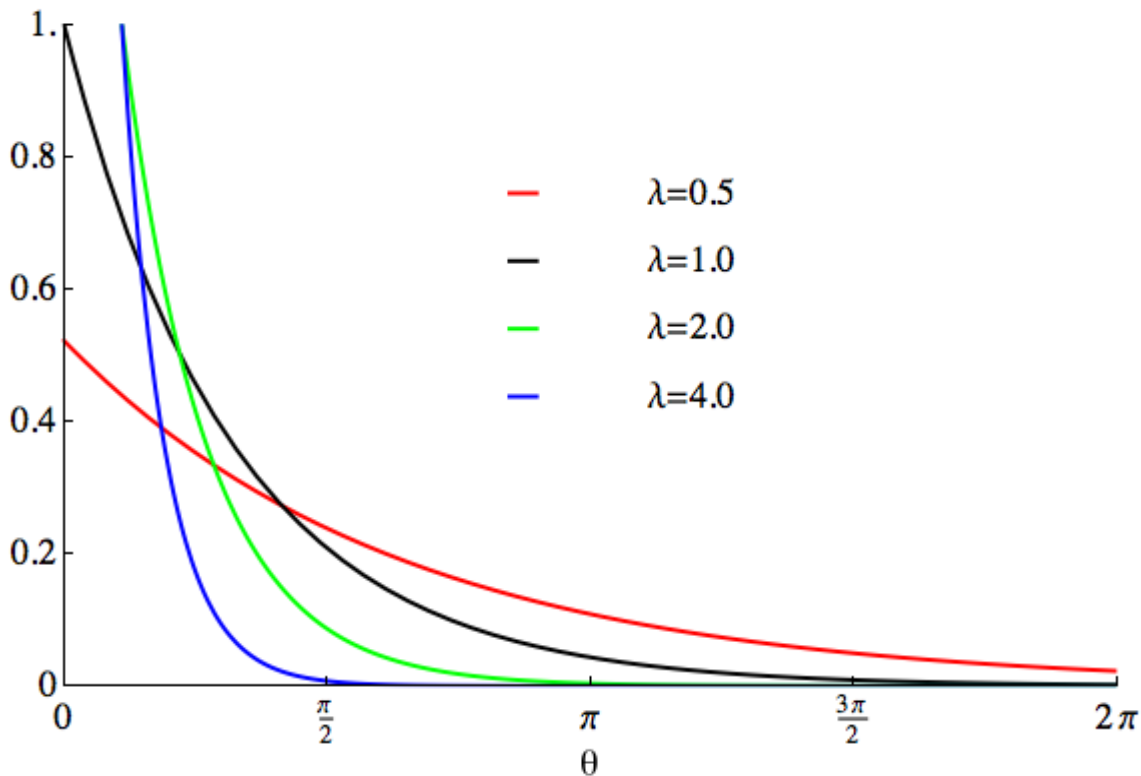
$$f(x, \lambda) = \lambda e^{-\lambda(x)} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2\lambda\pi k}$$

وبما ان قيمة المقدار $e^{-2\lambda\pi k}$ هي قيمة احتمالية محصورة بين الصفر والواحد فإن يمكن اعتبار المقدار $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-2\lambda\pi k}$ متوالية هندسية غير منتهية ناتجها هو $\frac{1}{1-e^{-2\pi\lambda}}$ يمكن كتابة دالة الكثافة الاحتمالية (p.d.f) للتوزيع الآسي الملفوف بالشكل الآتي:

$$f(x, \lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{1 - e^{-2\pi\lambda}} & 0 \leq x \leq 2\pi \\ 0 & \text{other way} \end{cases} \quad \dots \quad (38 - 2)$$

اذ ان λ تمثل معلمة التوزيع

ويمكن توضيح شكل دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الآسي الدائري الملفوف عندما تأخذ المعلمة (λ) قيم مختلفة في الشكل (2 - 5)

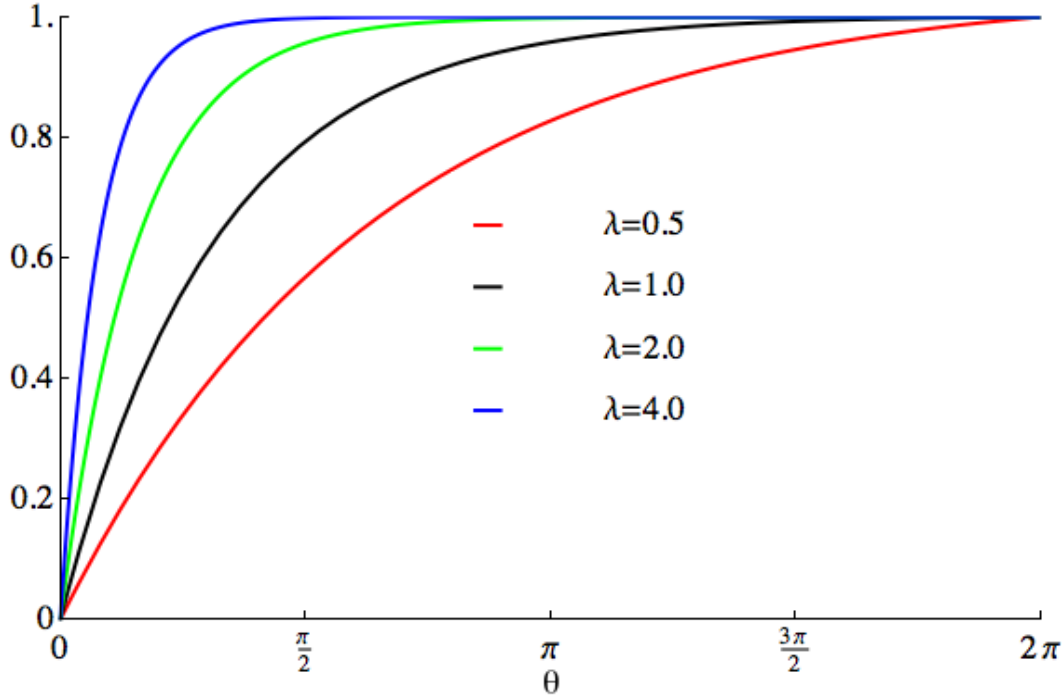


الشكل (2 - 5) دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع (WE) عندما تأخذ المعلمة قيماً مختلفة

أما الدالة التراكمية للتوزيع فهي بالشكل الآتية:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & 0 > x \\ \frac{1 - e^{-\lambda x}}{1 - e^{-2\pi\lambda}} & 0 \leq x < 2\pi \\ 1 & x \geq 2\pi \end{cases} \quad \dots \quad (39 - 2)$$

والتي يمكن توضيحها عن طريق الشكل الآتي:



الشكل (2-6) الدالة التراكمية لتوزيع (WE) عندما تأخذ المعلمة قيم مختلفة

Wrapped Normal Distribution

3-2-3-1-2 التوزيع الطبيعي الملفوف [23][33]

ينشأ هذا التوزيع عندما تلف دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي احادي البعد حول الدائرة مرات عديدة وبلا حدود وكالاتي :

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

وأن الدالة المميزة للتوزيع الطبيعي هي :

$$\varphi(x) = E(e^{itx}) = e^{it\mu - \frac{t^2\sigma^2}{2}}$$

$$e^{it\mu} e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}} = \alpha_t + i\beta_t$$

وبتطبيق صيغة اويلر (Euler's formula)

$$e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}} \{\cos(t\mu) + i \sin(t\mu)\} = \alpha_t + i\beta_t$$

$$\cos(t\mu) e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}} + i \sin(t\mu) e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}} = \alpha_t + i\beta_t$$

المعادلة السابقة تعد عدداً مركباً يساوي عدداً مركباً آخر ، الجزء الحقيقي لكلا العددين متساوي وكذلك الجزء التخيلي متساوي أي أن

$$\alpha_t = \cos(t\mu) e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}} \quad \text{and} \quad \beta_t = \sin(t\mu) e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}}$$

و تطبيق القاعدة في المعادلة (2-33):

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{t=1}^{\infty} \left\{ e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}} \cos(t\mu) \cos(tx) + e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}} \sin(t\mu) \sin(tx) \right\} \right\}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{t=1}^{\infty} e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}} \{ \cos(t\mu) \cos(tx) + \sin(t\mu) \sin(tx) \} \right\}$$

بتعويض عن المقدار $\{ \cos(t\mu) \cos(tx) + \sin(t\mu) \sin(tx) \}$ ما يساويه في المعادلة (2-13) ينتج

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{t=1}^{\infty} e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}} \{ \cos(tx - t\mu) \} \right\}$$

ليكن $e^{-\frac{\sigma^2}{2}}$ يساوي ρ آذ أن $\rho \in (0, 1)$

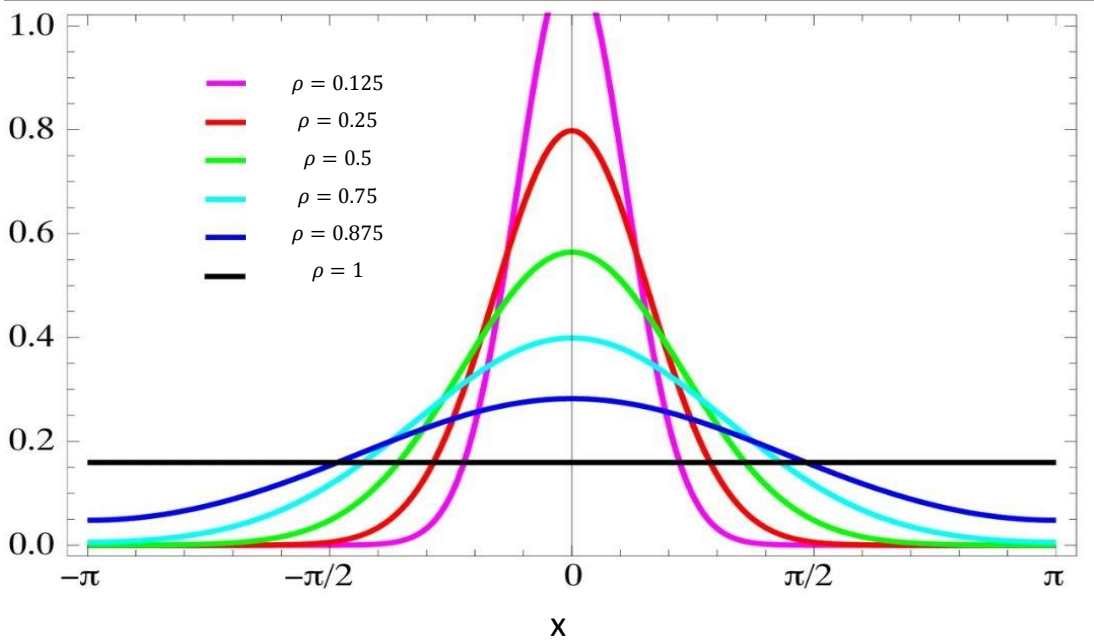
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{t=1}^{\infty} \rho^{t^2} [\cos t(x - \mu)] \right\} & 0 \leq x < 2\pi \\ 0 & \text{other way} \end{cases} \quad \dots (40 - 2)$$

وهي دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي الملفوف

μ تمثل متوسط الاتجاه أو الوسط الدائري

ρ تمثل متوسط الطول الناتج

ويمكن توضيح شكل دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي الملفوف عندما تأخذ المعلمة (μ) قيم مختلفة في الشكل (2 - 7)

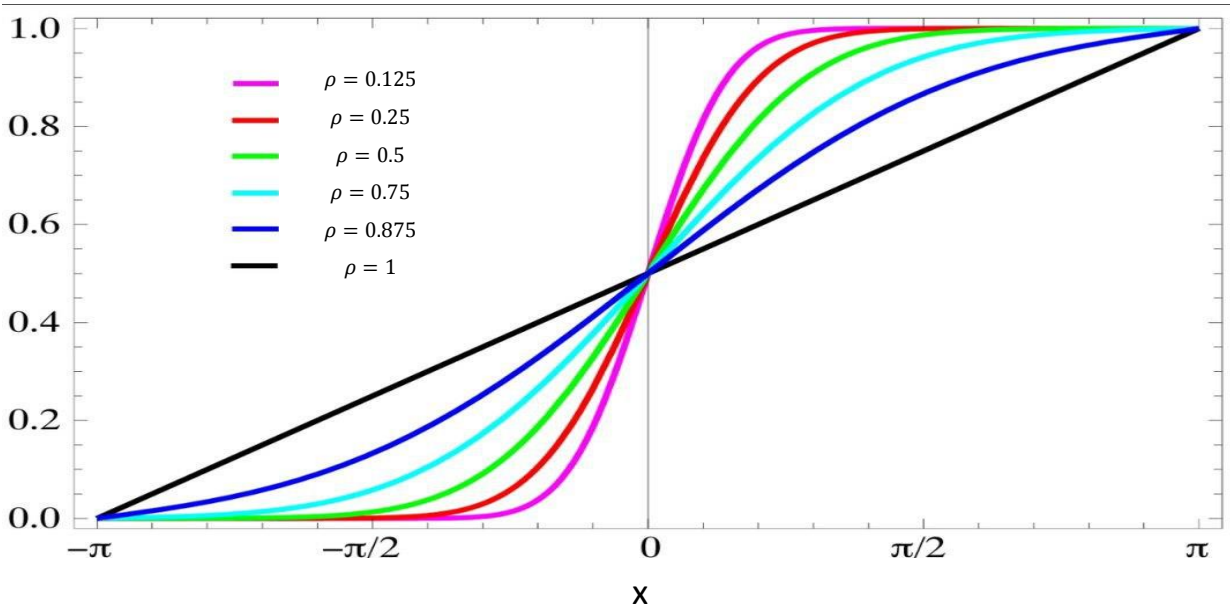


الشكل (7-2) الدالة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي الملفوف عندما تأخذ المعلمة قيم مختلفة

أما دالة التوزيع التراكمي (cdf) للتوزيع الطبيعي الملفوف فهي تكتب بالشكل الآتي:

$$F(x, \mu) = \begin{cases} 0 & 0 > x \\ \frac{1}{2\pi} \left\{ x + \frac{2 \sum_{t=1}^{\infty} \rho t^2}{t} [\sin t(x - \mu) + \sin(t\mu)] \right\} & 0 \leq x < 2\pi \dots (41-2) \\ 1 & x \geq 2\pi \end{cases}$$

والتي يمكن توضيحها بالشكل الآتي:



الشكل (8-2) الدالة التراكمية للتوزيع الطبيعي الملفوف عندما تأخذ المعلمة قيم مختلفة

The Von Mises Distribution

4-2-3-1-2 توزيع فون ميزيس [14] [35]

قُدِم هذا التوزيع بواسطة عالم الاقتصاد النمساوي لودفيج فون ميزيس (Ludwig von mises) عام 1918 ويعد التوزيع الأكثر شيوعاً إذا تعلق الأمر بالبيانات الدائرية إذ يؤدي هذا التوزيع دوراً مهماً في البيانات الدائرية مشابه للدور الذي يؤديه التوزيع الطبيعي للبيانات الاعتيادية ودالة الكثافة الاحتمالية له معرفة بالشكل الآتي :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi I_0(k)} e^{\{k \cos(x-\mu)\}} & 0 \leq x < 2\pi , 0 \leq k < \infty \\ 0 & \text{other way} \end{cases} \dots \dots (42 - 2)$$

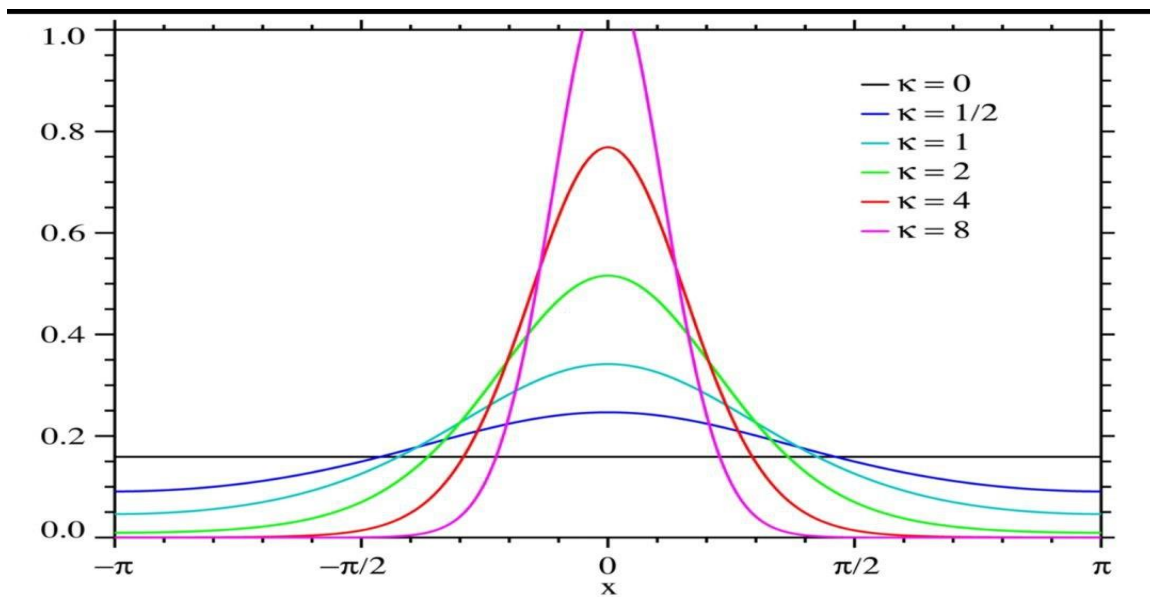
أد أن μ تمثل المتوسط الدائري او متوسط الاتجاه

k معلمة التركيز

الأول و الرتبة الصفرية وهو مساوي للمقدار $I_0(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{k \cos(x)} dx$ الذي يسمى تعديل دالة بسل (Bessel function) من النوع الأول و رتبه أعلى من الصفر و لتكن الرتبة (p) فيمكن أن يكتب بالصور الأتيه :

$$I_p(k) = \int_0^{2\pi} \cos(px) e^{k \cos(x)} dx \dots (43 - 2)$$

ويمكن توضيح الدالة الاحتمالية للتوزيع بشكل التالي

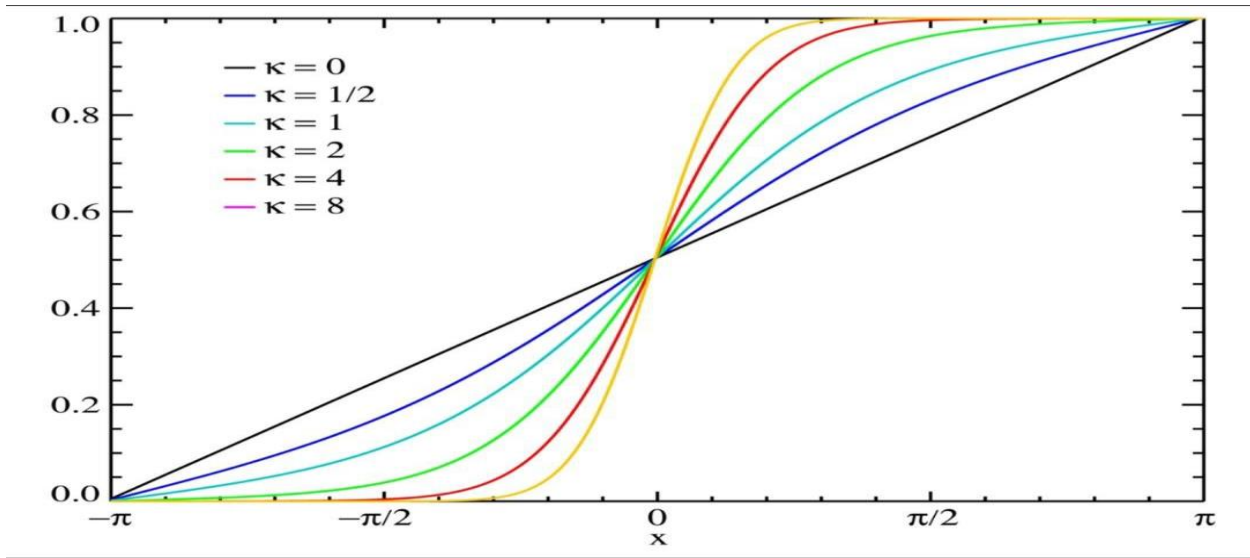


الشكل (9-2) الدالة الاحتمالية لتوزيع فون ميزيس عندما تأخذ المعلمة k قيم مختلفة

أما الدالة التراكمية للتوزيع (c.d.f) فيمكن ان تكتب بالشكل الآتي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2\pi I_0(\kappa)} \int_0^x e^{\{k \cos(t-\mu)\}} dt & 0 \leq x < 2\pi \\ 1 & x \geq 2\pi \end{cases} \quad \dots (44 - 2)$$

