



جمهورية العراق  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
جامعة كربلاء  
كلية الإدارة والاقتصاد  
قسم الإحصاء

بناء توزيع احتمالي في نظام الاحداثي القطبي بزوايا منتظمة  
مع تطبيق عملي  
اطروحة مقدمة إلى

مجلس كلية الإدارة والاقتصاد في جامعة كربلاء

وهي جزء من متطلبات نيل درجة دكتوراه فلسفة في علوم الإحصاء

تقدم بها

علي عبد الزهرة حسن علي البيضاني

بإشراف

الاستاذ المساعد

الدكتور مشتاق كريم عبدالرحيم

الأستاذ المساعد

الدكتورة ايناس عبد الحافظ محمد

2023م

كربلاء المقدسة

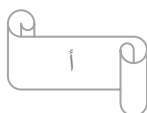
1445 هـ

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

﴿ اللَّهُ الَّذِي يُرْسِلُ الرِّيحَ فَتُثِيرُ سَحَابًا  
فَيَبْسُطُهُ فِي السَّمَاءِ كَيْفَ يَشَاءُ وَيَجْعَلُهُ  
كِسْفًا فَنَرَى الْوَدْقَ يَخْرُجُ مِنْ خِلَالِهِ ۗ فَإِذَا  
أَصَابَ بِهِ مَنْ يَشَاءُ مِنْ عِبَادِهِ ۗ إِذَا هُمْ  
يَسْتَبْشِرُونَ ﴾


صدق الله العلي العظيم

الرُّوم: ٤٨



## إقرار الخبير اللغوي

أشهد بأن الاطروحة الموسومة ((بناء توزيع احتمالي في نظام  
الاحداثي القطبي بزوايا منتظمة مع تطبيق عملي )) قد جرت  
مراجعتها من الناحية اللغوية تحت اشرافي واصبحت خالية من  
الاطعاء و لأجلة وقعت ..



الخبير اللغوي  
م. صلاح مهدي جابر  
جامعة كربلاء- كلية الادارة والاقتصاد  
٢٠٢٣ / /

## إقرار المشرف

نشهد بأن إعداد هذه الأطروحة الموسومة " بناء توزيع احتمالي في نظام الاحداثى القطبي بزوايا منتظمة مع تطبيق عملي " والمقدمة من قبل الطالب ((علي عبدالزهرة حسن علي البيضاني)) قد جرت بإشرافنا في قسم الإحصاء/كلية الإدارة والاقتصاد/جامعة كربلاء، وهي جزء من متطلبات نيل درجة "دكتوراه فلسفة في الإحصاء"، ولأجله وقعنا.

  
أ.م. د. مشتاق كريم عبدالرحيم  
المشرف الثاني  
2023/ 1

  
أ.م. د. ايناس عبد الحافظ محمد  
المشرف الاول  
2023/ 1

### (توصية رئيس قسم الإحصاء)

بناءً على توصية الاساتذة المشرفين أشرح الأطروحة للمناقشة

  
أ.م. د. ايناس عبد الحافظ محمد  
رئيس قسم الإحصاء  
2023/ 1

## إقرار لجنة المناقشة

نشهد نحن أعضاء لجنة المناقشة بأننا قد أطلعنا على الاطروحة الموسومة ((بناء توزيع احتمالي في نظام الاحداثي القطبي بزوايا منتظمة مع تطبيق عملي)) والمقدمة من قبل الطالب (علي عبد الزهرة حسن علي) و ناقشنا الطالب في محتوياتها وفيما له علاقة بها، ووجدنا بأنها جديرة بنيل درجة " الدكتوراه فـلسفة علوم في الاحصاء"، وبتقدير (جيد جداً).

  
أ.د. مهدي وهاب نعمة  
عضواً  
٢٠٢٣/٩/٢١

  
أ.د. شروق عبد الرضا المسراح  
رئيساً  
٢٠٢٣/٩/٢١

  
أ.د. فاضل حسن علي  
عضواً  
٢٠٢٣/٩/٢١

  
أ.د. فاضل حسن علي  
عضواً  
٢٠٢٣/٩/٢١

  
أ.د. بهاء عبدالرزاق قاسم  
عضواً  
٢٠٢٣/٩/٢١

  
أ.د. مشناق كريم عبدالرحيم  
عضواً ومشرفاً  
٢٠٢٣/٩/٢١

  
أ.د. ايناس عبد الحافظ  
عضواً ومشرفاً  
٢٠٢٣/٩/٢١

## إقرار رئيس لجنة الدراسات العليا

بناء على إقرار الخبيرين العلميين و الخبير اللغوي على أطروحة الدكتوراه للمطاب " علي عبدالزهرة حسن علي " الموسومة (بناء توزيع احتمالي في نظام الاحداثي القطبي بزوايا منتظمة مع تطبيق عملي) اشرح هذه الأطروحة للمناقشة .

أ.د. علي احمد فارس  
رئيس لجنة الدراسات العليا  
معاون العميد للشؤون العلمية و الدراسات العليا

## ( مصادقة مجلس الكلية )

صادق مجلس كلية الإدارة والاقتصاد - جامعة كربلاء على إقرار لجنة المناقشة

أ.د. محمد حسين كاظم الجبوري  
عميد كلية الإدارة والاقتصاد  
جامعة كربلاء  
٢٠٢٣ / ٩ /

## الإهداء

أهدي هذا الجهد إلى :

والدي .... أسأل الله أن يتغمده برحمته

والدتي الحبيبة .... حفظها الله وأطال عمرها

زوجتي وأولادي .... سئدي في هذه الدنيا

أخوتي الأعماء .... حفظهم الله

وإلى كل من ينظر لي بحب وتقدير ..

والله

## شكر وامتنان

الحمد لله رب العالمين الذي وفقني وهداني وأعانني بالصبر والقدرة على إنجاز هذه الاطروحة  
والصلاة والسلام على اشرف الخلق محمد وعلى اله وأصحابه الطيبين الطاهرين وبعد : لا يسعني وأنا  
أُكمل اطروحتي إلا أن أتقدم بالشكر إلى الله تعالى أولاً وأخيراً.

ويطيب لي أن أتقدم بجزيل الشكر والامتنان إلى أساتذتي (الدكتورة ايناس عبد الحافظ محمد  
والدكتور مشتاق كريم عبدالرحيم) لقبولهما الإشراف على اطروحتي ولسعة صبرهما طوال مدة البحث  
ولجهودهما العلمية القيمة .

وأتقدم بالشكر والامتنان للأساتيد الفضلاء رئيس وأعضاء لجنة المناقشة لتفضلهم بمناقشة  
الاطروحة ودعمها بالآراء البناءة للسمو بها إلى مرتبة البحث العلمي الرصين.

وأتقدم بالشكر الجزيل إلى رئيس و أساتيد وموظفي قسم الإحصاء وقسم الدراسات العليا للجهود التي  
بذلوها لدعمهم المسيرة العلمية .

ومن واجب العرفان بالجميل يدعوني أن أقدم شكري وامتناني الى أستاذي الدكتور مهدي وهاب  
والى زملائي في دفعة الدكتوراه جميعا والى كل من قدم لي الدعم في وصولي لهذه المرحلة.