و التي يمكن توضيحها كما في الشكل الآتي:



الشكل (10-2) الدالة التراكمية لتوزيع فون ميزيس عندما تأخذ المعلمة κ قيم مختلفة

الدالة المميزة للتوزيع فيمكن إيجادها بالشكل الآتي:

$$E(e^{it(x-\mu)}) = e^{-it\mu} E(e^{itx})$$

$$E(e^{itx}) = E(e^{it(x-\mu)}) e^{it\mu}$$

وبتطبيق صيغة اويلر (Euler's formula)

$$\varphi(t) = e^{it\mu} E\{\cos t(x - \mu) + i \sin t(x - \mu)\}$$

$$\varphi(t) = e^{it\mu} \int_0^{2\pi} \{\cos t(x - \mu) + i \sin t(x - \mu)\} f(x) dx$$

$$\varphi(t) = e^{it\mu} \left[\int_0^{2\pi} \{\cos t(x - \mu) f(x) dx + i \int_0^{2\pi} \sin t(x - \mu) f(x) dx \right]$$

$$\varphi(t) = e^{it\mu} [\alpha_t + i\beta_t]$$

اذ ان

$$\beta_t = \int_0^{2\pi} \sin t(x - \mu) f(x) dx = 0$$

$$\alpha_t = \int_0^{2\pi} \{\cos t(x - \mu) f(x) dx = \frac{1}{2\pi I_0(k)} \int_0^{2\pi} \cos t(x - \mu) e^{k \cos(x-\mu)} dx$$

$$\alpha_t = \frac{I_t(k)}{I_0(k)}$$

$$\varphi(t) = e^{it\mu} \frac{I_t(k)}{I_0(k)} \quad \dots \quad (45 - 2)$$

وهي الدالة المميزة لتوزيع فين ميزيس (characteristic function of the Von Mises distribution)

The Wrapped Cauchy Distribution

5-2-3-1-2 توزيع كوشي الملفوف [23][33]

قدم توزيع كوشي أول مره بواسطة Levy عام 1939 و أن دالة الكثافة الاحتمالية له كما مبينة أدناه

$$g(x, \mu, \sigma) = \begin{cases} \left(\frac{1}{\pi}\right) \frac{\sigma}{\sigma^2 + (x + \mu)^2} & -\infty \leq x, \mu \leq \infty \quad 0 \leq \sigma \\ 0 & \text{other way} \end{cases}$$

اما دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع كوشي الملفوف فهي كالآتي:

$$f(x, \mu, \rho) = \begin{cases} \left(\frac{1}{\pi}\right) \frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(x - \mu)} & 0 \leq x, \mu \leq 2\pi \quad 0 \leq \rho < 1 \\ 0 & \text{other way} \end{cases}$$

... (46 - 2)

إذ أن μ معلمة التوزيع وتمثل المتوسط و ρ معلمة التركيز

أما دالة التوزيع التراكمي (cdf) لتوزيع كوشي الملفوف فهي تكتب بالشكل الآتي:

$$F(x, \mu) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2\pi} \cos^{-1} \left[\frac{(1+\rho^2) \cos(x-\mu) - 2\rho}{1+\rho^2 - 2\rho \cos(x-\mu)} \right] & 0 \leq x < 2\pi \\ 1 & x \geq 2\pi \end{cases} \quad \dots (47-2)$$

المبحث الثاني

الانحدار الدائري

1-2-2 مفهوم الانحدار و أنواعه [6]

يعد تحليل الانحدار من موضوعات علم الإحصاء المهمة, والذي يستعمل في نطاق واسع في جميع مجالات العلم والمعرفة لأنه يصف العلاقة بين المتغيرات بشكل معادلة. ويمكن ان يعرف بشكل عام بأنه التحليل الذي يختص بدراسة تأثير متغير واحد أو أكثر من متغير يسمى المتغير المستقل (independent variable) أو المتغيرات المستقلة على متغير واحد يسمى المتغير التابع أو المعتمد (dependent variable). وذلك لغرض تقدير أو التنبؤ بقيمة المتغير التابع بمعلومية المتغير أو المتغيرات المستقلة. وبناء على ذلك فإن أسلوب الانحدار يستعمل للتوصل إلى أنموذج رياضي يوضح العلاقة الكمية بين المتغير التابع والمتغيرات المستقلة^[1] وقد عرفته [التميمي و آخرون, 2014,]^[4] بـ " وسيلة إحصائية تستعمل لتحليل البيانات التي تحتوي على متغيرين فأكثر عندما يكون الهدف هو اكتشاف طبيعة هذه العلاقة " كما عرفه [Kutner, 5 : 2005]^[28] بـ " وسيلة رياضية للتعبير عن اثنين أو أكثر من مكونات العلاقة الإحصائية " وبوجه عام يمكن تصنيف نماذج الانحدار وفق العديد من العوامل أهمها :

أولاً - عدد المتغيرات : هناك تقسيم شائع لنماذج الانحدار يتم تبعا لعدد المتغيرات المستقلة المستعملة في الأنموذج فإذا كان الأنموذج يحتوي على متغير مستقل واحد مع المتغير التابع فإن الأنموذج يسمى أنموذج انحدار بسيط (simple Regression model) أما إذا كان عدد المتغيرات المستقلة أكثر من واحد فيسمى أنموذج الانحدار المتعدد (multiple Regression model).

ثانياً - شكل العلاقة بين المتغيرات : وهنا يمكننا أن نميز بين نوعين من أنواع نماذج الانحدار هما أنموذج الانحدار الخطي (linear Regression model). و أنموذج الانحدار غير الخطي (Nonlinear Regression model) .

ثالثاً - مستوى القياس للمتغيرات : هذا التصنيف يعتمد على نوع بيانات المتغير التابع هل هي بيانات كمية أو وصفية أو دائرية وهنا يمكن التقسيم إلى ثلاث أنواع من النماذج هم نماذج الانحدار التقليدي وهي تستعمل في حالة كون بيانات المتغير التابع كمية والثاني هو

أنموذج الانحدار اللوجستي (logistic regression model) وهو يستعمل في حالة كون بيانات المتغير التابع وصفي فقط . أما النوع الثالث وهو الانحدار الزاوي أو الدائري (circular regression model) وهو يستعمل في حالة كون البيانات مقاسه بالزاويا المثلثة و محصور مداها بين (0 و 360) والذي سنتناوله في أطروحتنا .

2-2-2 أنموذج الانحدار الزاوي البسيط Simple Angular Regression Model

عندما تكون لدينا ظاهرة ما في الطبيعة او في الحياة تعتمد على متغير مستقل تم قياسه بمقاييس دائرية (على شكل زاوية محصورة قيمها بين الصفر درجة و 360 درجة) ومتغير معتمد بياناته غير دائرية انما هي بيانات كمية اعتيادية فيستعمل أنموذج الانحدار الزاوي البسيط الذي صيغته كما مبينه ادناه

$$y_i = \alpha + \beta \cos(x_i - a) + e_i \quad \dots \quad (48 - 2)$$

اذ أن

y_i تمثل المتغير المعتمد (التابع) (Dependent variable) المراد تحديد قيمته

x_i تمثل المتغير المستقل دائري (independent variable)

α تمثل الحد الثابت للأنموذج

β تمثل الميل الحدي للأنموذج

A تمثل معدل الزاوي (المتوسط الدائري للزاويا) (mean circular)

أما لو كان لدينا ظاهره مقاسه بقياسات دائرية وتعتمد على متغير مستقل مقاس أيضا بالقياسات الدائرية وان عدد هذه المتغيرات هو اثنان فقط احدهما متغير مستقل (Independent variable) و الأخر متغير تابع (Dependent variable) يعتمد في قيمه على المتغير المستقل أو يتأثر بتغير قيم المتغير المستقل , ولمعرفة مقدار هذا التأثير و اتجاهه و التنبؤ بقيم المتغير التابع المستقبلية سيتم دراسة نوعين من النماذج التي تلائم هذا النوع من البيانات اعتمادا على نوع التوزيع الذي يتبعه الخطأ العشوائي واقترح أنموذج ثالث بتوزيع للخطأ مختلف .

1-2-2-2 أنموذج الانحدار الزاوي البسيط بخطأ فون ميزيس^[21] Simple

Angular Regression Model By Von Mises Error

تم اقتراح هذا الأنموذج عام (2004) من Hussein, A.G ,et وهو مشابه تماماً لأنموذج الانحدار البسيط وفكرته مأخوذة منه إذ أن في الانحدار البسيط يشترط أن يكون الخطأ يتوزع توزيعاً طبيعياً وبما أن توزيع فون ميزيس (von mises) يعد مثل التوزيع الطبيعي للبيانات الدائرية لذلك تم افتراض الخطأ يتوزع توزيع فون ميزيس (von mises) ويمكن كتابة الأنموذج بالشكل الآتي:

$$y_i = \alpha + \beta x_i + e_i \quad (\text{model } 2\pi) \quad \dots \quad (49 - 2)$$

اذ أن

y_i تمثل المتغير المعتمد (التابع) (Dependent variable)

x_i تمثل المتغير المستقل (independent variable)

α تمثل الحد الثابت للأنموذج

β تمثل الميل الحدي للأنموذج

e_i تمثل الخطأ العشوائي الذي يتبع توزيع فون ميزيس بمتوسط دائري مقداره صفر و معلمة تركيز (k) .

• تقدير المعلمات الأنموذج^{[36][21][14]} Estimating Model Parameters

لتقدير معلمات هذا الأنموذج نستعمل طريقة الإمكان الأعظم , على فرض أن الخطأ الناتج عن الفرق بين القيمة الحقيقية والقيمة التقديرية هو يتبع توزيع فون ميزيس (von mises) وبهذا يمكن القول أن مشاهدات المتغير التابع هي الأخرى تتبع توزيع فون ميزيس بمتوسط دائري مقداره , $E(y) = \alpha + \beta x$ وبشكل عام ولعينة حجمها (n) يأخذ المتغير التابع (y) المشاهدات الاتية (y_1, y_2, \dots, y_n) وأن دالة الكثافة الاحتمالية (p.d.f) لكل مشاهدة من مشاهدات المتغير المعتمد لهذه العينة يمكن أن توضع بدلالة المعلمات المقدره وكما يأتي :

$$f(y_1) = \frac{1}{2\pi I_0(k)} e^{\{k \cos(y_1 - \alpha - \beta x_1)\}}$$

$$f(y_2) = \frac{1}{2\pi I_0(k)} e^{\{k \cos(y_2 - \alpha - \beta x_2)\}}$$

⋮

⋮

$$f(y_n) = \frac{1}{2\pi I_0(k)} e^{\{k \cos(y_n - \alpha - \beta x_n)\}}$$

و على فرض استقلال مشاهدات المتغير المعتمد الواحدة عن الأخرى لذا فإن دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة (j.p.d.f) لجميع مشاهدات المتغير المعتمد هي عبارة عن حاصل ضرب دوال الكثافة الاحتمالية المفردة للملاحظات المتغير المعتمد وكما يأتي :

$$f(y_1, y_2 \dots y_n) = \frac{1}{2\pi I_0(k)} e^{\{k \cos(y_1 - \alpha - \beta x_1)\}} * \frac{1}{2\pi I_0(k)} e^{\{k \cos(y_2 - \alpha - \beta x_2)\}}$$

$$* \dots * \frac{1}{2\pi I_0(k)} e^{\{k \cos(y_n - \alpha - \beta x_n)\}}$$

$$f(y_1, y_2 \dots y_n) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{2\pi I_0(k)} e^{\{k \cos(y_i - \alpha - \beta x_i)\}}$$

$$f(y_1, y_2 \dots y_n) = \frac{1}{(2\pi I_0(k))^n} e^{\sum_{i=1}^n \{k \cos(y_i - \alpha - \beta x_i)\}}$$

$$\ln f(y_1, y_2 \dots y_n) = -n \ln(2\pi) - n \ln(I_0(k)) + \sum_{i=1}^n \{k \cos(y_i - \alpha - \beta x_i)\}$$

ولجعل دالة الإمكان الأعظم بأقصى احتمال ممكن يجب اخذ المشتقة الجزئية الأولى لجميع المعلمات المطلوب تقديرها وكما يأتي :

$$\frac{\partial \ln f(y_1, y_2 \dots y_n)}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n \{k \sin(y_i - \alpha - \beta x_i)\}$$

$$\frac{\partial \ln f(y_1, y_2 \dots y_n)}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^n \{k \sin(y_i - \alpha - \beta x_i)x\}$$

$$\frac{\partial \ln f(y_1, y_2 \dots y_n)}{\partial k} = \frac{-n I_{1(k)}}{I_{0(k)}} + \sum_{i=1}^n \{\cos(y_i - \alpha - \beta x_i)\}$$

إذ أن $I_{1(k)}$ تمثل المشتقة الأولى لـ $I_{0(k)}$

و بمساواة جمع المعادلات للصفر تصبح بالشكل الآتي :

$$k \sum_{i=1}^n \{\sin(y_i - \alpha - \beta x_i)\} = 0 \quad \dots \quad (50 - 2)$$

$$k \sum_{i=1}^n \{\sin(y_i - \alpha - \beta x_i)x\} = 0 \quad \dots \quad (51 - 2)$$

$$\frac{-n I_{1(k)}}{I_{0(k)}} + \sum_{i=1}^n \{\cos(y_i - \alpha - \beta x_i)\} = 0 \quad \dots \quad (52 - 2)$$

من المعادلة (50-2) وباستعمال صيغة حاصل طرح جيب زاويتين المشار لها في المعادلة (2)-
12) نحصل على الآتي :

$$\sum_{i=1}^n \{\sin(y_i - \beta x_i) \cos \alpha - \cos(y_i - \beta x_i) \sin \alpha\} = 0$$

$$\cos \alpha \sum_{i=1}^n \sin(y_i - \beta x_i) - \sin \alpha \sum_{i=1}^n \cos(y_i - \beta x_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n \sin(y_i - \beta x_i) - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \sum_{i=1}^n \cos(y_i - \beta x_i) = 0$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha \quad \text{وبما أن}$$

$$\sum_{i=1}^n \sin(y_i - \beta x_i) - \tan \alpha \sum_{i=1}^n \cos(y_i - \beta x_i) = 0$$

$$\tan \alpha = \frac{\sum_{i=1}^n \sin(y_i - \beta x_i)}{\sum_{i=1}^n \cos(y_i - \beta x_i)}$$

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{\sum_{i=1}^n \sin(y_i - \beta x_i)}{\sum_{i=1}^n \cos(y_i - \beta x_i)}$$

$$\hat{\alpha} = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\frac{s}{c}\right) & \text{if } c > 0 \text{ and } s \geq 0 \\ \tan^{-1}\left(\frac{s}{c}\right) + \pi & \text{if } c < 0 \\ \tan^{-1}\left(\frac{s}{c}\right) + 2\pi & \text{if } c \geq 0 \text{ and } s < 0 \\ \text{undefined} & \text{if } c = 0 \text{ and } s = 0 \end{cases} \quad \dots \quad (53 - 2)$$

اذ أن

$$s = \sum_{i=1}^n \sin(y_i - \beta_0 x_i)$$

$$c = \sum_{i=1}^n \cos(y_i - \beta_0 x_i)$$

β_0 تمثل قيمة اولي للحل للمعلمة المقدره β

أما β فيمكن الحصول عليها من الصيغة الآتية:

$$\hat{\beta}_1 \approx \beta_0 + \frac{\sum_{i=1}^n x_i \sin(y_i - \hat{\alpha} - \beta_0 x_i)}{\sum_{i=1}^n x_i^2 \cos(y_i - \hat{\alpha} - \beta_0 x_i)} \quad \dots \quad (54 - 2)$$

و \hat{K} يمكن أن نحصل عليها من القانون الآتي :

$$\hat{k} = A^{-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos(y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} x_i) \right) \quad \dots \quad (55 - 2)$$