وفي الختام اسأل الله تعالى أن يوفقتنا في حياتنا العلمية والعملية انه سميع مجيب

الباحث



## قائمة المحتويات

الصفحة	الموضوع
9-1	الفصل الأول : منهجية الاطروحة
2	المقدمة 1-1
2	مشكلة الاطروحة 2-1
3	هدف الاطروحة 3-1
9-3	الاستعراض المرجعي 4-1
57-10	الفصل الثاني : الجانب النظري
11	تمهيد
11	بعض المفاهيم الاساسية 1-2
11	المتغير العشوائي 1-1-2
11	دوال المتغيرات العشوائية 2-1-2
11	دالة الكثافة الاحتمالية 1-2-1-2
12	دالة التوزيع التراكمية 3-1-2
12	خصائص دالة التوزيع التراكمية 1-3-1-2
13	التوزيع الاحتمالي المشترك 4-1-2
13	دوال الكثافة الاحتمالية المشتركة 1-4-1-2
14	الدالة التوزيعية (التراكمية) المشتركة 2-4-1-2
15	التوزيع الحدي 5-1-2
15	معامل التحويل 6-1-2
16	بعض التوزيعات الاحتمالية المستمرة 2-2
16	التوزيع المنتظم 1-2-2
17	توزيع ويبيل 2-2-2
20	الاحداثيات القطبية 3-2
21	العلاقة بين الاحداثيات الكارتيزية والقطبية 1-3-2
22	المسافة بين نقطتين في الاحداثي القطبي 2-3-2
23	الزوايا المنتظمة 3-3-2
23	معامل التحويل في الاحداثيات القطبية 4-3-2

24	النقاط في الاحداثيات القطبية	4-2
26	دالة التوزيع القطبية	5-2
26	توزيع ويبيل القطبي (التوزيع المقترح)	6-2
26	دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة لتوزيع ويبيل القطبي	1-6-2
29	دالة التوزيع التراكمي المشتركة لتوزيع ويبيل القطبي	2-6-2
32	دالة الكثافة الاحتمالية الحدية فيما يتعلق بالمتغير $r$ (التوزيع المقترح)	3-6-2
33	دالة التوزيع التراكمي الحدية لتوزيع ويبيل القطبي (التوزيع المقترح)	4-6-2
35	دالة الكثافة الاحتمالية الحدية فيما يتعلق بالمتغير الزاوي $\theta$	5-6-2
36	دالة التوزيع التراكمي الحدي فيما يتعلق بالمتغير الزاوي $\theta$	6-6-2
37	خصائص توزيع ويبيل الحدي القطبي للمتغير $r$ (التوزيع المقترح)	7-2
45	طرائق التقدير	8-2
45	طريقة الامكان الاعظم MLE	1-8-2
49	طريقة العزوم MOM	2-8-2
50	طريقة المربعات الصغرى OLS	3-8-2
53	طريقة المربعات الصغرى الموزونة WLS	4-8-2
55	معايير اختيار أفضل توزيع	9-2
55	معيار معلومات اكيائي AIC	1-9-2
55	معيار المعلومات البيزي BIC	2-9-2
55	اختبار جودة الملاءمة في الإحداثيات القطبية	10-2
55	اختبار سمير نوف - كولمجروف القطبي K-S	1-10-2
56	اختبار اندرسون-دارلنك A-D	2-10-2
57	معايير مقارنة بين طرائق التقدير	11-2
69-58	<b>الفصل الثالث: الجانب التجريبي</b>	
59	تمهيد	
59	مفهوم المحاكاة	1-3
59	مراحل وصف تجارب المحاكاة	2-3
59	مرحلة اختيار القيم الافتراضية وحجم العينة	1-2-3
60	توليد بيانات عشوائية في دوال التوزيع القطبي	2-2-3
62	مراحل المقارنة بين طرائق التقدير	3-2-3
62	تحليل ومناقشة نتائج تجربة المحاكاة	3-3
62	تقدير المعلمات واختيار أفضل طريقة	1-3-3
67	تحديد أفضل حجم عينة	2-3-3
78-68	<b>الفصل الرابع: الجانب التطبيقي</b>	
69	تمهيد	

69	بعض المفاهيم الخاصة بالرياح	1-4
71	البيانات الحقيقية ( عينة البحث)	2-4
73	الاحصاءات الوصفية	3-4
73	تقدير المعلمات	4-4
74	اختبار حسن الملائمة	5-4
75	اختبار الاستقلالية	6-4
76	مقارنة بين توزيع ويبل وتوزيع ويبل القطبي	7-4
81-79	<b>الفصل الخامس: الاستنتاجات والتوصيات</b>	
80	الاستنتاجات	1-5
81	التوصيات	2-5
87-82	المصادر	-
82	اولاً: المصادر العربية	-
87-84	ثانياً: المصادر الأجنبية	-
98-88	الملاحق	-
98-89	ملحق A	-

## قائمة البحوث

رقم الصفحة	العنوان	رقم الجدول
60	القيم الافتراضية الأولية للمعاملات والنماذج المقترحة	1-3
63	الرتب الجزئية والكلية لطرائق التقدير وحالات مختلفة من القيم الافتراضية لمعاملات توزيع ويبل الحدي القطبي	2-3
66	الرتب الكلية لمتوسط مربعات الخطأ (MSE) لكافة طرائق التقدير ولجميع الحالات الافتراضية لمعاملات التوزيع وحسب احجام العينة	3-3
70	زوايا الاتجاهات الرئيسية للرياح بالقياس الدائري والدرجات مع الرموز المستعملة	1-4
71	سرعة واتجاه الرياح في محافظة كربلاء للمدة من 1/10/2022 لغاية 30/11/2022	2-4
73	اهم المؤشرات الإحصائية للبيانات الحقيقية	3-4
73	نتائج تقدير معاملات توزيع ويبل القطبي بطريقة الامكان الاعظم MLE	4-4
74	نتائج اختبار حسن الملائمة Kolmogorov – smirnov لمتغير اتجاه الرياح $\theta$ .	5-4
75	نتائج اختبار حسن الملائمة لمتغير سرعة الرياح $r$ .	6-4
76	اختبار مربع كاي $\chi^2$ للاستقلالية بين المتغيرين (السرعة وزاوية اتجاه الرياح)	7-4
77	معايير المفاضلة لتوزيع ويبل وتوزيع ويبل القطبي	8-4
91	نتائج تقدير المعاملات بالطرائق الثلاثة مع قيم MSE والرتب المرافقة لها عند حجوم عينات (n= 30,50,75,100,150) مع القيم الافتراضية للمعاملات $a=0.5, \lambda=1$	A-1
92	نتائج تقدير المعاملات بالطرائق الثلاثة مع قيم MSE والرتب المرافقة لها عند حجوم عينات (n= 30,50,75,100,150) مع القيم الافتراضية للمعاملات $a=1, \lambda=1$	A-2
93	نتائج تقدير المعاملات بالطرائق الثلاثة مع قيم MSE والرتب المرافقة لها عند حجوم عينات (n= 30,50,75,1,100,150) مع القيم الافتراضية للمعاملات $a=1.5, \lambda=1$	A-3
94	نتائج تقدير المعاملات بالطرائق الثلاثة مع قيم MSE والرتب المرافقة لها عند حجوم عينات (n= 30,50,75,100,150) مع القيم الافتراضية للمعاملات $a=2, \lambda=1$	A-4
95	نتائج تقدير المعاملات بالطرائق الثلاثة مع قيم MSE والرتب المرافقة لها عند حجوم عينات (n= 30,50,75,100,150) مع القيم الافتراضية للمعاملات $a=2.5, \lambda=1$	A-5
96	نتائج تقدير المعاملات بالطرائق الثلاثة مع قيم MSE والرتب المرافقة لها عند حجوم عينات (n= 30,50,75,100,150) مع القيم الافتراضية للمعاملات $a=0.5, \lambda=2$	A-6

97	نتائج تقدير المعلمات بالطرائق الثلاثة مع قيم MSE والرتب المرافقة لها عند حجوم عينات (n= 30,50,75,100,150) مع القيم الافتراضية للمعلمات a=1, $\lambda=2$	A-7
98	نتائج تقدير المعلمات بالطرائق الثلاثة مع قيم MSE والرتب المرافقة لها عند حجوم عينات (n= 30,50,75,100,150) مع القيم الافتراضية للمعلمات a=1.5, $\lambda=2$	A-8
99	نتائج تقدير المعلمات بالطرائق الثلاثة مع قيم MSE والرتب المرافقة لها عند حجوم عينات (n= 30,50,75,100,150) مع القيم الافتراضية للمعلمات a=2, $\lambda=2$	A-9
100	نتائج تقدير المعلمات بالطرائق الثلاثة مع قيم MSE والرتب المرافقة لها عند حجوم عينات (n= 30,50,75,100,150) مع القيم الافتراضية للمعلمات a=2.5, $\lambda=2$	A-10

## قائمة الأشكال

رقم الصفحة	العنوان	رقم الشكل
19	(a) دالة الكثافة الاحتمالية و (b) دالة التوزيع التراكمي لتوزيع ويبيل	1-2
20	ثلاث زوايا ثنائية الابعاد لتمثل نظام الاحداثيات القطبي مقارنة بالديكارتي	2-2
25	تمثيل الشبكات القطبية عندما تكون الشرائح بمساحة متساوية والاقطار متساوية	3-2
25	تمثيل الشبكات القطبية عندما تكون الشرائح بمساحة متساوية والاقطار غير متساوية	4-2
29	دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة لتوزيع ويبيل القطبي	5-2
31	الرسم البياني لدالة التوزيع التراكمي لتوزيع ويبيل القطبي على فرض ان المعلمات $(\lambda=1, a=1)$	6-2
33	الدالة الحدية لتوزيع ويبيل القطبي بالاعتماد على المتغير $r$ ولقيم مختلفة للمعلمات	7-2
35	دالة التوزيع التراكمي الحدي لتوزيع ويبيل القطبي بالاعتماد على المتغير $r$ ، ولقيم مختلفة من المعلمات	8-2
37	الرسم البياني (a) دالة كثافة الاحتمال (P.d.f) الحدية لتوزيع ويبيل القطبي . وكذلك (b) يوضح دالة التوزيع التراكمي (C.D.F) الحدية لتوزيع ويبيل القطبي وفقا للمتغير الزاوي $\theta$ .	9-2
69	اتجاهات الرياح الرئيسية والفرعية	1-4
77	دالة الكثافة الاحتمالية pdf والذي يوضح مدى ملائمة توزيع ويبيل القطبي في تمثيل البيانات الحقيقية بشكل افضل مقارنة بتوزيع ويبيل الاعتيادي	2-4
78	يمثل الدالة التراكمية CDF لتوزيع ويبيل القطبي وتوزيع ويبيل الاعتيادي مقارنة التوزيع التجريبي للبيانات الحقيقية	3-4

قائمة بالمصطلحات والرموز المستعملة في الاطروحة

المصطلح باللغة العربية	المصطلح باللغة الانكليزية	الرمز
التوزيع المنتظم	Uniform Distribution	Uniform
توزيع ويبيل	Weibull distribution	Weibull
دالة الكثافة الاحتمالية	Probability density function p.d.f	$f(x)$
دالة التوزيع التراكمية	Cumulative distribution function c.d.f	$F(x)$
دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة	Joint probability density function (J.p.d.f)	$f(x_1, x_2, \dots, x_k)$
الدالة التوزيعية التراكمية المشتركة	Joint distribution function (J.c.d.f)	$F(x_1, x_2, \dots, x_k)$
الاحداثيات القطبية	Polar Coordinate	$(r - \theta)$
الاحداثيات الكارتيزية	Cartesian coordinates	$(x - y)$
الزاوية بالدرجات	Angles by degrees	$\theta^\circ$
الزاوي بالقياس الدائري	Angles by radians	$\theta$
دالة كثافة الاحتمال ثنائي المتغير في الإحداثيات الكارتيزية	Bivariate probability density function in Cartesian coordinates	$f(x,y)$
دالة توزيع ثنائي المتغير في الإحداثيات الكارتيزية	Bivariate distribution function in Cartesian coordinates	$F(x,y)$
دالة كثافة الاحتمال القطبي	Polar Probability Density function - p.d.f	$f(\theta, r)$
دالة التوزيع التراكمي القطبي	Polar distribution function - c.d.f	$F(\theta, r)$
دالة كثافة الاحتمال القطبي الحدية فيما يتعلق بالمتغير $r$	Marginal probability density function with respect to polar $r$	$f(r)$
دالة كثافة الاحتمال القطبي الحدية فيما يتعلق بالمتغير $\theta$	Marginal probability density function with respect to polar $\theta$	$f(\theta)$
دالة التوزيع التراكمي القطبي الحدية فيما يتعلق بالمتغير $r$	Marginal cumulative distribution function with respect to polar $r$	$F(r)$
دالة التوزيع التراكمي القطبي الحدية فيما يتعلق بالمتغير $\theta$	Marginal cumulative distribution function with respect to polar $\theta$	$F(\theta)$
توزيع ويبيل القطبي	Polar Weibull Distribution	Polar Weibull
معلمة القياس	Scale parameter	$\lambda$
معلمة الشكل	Shape parameter	$a$
دالة كاما غير التامة الدنيا	The lower incomplete gamma Function	$\gamma(a, t)$
دالة كاما غير التامة العليا	The upper incomplete gamma Function	$\Gamma(a, t)$

دالة كاما التامة	The complete gamma Function	$\Gamma(a)$
متوسط مربعات الخطأ	Mean square Error	MSE
دالة كاما الثنائية	Digamma function	$\psi(a)$
طريقة العزوم	Method of Moments	MOM
طريقة الامكان الاعظم	Maximum Likelihood Estimation	MLE
طريقة المربعات الصغرى	Least Squares Method	OLS
طريقة المربعات الصغرى الموزونة	Weighted least Square Method	WLS
اختبار اندرسون دارلنك	Anderson-Darling Test	A-D
اختبار كولمجروف- سمير نوف	Kolmogorov-Smirnov Test	K-S
معيار معلومات اكيائي	Akaike Information Criteria	AIC
معيار المعلومات البيزي	Bayesian Information Criterion	BIC



## المستلزم

هناك العديد من البيانات التي يعبر عنها بمتغيرات ذات زوايا ومسافة وبالأخص في مجالات الرياضيات والفيزياء والهندسة البحرية وتكنولوجيا الروبوت والطائرات والمركبات الجوية بدون طيار وأجهزة الاستقبال والارسال الهاتفية وغيرها. إذا يواجه الباحثون بعض الصعوبات في اختيار التوزيع الاحتمالي لغرض تمثيل بيانات ظاهرة ما بأفضل صورة وبهذه الحالة لا يمكن التعبير عنها بصورة جيدة ضمن الاحداثيات الكارتيزية ما يتطلب الأمر بالتعبير عنها في نظام الاحداثيات القطبية كونها تمتلك زوايا ومسافة. في هذه الاطروحة تم بناء الدالة الاحتمالية المشتركة لتوزيع ويبيل في نظام الاحداثيات القطبية  $(r, \theta)$  اولا ومن ثم ايجاد دالة التوزيع الحدي لتوزيع ويبيل القطبي وايجاد بعض الخصائص المهمة للتوزيع الجديد، ثم تم التطرق الى أربع طرائق (MLE, MOM, OLS, WLS) لغرض تقدير معلمات التوزيع، ومن اجل تحقيق هدف الاطروحة تم تحليل ومناقشة النتائج التي تم الوصول اليها عن طريق بيانات افتراضية لغرض اجراء المحاكاة وبيانات واقعية تمثلت بسرعة واتجاه الرياح في محافظة كربلاء المقدسة.