أذ أن A^{-1} هي نسبة دالة modified Bessel من النوع الأول من الترتيب الأول و النوع الأول من الترتيب الصفري لمعلمة التركيز k في توزيع فون ميزيس وقد أعطى (Dobson) في عام 1978 تقديرات تقريبه بسيطة للحصول على A^{-1} وهي كما مبينة أدناه

$$A^{-1}(Z) = \begin{cases} 2Z + Z^3 + 0.833Z^5 & Z < 0.53 \\ -0.4 + 1.39Z + 0.43(1 - Z)^{-1} & 0.53 \leq Z < 0.85 \\ (Z^3 - 4Z^2 + 3Z)^{-1} & Z \geq 0.85 \end{cases} \quad \dots \quad (56 - 2)$$

إذ أن Z تمثل أي عدد حقيقي وفي اطروحة هي تساوي المقدار التالي :

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos(y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} x_i) \right)$$

أما لحساب الخطأ في أنموذج الانحدار الزاوي بخطأ يتبع فون ميزيس سنستعمل الصيغة الآتية :

$$S_E = n - \sum_{i=1}^n \cos(y_i - \hat{y}_i) \quad \dots \quad (57 - 2)$$

إذا أن S_E تمثل مقدار الخطأ

أما متوسط الخطأ فسنقسمه على حجم العينة مطروح منه عدد المعلمات المقدرة وبما أن الأنموذج هو أنموذج بسيط بمعلمتين مقدرتين فنقسم على $(n-2)$ وكما يأتي:

$$MS_E = \frac{n - \sum_{i=1}^n \cos(y_i - \hat{y}_i)}{n - 2} \quad \dots \quad (58 - 2)$$

إذا أن MS_E تمثل متوسط الأخطاء

2-2-2-2 أنموذج الانحدار الزاوي البسيط بخطأ كوشي الملفوف [11][32][14] [26]

Simple Angular Regression Model With Wrapped Cauchy Error

عندما يكون لدينا متغيران دائريان هما (y, x) ولديهم n من المشاهدات الدائرية ولهم أنموذج الانحدار الزاوي الخطي البسيط مشابه تماماً للأنموذج الانحدار الخطي البسيط وكان الخطأ العشوائي يتوزع توزيع كوشي الملفوف (distribution wrapped Cauchy) فسنتطرق على هذا الأنموذج بـ أنموذج الانحدار الزاوي البسيط بخطأ كوشي الملفوف والذي تم اقتراحه من (Abuzaid, A.H, and Allahham, N.R) عام 2015 و يمكن كتابته بالشكل الآتي :

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i \quad (model\ 2\pi) \quad \dots \quad (59 - 2)$$

إذ أن

y_i تمثل المتغير المعتمد (التابع) (Dependent variable)

x_i تمثل المتغير المستقل (independent variable)

α تمثل الحد الثابت للأنموذج

β تمثل الميل الحدي للأنموذج

ε_i تمثل الخطأ العشوائي الذي يتبع توزيع كوشي الملفوف بمتوسط دائري مقداره صفر و معلمة تركيز مقدارها (ρ)

Estimating Model Parameters

• تقدير المعلمات الأنموذج

ولتقدير معلمات هذا الأنموذج نستعمل طريقة الإمكان الأعظم (Maximum likelihood estimator method) على فرض أن الخطأ الناتج عن الفرق بين القيمة الحقيقية والقيمة التقديرية هو يتبع توزيع كوشي الملفوف (distribution wrapped Cauchy) وبهذا يمكن القول أن مشاهدات المتغير التابع هي الأخرى تتبع توزيع كوشي الملفوف بمتوسط دائري مقداره $E(y) = \alpha + \beta x$ وبتعويض مقدار المتوسط في دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع كوشي الملفوف في معادلة (2-46) ينتج

$$f(y, \alpha, \beta, \rho) = \left(\frac{1}{\pi}\right) \frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(y_i - \alpha - \beta x_i)}$$

و باستعمال قاعدة حاصل طرح جيب تمام لزاويتين المشار إليها في المعادلة (2-13) نحصل على

$$f(y, \alpha, \beta, \rho) = \left(\frac{1}{\pi}\right) \frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2 - 2\rho [\cos \alpha \cos(y_i - \beta x_i) - \sin \alpha \sin(y_i - \beta x_i)]}$$

وبضرب البسط والمقام بالمقدار $\frac{1}{1+\rho^2}$ ينتج

$$f(y, \alpha, \beta, \rho) = \left(\frac{1}{\pi}\right) \frac{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}}{\frac{1+\rho^2-2\rho [\cos \alpha \cos(y_i-\beta x_i)-\sin \alpha \sin(y_i-\beta x_i)]}{1+\rho^2}}$$

$$f(y, \alpha, \beta, \rho) = \left(\frac{1}{\pi}\right) \frac{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}}{1 - \frac{2\rho}{1+\rho^2} \cos \alpha \cos(y_i - \beta x_i) - \frac{2\rho}{1+\rho^2} \sin \alpha \sin(y_i - \beta x_i)}$$

$$c = \sqrt{1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2} \quad \text{و} \quad \alpha_2 = \frac{2\rho}{1+\rho^2} \sin \alpha \quad \text{و} \quad \alpha_1 = \frac{2\rho}{1+\rho^2} \cos \alpha$$

لأن نعوض عن مقدار α_1 و α_2 في c

$$c = \sqrt{1 - \frac{4\rho^2}{(1+\rho^2)^2} \cos^2 \alpha - \frac{4\rho^2}{(1+\rho^2)^2} \sin^2 \alpha}$$

$$c = \sqrt{1 - \frac{4\rho^2}{(1+\rho^2)^2} [\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha]}$$

وبما أن $[\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha] = 1$

$$c = \sqrt{\frac{(1+\rho^2)^2 - 4\rho^2}{(1+\rho^2)^2}} = \sqrt{\frac{1+2\rho^2+\rho^4-4\rho^2}{(1+\rho^2)^2}} = \sqrt{\frac{1-2\rho^2+\rho^4}{(1+\rho^2)^2}}$$

$$c = \sqrt{\frac{(1-\rho^2)(1-\rho^2)}{(1+\rho^2)^2}} \rightarrow c = \sqrt{\frac{(1-\rho^2)^2}{(1+\rho^2)^2}} \rightarrow c = \frac{(1-\rho^2)}{(1+\rho^2)}$$

و بتعويض α_1 و α_2 و c في دالة الكثافة الاحتمالية

$$f(y, \alpha_1, \alpha_2, \beta, c) = \left(\frac{1}{\pi}\right) \frac{c}{1 - \alpha_1 \cos(y_i - \beta x_i) - \alpha_2 \sin(y_i - \beta x_i)}$$

وعلى فرض استقلال مشاهدات المتغير المعتمد (y_i) الواحدة عن الأخرى لذا فإن دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة (j.p.d.f) لجميع مشاهدات المتغير المعتمد هي عبارة عن حاصل ضرب دوال الكثافة الاحتمالية للمتغير المعتمد وكما يأتي :

$$f(y_1, y_2, \dots, y_n) = \prod_{i=1}^n \left[\left(\frac{1}{\pi}\right) \frac{\sqrt{1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2}}{1 - \alpha_1 \cos(y_i - \beta x_i) - \alpha_2 \sin(y_i - \beta x_i)} \right]$$

$$f(y_1, y_2, \dots, y_n) = \pi^{-n} \frac{(1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2)^{n/2}}{\prod_{i=1}^n (1 - \alpha_1 \cos(y_i - \beta x_i) - \alpha_2 \sin(y_i - \beta x_i))}$$

وبأخذ اللوغارتم الطبيعي لطرفي المعادلة

$$f(y_1, y_2, \dots, y_n) = -n \ln \pi + \frac{n}{2} \ln(1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2) - \sum_{i=1}^n [\ln(1 - \alpha_1 \cos(y_i - \beta x_i) - \alpha_2 \sin(y_i - \beta x_i))]$$

وبالاشتقاق الجزئي لكل معلمة من المعلمات

$$\frac{\partial f(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial \alpha_1} = \frac{-n\alpha_1}{1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2} + \sum_{i=1}^n \frac{\cos(y_i - \beta x_i)}{(1 - \alpha_1 \cos(y_i - \beta x_i) - \alpha_2 \sin(y_i - \beta x_i))}$$

$$\frac{\partial f(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial \alpha_2} = \frac{-n\alpha_2}{1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2} + \sum_{i=1}^n \frac{\sin(y_i - \beta x_i)}{(1 - \alpha_1 \cos(y_i - \beta x_i) - \alpha_2 \sin(y_i - \beta x_i))}$$

$$\frac{\partial f(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_1 x_i \sin(y_i - \beta x_i) - \alpha_2 x_i \cos(y_i - \beta x_i)}{(1 - \alpha_1 \cos(y_i - \beta x_i) - \alpha_2 \sin(y_i - \beta x_i))}$$

و بعد مساواة جميع المعادلات للصفر و بفرض أن

$$(1 - \alpha_1 \cos(y_i - \beta x_i) - \alpha_2 \sin(y_i - \beta x_i))^{-1} = w$$

$$0 = \frac{-n\alpha_1}{c^2} + \sum_{i=1}^n w \cos(y_i - \beta x_i)$$

$$0 = \frac{-n\alpha_2}{c^2} + \sum_{i=1}^n w \sin(y_i - \beta x_i)$$

$$0 = \sum_{i=1}^n w \alpha_1 x_i \sin(y_i - \beta x_i) - \alpha_2 x_i \cos(y_i - \beta x_i)$$

وبحل المعادلات السابقة

$$0 = \frac{-n\alpha_1 + c^2 \sum_{i=1}^n w \cos(y_i - \beta x_i)}{c^2}$$

$$0 = -n\alpha_1 + c^2 \sum_{i=1}^n w \cos(y_i - \beta x_i)$$

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{c^2 \sum_{i=1}^n w \cos(y_i - \beta x_i)}{n} \dots \dots \dots (60 - 2)$$

$$0 = \frac{-n\alpha_2 + c^2 \sum_{i=1}^n w \sin(y_i - \beta x_i)}{c^2}$$

$$\hat{\alpha}_2 = \frac{c^2 \sum_{i=1}^n w \sin(y_i - \beta x_i)}{n} \dots \dots \dots (61 - 2)$$

و لإيجاد تقدير لقيمه β نستعمل طريقة تكرارية تعتمد على إعطاء قيم أولية للمعلمة β ولتكن β_0 وبالاعتماد على القانون الآتي :

$$(y_i - \beta x_i) = (y_i - \beta_0 x_i) + x_i(\beta_0 - \beta) \dots \dots \dots (62 - 2)$$

لتكن $(\beta_0 - \beta) = \Delta$

$$(y_i - \beta x_i) = (y_i - \beta_0 x_i) + x_i \Delta$$

فأن

$$\sin(y_i - \beta x_i) = \sin\{(y_i - \beta_0 x_i) + x_i \Delta\}$$

وباستعمال قاعدة حاصل جمع جيب الزاويتين المشار اليهما في المعادلة (10-2) ينتج

$$\sin(y_i - \beta x_i) = \sin(y_i - \beta_0 x_i) \cos x_i \Delta + \cos(y_i - \beta_0 x_i) \sin x_i \Delta$$

عن طريق القاعدتين التاليتين $\sin x_i \Delta \cong x_i \Delta$ و $\cos x_i \Delta \cong 1$ فان

$$\sin(y_i - \beta x_i) = \sin(y_i - \beta_0 x_i) + \cos(y_i - \beta_0 x_i) x_i \Delta \quad \dots \quad (63 - 2)$$

و كذلك بالنسبة

$$\cos(y_i - \beta x_i) = \cos\{(y_i - \beta_0 x_i) + x_i \Delta\}$$

و باستعمال قاعدة حاصل جمع جيب تمام الزاويتين المشار اليهما في المعادلة (8-2) ينتج

$$\cos(y_i - \beta x_i) = \cos(y_i - \beta_0 x_i) \cos x_i \Delta - \sin(y_i - \beta_0 x_i) \sin x_i \Delta$$

$$\cos(y_i - \beta x_i) = \cos(y_i - \beta_0 x_i) - \sin(y_i - \beta_0 x_i) x_i \Delta \quad \dots \quad (64 - 2)$$

نعوض المعادلتين (63-2) و (64-2) في معادلة المشتقة الأولى للمعلمة β بعد مساواتها بالصفر

$$\sum_{i=1}^n w_i [\alpha_1 x_i \{ \sin(y_i - \beta_0 x_i) + \cos(y_i - \beta_0 x_i) x_i \Delta \} - \alpha_2 x_i \{ \cos(y_i - \beta_0 x_i) - \sin(y_i - \beta_0 x_i) x_i \Delta \}] = 0$$

$$\sum_{i=1}^n [w_i \alpha_1 x_i \sin(y_i - \beta_0 x_i) + \alpha_1 w_i x_i \cos(y_i - \beta_0 x_i) x_i \Delta - \alpha_2 w_i x_i \cos(y_i - \beta_0 x_i) - \alpha_2 w_i x_i \sin(y_i - \beta_0 x_i) x_i \Delta] = 0$$

ومنها يمكن إيجاد تقدير تقريبي للمعلمة β

$$\hat{\beta} = \beta_0 + \frac{\sum_{i=1}^n x_i (\alpha_1 \sin(y_i - \beta_0 x_i) - \alpha_2 \cos(y_i - \beta_0 x_i))}{\sum_{i=1}^n x_i^2 (\alpha_1 \cos(y_i - \beta_0 x_i) - \alpha_2 \sin(y_i - \beta_0 x_i))} \quad \dots \quad (65 - 2)$$

بعد إيجاد تقديرات لكل من $\hat{\beta}$ و $\hat{\alpha}_1$ و $\hat{\alpha}_2$ يمكننا إيجاد تقديرات للـ α بالاعتماد على القيم المقدره لـ $\hat{\beta}$ و $\hat{\alpha}_1$ و $\hat{\alpha}_2$ وكما يأتي :

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\frac{2\rho}{1+\rho^2} \sin \alpha}{\frac{2\rho}{1+\rho^2} \cos \alpha}$$

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \rightarrow \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \tan \alpha$$

$$\hat{\alpha} = \tan^{-1} \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$$

$$\hat{\alpha} = \begin{cases} \tan^{-1} \left(\frac{\hat{\alpha}_2}{\hat{\alpha}_1} \right) & \text{if } \hat{\alpha}_1 > 0 \text{ and } \hat{\alpha}_2 \geq 0 \\ \tan^{-1} \left(\frac{\hat{\alpha}_2}{\hat{\alpha}_1} \right) + \pi & \text{if } \hat{\alpha}_1 < 0 \\ \tan^{-1} \left(\frac{\hat{\alpha}_2}{\hat{\alpha}_1} \right) + 2\pi & \text{if } \hat{\alpha}_1 \geq 0 \text{ and } \hat{\alpha}_2 < 0 \\ \text{undefined} & \text{if } \hat{\alpha}_1 = 0 \text{ and } \hat{\alpha}_2 = 0 \end{cases} \quad \dots \quad (66 - 2)$$

وكذلك يمكن إيجاد تقدير للـ ρ وذلك بتربيع قيمة كل من α_1 و α_2 وجمعهما وكما يأتي

$$\hat{\alpha}_1^2 + \hat{\alpha}_2^2 = \frac{4\rho^2 \cos^2 \alpha}{(1 + \rho^2)^2} + \frac{4\rho^2 \sin^2 \alpha}{(1 + \rho^2)^2}$$

$$\hat{\alpha}_1^2 + \hat{\alpha}_2^2 = \frac{4\rho^2}{(1 + \rho^2)^2} (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)$$

$$\hat{\alpha}_1^2 + \hat{\alpha}_2^2 = \frac{4\rho^2}{(1 + \rho^2)^2}$$

$$\sqrt{\hat{\alpha}_1^2 + \hat{\alpha}_2^2} = \frac{2\rho}{1 + \rho^2} \rightarrow \sqrt{\hat{\alpha}_1^2 + \hat{\alpha}_2^2} (1 + \rho^2) = 2\rho$$

$$\rho^2 \sqrt{\hat{\alpha}_1^2 + \hat{\alpha}_2^2} - 2\rho + \sqrt{\hat{\alpha}_1^2 + \hat{\alpha}_2^2} = 0$$

أصبحت لدينا معادلة من الدرجة الثانية يمكن حلها باستعمال القانون العام (الدستور) والذي صيغته العامة هي

$$x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \dots \quad (67 - 2)$$

$$\hat{\rho} = \frac{2 \mp \sqrt{4 - 4\sqrt{\hat{\alpha}_1^2 + \hat{\alpha}_2^2} * \sqrt{\hat{\alpha}_1^2 + \hat{\alpha}_2^2}}}{2\sqrt{\hat{\alpha}_1^2 + \hat{\alpha}_2^2}}$$

$$\hat{\rho} = \frac{2 \mp 2\sqrt{1 - \hat{\alpha}_1^2 - \hat{\alpha}_2^2}}{2\sqrt{\hat{\alpha}_1^2 + \hat{\alpha}_2^2}}$$

$$\hat{\rho} = \frac{1 \mp \sqrt{1 - \hat{\alpha}_1^2 - \hat{\alpha}_2^2}}{\sqrt{\hat{\alpha}_1^2 + \hat{\alpha}_2^2}}$$

و بما أن قيمة $\hat{\rho}$ تقع بين الصفر و الواحد الصحيح فنهمل الحل ذو الإشارة الموجبة وتكون القيمة التقديرية للـ $\hat{\rho}$ هي

$$\hat{\rho} = \frac{1 - \sqrt{1 - \hat{\alpha}_1^2 - \hat{\alpha}_2^2}}{\sqrt{\hat{\alpha}_1^2 + \hat{\alpha}_2^2}} \quad \dots \quad (68 - 2)$$

أما لحساب الخطأ في أنموذج الانحدار الزاوي بخطأ يتبع توزيع كوشي الملفوف سنستعمل الصيغة نفسها المستعملة في أنموذج الانحدار الزاوي بخطأ فون ميزيس وهي كما يأتي :

$$S_E = n - \sum_{i=1}^n \cos(y_i - \hat{y}_i) \quad \dots \quad (69 - 2)$$

أما متوسط الخطأ فنقسمه على حجم العينة مطروح منه عدد المعلمات المقدرة وبما أن الأنموذج هو أنموذج بسيط بمعلمتين مقدرتين فنقسم على (n-2) وكما يأتي:

$$MS_E = \frac{n - \sum_{i=1}^n \cos(y_i - \hat{y}_i)}{n - 2} \quad \dots \quad (70 - 2)$$

3-2-2-2 نموذج الانحدار الزاوي بخطأ التوزيع الطبيعي الملفوف Simple

Angular Regression Model with Wrapped Normal Distribution Error

في الأنموذجين السابقين كان الافتراض هو أن الخطأ يتبع توزيع فون ميزيس في الأول وتوزيع كوشي الملفوف في الثاني , في هذا الأنموذج المقترح سنفترض أن الخطأ يتبع التوزيع الطبيعي الملفوف والصيغة الرياضية للأنموذج كما يأتي :

$$y_i = \alpha + \beta x_i + e_i \quad \dots \dots (71 - 2)$$

اذ أن

y_i تمثل المتغير المعتمد (التابع) (Dependent variable)

x_i تمثل المتغير المستقل (independent variable)

α تمثل الحد الثابت للأنموذج

β تمثل الميل الحدي للأنموذج

e_i تمثل الخطأ العشوائي الذي يتبع التوزيع الطبيعي الملفوف بمتوسط دائري مقداره μ و معلمة تركيز مقدارها (ρ)

Estimating Model Parameters

• تقدير المعلمات الأنموذج

ولتقدير معلمات هذا الأنموذج نستعمل طريقة الإمكان الأعظم بالاعتماد على دالة توزيع الخطأ العشوائي الذي يتبع التوزيع الطبيعي الملفوف بمتوسط دائري مقداره $E(y) = \alpha + \beta x_i$ وبفرض لدينا n من المشاهدات فان دالة الكثافة الاحتمالية لكل مشاهدة حسب المعادلة (2-40) تكون بالشكل الآتي [23] :

$$f(y_i) = \frac{1}{2\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{t=1}^{\infty} \rho^{t^2} \{ \cos t(y_i - \alpha - \beta x_i) \} \right\}$$

وان الدالة الاحتمالية المشتركة (j.p.d.f) بفرض استقلالية كل مشاهدة عن المشاهدة الاخرى تكون بالشكل الآتية:

$$f(y_1, y_2, y_3 \dots y_n) = (2\pi)^{-n} \prod_{i=1}^n \left\{ 1 + 2 \sum_{t=1}^{\infty} \rho^{t^2} \{ \cos t(y_i - \alpha - \beta x_i) \} \right\}$$

وبأخذ اللوغاريتم الطبيعي

$$\ln f(y_1, y_2, y_3 \dots y_n) = -n \ln(2\pi) + \ln \left(\prod_{i=1}^n \left\{ 1 + 2 \sum_{t=1}^{\infty} \rho^{t^2} \{ \cos t(y_i - \alpha - \beta x_i) \} \right\} \right)$$

$$\ln f(y_1, y_2, y_3 \dots y_n) = -n \ln(2\pi) + \sum_{i=1}^n \ln \left\{ 1 + 2 \sum_{t=1}^{\infty} \rho^{t^2} \{ \cos t(y_i - \alpha - \beta x_i) \} \right\}$$

ولتكون الدالة بأقصى احتمالي لها نأخذ التفاضل الجزئي لكل معلمة من المعلمات المطلوب تقديرها وكما يأتي

$$\frac{\partial \ln f(y_1, y_2, y_3 \dots y_n)}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n \frac{2t \sum_{t=1}^{\infty} \rho^{t^2} \{ \sin t(y_i - \alpha - \beta x_i) \}}{1 + 2 \sum_{t=1}^{\infty} \rho^{t^2} \{ \cos t(y_i - \alpha - \beta x_i) \}}$$

$$\frac{\partial \ln f(y_1, y_2, y_3 \dots y_n)}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^n \frac{2t \sum_{t=1}^{\infty} \rho^{t^2} \{ \sin t(y_i - \alpha - \beta x_i) \} x_i}{1 + 2 \sum_{t=1}^{\infty} \rho^{t^2} \{ \cos t(y_i - \alpha - \beta x_i) \}}$$

$$\frac{\partial \ln f(y_1, y_2, y_3 \dots y_n)}{\partial \rho} = \sum_{i=1}^n \frac{2t \sum_{t=1}^{\infty} t^2 \rho^{t^2-1} \cos t(y_i - \alpha - \beta x_i)}{1 + 2 \sum_{t=1}^{\infty} \rho^{t^2} \{ \cos t(y_i - \alpha - \beta x_i) \}}$$

نساوي جميع المعادلات السابقة بالصفر

$$0 = \sum_{i=1}^n \frac{2t \sum_{t=1}^{\infty} \rho^{t^2} \{ \sin t(y_i - \alpha - \beta x_i) \}}{1 + 2 \sum_{t=1}^{\infty} \rho^{t^2} \{ \cos t(y_i - \alpha - \beta x_i) \}} \dots \dots \dots (72 - 2)$$

$$0 = \sum_{i=1}^n \frac{2t \sum_{t=1}^{\infty} \rho^{t^2} \{ \sin t(y_i - \alpha - \beta x_i) \} x_i}{1 + 2 \sum_{t=1}^{\infty} \rho^{t^2} \{ \cos t(y_i - \alpha - \beta x_i) \}} \dots \dots \dots (73 - 2)$$

$$0 = \sum_{i=1}^n \frac{2t \sum_{t=1}^{\infty} t^2 \rho^{t^2-1} \cos t(y_i - \alpha - \beta x_i)}{1 + 2 \sum_{t=1}^{\infty} \rho^{t^2} \{ \cos t(y_i - \alpha - \beta x_i) \}} \dots \dots \dots (74 - 2)$$

ويمكن إيجاد تقديرات للمعلمات (α, β, ρ) وذلك بحل المعادلات السابقة بواسطة التحليل العددي .
أما لحساب الخطأ في أنموذج الانحدار الزاوي بخطأ يتبع التوزيع الطبيعي الملفوف سنستعمل
الصيغة نفسها المستعملة في أنموذج الانحدار الزاوي بخطأ فون ميزيس وهي كما يأتي :

$$S_E = n - \sum_{i=1}^n \cos(y_i - \hat{y}_i) \quad \dots \quad (75 - 2)$$

أما متوسط الخطأ فهو كما يأتي:

$$MS_E = \frac{n - \sum_{i=1}^n \cos(y_i - \hat{y}_i)}{n - 2} \quad \dots \quad (76 - 2)$$

3-2-2 اختبار جودة التوفيق للنماذج المقدرة Goodness-of-Fit Test for Estimated Models

لاختبار جودة التوفيق للنماذج الثلاثة المقدرة بشكل عام وبيان مدى معنوية العلاقة بين المتغير
المستقل والمتغير المعتمد سنقترح اختبار يعتمد على توزيع F وحسب الفرضية الأتية:

فرضية العدم : العلاقة المقدرة غير معنوية

$$(77-2) \quad \dots$$

الفرضية البديلة : العلاقة المقدرة معنوية

ولحساب قيمة إحصاء الاختبار (F) سننعمد على قيمة S التي تساوي
 $(n - \sum_{i=1}^n \cos(y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}x_i))$ والتي يمكن أن تكتب بالشكل الأتية:

$$S = n - \sum_{i=1}^n \cos(y_i - \hat{y}_i) \quad \dots \quad (78 - 2)$$

ومن المعلوم أن أعلى قيمة يمكن أن يأخذها المقدار $\cos(y_i - \hat{y}_i)$ هي الواحد الصحيح وهي
عندما يكون الفرق بين القيمة الحقيقية والقيمة التقديرية يساوي صفرأ اي لو تطابقت جميع القيم
الحقيقية مع القيم التقديرية فان ناتج المقدار $\sum_{i=1}^n \cos(y_i - \hat{y}_i)$ مساوي إلى n وبهذا يكون
ناتج قيمة S يساوي صفرأ وهي الحالة المثالية لأنموذج أي أنموذج بدون خطأ . اما اقل قيمة
يمكن أن يأخذها المقدار $\cos(y_i - \hat{y}_i)$ فهي سالب واحد وهي عندما يكون الفرق بين القيمة

الحقيقية والتقديرية اما 180° او سالب 180° لان جيب تمام هذين المقدارين يساوي سالب واحد ومن ثم فعندما تكون جميع الفروق بين القيم الحقيقية والتقديرية مساوية 180° وهي اكبر مسافة بين القيمة الحقيقية والمتوقعة ممكنه في حالة البيانات الدائرية فيكون ناتج قيمة S يساوي $2n$ وهو اكبر مقدار ممكن للخطأ في الأنموذج . ولو أخذنا قيمة الفرق بين القيمة الحقيقية والمتوقعة مساوي إلى 90° او سالب 90° فأن قيمة $\cos(y_i - \hat{y}_i)$ تساوي صفرأ و من ثم فأن ناتج المقدار $\sum_{i=1}^n \cos(y_i - \hat{y}_i)$ تساوي صفر أيضا ومنه فأن قيمة S تساوي n . نلاحظ مما سبق أنه كلما كان الفرق بين القيمة الحقيقية والقيمة التقديرية كبيراً كان مقدار قيمة S كبير أيضا وكلما كان الفرق بين القيمة الحقيقية والتقديرية صغير كان مقدار قيمة S صغير أيضا لذلك ممكن أن نعتبر المقدار $S = n - \sum_{i=1}^n \cos(y_i - \hat{y}_i)$ وهو يمثل الانحرافات غير الموضحة للأنموذج الدائري المقدر وسنرمز له بالرمز (S_E) . أما الانحرافات الموضحة فيمكن أن نعبر عنها بالشكل الآتية:

$$S = n - \sum_{i=1}^n \cos(\hat{y}_i - \bar{y}) \dots \quad (79 - 2)$$

و كلما كانت القيم المقدره قريبه من الوسط الحسابي الدائري كانت قيمة S اصغر وكلما كانت القيم المقدره بعيده عن وسطها الدائري كل ما كبرت قيمة S وسنرمز للانحرافات الموضحة بالرمز (S_R) . وبما أن المقدار $(2K - S)$ يتبع توزيع مربع كاي حسب ما بين (Mardia) عندما (y) تتبع توزيع فون ميزيس وبما أن توزيع فون ميزيس يمثل التوزيع الطبيعي للبيانات الدائرية فيمكن أن تعد جميع التوزيعات تؤل اليه عندما يكبر حجم العينة لذا يمكن اعمام ذلك على النماذج الثلاثة و كل من الانحرافات الموضحة (S_R) والانحرافات غير الموضحة (S_E) ويكون كل من المقدارين $(2KS_R)$ والمقدار $(2KS_E)$ لهما توزيع مربع كاي بدرجة حرية تساوي واحد و $(n-2)$ على الترتيب. و لإيجاد صيغة الاختبار نقوم بقسمة المقدار $(2KS_R)$ على المقدار $(2KS_E)$ كلاً على درجة حريته وكما يأتي

$$\frac{2KS_R/1}{(2KS_E)/n-2} = \frac{(n-2)S_R}{S_E} = F_{(1,n-2)}$$

$$F_{(1,n-2)} = \frac{(n-2)S_R}{S_E} \quad \dots \quad (80-2)$$

ونقارنها مع قيمة F الجدولية بدرجة حرية $(1, n-2)$ و مستوى معنوية معين فإذا كانت قيمة F المحسوبة اكبر من قيمة F الجدولية نرفض فرضية العدم أي أن العلاقة المقدره معنوية أما إذا كانت قيمة F المحسوبة اصغر من قيمة F الجدولية فلا نرفض الفرضية الصفرية أي أن العلاقة المقدره غير معنوية .

4-2-2 المفاضلة بين النماذج

أن كل أنموذج من النماذج الثلاثة المقدرين قد افترض توزيع معين للخطأ احدهم افترض أن الخطأ يتوزع توزيع فون ميزيس والآخر افترض أن الخطأ يتبع توزيع كوشي الملفوف او يتوزع توزيعاً طبيعياً ملفوفاً و من المعلوم أن طريقة الإمكان الأعظم المستعملة في التقدير تعتمد بشكل اساس على توزيع الخطأ لذا وبسبب اختلاف توزيع الخطأ في النماذج الثلاثة اختلفت نتائج التقدير للمعلومات في كل أنموذج ولمعرفة أي النماذج افضل سنعتمد على بعض المعايير الاحصائية التي عن طريقها يمكن تحديد الانموذج المناسب ومن هذه المعايير ما يأتي :

1-4-2-2 معيار المعلومات لـ أكاي المصحح^[17] $Akaikes\ Debugger\ (AIC_C)$ Information criterion

تم اقتراح هذا المعيار من الباحث $(Sugiura)$ وهو يشبه الى حد كبير معيار المعلومات لـ اكاكي إذ أن الاختلاف بينهما يعتمد فقط على مقدار التحيز ففي معيار AIC_C يتم ترجيح التحيز ليصبح اقل ما يمكن وذلك بضربه بالمقدار $(\frac{n}{n-m-1})$ فيصبح المعيار كما يأتي :

$$AIC_C = 2 MS_E + 2m \left(\frac{n}{n-m-1} \right) \quad \dots \dots \dots \quad (81-2)$$

وكلما كانت قيمة هذا المعيار اقل دل ذلك على جودة الانموذج المقدر.

2-4-2-2 معيار المعلومات البيزي [34][3] Bayesian Information Criterion (BIC)

اقترح هذا المعيار من لدن (Schwarz) عام 1978 وذلك عن طريق ايجاد الحل البيزي (Bayes Solution) وتم توسعة الحل البيزي باستعمال نظرية بيز وحسب الصيغة الآتية:

$$BIC = 2 MS_E + m \log(n) \quad \dots \dots \dots \quad (82 - 2)$$

إذ أن

MS_E : متوسط الخطأ في الانموذج الذي يحتوي على (m-1) من المتغيرات المستقلة .

m : عدد المعلمات المقدرة في الانموذج مع الحد الثابت

إذ يتم اختيار الانموذج الذي تكون فيه قيمة هذا المعيار اصغر

الفصل الثالث

الجانب العملي

الفصل الثالث

المبحث الاول

الاسلوب التجريبي

1-1-3 التمهيد

تم في الفصل السابق مناقشة البيانات الدائرية وطرائق حساب الإحصاءات الوصفية لها و مفهوم الاحتمال الدائري مع بعض التوزيعات الدائرية و تمت طرح ثلاثة نماذج من الانحدار الزاوي البسيط وفي هذا المبحث سيتم تطبيق الاسلوب التجريبي لما تم مناقشته في الفصل السابق وتحديد الأنموذج الأكثر ملائمة حسب نوع البيانات عن طريق معايير اختيار افضل انموذج التي تم مناقشتها في الفصل الثاني .

2-1-3 وصف اسلوب المحاكاة [5][2]

يعد الاسلوب المحاكاة واحداً من الاساليب التي تستعمل للحصول على بيانات بهدف تحليلها من دون الحاجة لأجراء التجربة فعلاً ومراقبتها وتسجل بياناتها و لكل تجربة بيانات تختلف عن التجربة الاخرى , لذلك نحتاج لأجراء اكثر من تجربة للحصول على بيانات دقيقة وهذا يحتاج الى وقت وكلفة . يعد اسلوب المحاكاة بديلاً لأسلوب التجارب في العلوم الاخرى كعلم الاحصاء , إذ يتم توليد بيانات دون الحاجة لإجراء التجربة فعلاً , وتعرف المحاكاة بأنها اسلوب يتضمن استعمال انموذج رياضي نظري ومشابهته بالأنموذج الحقيقي الذي يمثل المشكلة المدروسة او هي اسلوب يتم عن طريقه ايجاد انموذج بديل مماثل للأنموذج الحقيقي من دون محاولة الحصول على الانموذج الحقيقي نفسه. لذلك سيتم استعمال اسلوب المحاكاة في الجزء الاول من الجانب العملي لتوليد بيانات يتم عن طريقها تقدير النماذج التي تم مناقشتها في الفصل السابق .

1-2-1-3 توليد البيانات

تم توليد بيانات عشوائية باستعمال لغة برمجة (R) على شكل متغيرات عشوائية دائرية بما يتناسب مع طبيعة الدراسة اذ تم توليد اربع متغيرات ثلاث منها متغيرات تابعة كل واحد من هذه المتغيرات الثلاثة يختلف توزيعه عن توزيع المتغير الأخر والتوزيعات الثلاثة هي توزيعات الخطأ العشوائي لنماذج الانحدار الزاوي التي تم مناقشتها في الفصل الثاني وهي (توزيع فين موزيس و توزيع كوشي الملفوف و التوزيع الطبيعي الملفوف) وتم التوليد باستعمال طريقة التحويل المعكوس لدالة التوزيع التراكمي (c.d.f) المشار اليهم في المعادلات (2-41) (2-44) (2-46) والمتغير المتبقي تم تعريفه على انه متغير مستقل يتبع التوزيع المتنظم الدائري وتم توليده

باستعمال طريقة التحويل المعكوس لدالة التوزيع التراكمي أيضا باستعمال المعادلة (2-36), والمتغيرات التي تم توليدها كما موضحة ادناه كلا حسب توزيعه والمعلمات الافتراضية التي يأخذها التوزيع .

$$y_1 \sim \text{von mises} (30, 0.2)$$

$$y_2 \sim \text{wrapped cauchy} (45, 0.5)$$

$$y_3 \sim \text{wrapped normal} (60, 0.6)$$

$$x \sim \text{Circular Uniform} (0, 360)$$

وقد تم استعمال ثلاثة احجام من العينات هي (500 و 100 و 40) مشاهدة

Result

2-1-3-2 النتائج

تم استعمال المتغيرات المذكورة انفا لتطبيق انموذج الانحدار الزاوي الآتي

$$y = \alpha + \beta x + \epsilon \quad (\text{mod } 2\pi) \quad (1 - 3)$$

وبثلاث حالات الاولى عندما يكون توزيع الخطأ العشوائي هو فين موزيس إذ تم تقدير y_1 كمتغير معتمد مع x كمتغير مستقل مره و y_2 كمتغير معتمد مع x كمتغير مستقل مره ثانية و y_3 كمتغير معتمد مع x كمتغير مستقل مره ثالثة والحالة الثانية عندما يتبع الخطأ العشوائي توزيع كوشي الملفوف وايضا بثلاث مرات والحالة الثالثة عندما يتبع الخطأ التوزيع الطبيعي الملفوف وبثلاث مرات أيضا , ولكل انموذج تم استعمال ثلاثة احجام للعينات ($n=40$, $n=100$, $n=500$) مشاهدة , كررت كل عينه 1000 مرة واخذت النتائج لمتوسطات القيم الناتج من التكرار التجربة لـ 1000 مرة , وتم تقدير معلمات كل أنموذج باستعمال طريقة الإمكان الأعظم بالاعتماد على لغة البرمجة (R) . وقد تم استعمال معيارين لتحديد الانموذج الافضل وهما , ومعيار المعلومات لـ اكاكي المصحح (AIC_C) , ومعيار المعلومات البيزي (BIC) , والتي تم شرحها في الفصل الثاني . وكانت النتائج كما مبينة ادناه وحسب حجم العينة .