و بأجراء المحاكاة وباستعمال حجوم عينات مختلفة (30,50,75,100,150) ولحالات افتراضية مختلفة للمعلمات وكررت التجربة (1000) مرة وبعد الوصول الى النتائج، تمت المقارنة والتفضيل بين الطرائق باستعمال معيار متوسط مربعات الخطأ وتوصل الى أن طريقة الامكان الأعظم هي الطريقة الفضلى الملائمة في التقدير من بين الطرائق الاخرى. اما في الجانب التطبيقي فقد تم تسجيل البيانات الحقيقية المتمثلة باتجاه  $(\theta)$  وسرعة الرياح  $(r)$  في مدينة كربلاء للمدة من 2022 / 10 / 1 لغاية 2022/11/30 ، إذ تم فحص ملائمة البيانات الحقيقية للتوزيع الجديد بالاعتماد على بعض الاختبارات (اختبار سمير نوف- كولمجروف واختبار اندرسون ) ، وبعد ذلك تم تحليل النتائج والحصول على المعلمات المقدرة للبيانات الحقيقية بالاعتماد على طريقة الامكان الاعظم وكذلك تمت المقارنة بين نتائج مقدرات توزيع ويبيل الجديد في الاحداثيات القطبية مع توزيع ويبيل في الاحداثيات الكارتيزية عن طريق استعمال بعض معايير المقارنة والتفضيل (معيار معلومات اكيائي AIC ومعيار معلومات بيزي BIC ) وقد بينت النتائج افضلية التوزيع الجديد وهو ما يتوافق مع هدف الاطروحة.

# الفصل الأول

منهجية الاطروحة  
والاستعراض المرجعي

### 1-1 : المقدمة : Introduction

نظام الإحداثيات القطبية هو نظام ثنائي الأبعاد يستعمل هذا النظام في العديد من المجالات مثل الرياضيات والفيزياء والهندسة والبحرية وتكنولوجيا الروبوت والطائرات والمركبات الجوية بدون طيار وأجهزة الاستقبال والارسال الهاتفية.

ففي نظام الإحداثيات القطبية تستعمل العلاقة في الظواهر التي يعبر عنها بالقيم الزاوية والمكانية إذ يتم تحديد هذه العلاقة أيضاً بمساعدة الصيغ المثلثية.

في بعض مشكلات الحياة الواقعية يكون من الافضل استعمال نظام الاحداثيات القطبية بدلا من الاحداثيات الكارتيزية ، على وجه الخصوص وللمساهمة في حلول بعض المشكلات يتم اللجوء الى الاحداثيات القطبية وانشاء حلول لمثل هذه التطبيقات وفرت الدافع لهذه الدراسة على وجه الخصوص .

وتضمنت الاطروحة خمسة فصول ، فقد احتوى الفصل الاول المقدمة ومشكلة الاطروحة ، وهدف الاطروحة، والاستعراض المرجعي لبعض الدراسات السابقة ، فيما تطرق الثاني الى بعض المفاهيم الاساسية ، إذ تم التطرق لمفهوم الاحداثيات القطبية وكذلك العلاقة بين الاحداثيات القطبية والكارتيزية، ومن ثم بناء التوزيع الاحتمالي (توزيع وييل المقترح) في نظام الاحداثيات القطبية إذ يتم ايجاد التوزيع المشترك في حالة المتغيرين ومن ثم ايجاد التوزيع الحدي القطبي لاحد المتغيرين وبيان كل من دوال الكثافة الاحتمالية ودوال التوزيع الاحتمالي التراكمية، ومن ثم التطرق الى بعض طرائق التقدير لمعاملات التوزيع ، وبعدها يتم التطرق للرسم البياني في الاحداثيات القطبية وفي ختام الفصل يتم التطرق الى اختبارات جودة الملازمة في الاحداثيات القطبية ومنها اختبار سميير نوف – كولمجروف واختبار اندرسون دارلنك وكذلك توضيح بعض معايير اختيار الانموذج الافضل ومنها معيار معلومة اكيائي (AIC) Akaike information criterion ومعيار معلومة بيز (Bayesian Information Criterion (BIC). وتم التطرق في الثالث الى الجانب التجريبي باستعمال المحاكاة عن طريق توليد ارقام عشوائية بالاستناد الى ما توصل اليه توزيع وييل الحدي في الاحداثيات القطبية وباستعمال حجوم عينات مختلف وباستعمال طرائق التقدير المذكورة وتم عرض النتائج في جداول مختلفة . وتضمن الرابع الجانب التطبيقي اذا تم توظيف البيانات الواقعية لحالة الطقس في كربلاء (سرعة الرياح واتجاهها) للمدة من ٢٠٢٢/١٠/١ لغاية ٢٠٢٢/١١/٣٠ .

واخيرا في الخامس تم التطرق الى أهم الاستنتاجات والتوصيات الى توصلت لها الاطروحة .

### 2-1 : مشكلة الاطروحة : thesis problem

يواجه الباحثون بعض الصعوبات في اختيار التوزيع الاحتمالي لغرض تمثيل بيانات ظاهرة ما بأفضل صورة، فهناك العديد من البيانات يعبر عنها بمتغيرات اتجاهية وزاوية وبهذه الحالة لا يمكن التعبير عنها بصورة جيدة ضمن الاحداثيات الكارتيزية ما يتطلب الامر بالتعبير عنها في نظام الاحداثيات القطبية كونها تمتلك زوايا واتجاه ومن ثم ايجاد التوزيع الاحتمالي القطبي المشترك لهذه البيانات ، وكذلك تنشأ الحاجة إلى حساب التوزيع الاحتمالي الحدي القطبي للتوزيع ثنائي المتغير (bivariate) (ثنائي الأبعاد 2D two-dimension) لإنتاج توزيعات ذات بعد واحد (1-D one dimension) على نصف القطر أو الزاوية، وذلك للتعبير عن سلوك احد المتغيرين .

**1-3 : هدف الأطروحة : thesis Aim**

تسعى الأطروحة الى بناء توزيع احتمالي مقترح (توزيع ويبيل القطبي الحدي) لغرض تمثيل البيانات التي تتضمن زوايا ومسافات او سرعة ، ومن ثم الحصول على خواص التوزيع المقترح . ويتم التطبيق على البيانات الحقيقية المتمثلة بسرعة الرياح وزاوية اتجاهها وبالتالي الحصول على نموذج احتمالي يمثل تلك البيانات مع بيان اهم خصائص التوزيع المقترح .