أولاً : حجم العينة n=40

تم توليد بيانات من المتغيرات السابقة بعدد مشاهدات يساوي (40) مشاهدة وتم تقدير المعلمات من دالة الإمكان الأعظم باستعمال لغة برمجة R بعد اعطاء قيم أولية للمعلمات وتكرار التجربة 1000 تم الحصول على المعادلات المقدرة الآتية التي سيتم تصنيفها حسب المتغير المعتمد والمستقل :

أ- المعادلات المقدرة للمتغير المستقل x والمتغير المعتمد y₁

تم تقدير ثلاث معادلات من المتغير المستقل x والمتغير المعتمد y₁ كل معادلة تخص أنموذج من النماذج الثلاثة المذكورة سابقاً وكما يأتي:

$$y_{1i} = 1.058 + 0.9258 x_i + \epsilon_i \quad \dots \dots \dots \quad (2 - 3)$$

تمثل المعادلة (2-3) تقدير للمعلمات (α, β) بفرض أن الخطأ العشوائي يتبع توزيع فين موزيس أما معلمة التركيز k والتي تم حسابها وفق المعادلة (2-56) فكانت قيمتها (0.45) .

$$y_{1i} = 0.649 + 0.8952 x_i + \epsilon_i \quad \dots \dots \dots \quad (3 - 3)$$

تمثل المعادلة (3-3) تقدير للمعلمات (α, β) بفرض أن الخطأ العشوائي يتبع توزيع كوشي الملفوف . وكانت قيمة ρ التي تم حسابها من المعادلة (2-68) تساوي (0.87) .

$$y_{1i} = 0.7662 + 0.9458 x_i + \epsilon_i \quad \dots \dots \dots \quad (4 - 3)$$

تمثل المعادلة (4-3) تقدير للمعلمات (α, β) بفرض أن الخطأ العشوائي يتبع التوزيع الطبيعي الملفوف وكانت قيمة ρ تساوي (0.024) التي تم حسابها من المعادلات الطبيعية لأنموذج الانحدار الزاوي البسيط بخطأ يتبع التوزيع الطبيعي الملفوف والمركمة (2-72) و (2-73) و (2-74) .

ولاختبار العلاقة المقدرة لكل أنموذج انحدار زاوي من النماذج الثلاثة نختبر الفرضية (2-77) إذ تم حساب قيمة S_E وفق المعادلة (2-78) وقيمة S_R وفق المعادلة (2-79) أما قيمة F* فتم حسابها وفق الصيغة (2-80) كما موضحة في الجدول الآتي:

الجدول (1-3)

اختبار جودة التوفيق للنماذج المقدره بين المتغير المستقل x والمتغير المعتمد y_1 حسب نوع الخطأ عند حجم عينة 40

الانموذج	S_E	S_R	F^*	F_t
بخطأ توزيع فون ميزيس	31.23	4.74	5.77	4.09
بخطأ توزيع كوشي الملفوف	32.22	3.4	4.01	
بخطأ التوزيع الطبيعي الملفوف	32.26	3.3	3.89	

نلاحظ من الجدول المذكور انفا أن قيمة F المحسوبة بالنسبة للأنموذج الانحدار البسيط بخطأ يتبع توزيع فون ميزيس اكبر من قيمة F الجدولية بدرجة حرية للسط مقدارها 1 وللمقام مقدارها (38) ومن ثم سنرفض فرضية العدم أي انه العلاقة المقدره بين المتغيرين معنوية أما بالنسبة للأنموذج الانحدار البسيط بخطأ يتبع توزيع كوشي الملفوف فان قيمة F المحسوبة اقل من قيمة F الجدولية ومن ثم فان القرار هو عدم رفض فرضية العدم أي أن الأنموذج المقدر غير معنوي أما أنموذج الانحدار البسيط بخطأ يتبع التوزيع الطبيعي الملفوف فأن قيمة F المحسوبة كانت اقل من قيمة F الجدولية ومن ثم لا نرفض فرضية العدم أي أن العلاقة المقدره غير معنوية .

ب- المعادلات المقدره للمتغير المستقل x والمتغير المعتمد y_2

سنقدر ثلاث معادلات كل معادلة تمثل احد النماذج الثلاثة وكما يأتي :

$$y_{2i} = 0.915 + 0.971 x_i + \epsilon_i \quad \dots \dots \dots \quad (5 - 3)$$

تمثل المعادلة (5-3) تقدير للمعلمات (α, β) بفرض أن الخطأ العشوائي يتبع توزيع فين موزيس وقيمة معلمة التركيز k تساوي (0.35).

$$y_{2i} = 0.7425 + 0.943 x_i + \epsilon_i \quad \dots \dots \dots \quad (6 - 3)$$

تمثل المعادلة (6-3) تقدير للمعلمات (α, β) بفرض أن الخطأ العشوائي يتبع توزيع كوشي الملفوف . وكانت قيمة ρ تساوي (0.82)

$$y_{2i} = 0.85 + 1.0122x_i + \epsilon_i \quad \dots \dots \dots \quad (7 - 3)$$

تمثل المعادلة (7-3) تقدير للمعلمات (α, β) بفرض أن الخطأ العشوائي يتبع التوزيع الطبيعي الملفوف . وكانت قيمة ρ تساوي (0.21)

ولاختبار العلاقات الثلاثة المقدرة اختبرنا الفرضية (2-77) وكانت نتائج الاختبار كما موضحة في الجدول الآتي:

الجدول (2-3)

اختبار جودة التوفيق للنماذج المقدرة بين المتغير المستقل x والمتغير المعتمد y_2 حسب نوع الخطأ عند حجم عينة 40

الانموذج	S_E	S_R	F^*	F_t
بخطأ توزيع فون ميزيس	33.1	3.23	3.71	4.09
بخطأ توزيع كوشي الملفوف	32.49	3.34	3.91	
بخطأ التوزيع الطبيعي الملفوف	33.21	3.25	3.72	

نلاحظ من الجدول المذكور انفا أن قيمة F المحسوبة اصغر من قيمة F الجدولية بدرجة حرية للسط مقدارها 1 وللمقام مقدارها (38) لجميع النماذج المقدرة وبالتالي يكون القرار هو عدم رفض فرضية عدم أي انه جميع النماذج المقدرة بين المتغيرين غير معنوية .

ت- المعادلات المقدرة للمتغير المستقل x والمتغير المعتمد y_3

$$y_{3i} = 0.883 + 0.72 x_i + \epsilon_i \quad \dots \dots \dots \quad (8 - 3)$$

$$y_{3i} = 0.6644 + 0.763 x_i + \epsilon_i \quad \dots \dots \dots \quad (9 - 3)$$

$$y_{3i} = 0.7215 + 0.806x_i + \epsilon_i \quad \dots \dots \dots \quad (10 - 3)$$

تمثل المعادلة (8-3) تقدير للمعلمات (α, β) بفرض أن الخطأ العشوائي يتبع توزيع فين موزيس وكان تقدير معلمة التركيز k يساوي (0.4).

تمثل المعادلة (9-3) تقدير للمعلمات (α, β) بفرض أن الخطأ العشوائي يتبع توزيع كوشي الملفوف وقيمة ρ كانت تساوي (0.58) .

تمثل المعادلة (10-3) تقدير للمعلمات (α, β) بفرض أن الخطأ العشوائي يتبع التوزيع الطبيعي الملفوف وقيمة ρ تساوي (0.27)

ولاختبار العلاقات المقدرة السابقة من أنموذج الانحدار البسيط اختبرنا الفرضية (2-76) وكانت نتائج الاختبار كما موضحة في الجدول الآتي:

الجدول (3-3)

اختبار جودة التوفيق للنماذج المقدرية بين المتغير المستقل x والمتغير المعتمد y_3 حسب نوع الخطأ عند حجم عينة 40

الانموذج	S_E	S_R	F^*	F_t
بخطأ توزيع فون ميزيس	32.3	4.1	4.82	4.09
بخطأ توزيع كوشي الملفوف	32.51	3.41	3.99	
بخطأ التوزيع الطبيعي الملفوف	31.88	4.3	5.13	

نلاحظ من الجدول المذكور انفا أن قيمة F المحسوبة بالنسبة للأنموذجين بخطأ توزيع فون ميزيس و بخطأ التوزيع الطبيعي الملفوف اكبر من قيمة F الجدولية بدرجة حرية للبسط مقدارها 1 وللمقام مقدارها (38) وبالتالي يكون القرار هو رفض فرضية العدم أي ان العلاقة المقدرية بين المتغيرين معنوية . أما أنموذج الانحدار الزاوي بخطأ يتبع توزيع كوشي الملفوف فان قيمة F المحسوبة اقل من قيمة F الجدولية ومن ثم لا نرفض فرضية العدم أي أن العلاقة المقدرية لهذا الأنموذج غير معنوية .

وللمقارنة بين كل ثلاثة نماذج من النماذج التي تم تقديرها في الفقرة (أ - ب - ت) سنستعمل المعيارين الذين تم ذكرها في الفصل الثاني وهما و معيار المعلومات لـ أكاي المصحح (AIC_C) الذي تم حسابة وفق المعادلة (2-81) معيار المعلومات البيزي (BIC) الذي تم حسابة وفق الصيغة (2-82) وان قيمة كل معيار حسب الأنموذج المقدر كما موضحة بالجدول ادناه

جدول (4-3)

معايير المقارنة بين النماذج للعينة بحجم 40

الأنموذج		MS _E	المعيار	
			AIC _C	BIC
المتغير المستقل X والمتغير المعتمد y ₁	بخطاً توزيع فون ميزيس	0.822	5.968	4.848
	بخطاً توزيع كوشي الملفوف	0.848	6.021	4.901
	بخطاً التوزيع الطبيعي الملفوف	0.849	6.023	4.903
المتغير المستقل X والمتغير المعتمد y ₂	بخطاً توزيع فون ميزيس	0.871	6.066	4.946
	بخطاً توزيع كوشي الملفوف	0.855	6.035	4.915
	بخطاً التوزيع الطبيعي الملفوف	0.874	6.072	4.951
المتغير المستقل X والمتغير المعتمد y ₃	بخطاً توزيع فون ميزيس	0.850	6.024	4.904
	بخطاً توزيع كوشي الملفوف	0.856	6.036	4.916
	بخطاً التوزيع الطبيعي الملفوف	0.839	6.003	4.883

نلاحظ من النتائج في الجدول (4-3) أن هناك افضلية للأنموذج الانحدار البسيط بخطاً فون ميزيس بالنسبة للمتغير المعتمد y₁ والمستقل X أما بالنسبة للمتغير المستقل X والمتغير المعتمد y₂ فان الافضلية كانت للأنموذج الانحدار البسيط بخطاً توزيع كوشي الملفوف أما المتغير المستقل X والمتغير المعتمد y₃ فكانت اقل قيم للمعيارين هي التي ترافق أنموذج الانحدار البسيط بخطاً التوزيع الطبيعي الملفوف . فكلما تطابق توزيع المتغير المعتمد مع توزيع الخطأ اعطى تقديراً افضل وخطأ اقل .

ثانياً : حجم العينة n=100

تم توليد بيانات من المتغيرات (X , y₁ , y₂ , y₃) بعدد مشاهدات يساوي (100) مشاهدة باستعمال لغة برمجة R وتم تقدير المعلمات بعد اعطائها قيماً اولية وتكرار التجربة 1000 تم الحصول على المعادلات المقدره الأتية التي سيتم تصنيفها حسب المتغير المعتمد والمستقل :

أ- المعادلات المقدره للمتغير المستقل X والمتغير المعتمد y₁

كما في حجم العينة 40 تم تقدير ثلاث معادلات من المتغير المستقل X والمتغير المعتمد y₁ كل معادلة تخص أنموذج من النماذج الثلاثة سابقة الذكر وكما يأتي:

$$y_{1i} = 0.9001 + 0.9003 x_i + \epsilon_i \quad \dots \dots \dots \quad (11 - 3)$$

تمثل المعادلة (11-3) تقدير للمعاملات (α, β) بفرض أن الخطأ العشوائي يتبع توزيع فين موزيس أما معلمة التركيز k فكانت قيمتها (0.264) .

أما الأنموذج بخطأ عشوائي يتبع توزيع كوشي الملفوف فكانت نتائج تقدير معلماته كما في المعادلة ادناه :

$$y_{1i} = 0.6116 + 0.8447 x_i + \epsilon_i \quad \dots \dots \dots \quad (12 - 3)$$

وكانت قيمة ρ تساوي (0.65) .

أما الأنموذج بخطأ عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي الملفوف فكانت نتائج تقدير معلماته كما في المعادلة ادناه :

$$y_{1i} = 0.7662 + 0.9458 x_i + \epsilon_i \quad \dots \dots \dots \quad (13 - 3)$$

أما قيمة ρ فهي تساوي (0.1198) .

و لاختبار العلاقات الثلاثة المقدره السابقة بشكل عام تم اختبار الفرضية (2-77) وكانت نتائج الاختبار كما موضحة في الجدول الآتي:

الجدول (3-5)

اختبار جودة التوفيق للنماذج المقدره بين المتغير المستقل x والمتغير المعتمد y_1 حسب نوع الخطأ عند حجم عينة 100

الانموذج	S_E	S_R	F^*	F_t
بخطأ توزيع فون ميزيس	86.9	98.37	112.06	3.94
بخطأ توزيع كوشي الملفوف	88.1	95.45	106.2	
بخطأ التوزيع الطبيعي الملفوف	88.3	96.32	106.9	

نلاحظ من الجدول المذكور انفا أن قيمة F المحسوبة اكبر من قيمة F الجدولية ولجميع النماذج المقدره بدرجة حرية للبيسط مقدارها 1 وللمقام مقدارها (98) ومن ثم سنرفض فرضية العدم أي انه جميع العلاقات المقدره بين المتغيرين x و y_1 معنوية .

ب- المعادلات المقدره للمتغير المستقل x والمتغير المعتمد y_2

كما في الفقرة (أ) سنقدر ثلاث معادلات كل معادلة تمثل احد النماذج الثلاثة وكما يأتي :

$$y_{2i} = 0.6642 + 0.881 x_i + \epsilon_i \quad \dots \dots \dots \quad (14 - 3)$$

تمثل المعادلة (14-3) تقدير للمعاملات (α, β) بفرض أن الخطأ العشوائي يتبع توزيع فين موزيس وقيمة معلمة التركيز k تساوي (0.224).

أما المعادلة المقدرة من أنموذج الانحدار البسيط بخطأ يتبع توزيع كوشي الملفوف فكانت نتائج تقديرها كما يأتي :

$$y_{2i} = 0.9149 + 0.9178 x_i + \epsilon_i \quad \dots \dots \dots \quad (15 - 3)$$

وكانت قيمة ρ تساوي (0.56)

وكانت نتيجة المعادلة المقدرة من أنموذج الانحدار البسيط بخطأ يتبع التوزيع الطبيعي الملفوف كما يأتي :

$$y_{2i} = 1.1321 + 0.9021 x_i + \epsilon_i \quad \dots \dots \dots \quad (16 - 3)$$

و قيمة ρ المقدرة لها تساوي (0.12)

ولاختبار العلاقات الثلاثة المقدرة لأنموذج الانحدار الزاوي اختبرنا الفرضية (2-77) وكانت نتائج الاختبار كما موضحة في الجدول الآتية:

الجدول (3-6)

اختبار جودة التوفيق للنماذج المقدرة بين المتغير المستقل x والمتغير المعتمد y_2 حسب نوع الخطأ عند حجم عينة 100

الانموذج	S_E	S_R	F^*	F_t
بخطأ توزيع فون ميزيس	88.86	90.72	100.05	3.94
بخطأ توزيع كوشي الملفوف	87.32	92.59	103.9	
بخطأ التوزيع الطبيعي الملفوف	88.49	91.42	101.23	

نلاحظ من الجدول المذكور انفا أن قيمة F المحسوبة لجميع النماذج المقدرة اكبر من قيمة F الجدولية بدرجة حرية للبيس مقدارها 1 وللمقام مقدارها (98) ومن ثم يكون القرار هو رفض فرضية العدم أي انه العلاقة المقدرة بين المتغيرين معنوية .

ت- المعادلات المقدرة للمتغير المستقل x والمتغير المعتمد y_3

كما في الفقرتين السابقتين (أ - ب) فسيتم تقدير ثلاث معادلات وهي كما يأتي:

$$y_{3i} = 0.787 + 0.7321 x_i + \epsilon_i \quad \dots \dots \dots \quad (17 - 3)$$

تمثل المعادلة (17-3) تقدير للمعلمات (α, β) بفرض أن الخطأ العشوائي يتبع توزيع فين موزيس وكان تقدير معلمة التركيز k يساوي (0.18).

أما القيم المقدرة للمعلمات (α, β) في أنموذج الانحدار الزاوي البسيط بخطأ يتبع توزيع كوشي الملفوف فكانت كما في المعادلة ادناه :

$$y_{3i} = 0.8184 + 0.7225 x_i + \epsilon_i \quad \dots \dots \dots \quad (18 - 3)$$

وقيمة ρ كانت تساوي (0.5) .

أما القيم المقدرة للمعلمات (α, β) في أنموذج الانحدار الزاوي البسيط بخطأ يتبع التوزيع الطبيعي الملفوف فكانت يأتي:

$$y_{3i} = 1.0861 + 0.7956 x_i + \epsilon_i \quad \dots \dots \dots \quad (19 - 3)$$

وقيمة ρ المقدرة تساوي (0.089)

ولاختبار العلاقات المقدرة من أنموذج الانحدار الزاوي اختبرنا الفرضية (2-77) وكانت نتائج الاختبار كما موضحة في الجدول الآتي:

الجدول (7-3)

اختبار جودة التوفيق للنماذج المقدرة بين المتغير المستقل x و المتغير المعتمد y_3 حسب نوع الخطأ عند حجم عينة 100

الانموذج	S_E	S_R	F^*	F_t
بخطأ توزيع فون ميزيس	91.04	82.87	89.2	3.94
بخطأ توزيع كوشي الملفوف	89.77	83.03	90.6	
بخطأ التوزيع الطبيعي الملفوف	86.04	85.2	97.04	

نلاحظ من الجدول المذكور انفا أن قيمة F المحسوبة لنماذج الانحدار الزاوي البسيط جميعها كانت اكبر من قيمة F الجدولية بدرجة حرية للبسطة مقدارها 1 وللمقام مقدارها (98) ومن ثم يكون القرار هو رفض فرضية العدم أي ان العلاقة المقدرة لجميع النماذج هي علاقة معنوية .