ممكن الاستفادة من التوزيع المقترح في تقدير احتمالية سرعة الرياح المستقبلية . ويمكن اجراء المقارنة في تطبيق الانموذج في مناطق او مدن متفرقة لغرض الاستفادة منها في توليد الطاقة الكهربائية التي تعتمد على سرعة الرياح

**1-4 : الاستعراض المرجعي : Literature Review**

**أولاً: الدراسات الخاصة بالإحداثيات القطبية**

على الرغم من عدم وجود العديد من الدراسات الإحصائية في الإحداثيات القطبية الا ان هناك دراسات مختلفة في الادبيات تستعمل دالة كثافة الاحتمال القطبي والتمثيلات القطبية .

• في عام (1999) قام الباحث (Ertel & Reed) [22]

بوضع دراسة عن احصاءات زاوية ووقت الوصول لنماذج الانتشار الدائري و البيضوي وكانت خلاصة الدراسة مع إدخال أنظمة مصفوفة الهوائي في شبكات الاتصالات اللاسلكية تأتي الحاجة إلى الأفضل في فهم الخصائص المكانية للقناة إذ توفر نماذج الانتشار احصاءات خاصة بزواية الوصول (AOA) ووقت الوصول (TOA) للقناة. وتم اقتراح عدد من نماذج التشتت المختلفة بما في ذلك النماذج البيضوية والدائرية ، إذ تفترض هذه النماذج أن التشتت يقع داخل منطقة بيضوية ودائرية في الفضاء على الترتيب. و تم اشتقاق دالة TOA / AOA المشتركة ودوال TOA الحدية ودوال الكثافة الاحتمالية AOA الحدية (pdf's) لنماذج التشتت الإهليلجي والدائرية . وتوافر الدوال هذه نظرة ثاقبة على خصائص القناة اللاسلكية المكانية .

• قام كل من (2001) (Cumming & De Angelis) [18]

بإجراء مقارنة بين نوعين من الحيوانات باستعمال دالة كثافة الاحتمال القطبية إذ توفر الدراسات الفسيولوجية الحديثة في القشرة البصرية الأولية وصفاً ناجحاً للآليات التي يمكن عن طريقها للخلايا العصبية المفردة أن تشير إلى التباين ويكشف هذا العمل أيضاً عن الحاجة إلى معالجة إضافية لتوضيح أنواع الإشارات المطلوبة لإدراك العمق (مثل القدرة على مطابقة الميزات بشكل صحيح بين الصورتين الأحاديتين)، تم العثور على بعض هذه الإشارات مثل تلك التي ترمز للتباين النسبي في القشرة الخارجية. وتشير العديد من الأدلة الأخرى أيضاً إلى أن الارتباط بين الإدراك والنشاط العصبي أقوى في القشرة الخارجية منه في القشرة البصرية الأولية.

• قام في العام نفسه Fazio et.al [25]

باستعمال دوال التوزيع للزاوية القطبية لقياس تأثير التدفق على تثبيت السائل الخيطي اذ تمت دراسة بلورات على طبقات لانجوير- بلودجت الاحادية Langmuir-Blodgett monolayers بواسطة البصريات الجيل الثاني التوافقي اذ تم استعمال دالة التوزيع الطبيعي في تمثيل الزاوية القطبية  $\theta$  .

• قام روبنسون وآخرون Robinson, N. H., Newton, et. al (2011) [43]

باستعمال دالة الكثافة الاحتمالية القطبية الكامنة في الهندسة القطبية اذ تم تقييم أصول الكتل الهوائية التي تؤثر بموقع القياس في غابة مطيرة محمية في منطقة جنوب شرق آسيا وتم تحديد المصادر المحتملة لمجموعة من الغازات والجزينات النزرة، وتم إجراء ذلك عن طريق تفسير القياسات التي تم إجراؤها في الموقع في سياق مسارات الكتلة الهوائية العكسية.

تم استعمال طريقتين مختلفتين ولكن مكملتين لتفسير البيانات وهي مقارنة الفترات المصنفة حسب التحليل العنقودي للمسارات وفحص اعتماد القيم المقاسة المتوسطة على التاريخ الجغرافي للمسارات، وتم تقييم مصادر جزينات الغلاف الجوي وأول أكسيد الكربون والهالوكربونات .

• قام Nguyen T.M (2014) [37]

مناقشة تعميمات الإحداثيات القطبية او ما يسمى بالإحداثيات القطبية ذات البعد  $n$  ويبدو أن هذه الأنواع من الإحداثيات مفيدة جداً للعديد من التخصصات العلمية ، فبعض التعميمات للإحداثيات القطبية لا تطفي في الواقع الإحداثيات القطبية والإحداثيات الكروية للحالة ثنائية الأبعاد وثلاثية الأبعاد على الترتيب . اذ تم اقتراح في هذه الدراسة تعريفاً أكثر ودية للإحداثيات القطبية وهو ما يسمى بالإحداثيات ثنائية الأبعاد شبه القطبية ، والتعميم المتسق الذي يسمى إحداثيات شبه قطبية ذات أبعاد  $n$  . ليس هناك فقط تعريفات مختلفة ولكن هناك أيضاً أدلة مختلفة على التحويلات لهذه الإحداثيات في معظم الأحيان ، دليل على مثل هذا يُزعم خطأً أن تحويلاً تم إجراؤه عن طريق الاستقراء الرياضي ، ولكن لم يتم العثور على مثل هذا الدليل مطلقاً وربما لا يمكن العثور عليه قبل الإثبات المقدم في هذه الأطروحة ، وجدنا دليلين فقط في الأدبيات. كلاهما البراهين طويلة جداً وليست مباشرة.

تم تقديم طريقة تسمح للنهج المباشر الأصلي بأن يكون صالحاً في جميع الحالات الخاصة الممكنة. ونتيجة لذلك يتم الإثبات في حالة واحدة فقط اذ يتم استعمال معامل تحويل (Jacobian) للإحداثيات شبه القطبية ذات البعد  $n$  لحساب مباشرة البعد  $n$  والمساحة شبه السطحية ذات البعد  $n$  لشبه الكرة الأرضية ذات البعد  $n$  . والصيغ التي تم الحصول عليها خالية من أي دوال خاصة ويمكن تقديمها دون أي معرفة رياضية متقدمة وبدون أي استعمال للاستقراء الرياضي .

• قام Nomura N عام 2014 [38]

بحساب الاحتمالات الطبيعية متعددة المتغيرات بأنظمة الإحداثيات القطبية اذ تم الاخذ في الاعتبار مشكلة تقييم احتمال أن جميع عناصر متجه متعدد المتغيرات موزعة بشكل طبيعي لها إحداثيات غير سالبة و يسمى هذا الاحتمال بالاحتمال غير المركزي المعادل وتبرز ضرورة تقييم هذا الاحتمال بشكل متكرر في الإحصاء.

ويتم تحديد الاحتمال عن طريق تكامل دالة كثافة الاحتمال ومع ذلك فإن التكامل العددي المباشر ليس عمليا، إذ تم اقتراح طريقة لحساب الاحتمال تتضمن الطريقة تقييم مقياس على سطح كروي للوحدة في فضاء البعد  $p$  الذي يفى بالشروط المشتقة منها والوقت الحسابي المطلوب لمشكلة البعد  $p$  هو يتناسب مع  $P^2$  و  $2^{P-1}$  ، ويزيد بمعدل أقل من ذلك في حالة الطريقة الحالية.

### • قام في العام نفسه كل من Solman, G. J., & Kings tone, A. [46]

باستعمال دالة كثافة الاحتمال القطبية لدراسة مقارنة واستجابة (العين، الرأس) لتحديد مدى دقة الهدف داخل نافذة وحدة النظر عن طريق التكرار (عشوائي، متكرر) بحسب حجم المجموعة وباستعمال جدول ANOVA لبيان مغنوية تأثير كل مجموعة، وكان التأثير الرئيس للرأس مقارنة بالبحث المشروط بالعين كما ينعكس في كليهما مقاييس التوقيت والتوجيه .

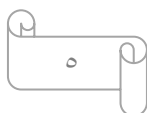
### • قام شون فيلد schonefeld (2015) [44]

بكتابة اطروحته بعنوان "بناء أنظمة دمج بيانات المستشعرات متعددة الوسائط المضمنة في مجال الروبوتات ومراقبة حركة المرور في المطارات" ، إذ بين فيها اسلوب تحويل التوزيعات الاحتمالية من الإحداثيات القطبية إلى الإحداثيات الكارتيزية ، وتم تطبيق ذلك على أجهزة الاستشعار التي تمت مواجهتها في المطارات وبينت السيارات والروبوتات واستعمال نظام الإحداثيات القطبية مع وحدات القياس الخاصة بهم و يشير الاعتقاد في الأهداف إلى أن هذه القيم يجب أن يتم تمريرها عن طريق دالة تحدها مساحة قياس المستشعرات إلى التنسيق التمثيلي الشائع وتقريبا كل المستشعرات تفترض وجود خطأ غاوسي موزع للقياسات ، إذ الأخطاء الفردية لا ترتبط مع بعضها، لسوء الحظ التحول من الإحداثيات القطبية إلى الإحداثيات الكارتيزية ليس خطياً ومن ثم فإن تعيين دالة كثافة احتمالية غاوسية خطية في الاحداثيات القطبية ودالة احتمالية غاوسية خطية في الإحداثيات الكارتيزية – والعكس بالعكس - يؤدي إلى حدوث خطأ.

وعند تطبيق التحويل على التوزيعات من الإحداثيات القطبية إلى الإحداثيات الكارتيزية ، تعتمد النتائج بشدة على معلمات التوزيع الطبيعي كلما زاد عدم اليقين زاد الخطأ من التقريب والتحول دقيق للغاية بالنسبة للمدى المتوسط العالمي لقياسات الرادار وقياسات الليزر .

### • في عام (2017) قام الباحث ( pak, A ) [41]

بتحديد بعض دوال التوزيع ثنائي المتغير في نظام الإحداثيات القطبية ويتم توليد أرقام عشوائية منها ، وفي هذه الدوال عندما يكون التغيير الزاوي لدالة كثافة الاحتمال ثابتاً ، يتم إجراء التباين المكاني بناءً على دالة كثافة الاحتمال وحيد المتغير ، في النظام القطبي تم تطويره في اختبارات جودة الملاءمة للأرقام العشوائية التي تم إنشاؤها في Chi-Square و Kolmogorov-Smirnov ، وقد تم جدولة نتائج المحاكاة التي تم الحصول عليها ، وفي هذه الدراسة تم قياس أداء الدراسات النظرية بإنتاج بيانات اصطناعية يمكن تطبيق هذه الطريقة باستعمال بيانات من واقع الحياة على وفق لنظام الإحداثيات الكارتيزية إذ يمكن تحديد تفوقها وانقطاعها .



• قام في العام نفسه Alford et . al [13]

بإجراء نمذجة باستعمال دالة الكثافة الاحتمالية القطبية إذ يتم حساب دوال كثافة الاحتمال القطبية للموجات الصاعدة والهابطة في جميع المراسي والتي كان لها السبب الرئيس في اضطرابات السرعة والضغط التي بدورها الى ما يسمى بتدفق الطاقة الناتجة عن التغيرات في هذه الاضطرابات ، اذ تم فحص الخصائص المكانية والزمنية والاتجاهية للقاص في 1400 متر العلوي من شمال المحيط الهادي في أواخر الربيع من مجموعة من خمسة مراسي لتحديد السمات المنتشرة من نقل الطاقة من المد والجزر شبه الدورية الى حركات شبه القصور الذاتي.

• في عام (2019) قام ( Kesemen ,O et al. ) [32]

بإقتراح طريقتين مفيدتين لإيجاد دالة التوزيع التراكمي عندما تكون دالة كثافة الاحتمال محدودة بمضلع عشوائي ، بالنسبة لدالة كثافة الاحتمال ثنائي المتغير التي يحدها مضلع عشوائي لها توزيع منتظم يمكن حساب دالة التوزيع التراكمي كدالة مستمرة ومع ذلك فإن حساب دالة التوزيع التراكمي يكون صعباً للغاية عندما لا يكون التوزيع المنتظم لدالة كثافة الاحتمال التي يحد نطاق تعريفها بواسطة مضلع. وتم اقتراح الطرائق التحليلية والرقمية لحساب دالة التوزيع التراكمي ويمكن لهذه الطرائق العثور على دالة التوزيع التراكمي لنقطة ومن المفترض أن تحسب دالة التوزيع التراكمي لذلك يمكن حساب قيم التوزيع التراكمية التي لا يمكن حسابها عملياً بسهولة تامة. ويتم حساب قيم دالة التوزيع التراكمي للنقاط التي يتم اختيارها من دالة كثافة الاحتمال التي يحدها شكل القارة الأسترالية للتعبير عن هاتين الطريقتين، ان الطريقة التحليلية تحسب بدقة ، وتحسب الطريقة العددية فيما يتعلق بعدد المثلثات عندما يزداد عدد المثلثات بالطريقة العددية يتم الحصول على القيم القريبة من النتائج التحليلية.

• في عام (2020) قام الباحث (Kesemen ,O et al.) [31]

تم تحديد بعض دوال التوزيع ثنائي المتغير في نظام الإحداثيات القطبية وتم إنشاء أرقام عشوائية من دوال التوزيع الحدي للتوزيعات القطبية بحيث تم أخذ التغير الزاوي لدالة كثافة الاحتمال على أنه ثابت ، ويتم إجراء تغيير المسافة بناءً على دالة كثافة الاحتمال وحيد المتغير ، وكذلك تم اقتراح اختبار جودة الملازمة مربع كاي للأرقام العشوائية التي تم إنشاؤها في الإحداثيات القطبية، وتم تحديد أربع دوال توزيع مختلفة لتقييم نجاح جودة اختبار مربع كاي المقترحة لاختبار الملازمة لدوال التوزيع القطبي و تم توضيح صحة ونجاح الطريقة المقترحة في دراسة المحاكاة ومثال الحياة الواقعية.

• قام الباحث Hayder A. H في العام نفسه [27]

بتطوير الإجراءات الإحصائية التي يمكن أن تتعامل مع البيانات الدائرية ثنائية المتغير وتختلف البيانات الدائرية عن البيانات الخطية والأساليب الإحصائية كما أن التعامل مع هذا النوع من البيانات جديد ولا يزال قيد التطوير وتم التركيز على بعض المشكلات المتعلقة بالبيانات الدائرية ، اذا تم التركيز على الزوايا ثنائية الأضلاع التي تصف تكوين العمود الفقري للبروتين وتحديث البيانات الدائرية بشكل متكرر وفي كثير من الحالات نحتاج إلى معرفة التوزيع المشترك لمتغيرين عشوائيين دائريين أو أكثر ، لذلك تم اقتراح اولاً طريقة لتقدير دالة الكثافة الاحتمالية للبيانات الدائرية ثنائية

المتغير باستعمال تقنية تقدير كثافة النواة بمعلمات تركيز مختلفة ودوال نواة مختلفة ، واستعمال توزيع كوشي المغلف والتوزيع الطبيعي المغلف ثانيا ، وتم اقتراح نهج لتحديد معامل التتبع الأمثل (عرض النطاق الترددي) للبيانات الدائرية ثنائية المتغير إذ تم استعمال طريقة تقدير الإمكان الأعظم للتحقق من الصحة ودوال دائرية مختلفة للنواة لتوزيع كوشي المغلف والتوزيع الطبيعي المغلف لبناء هذا النهج ثالثاً ، وتم تطبيق الأساليب المقترحة لحساب النطاق الترددي الأمثل لزوايا ثنائية الأضلاع لبعض أنواع البروتينات من أجل إبراز تقدير كثافة النواة على الحلقة لهذه البروتينات ضمن النطاق الترددي الأمثل .