وللمقارنة بين النماذج التسعة التي تم تقديرها وهي ثلاثة نماذج بخطأ يتبع توزيع فون ميزيس وثلاثة بخطأ يتبع توزيع كوشي الملفوف و ثلاثة بخطأ التوزيع الطبيعي الملفوف . بحيث كل واحد من هذه النماذج الثلاثة لمتغيره المعتمد توزيع احتمال دائري مره توزيع فون ميزيس ومره توزيع كوشي الملفوف ومره اخرى التوزيع الطبيعي الملفوف سنستعمل المعايير الثلاثة التي تم ذكرها في الفصل الثاني وان قيمة كل معيار حسب الأنموذج المقدر كما موضحة بالجدول ادناه

جدول (8-3)

معايير المقارنة بين النماذج للعينة بحجم 100

الأنموذج		MS _E	المعيار	
			AIC _C	BIC
المتغير المستقل x والمتغير المعتمد y ₁	بخطأ توزيع فون ميزيس	0.887	5.897	5.773
	بخطأ توزيع كوشي الملفوف	0.899	5.921	5.797
	بخطأ التوزيع الطبيعي الملفوف	0.901	5.926	5.802
المتغير المستقل x والمتغير المعتمد y ₂	بخطأ توزيع فون ميزيس	0.907	5.937	5.813
	بخطأ توزيع كوشي الملفوف	0.891	5.906	5.783
	بخطأ التوزيع الطبيعي الملفوف	0.903	5.929	5.806
المتغير المستقل x والمتغير المعتمد y ₃	بخطأ توزيع فون ميزيس	0.929	5.982	5.858
	بخطأ توزيع كوشي الملفوف	0.916	5.956	5.832
	بخطأ التوزيع الطبيعي الملفوف	0.878	5.880	5.756

نلاحظ من النتائج في الجدول (8-3) أن هناك افضلية لكل أنموذج من النماذج الثلاثة عندما يكون توزيع المتغير المعتمد الذي تم توليده يتطابق مع توزيع الخطأ المفترض في الأنموذج الانحدار الزاوي الذي يتم تقدير المعلمات منه .

ثالثاً : حجم العينة n=500

تم توليد بيانات من المتغيرات (y_1 , y_2 , y_3 , x) بعدد مشاهدات يساوي (500) مشاهدة وتم تقدير معلمات بالطريقة التي تم ذكرها في الفصل الثاني وهي طريقة الإمكان الأعظم باستعمال لغة برمجة R بعد اعطاء قيم أولية للمعلمات وتكرار التجربة 1000 تم الحصول على المعادلات المقدره الأتية التي سيتم تصنيفها حسب المتغير المعتمد والمستقل :

أ- المعادلات المقدره للمتغير المستقل x والمتغير المعتمد y_1

$$y_{1i} = 0.9189 + 0.9142 x_i + \epsilon_i \quad \dots \dots \dots (20 - 3)$$

$$y_{1i} = 0.6735 + 0.9199 x_i + \epsilon_i \quad \dots \dots \dots (21 - 3)$$

$$y_{1i} = 0.8703 + 0.8663 x_i + \epsilon_i \quad \dots \dots \dots (22 - 3)$$

تمثل المعادلة (20-3)المعادلة المقدره لأنموذج الانحدار الزاوي البسيط بخطأ العشوائي يتبع توزيع فين موزيس وكان تقدير معلمة التركيز k يساوي (0.056).

تمثل المعادلة (21-3) المعادلة المقدره لأنموذج الانحدار الزاوي بخطأ العشوائي يتبع توزيع كوشي الملفوف وقيمة ρ كانت تساوي (0.33) .

تمثل المعادلة (22-3) المعادلة المقدره لأنموذج الانحدار الزاوي البسيط بخطأ العشوائي يتبع التوزيع الطبيعي الملفوف وقيمة ρ تساوي (0.1131)

أما لاختبار الأنموذج بشكل عام فسنختبر الفرضية (2-77) لمعرفة هل الأنموذج المقدر من البيانات بخطأ يتبع توزيع فون ميزيس هو ملائم او غير ملائم وكانت نتائج الاختبار كما في الجدول ادناه

الجدول (9-3)

اختبار جودة التوفيق للنماذج المقدره بين المتغير المستقل x والمتغير المعتمد y_1 حسب نوع الخطأ عند حجم عينة 500

الانموذج	S_E	S_R	F^*	F_t
خطأ توزيع فون ميزيس	485.896	112.785	115.6	3.86
خطأ توزيع كوشي الملفوف	487.542	110.67	113.04	
خطأ التوزيع الطبيعي الملفوف	489.036	109.37	111.37	

نلاحظ من الجدول (3-9) أن قيمة F المحسوبة لنماذج الانحدار الزاوي البسيط بخطأ فون ميزيس و خطأ كوشي الملفوف و الطبيعي الملفوف اكبر من قيمة F الجدولية بدرجة حرية للبسط مقدارها واحد وللمقام مقدارها (498) فيكون القرار برفض فرضية العدم أي أن جميع النماذج المقدر هو نماذج معنوية و ملائم للبيانات .

ب- المعادلات المقدرة للمتغير المستقل x والمتغير المعتمد y₂

$$y_{2i} = 0.712 + 1.016 x_i + \epsilon_i \quad \dots \dots \dots \quad (23 - 3)$$

تمثل المعادلة (23-3) تقدير للمعلمات (α, β) بفرض أن الخطأ العشوائي يتبع توزيع فين موزيس وقيمة معلمة التركيز k تساوي (0.083).

$$y_{2i} = 0.9116 + 0.9286x_i + \epsilon_i \quad \dots \dots \dots \quad (24 - 3)$$

تمثل المعادلة (24-3) تقدير للمعلمات (α, β) بفرض أن الخطأ العشوائي يتبع توزيع كوشي الملفوف . وكانت قيمة ρ تساوي (0.54)

$$y_{2i} = 0.815 + 0.8433 x_i + \epsilon_i \quad \dots \dots \dots \quad (25 - 3)$$

تمثل المعادلة (25-3) تقدير للمعلمات (α, β) بفرض أن الخطأ العشوائي يتبع التوزيع الطبيعي الملفوف . وكانت قيمة ρ تساوي (0.04)

أما لاختبار النماذج الثلاثة بشكل عام فسنختبر الفرضية الذي ينص فرض العدم فيها على أن الأنموذج المقدر هو أنموذج غير معنوي وكانت نتيجة الاختبار كما في الجدول الآتي:

الجدول (10-3)

اختبار جودة التوفيق للنماذج المقدرة بين المتغير المستقل x والمتغير المعتمد y₂ حسب نوع الخطأ عند حجم عينة 500

الانموذج	S _E	S _R	F*	F _t
بخطأ توزيع فون ميزيس	476.586	120.645	126.1	3.86
بخطأ توزيع كوشي الملفوف	471.108	124.371	131.5	
بخطأ التوزيع الطبيعي الملفوف	482.064	118.871	122.8	

من الجدول المذكور انفا نجد أن قيمة F المحسوبة اكبر من قيمة F الجدولية بدرجة حرية للبسط مقدارها واحد وللمقام مقدارها (498) ولجميع النماذج المقدرة ومن ثم فان القرار هو رفض فرضية العدم أي أن العلاقة المقدرة هي علاقة معنوية.

ت- المعادلات المقدرة للمتغير المستقل x والمتغير المعتمد y_3

$$y_{3i} = 0.815 + 0.843 x_i + \epsilon_i \quad \dots \dots \dots (26 - 3)$$

$$y_{3i} = 0.699 + 0.933 x_i + \epsilon_i \quad \dots \dots \dots (27 - 3)$$

$$y_{3i} = 0.822 + 0.773x_i + \epsilon_i \quad \dots \dots \dots (28 - 3)$$

تمثل المعادلة (26-3) تقدير للمعاملات (α, β) بفرض أن الخطأ العشوائي يتبع توزيع فين موزيس وكان تقدير معلمة التركيز k يساوي (0.076).

تمثل المعادلة (27-3) تقدير للمعاملات (α, β) بفرض أن الخطأ العشوائي يتبع توزيع كوشي الملفوف وقيمة ρ كانت تساوي (0.46) .

تمثل المعادلة (28-3) تقدير للمعاملات (α, β) بفرض أن الخطأ العشوائي يتبع التوزيع الطبيعي الملفوف وقيمة ρ تساوي (0.04)

ولاختبار النماذج المقدرة في المعادلات الثلاثة السابقة نختبر الفرضية (2-77) ونتائج الاختبار مبينة بالجدول ادناه :

الجدول (3-11)

اختبار جودة التوفيق للنماذج المقدرة بين المتغير المستقل x والمتغير المعتمد y_3 حسب نوع الخطأ عند حجم عينة 500

الانموذج	S_E	S_R	F^*	F_t
بخطأ توزيع فون ميزيس	480.9	115.82	119.9	3.86
بخطأ توزيع كوشي الملفوف	479.076	117.29	121.9	
بخطأ التوزيع الطبيعي الملفوف	472.104	123.37	130.1	

نلاحظ من الجدول المذكور انفا أن قيمة F المحسوبة لجميع النماذج الثلاثة المقدرة من المتغير y_3 والمتغير المستقل x اكبر من قيمة F الجدولية بدرجة حرية للبسط مقدارها واحد وللمقام مقدارها (498) ومن ثم يكون القرار هو رفض فرضية العدم أي أن العلاقة المقدرة هي علاقة معنوية وان الأنموذج مثل البيانات بصورة جيدة .

وللمقارنة بين النماذج التي تم تقديرها وهي ثلاثة نماذج التي تم ذكرها في الفصل الثاني وكل أنموذج تم تقديره ثلاث مرات حسب المتغير المعتمد والمستقل سنستعمل المعايير الثلاثة التي تم ذكرها في الفصل الثاني وهي معيار المعلومات لـ أكاكي (AIC) و معيار المعلومات لـ أكاكي

المصحح (AIC_C) و معيار المعلومات البيزي (BIC) وان قيمة كل معيار حسب الأنموذج المقدر كما موضحة بالجدول ادناه

جدول (3-12)

معايير المقارنة بين النماذج للعينة بحجم 500

الأنموذج		MS_E	المعيار	
			AIC_C	BIC
المتغير المستقل x والمتغير المعتمد y_1	بخطاً توزيع فون ميزيس	0.976	5.976	7.349
	بخطاً توزيع كوشي الملفوف	0.979	5.982	7.356
	بخطاً التوزيع الطبيعي الملفوف	0.982	5.988	7.362
المتغير المستقل x والمتغير المعتمد y_2	بخطاً توزيع فون ميزيس	0.957	5.938	7.312
	بخطاً توزيع كوشي الملفوف	0.946	5.916	7.290
	بخطاً التوزيع الطبيعي الملفوف	0.968	5.959	7.333
المتغير المستقل x والمتغير المعتمد y_3	بخطاً توزيع فون ميزيس	0.966	5.955	7.329
	بخطاً توزيع كوشي الملفوف	0.962	5.949	7.323
	بخطاً التوزيع الطبيعي الملفوف	0.948	5.920	7.294

نلاحظ من النتائج في الجدول (3-12) أن هناك افضلية للأنموذج الانحدار البسيط بخطاً فون ميزيس بالنسبة للمتغير المعتمد y_1 والمستقل x أما بالنسبة للمتغير المستقل x والمتغير المعتمد y_2 فان الافضلية كانت لأنموذج الانحدار البسيط بخطاً كوشي الملفوف أما المتغير المستقل x والمتغير المعتمد y_3 فكانت اقل قيم للمعايير الثلاثة هي التي ترافق أنموذج الانحدار البسيط بخطاً التوزيع الطبيعي الملفوف .

نلاحظ من النتائج السابقة لجميع حجوم العينات التي تم ذكرها وهي (40 و 100 و 500) أن دائماً تكون الافضلية للأنموذج الذي يكون توزيع الخطأ له يتطابق مع توزيع المتغير المعتمد الذي تم توليده . فكانت الافضلية لأنموذج الانحدار الزاوي البسيط بخطاً يتبع توزيع فون ميزيس عند المتغير المعتمد y_1 الذي هو يتوزع توزيع فون ميزيس وكانت الافضلية للأنموذج الانحدار الزاوي بخطاً يتبع توزيع كوشي الملفوف عندما كان المتغير المعتمد هو y_2 الذي هو يتبع توزيع كوشي الملفوف وكانت الافضلية للأنموذج الانحدار الزاوي البسيط بخطاً يتبع التوزيع الطبيعي الملفوف عندما كان المتغير المعتمد هو y_3 الذي يتبع التوزيع الطبيعي الملفوف .

المبحث الثاني

الاسلوب التطبيقي

Preface

3-2-1 تمهيد

تم توليد البيانات عشوائياً في الاسلوب التجريبي باستعمال اسلوب المحاكاة وطُبقت طريقة الإمكان الأعظم لتقدير معالم النماذج الثلاثة المقدره وبعد التأكد من أن لكل انموذج افضلية بحسب نوع البيانات التي يتبعها المتغير المعتمد , ونظراً لأهمية اتجاه الرياح عند التخطيط لأنشاء مصدات الرياح لتفادي خطر الرياح القوية او التقليل من الاتربة او الاوساخ التي تحملها فضلاً عن أن معرفة اتجاه الرياح يساعد في توجيه تدفق الهواء داخل المنازل او المباني واختيار اماكن النوافذ التي يتم فتحها ولان بيانات اتجاه الرياح هي بيانات دائرية تتطابق مع طبيعة البيانات اللازمة للدراسة لذا تم اختيار التطبيق في هذا الجانب , إذ سيتم التطبيق النماذج الثلاثة وهي أنموذج الانحدار الزاوي البسيط بخطأ يتبع توزيع فين موزيس وانموذج الانحدار البسيط بخطأ يتبع توزيع كوشي الملفوف و أنموذج الانحدار البسيط بخطأ يتبع التوزيع الطبيعي الملفوف على اتجاه الرياح في مدينة الناصرية (مركز محافظة ذي قار) واتجاه الضغط الجوي الاعلى وتم اخذ البيانات من دائرة الاحوال الجوية في مدينة الناصرية لشهر كانون الثاني من سنة 2023 كما في الملحق (1) .

3-2-2 طرائق تحديد اتجاه الرياح^[37] Methods for Determining Wind Direction

تم تحديد اتجاه الرياح عن طريق تحديد مصدرها والجهة التي تهب منها، أي أن الرياح التي تهب من الشمال إلى الجنوب تسمى رياحاً شمالية، وعندما تكون الرياح شمالية غربية مثلاً تكون قادمة من الشمال الغربي نحو الجنوب الشرقي. يمكن معرفة اتجاه الرياح الافقية بطرائق بسيطة مثل مراقبة حركة الأشياء مثل الشجر أو الأعلام، وهناك عدة أدوات تستعمل لقياس اتجاه الرياح، وهي:

- **دوار الرياح (Wind Vane):** وهي أداة بسيطة تتألف من ذراع معدني على شكل سهم يدور على محور مثبت في قمته عامود، وتحتة قضيبان مثبت عليهما الاتجاهات الأربعة، فعندما تهب الرياح على ذيل السهم تدفعه للدوران، لتشير مقدمة السهم إلى اتجاه الرياح. وهي الوسيلة التي تم استعمالها دائرة الاحوال الجوية في ذي قار لتحديد اتجاه الرياح في مدينة الناصرية.

- أداة كم الرياح (Wind Sock) : وهي عبارة عن شكل مخروطي مصنوع من قماش خاص ومفتوح من الطرفين بحيث تمر الرياح من خلاله، فعندما يرتفع تكون شدة هبوب الرياح أكبر، وإذا كان ارتفاعه بسيطاً تكون شدته اقل , تستعمل هذه الأداة بشكل كبير في المطارات لتدل الطيارين على اتجاه الرياح وشدتها، حتى يتمكن الطيار من الهبوط عكس اتجاه الرياح.
- طريقة السبابة: يمكن استعمال إصبع السبابة في تحديد اتجاه الرياح بعد تبليبه وتوجيهه للأعلى، فيبرد الجانب الذي تهب عليه الرياح على الإصبع نتيجة تبخر الرطوبة، فيكون هو الاتجاه الذي تهب منه الرياح، إلا أن استعمال هذه الطريقة لا يعطي دائماً اتجاهًا دقيقاً للرياح، لاسيما في الظروف الرطبة أو الحارة.
- طريقة نثر التراب أو العشب: يمكن أخذ حفنة من التراب أو بعض العشب وتركه ليسقط وحده، فيكون مكان وقوعه هو المكان الذي تهب منه الرياح