• قام الباحثان Faridi ,M & Khaleidi ,M في العام نفسه [24]

بتوضيح التوزيع الطبيعي القطبي المعمم والذي هو امتداداً للتوزيع الطبيعي عن طريق الطريقة القطبية للنمذجة الثنائية غير المتماثلة والتي غالباً ما تلاحظ خصائص البيانات التجريبية ويتم التحكم في السمتين اللاحتين كلياً بواسطة معلمة عددية منفصلة وتم اشتقاق التعبيرات الصريحة لدالة التوزيع التراكمي ودالة الكثافة والعزم . والتمثيل العشوائي للتوزيع يسهل تنفيذ التقدير البيزي عبر طريقة مونت كارلو لسلسلة ماركوف، وتم تحليل بعض بيانات الحياة الواقعية وكذلك بيانات المحاكاة لتوضيح مرونة التوزيع لنمذجة ثنائية غير متماثلة.

ان فئة جديدة من التوزيعات الطبيعية المعممة والتي تشمل كحالة خاصة من التوزيع الطبيعي. فهناك توزيعان معروفان جيداً هما توزيع مربع كاي والتوزيع نصف الطبيعي يحدان من حالات الإنشاء العام ويوفر الانموذج المقترح نهجاً مرناً لمراعاة عدم التناسق والوضعية الحيوية وهما سمتان منتشرتان في البيانات المعقدة، وتتحكم معلمة الذروة والمعلمة غير المتماثلة في ثنائية النموذج وعدم تناسقه على الترتيب وتم تطوير خوارزمية جيبس للاستدلال البيزي وتم إجراء دراسة محاكاة التي أثبتت النتائج أن الانموذج المقترح لديه القدرة المناسبة لتقدير معلمات الانموذج كما أظهرت العديد من التطبيقات للبيانات الحقيقية فائدة انموذج PGN للبحث الإحصائي التطبيقي. وهناك تحيز في تقدير المعلمات عندما تكون  $\mu$  قريبة من 0 أو 1 ، لذلك يمكن إجراء مزيد من البحث للحصول على تصحيحات التحيز لهذه المقدرات ومن ثم تقليل أخطائهم المنهجية في تقدير المعلمات كما أنه يوفر اختباراً للتماثل واختباراً للحالة الطبيعية في سياق إطار بيزي كان الفصل في سياق المتغير أحادي المتغير ، لذلك يمكن إجراء مزيد من البحث لتوسيع هذا ؟

• قام Huan Q. Bui عام 2021 [29]

بإجراء دراستين متميزتين وهي الأولى دراسة للقياسات التي يتم حملها على السطح وصيغ التكامل (المعممة) المرتبطة بالإحداثيات القطبية ، والثانية دراسة قوى الالتواء للدوال ذات القيمة المعقدة المدعومة بشكل محدود على  $Z^d$  ، وتم استعمال بعض النظريات كأداة لاستنتاج تقديرات معينة للتكاملات المتذبذبة والتي يتم استعمالها لاحقاً لإثبات نتيجة جديدة .

وتم تعميم معادلة تكامل الإحداثيات القطبية والقياس المقابل لها بطريقة تتماشى جيداً مع تحليل بعض التكاملات التذبذبية التي تظهر في دراسة قوى الالتواء للدوال ذات القيمة المعقدة على  $Z^d$  . مستوحاة من صيغة التكامل الكلاسيكية وتعمل صيغة التكامل المعممة أيضاً على تقسيم التكامل عبر  $R^d$  إلى تكامل شعاعي وتكامل زاوي، بالإضافة الى ذلك يتم استبدال المقياس الكروي في الصيغة الكلاسيكية بمقياس أكثر عمومية يتم حمله على السطح والذي ينشأ



بشكل طبيعي من تحليل (فوريه) لقوى الالتواء، وتم اثبات صيغة معممة على أنها أداة مفيدة في تحليل مثل هذه التكاملات المتذبذبة مما يؤدي إلى تقدير نوع معيار الدعم المعن لقوى الالتواء للوظائف ذات القيمة المعقدة لوصف صيغة تكامل الإحداثيات القطبية المعممة التي تمت معالجتها في هذه الدراسة يجب علينا أولاً تقديم فئة من الدوال على  $R^d$  والتي تشترك في العديد من الخصائص المرغوبة مع الإقليدية.

### ثانياً : الدراسات الخاصة بتوزيع ويبيل وسرعة الرياح

هناك العديد من الدراسات السابقة التي تم التطرق فيها الى توزيع ويبيل وجميعها كانت ضمن الاحداثيات الكارتيزية وليس في الاحداثيات القطبية ومن اهم هذه الدراسات :

#### • قام (Shamshad. at al.) (2013) [45]

بدراسة استخدام الرياح كمصدر للطاقة الذي اصبح أمراً شائعاً لأنها غير ملوثة ومتجددة. وان هناك حاجة ملحة في ماليزيا لتطوير التكنولوجيا القائمة على الموقع في هندسة الرياح، والتي يمكن استخدامها للتصميم الأمثل لتوربينات الرياح واختيار اماكنها . اذ تم تحليل بيانات السلاسل الزمنية لسرعة الرياح على الساحل الشرقي لشبه جزيرة ماليزيا لدراسة خصائص الرياح الموسمية والنهارية. تم حساب معلمات Weibull باستخدام طريقة الامكان الاعظم وطريقة الامكان الاعظم المعدلة والرسم البياني وتمت مقارنة الطرق الثلاثة لأدائها. وباستعمال المقياس الاحصائي RMSE توضح أن طريقة الامكان الاعظم المعدلة كان أداؤها أفضل من طريقة الرسم . وتم أيضاً حساب معلمات Weibull للأشهر الفردية وتمت مناقشة تكرارات توزيع Weibull لجميع مواسم الرياح الموسمية الأربعة .

#### • قام عباس ، اياد عبدالعزيز واخرون (2014) [8]

بتقدير معلمات توزيع ويبيل وقدرة الرياح لثلاث مواقع متفرقة من العراق وهي : بغداد والبصرة وذي قار وبعد جمع البيانات عن كل محطة من محطات الدراسة وللسنوات 2009-2010 وتم بناء برمجيات خاصة لتقدير معلمات توزيع ويبيل (كونه يمثل التوزيع الامثل لإحصائيات سرعة الرياح) باستخدام طريقة الامكان الاعظم (MLE) وطريقة المربعات الصغرى (LS) كذلك تم حساب التكرار النسبي لسرع الرياح مع ملاحظة السرعة الأكثر توافراً خلال العامين المذكورين باستخدام نفس البرنامج وبعدها تم رسم توزيع دالة ويبيل (دالة الكثافة الاحتمالية) بالإضافة الى حساب الكميات الاحصائية المهمة لبيانات الرياح كمعدل سرعة الرياح والانحراف المعياري للقيم واعلى قيمة واقل قيمة كانت خلال فترة الدراسة .