3-2-3 اهم العوامل المؤثرة باتجاه الرياح

هناك مجموعة من العوامل لها تأثير بتجاه الرياح اهمها

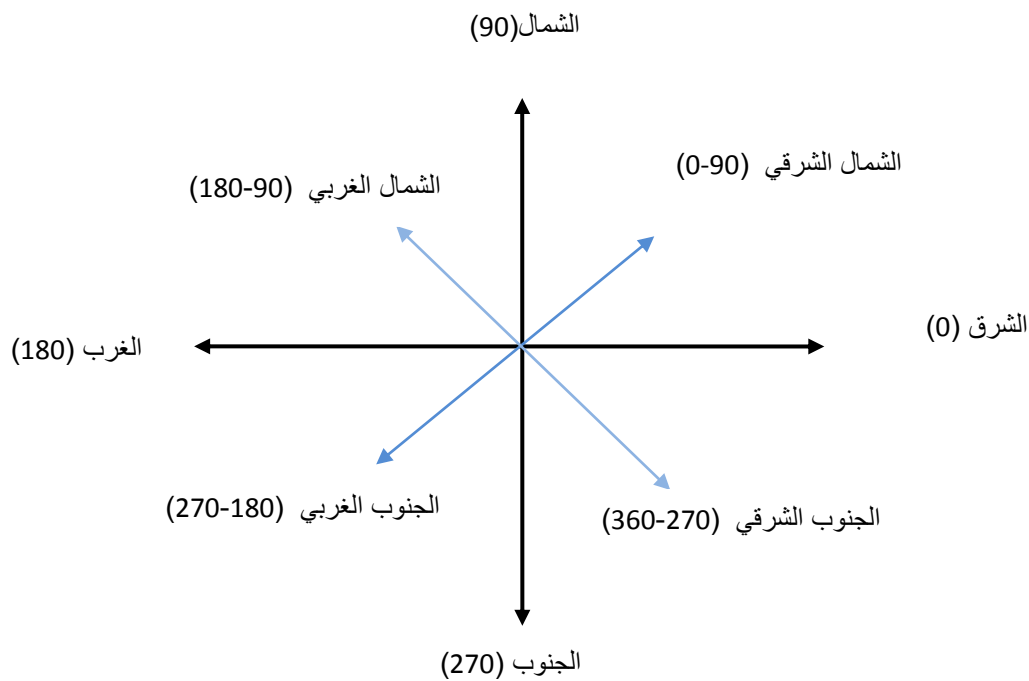
- التباين في الضغط الجوي: فالهواء يتحرك في هياة رياح تهب من مناطق الضغط المرتفع الى مناطق الضغط المنخفض لذلك فان اتجاه الضغط الجوي المرتفع يعد اهم عامل في تحديد اتجاه الرياح القادمة إلى منطقة او مدينة معينة .
- التضاريس : تتسبب عوائق التضاريس في تغيير اتجاه الرياح، وانقسامها أحياناً الى عدة شعب. كما ولها تأثير على سرعة الرياح أيضا .
- قوة كوريولي : وهي القوة الانحرافية الناشئة عن دوران الأرض حول نفسها فتتحرف الرياح الى يمين اتجاهها الاصلي في نصف الكرة الشمالي، والى يسار اتجاهها الأصلي في النصف الجنوبي ولو افترضنا أن الأرض ثابتة لأصبحت الرياح تهب مباشرة في خط مستقيم من الضغط المرتفع الى الضغط المنخفض

Data Description

4-2-3 وصف البيانات

تم اخذ البيانات على شكل اربع قراءات في اليوم الواحد إذ تم تقسيم اليوم إلى اربع ارباع كل ربع له مدة الزمنية ستة ساعات , الربع الأول يبدأ من الساعة (12:00 ليلا) إلى الساعة (6:00 صباحا) والربع الثاني من الساعة (6:00 صباحا) الى الساعة (12:00 ظهرا) والربع الثالث يبدأ من الساعة (12: ظهرا) إلى الساعة (6:00 مساءً) أما الربع الرابع فيبدأ من الساعة (6:00 مساءً) إلى الساعة (12:00 ليلا). وتم اعتبار اتجاه الشرق هو الاتجاه الصفري

والدوران عكس اتجاه عقرب الساعة أي عندما يكون اتجاه الرياح باتجاه الشرق يأخذ الزاوية صفر أو 360 وعندما يكون اتجاه الرياح باتجاه الشمال يأخذ الزاوية (90) وعندما يكون باتجاه الغرب يأخذ الزاوية (180) بينما إذا كان اتجاه الرياح نحو الجنوب تكون الزاوية (270) , أما إذا كان اتجاه الرياح بين أي من الاتجاهات فإنه يأخذ قياس زاوية بينهما أيضا , أي لو كان اتجاه الرياح شمالي شرقي فتكون قيمة الزاوية بين (الصفر و 90) , وإذا كان اتجاه الرياح شمالي غربي فان قياس الزاوية يكون بين (90 إلى 180) وإذا كان اتجاه الرياح جنوب غربي فيكون قياس الزاوية بين (180 إلى 270) وأما إذا كان اتجاه الرياح جنوب شرقي فان قياس الزاوية يكون بين (270 إلى 360) وكما موضح بالشكل ادناه :



الشكل (1-3)

الاتجاهات وقياس الزاوية الخاصة بها

Results

5-2-3 النتائج

تم استعمال لغة البرمجة (R) و كذلك البرنامج المعروف مايكروسوفت - اكسل (Microsoft Excel) في استخراج النتائج التي تم الحصول عليها من الاحصاءات الوصفية و تقدير المعلمات للنماذج الثلاثة وكذلك الاختبارات التي تخص أنموذج الانحدار الزاوي البسيط بخطأ يتبع توزيع فين موزيس وخطأ يتبع توزيع كوشي الملفوف وخطأ يتبع التوزيع الطبيعي الملفوف و حساب قيم معايير المفاضلة بين النماذج الثلاثة والتي سيتم مناقشتها مع تبويبها في جداول ليسهل تحليلها وفهمها .

Descriptive Statistics

أولاً : الإحصاءات الوصفية

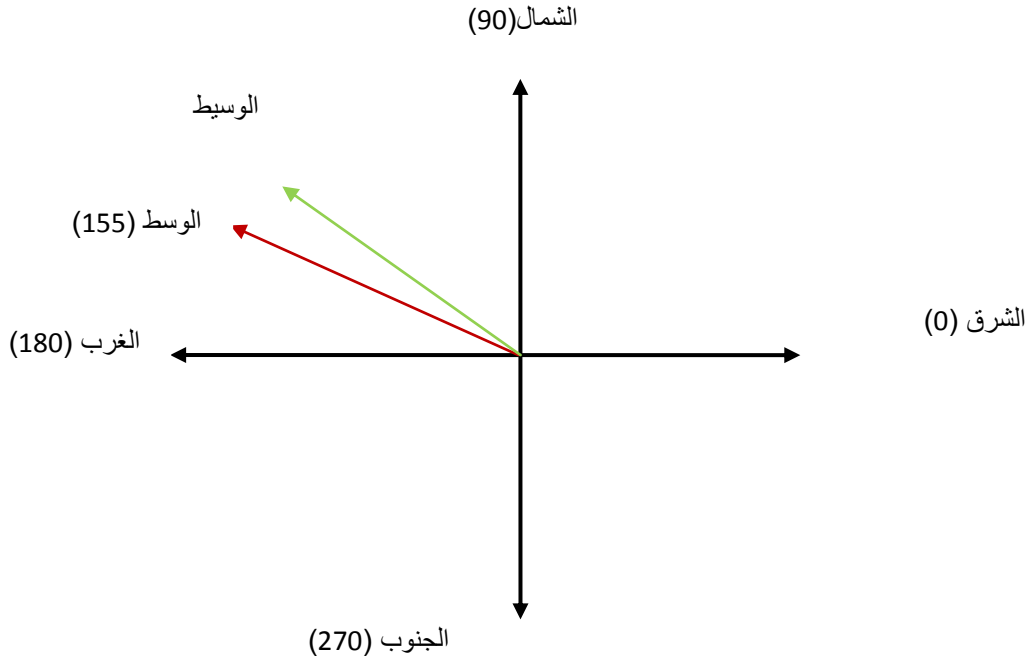
لحساب الإحصاءات الوصفية للبيانات الخاصة باتجاه الرياح لمدينة الناصرية و اتجاه الضغط الجوي المرتفع يتطلب إيجاد مجموع جيب الزاوية (S) ومجموع جيب تمامها (C) وكذلك قيمة R والتي عن طريقها يمكن حساب قيم المتوسط (الاتجاه المفضل) والوسيط والتباين والانحراف المعياري وكانت النتائج كما في الجدول ادناه

الجدول (13-3)

الإحصاءات الوصفية لاتجاه الرياح في مدينة الناصرية واتجاه الضغط الجوي المرتفع

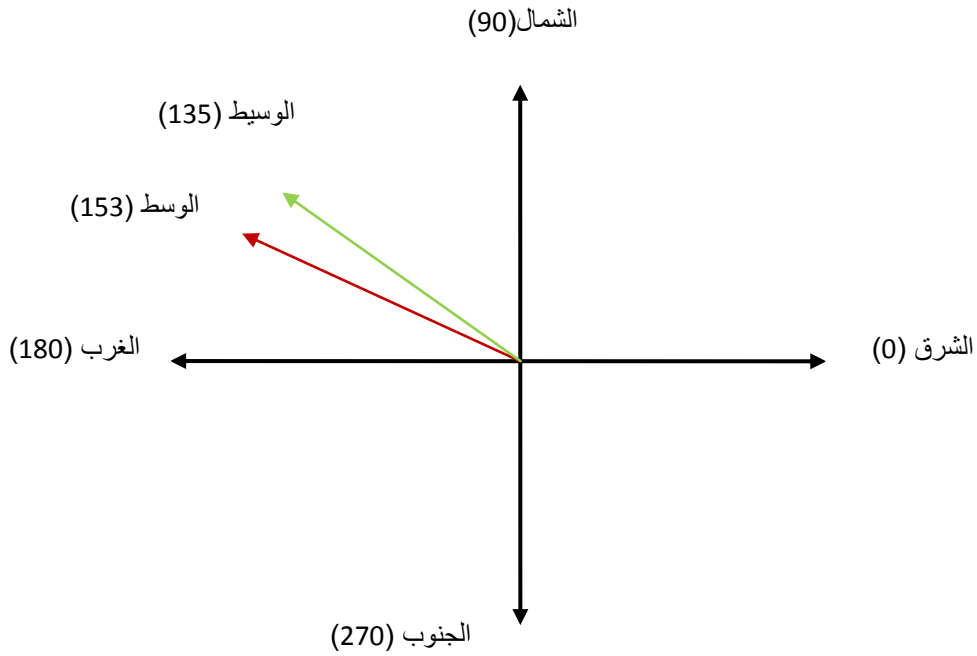
المتغير	S	C	R	الوسط	الوسيط	التباين	الانحراف المعياري
اتجاه الرياح في الناصرية	23.80	-51.21	56.47	155	135	0.54	0.83
اتجاه الضغط الجوي المرتفع	46.43	-66.7	07.57	315	135	0.38	0.64

نلاحظ من الجدول (13-3) أن قيمتي C التي تمثل مجموع جيب تمام الزاوية سالبتين ومن ثم فإن قيمة الوسط الحسابي تكون من معكوس ظل ناتج قسمة مجموع جيب الزوايا على جيب تمام الزوايا ويضاف للناتج (180) وكانت قيمته لمدينة الناصرية (155)، والتي تم حسابها حسب المعادلة (2-5) أي أن متوسط اتجاه الرياح أو الاتجاه المفضل رياح هو (155) درجة أي باتجاه الشمال الغربي أما الاتجاه المفضل للضغط الجوي المرتفع فهو بزاوية (153) درجة باتجاه الشمال الغربي أما اتجاه الوسيط فكان متساوياً لاتجاه الرياح في مدينة الناصرية وكذلك اتجاه الضغط الجوي المرتفع وهو بمقدر (135) درجة أي باتجاه الشمال الغربي ويمكن توضيح اتجاه الرياح المفضل لمدينة الناصرية و للضغط الجوي المرتفع عن طريق الوسط والوسيط وكما في الشكلين الأتيين



الشكل (2-3)

الاتجاه المفضل للرياح في مدينة الناصرية



الشكل (3-3)

الاتجاه المفضل للضغط الجوي المرتفع

Estimation of Model Parameters

ثانياً : تقدير معلمات النماذج

سيتم تقدير المعلمتان (α) و (β) لأنموذج الانحدار الزاوي البسيط بخطأ يتبع توزيع فون ميزيس مرة و وانموذج الانحدار الزاوي البسيط بخطأ يتبع توزيع كوشي الملفوف مره اخرى و أنموذج الانحدار الزاوي البسيط بخطأ يتبع التوزيع الطبيعي الملفوف مره اخرى أيضا إذ يسكون اتجاه الرياح في مدينة الناصري هو المتغير المعتمد وسنرمز له بالرمز (Y) و اتجاه الضغط الجوي المرتفع هو المتغير المستقل وسنرمز له بالرمز (X) وسنعرض نتائج كل أنموذج على حده وكما يأتي :

أ- أنموذج الانحدار الزاوي البسيط بخطأ فون ميزيس

Simple Angular

Regression Model by Von Mises Error

باستعمال المعادلات الخاصة بتقدير المعلمات لهذا الأنموذج تم الحصول على التقديرات الآتية التي سنعرضها على شكل معادلة

$$y_i = 6.666 + 0.857 x_i + \epsilon_i \quad \dots \dots \dots \quad (3 - 29)$$

عن طريق المعادلة المقدرة السابقة نجد أن قيمة المعلمة المقدرة (α) تساوي (6.666) والتي تمثل قيمة الميل الحدي أي قيمة المتغير المعتمد (اتجاه الرياح في مدينة الناصرية) تساوي (6.666) عندما تكون قيمة المتغير المستقل (اتجاه الضغط الجوي المرتفع) يساوي صفراً. أما قيمة المعلمة المقدرة (β) والتي تساوي (0.857) فهي تعني أن قيمة المتغير المعتمد تتغير بمقدار (0.857) عند تغير المتغير المستقل بمقدار درجة واحدة بعباره اخرى كلما تغير اتجاه الضغط الجوي المرتفع بمقدار درجة واحدة فان اتجاه الرياح في مدينة الناصرية يتغير مقدار (0.857) درجة , ونلاحظ من المعادلة التقديرية أن العلاقة بين اتجاه الرياح في مدينة الناصرية و اتجاه الضغط الجوي المرتفع هي علاقة طردية . أما قمة معلمة التركيز (k) فهي تساوي (0.72)

ب- أنموذج الانحدار الزاوي البسيط بخطأ كوشي الملفوف **Simple Angular**
Regression Model With Wrapped Cauchy Error

تم الحصول على التقديرات الأتية الخاصة بهذا الأنموذج وهي كما يأتي :

$$y_i = 6.571 + 0.891 x_i + \epsilon_i \quad \dots \dots \dots \quad (3 - 30)$$

نلاحظ من المعدلة (30-3) أن القيمة التقديرية للمعلمة (α) تساوي (6.571) التي تمثل الميل الحدي أي أن قياس زاوية اتجاه الرياح لمدينة الناصرية تساوي (6.571) درجة عندما يكون قياس زاوية اتجاه الضغط الجوي المرتفع مساوياً إلى الصفر باعتبار الشرق يمثل الاتجاه الصفري واتجاه الدورات عكس عقرب الساعة, أما قيمة المعلمة (β) التي تساوي (0.891) فهي تدل أن تغير اتجاه الضغط الجوي المرتفع بمقدار درجة واحدة يؤدي إلى تغير اتجاه الرياح في مدينة الناصرية بمقدار (0.891) درجة , وان العلاقة بين اتجاه الرياح في مدينة الناصرية واتجاه الضغط الجوي المرتفع هي علاقة طردية . أما قيمة (ρ) فهي تساوي (0.45)

ت- أنموذج الانحدار الزاوي بخطأ التوزيع الطبيعي الملفوف **Simple Angular**
Regression Model With Wrapped Normal Distribution Error

عن طريق المعادلات الطبيعية الخاصة بهذا الأنموذج تم الحصول على تقدير للمعلمات وهي كما يأتي :

$$y_i = 6.722 + 0.858 x_i + \epsilon_i \quad \dots \dots \dots \quad (3 - 31)$$

نلاحظ من المعادلة السابقة أن قيمة المعلمة (α) تساوي (6.722) التي تمثل الميل الحدي لهذا الأنموذج أي أن درجة زاوية اتجاه الرياح في مدينة الناصرية تساوي (6.722) درجة عندما يكون اتجاه الضغط الجوي المرتفع باتجاه الشرق أي بدرجة زاوية مقدارها صفراً . وعن طريق قيمة المعلمة المقدره (β) التي تساوي (0.858) نجد أن أي تغير باتجاه الضغط الجوي المرتفع بمقدار درجة واحدة يصاحبه تغير باتجاه الرياح في مدينة الناصرية مقداره (0.858) درجة . وان العلاقة بين اتجاه الرياح حسب العلاقة المقدره هي علاقة طردية . علماً أن قيمة (ρ) تساوي (0.52).

ثالثاً : اختبار جودة التوفيق للنماذج المقدرة Goodness-of-fit Test for Estimated Models

لاختبار العلاقات المقدرة في النماذج الثلاثة التي تم تقديرها سنختبر الفرضية (2-77) والتي ينص فرض العدم منها على أن العلاقة المقدرة غير معنوية أما الفرض البديل فينص على أن العلاقة المقدرة معنوية وكما يأتي

أ- اختبار جودة التوفيق لأنموذج الانحدار الزاوي البسيط بخطأ يتبع توزيع فون ميزيس

تم حساب المقادير الضرورية لأجراء الاختبار وهي كما موضحة في الجدول التالي :

الجدول (3-14)

اختبار جودة التوفيق لأنموذج الانحدار الزاوي بخطأ فون ميزيس

SS_E	MS_e	SS_R	MS_R	F^*	F_t
42.17	0.346	44.3	44.3	128.03	3.92

نلاحظ من الجدول المذكور انفا أن قيمة F المحسوبة اكبر من قيمة F الجدولية بمستوى ثقة مقداره (0.95) ودرجة حرية للسط مقدارها واحد وللمقام مقدارها (122) فيكون القرار هو رفض فرضية العدم أي أن العلاقة المقدرة من أنموذج الانحدار الزاوي البسيط بخطأ يتبع توزيع فون ميزيس هي علاقة معنوية ومثلت البيانات بصوره صحيحة .

ب- اختبار جودة التوفيق لأنموذج الانحدار الزاوي البسيط بخطأ يتبع توزيع كوشي الملفوف

كما في الاختبار للأنموذج السابق سندرج المقادير المهمة و القيم التي تم حسابها للاختبار في الجدول ادناه

الجدول (3-15)

اختبار جودة التوفيق لأنموذج الانحدار الزاوي بخطأ كوشي الملفوف

SS_E	MS_e	SS_R	MS_R	F^*	F_t
40.38	0.331	44.22	44.22	133.6	3.92

نلاحظ من الجدول (2-15) أن قيمة F المحسوبة اكبر من قيمة F الجدولية بمستوى ثقة مقداره (0.95) ودرجة حرية للبسط مقدارها واحد وللمقام مقدارها (122) فسترفض فرضية العدم أي أن العلاقة المقدرة من أنموذج الانحدار الزاوي البسيط بخطأ يتبع توزيع كوشي الملفوف هي علاقة معنوية .

ت- اختبار جودة التوفيق لأنموذج الانحدار الزاوي البسيط بخطأ يتبع التوزيع الطبيعي الملفوف

كما في الاختبارين السابقين سندرج القيم والمقادير المهمة والتي تم حسابها في الجدول ادناه الخاصة باختبار هذا الأنموذج

الجدول (3-16)

اختبار جودة التوفيق لأنموذج الانحدار الزاوي بخطأ التوزيع الطبيعي الملفوف

SS_E	MS_e	SS_R	MS_R	F^*	F_t
40.15	0.329	44.28	44.28	134.6	3.92

نلاحظ من الجدول (2-16) أن قيمة F المحسوبة اكبر من قيمة F الجدولية بمستوى ثقة مقداره (0.95) ودرجة حرية للبسط مقدارها واحد وللمقام مقدارها (122) وهذا يعني رفض فرضية العدم أي أن العلاقة المقدرة من أنموذج الانحدار الزاوي البسيط بخطأ يتبع التوزيع الطبيعي الملفوف هي علاقة معنوية .

رابعا : المفاضلة بين النماذج المقدرة Comparison Between Estimated Models

للمفاضلة بين النماذج الثلاثة التي تم تقديرها باعتبار اتجاه الرياح في مدينة الناصرية متغير معتمد واتجاه الضغط الجوي المرتفع متغير مستقل , ولمعرفة أي أنموذج أكثر كفاءة من النموذجين الآخرين سنستعمل معيارين المفاضلة وهما ومعيار المعلومات لـ اكاكي المصحح (AIC_C) و معيار المعلومات البيزي (BIC) والتي تعتمد في حسابها على متوسطات الخطأ (MS_E) ويمكن تلخيص النتائج المعايير التي تم الحصول عليها كما في الجدول ادناه

جدول (17-3)

معايير المقارنة بين النماذج للبيانات الحقيقية

النموذج	MS_E	المعيار	
		AIC_C	BIC
بخطاً توزيع فين ميزيس	0.346	4.791	4.879
بخطاً توزيع كوشي الملفوف	0.331	4.761	4.849
بخطاً التوزيع الطبيعي الملفوف	0.329	4.757	4.845

يمثل العمود الثاني من الجدول اعلاه متوسطات الخطأ لكل أنموذج أما العمود الثالث فيمثل قيم معيار (AIC_C) لكل أنموذج ونلاحظ أن اقل قيمة كانت لأنموذج الانحدار الزاوي البسيط بخطاً يتبع التوزيع الطبيعي وبفارق بسيط عن نظيرتها في أنموذج الانحدار البسيط بخطاً يتبع توزيع كوشي الملفوف وكانت أعلى قيمة هي لأنموذج الانحدار البسيط بخطاً يتبع فون ميزيس أما معيار (BIC) الذي جاء في العمود الرابع من الجدول وكانت نتائجه أن اقل قيمة له كانت عنده أنموذج الانحدار الزاوي البسيط بخطاً كوشي الملفوف وأعلى قيمة كانت لأنموذج الانحدار الزاوي بخطاً فون ميزيس . نلاحظ أن المعيارين اتفقتا على أن افضل أنموذج هو أنموذج الانحدار الزاوي بخطاً التوزيع الطبيعي فيعد هو الأنموذج الافضل لهذه البيانات يتبعه أنموذج الانحدار الزاوي البسيط بخطاً كوشي الملفوف وأعلى قيم كانت من نصيب أنموذج الانحدار الزاوي البسيط بخطاً فون ميزيس.

الفصل الرابع

الاستنتاجات و التوصيات

الفصل الرابع

الاستنتاجات و التوصيات

بالاعتماد على تطبيق الاحصاءات الوصفية الدائرية ونماذج الانحدار الزاوي (الدائري) الثلاثة, يمكن الإشارة الى بعض الاستنتاجات التي تم التوصل اليها والتوصيات التي نعتقدها ضرورية.

Conclusions

1-4 الاستنتاجات

أولاً : من الجانب التجريبي تبين الآتي :

- 1- من العينات الافتراضية الثلاثة يتبين أن الأنموذج الانحدار الزاوي (الدائري) الافضل للبيانات التي تتبع توزيع فون ميزيس هو أنموذج الانحدار الزاوي البسيط بخطأ يتبع توزيع فون ميزيس .
- 2- الأنموذج الانحدار الزاوي (الدائري) الافضل للبيانات التي تتبع توزيع كوشي الملفوف هو أنموذج الانحدار الزاوي البسيط بخطأ يتبع توزيع كوشي الملفوف .
- 3- الأنموذج الانحدار الزاوي (الدائري) الافضل للبيانات التي تتبع التوزيع الطبيعي الملفوف هو الأنموذج المقترح وهو أنموذج الانحدار الزاوي البسيط بخطأ يتبع التوزيع الطبيعي الملفوف .
- 4- أن لحجم العينة تأثيراً كبيراً في جودة التوفيق للأنموذج فكلما كان حجم العينة كبيراً كانت جميع النماذج هي نماذج معنوية أما في حالة حجم العينة صغيراً فان التأثير الأكثر يكون لمتوسطات الخطأ الموضح وغير الموضح.
- 5- نلاحظ من خلال التجارب كلما كبر حجم العينة كلما قلت معلمة التركيز.

ثانياً : من الجانب العملي تبين الآتي :

- 1- من قيمة الوسط الحسابي الدائري لبيانات اتجاه الرياح في مدينة الناصرية فان متوسط الاتجاه للرياح في هذه المدينة هو الشمال الغربي .
- 2- من قيمة الوسط الحسابي الدائري لبيانات اتجاه الضغط الجوي المرتفع فان اتجاه المفضل للضغط الجوي المرتفع هو الشمال الغربي

- 3- من تطبيق نماذج الانحدار الزاوي (الدائري) الثلاثة على البيانات فان افضل نموذج مثل البيانات هو نموذج الانحدار الزاوي البسيط بخطأ يتبع التوزيع الطبيعي الملفوف بالاعتماد على قيم معايير المفاضلة بين النماذج .
- 4- جميع نماذج الانحدار الزاوي البسيط للبيانات المدروسة هي نماذج معنوية حسب ما بينت نتائج اختبار جودة التوفيق للنماذج الثلاثة
- 5- من معادلات أنموذج الانحدار الزاوي البسيط للنماذج الثلاثة نجد أن العلاقة بين اتجاه الضغط الجوي المرتفع واتجاه الرياح في مدينة الناصرية هي علاقة طردية أي كلما زادت قياس الزاوية الخاصة باتجاه الضغط الجوي المرتفع زاد قياس الزاوية الخاصة باتجاه الرياح في مدينة الناصرية وكلما قل قياس الزاوية لاتجاه الضغط الجوي المرتفع يقل قياس الزاوية في مدينة الناصرية .
- 6- من قيم المعلمة المقدره (β) للنماذج الثلاثة المقدره التي تقترب من الواحد نجد أن ليس هناك اختلاف كبير في الاتجاه بين الضغط الجوي المرتفع واتجاه الرياح في مدينة الناصرية ومن ثم فان العوامل الاخرى يكون تأثيرها بسيطاً مقارنة مع تأثير الضغط الجوي المرتفع .

Recommendations

2-4 التوصيات

استناداً الى ما جاء بالجوانب النظرية والتجريبية والتطبيقية و وفقاً للاستنتاجات التي تم التوصل اليها نوصي بما يأتي :

- 1- من النتائج التي حققها أنموذج الانحدار الزاوي البسيط بخطأ يتبع التوزيع الطبيعي الملفوف نوصي باستعمال هذا الأنموذج في التعرف على نوع العلاقة بين متغيرين دائريين وكذلك التنبؤ بالقيم المستقبلية للمتغير دائري معتمد بالاعتماد على قيم متغير دائري مستقل.
- 2- نوصي بتوسيع نطاق أنموذج الانحدار الزاوي البسيط بخطأ يتبع التوزيع الطبيعي الملفوف ليتعدد عدد المتغيرات المستقلة بدلاً من استعمال متغير مستقل واحد.
- 3- نوصي بتوسيع طريقة اختبار للنماذج الثلاثة عن طريق اختبار مدى معنوية المعالم المقدره كل معلمة على حده.
- 4- من معرفة اتجاه الرياح المفضلة لمدينة الناصرية نوصي بان تشجير المدينة او وضع حزام اخضر تكون الاولوية فيه من جهة الشمال الغربي قبل الجهات الخرى.
- 5- اقترح توزيعات جديده اخرى للخطأ العشوائي قد تكون مناسبة اكثر .

المصادر

المصادر

أولاً : المصادر العربية

1. اسماعيل , محمد عبد الرحمن , (2001) " تحليل الانحدار الخطي " الادارة العامة للطباعة والنشر , معهد الادارة العامه , الرياض , المملكة العربية السعودية
2. التميمي , زهرة حسن عباس, و السعدون, فوزية غالب عمر , والثعلبي , ساهرة حسين زين (2014) " تحليل الانحدار " مديرية دار الكتب للطباعة والنشر جامعة البصرة , العراق
3. السباح , شروق عبد الرضا سعيد (2009) " بناء انموذج انحدار لوجستي معدل لحياة الاطفال الخدج في محافظة كربلاء " اطروحة دكتوراه , جامعة بغداد , العراق
4. الصفار , رواء صالح محمد (2013) , " الطرائق اللامعلمية والمعدلة في تقدير دالة المعولية للبيانات الكاملة مع تطبيق عملي " اطروحة دكتوراه فلسفة في علوم الاحصاء – كلية الادارة والاقتصاد – جامعة بغداد
5. علوان , اسراء سعدون (2003) " مقارنة بين طريقتي SIMEX و LLS لتقدير دالة الانحدار اللامعلمية باستخدام المحاكاة " رسالة ماجستير , كلية الادارة والاقتصاد – جامعة بغداد .
6. فهمي , محمد شامل بهاء الدين (2005) " الاحصاء بلا معاناة : المفاهيم مع التطبيقات على برنامج spss " الادارة العامة للطباعة والنشر , معهد الادارة العامة , الرياض , المملكة العربية السعودية .
7. مضحي , جبار عبد (2011), " مقدمة في نظرية الاحتمالات " . دار المسيرة للنشر والتوزيع . عمان الطبعة الاولى
8. مي مصطفى قسم الله العبيد. (2019). " الحلول التحليلية والعديدية لبعض المعادلات التفاضلية الخطية , (Doctoral dissertation) جامعة البطانة كلية الدراسات العليا.

ثانياً : المصادر الاجنبية

9. **Abuzaid, A. H. (2010).** Some problems of outliers in circular data (Doctoral dissertation, University of Malaya)
10. **Abuzaid, A. H. (2013).** On the influential points in the functional circular relationship models with an application on wind data. Pakistan Journal of Statistics and Operation Research, 333-342
11. **Abuzaid, A. H., & Allahham, N. R. (2015).** SIMPLE CIRCULAR REGRESSION MODEL ASSUMING WRAPPED CAUCHY ERROR. Pakistan Journal of Statistics, 31(4)
12. **Abuzaid, A. H., Hussin, A. G., & Mohamed, I. B. (2013).** Detection of outliers in simple circular regression models using the mean circular error statistic. Journal of Statistical Computation and Simulation, 83(2), 269-277.
13. **Al-Daffaie, K., & Khan, S. (2017, May).** Logistic regression for circular data. In AIP Conference Proceedings (Vol. 1842, No.1, p. 030022) . AIP Publishing LLC.
14. **Allahham, N. (2015).** ON THE SIMPLE ANGULAR REGRESSION MODEL WITH WRAPPED CAUCHY ERROR (Doctoral dissertation, Al Azhar University-Gaza).
15. **Downs, T. D., & Mardia, K. V. (2002).** Circular regression. Biometrika, 89(3), 683-698.
16. **Fisher, N. I., Lewis, T., & Embleton, B. J. (1993).** Statistical analysis of spherical data. Cambridge university press.
17. **Forster , M.R.(2001) "** inference and modeling ", Cambridge University , UK

18. **Guerrero, P., & del Solar, J. R. (2014, August).** Circular Regression Based on Gaussian Processes. In 2014 22nd International Conference on Pattern Recognition (pp. 3672-3677). IEEE.
19. **Hussein, H.A. (2020)** Statistical Approach for Bivariate Circular Data with Application to Bioinformatics. Master Thesis . College of Education for Girls, University of Kufa.
20. **Hussin, A. G. (2006).** Hypothesis testing of parameters for ordinary linear circular regression. Pakistan journal of statistics and operation research, 79-86 .
21. **Hussin, A. G., Fieller, N. R. J. and Stillman, E. C. (2004).** Linear regression for circular variables with application to directional data. Journal of Applied Science & Technology.
22. **Jammalamadaka, S. R., & Kozubowski, T. J. (2004).** New families of wrapped distributions for modeling skew circular data. Communications in Statistics-Theory and Methods, 33(9), 2059-2074.
23. **Jammalamadaka, S. R., & Sengupta, A. (2001).** Topics in circular statistics (Vol. 5). world scientific .
24. **Jupp, P. E., & Mardia, K. V. (2009).** Directional statistics. John Wiley & Sons.
25. **Kato, S., Shimizu, K., & Shieh, G. S. (2008).** A circular–circular regression model. Statistica Sinica, 633-645.
26. **Kent, J. T., & Tyler, D. E. (1988).** Maximum likelihood estimation for the wrapped Cauchy distribution. Journal of Applied Statistics, 15(2), 247-254.
27. **Kullback , S.(1954)** " Information Theory & Statistics " . New York , John wiley & Sons.

28. **Kutner , M. H.;Nachtsheim, C. J.;Neter, J.& Li, W. (2005) "** Applied linear statistical models "5ndMcgraw-Hili New York.
29. **Mardia, K. V. (1972).** Statistics of directional data Academic Press. New York, 357.
30. **Mohammad, H. H., Satari, S. Z., & Yusoff, W. N. S. W. (2021, July).** Review on circular-linear regression models. In Journal of Physics: Conference Series (Vol. 1988, No. 1, p. 012108). IOP Publishing.
31. **Mutwiri, R. M. (2016).** Application of multiple circular-linear regression models to animal movement data with covariates. Journal of Mathematics (IOSR-JM) Volume 12, Issue 2 Ver. II (Mar. - Apr. 2016), PP 56-65
32. **Panciskin, A. A., & Savgulidze, E. T. (1988).** Trigonometric Functions: Problems-solving Approach. MIR publishers moscow.
33. **Rasheed, D.H. & Al- wakil , A.A. (2010) "**Introduction to mathematical statistics" Al-ddar Al-jamieuh for printing ,publishing and translating , Baghdad university.
34. **Schwarz, G. (1978).** Estimating the dimension of a model. The annals of statistics, 461-464.
35. **Zheng, S. (2009).** Comparing measures of fit for circular distributions. Master Thesis University of Victoria .
36. **Zubairi, Y. Z., Hussain, F., & Hussin, A. G. (2008).** An representation analysis of two circular variables via graphical representation: an application to the Malaysian wind data. Computer and information Science, 1(4), 3-8.

ثالثا : مصادر الشبكة العنكبوتية

37. <https://www.arabiaweather.com/ar/content>

الملاحق

الملحق (1)
جزء من البيانات الحقيقية

اتجاه الضغط الجوي المرتفع	اتجاه الرياح في مدينة الناصرية	التاريخ			
		السنة	الشهر	اليوم	الساعة
180	180	2023	كانون الثاني	1	6:00
135	180	2023	كانون الثاني	1	12:00
90	135	2023	كانون الثاني	1	18:00
135	135	2023	كانون الثاني	1	00:00
135	135	2023	كانون الثاني	2	6:00
180	180	2023	كانون الثاني	2	12:00
180	180	2023	كانون الثاني	2	18:00
180	180	2023	كانون الثاني	2	00:00
135	180	2023	كانون الثاني	3	6:00
180	180	2023	كانون الثاني	3	12:00
135	135	2023	كانون الثاني	3	18:00
0	135	2023	كانون الثاني	3	00:00
90	315	2023	كانون الثاني	4	6:00
0	90	2023	كانون الثاني	4	12:00
0	0	2023	كانون الثاني	4	18:00
180	315	2023	كانون الثاني	4	00:00
180	225	2023	كانون الثاني	5	12:00
180	180	2023	كانون الثاني	5	18:00
135	180	2023	كانون الثاني	5	00:00
180	180	2023	كانون الثاني	5	6:00
180	180	2023	كانون الثاني	6	12:00
180	180	2023	كانون الثاني	6	18:00
180	180	2023	كانون الثاني	6	00:00
225	180	2023	كانون الثاني	6	6:00
∴	∴	∴	∴	∴	∴
.
.
135	135	2023	كانون الثاني	31	00:00
180	135	2023	كانون الثاني	31	12:00
180	225	2023	كانون الثاني	31	18:00
180	315	2023	كانون الثاني	31	00:00

Abstract

The study of the same variables that occur periodically and collected by one point of origin, which are called circular variables, is one of the important processes in our present time because there are some phenomena that describe this type of data, and the (circular) angular regression is one of the most important statistical methods to represent this type of phenomena and the method of maximum likelihood estimation (MLE) is described as one of the most important methods that are used to estimate its parameters. The random error distribution of the angular regression model is also important because the method of MLE depends mainly on maximizing the probability density function of the random error distribution.

Therefore, the study included the use of three (circular) angular regression models, namely, the angular regression model with von Mises error, the simple angular regression model with an error that follows the wrapped Cauchy distribution, and the proposed model, which is the simple angular regression model with an error that follows the wrapped normal distribution.

A test of the quality of reconciliation of the three models was proposed based on the Fisher distribution to indicate the significance of each of the three models. A comparison was made between the three models using two criteria: the Bayesian Information Criterion (BIC) and the Akaikes Debugger Information Criterion (AIC_C)

And the results showed on the experimental side that all that was matched between the distribution of the dependent variable with the distribution of random error, the model is the best model, according to what was shown by the value of the standard (BIC) and the standard (AIC_C), and between the quality of reconciliation test for the models that most of the models are moral models.

The practical application was done on two circular variables, namely the wind direction in the city of Nasiriyah as a dependent variable and the direction of high atmospheric pressure as an independent variable. The results showed that all models represented the data correctly by passing the estimated models to test the quality of reconciliation, and that the relationship between the direction of high atmospheric pressure and the direction of the winds in the city of Nasiriyah is a direct relationship. The proposed model, which is the simple angular regression model with an error that follows the wrapped normal distribution, is the optimal model for this data, as indicated by the value of (BIC) and (AIC_C) criterion.

Republic of Iraq
Ministry of Higher Education and
Scientific Research
University of Karbala
College of Management and Economics
Department of Statistics



*Constructing and Estimating an Angular Regression
Model for Circular Data with Practical Application*

A Thesis

*Submitted to the council of the College of Administration and Economic-
University of Karbala in partial fulfillment of the Requirements for the
Degree Philosophy Doctor of Statistics Science*

By

Ali Mohammed Jawad

Under supervision of

Prof. Dr. Jassim Nasser Hussein

A.H 1444

2023 A.M