#### • قام بدر، دريد وحسين و الحكيم، معاني احمد (2019) [3]

تم تقدير دالة المعولية لتوزيع ويبيل ذي المعلمتين من خلال توضيح اسلوب المحاكاة Simulation بطريقة مونت كارلو للمقارنة بين طرائق التقدير (طريقة الامكان الاعظم، طريقة العزوم، طريقة المربعات الصغرى) بغية الوصول الى افضل طريقة لتقدير تلك الدالة وقد توصل الباحث الى افضلية طريقة الامكان الاعظم (MLE) في تقدير دالة المعولية مقارنة مع باقي طرائق التقدير وذلك بالاعتماد على المقياس الاحصائي متوسط مربعات الخطأ التكاملية (Integral Mean Squared Error (IMSE) .

### • قام راهي، عبدالرحيم خلف وشرهان ، راند فيصل (2019) [5]

بتقدير معلمات دالة توزيع ويبيل ذو المعلمتين (معلمتي القياس والشكل) باستخدام اسلوب التقدير الخطي لتحويل التوزيع الى نموذج انحدار خطي بسيط ومن ثم استخدام طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية (OLS) وطريقة المربعات الصغرى الموزونة (WLS) والمقارنة بينهما من خلال اصغر متوسط مربعات خطأ ممكن (MSE) وتم استخدام بيانات فعلية لإعداد الوافدين (مختلف الجنسيات) الى العراق عن طريق منفذ زرباطية وتحليلها واستخلاص النتائج باستخدام برنامج MS. Excel 2007 وقد تبين ان طريقة المربعات الصغرى الموزونة اعطت افضل مقدر باقل متوسط لمربع الخطأ .

### • قام سعيد، شروق عبد الرضا و مجلي، احمد عاجل (2020) [6]

بالمقارنة بين طريقة الامكان الاعظم وطريقة المربعات الصغرى الاعتيادية لتقدير معلمات ودالة البقاء للتوزيع المركب( ويبيل - رايلي) حيث ت استعمال اسلوب المحاكاة للمقارنة بين الطريقتين باستخدام لغة (R) ، اذ تم افتراض عدد من الحالات للمعلمات وعدد من احجام العينات , ولمعرفة افضل طريقة في التقدير تم استعمال المقياس الاحصائي MSE وقد اظهرت نتائج المحاكاة افضلية طريقة الامكان الاعظم على المربعات الصغرى الاعتيادية.

تختلف دراستنا عن الدراسات السابقة المذكورة من حيث بناء انموذج احتمالي مقترح في نظام الاحداثيات القطبية وهو توزيع ويبيل القطبي الحدي إذ تم اخذ الانموذج في حالة المتغيرين bivariate أولا ومن ثم يتم بناء انموذج في متغير واحد Univariate على فرض ان المتغير الاخر يتوزع بشكل منتظم والانموذج المقترح الذي تم التوصل اليه هو دالة التوزيع الحدي القطبي لتوزيع ويبيل كون ان الدالة الحدية لها خواص الدالة نفسها ذي المتغير الأحادي. وكذلك تم توضيح واشتقاق بعض الخواص المهمة للتوزيع الجديد وتم التطرق أيضا الى بعض الطرائق المهمة في تقدير معلمات الانموذج مع اختبار حسن ملائمة البيانات للتوزيع الجديد. وكذلك تم اثبات ان التوزيع في الاحداثيات القطبية يمثل البيانات افضل تمثيل مقارنة بالتوزيع في الاحداثيات الكارتيزية وباستعمال بعض معايير المقارنة.

# الفصل الثاني

الجانب النظري

**تمهيد preface:**

في هذا الفصل يتم التطرق الى بعض المفاهيم الاساسية وتوضيح مفهوم الاحداثيات القطبية ، و كذلك الى توزيع ويبل وكيفية بناء هذا التوزيع في الاحداثيات القطبية وسيتم توضيح الرسم البياني في الاحداثيات القطبية وبيان اهم طرائق تقدير معلمات التوزيع الجديد الذي تم الحصول عليه في الاحداثيات القطبية وتم التطرق الى اهم اختبارات الجودة لهذا التوزيع.

**1-2 بعض المفاهيم الاساسية :**

**1-1-2 المتغير العشوائي Random variable [11, 28]**

يقال ان  $X$  متغير عشوائي مستمر اذا كان فضاء العينة  $\Omega$  مجموعة غير قابلة للعد سواء أكانت منتهية أم غير منتهية . وبمعنى اخر هو دالة ذات قيمة حقيقية يتم تعريفها ضمن فضاء العينة ، ويأخذ قيما معرفة في المجال  $R$  ، اذ ان  $R$  تمثل حقل الاعداد الحقيقية وبذلك فان المتغير العشوائي هو دالة منطلقها ومداهما هو  $R$ .

$$\{f: R \rightarrow R\}$$

**2-1-2 الدوال الاحتمالية Probability functions [11, 28]**

تعد دالة التوزيع المبدأ الاساس في النظرية الاحصائية فان اول ما يتبادر للذهن هو دوال التوزيع احادي المتغير وفي حالة وجود متغيرين يتم استعمال دالة التوزيع المشتركة لمتغيرين وتسبب دوال التوزيع المشتركة هذه مشكلات مثل حالة الاستقلال وانعكاس الدوال (الدوال العكسية)، لذلك يتم تفضيل استعمال دالتي التوزيع الحدي أو المشروط بدلا من دوال التوزيع المشتركة لتلافي هذه المشكلات

ويمكن تعريف الدالة الاحتمالية على انها نموذج رياضي لتجربة عشوائية يوضح سلوك ظاهرة معينة (متغير عشوائي) او مجموعة من الظواهر (متغيرات عشوائية) . وهي على نوعين تبعا لنوع المتغير :

١- دوال الكتلة الاحتمالية (المتغير متقطع)

٢- دوال الكثافة الاحتمالية (المتغير مستمر)

وسوف نتناول النوع الثاني كونه يخص المتغير المستمر والذي يخص متغيرات الدراسة.

**1-2-1-2 دالة الكثافة الاحتمالية : Probability density function (p.d.f) [11, 28]**

فرض ان  $X$  متغير عشوائي مستمر وان  $f(x)$  هي دالة بدلالة المتغير  $x$  ويمكن تعريف هذه الدالة ضمن المجموعة  $A$  (مجموعة جزئية) معرفة في المجال  $\Omega$  وكما يأتي :

$$A = \{x : a \leq x \leq b\}$$

أي حساب احتمال ان :

$$P_r(x \in A) , \quad P_r(\Omega) = 1$$

فان :

$$\{ 0 \leq P_r(x) \leq 1 \}$$

بما ان A مجموعة جزئية من  $\Omega$  فإن :

$$P_r(x \in A) = \int_a^b f(x)dx$$

أي حساب مقدار كثافة الاحتمال المقترن بالفترة  $[a, b]$

أي اننا بصدد ايجاد المساحة تحت المنحنى للدالة  $f(x)$  المحددة بالفترة  $[a, b]$  .

ويمكن التعبير عن خواص الدالة باختصار كما يأتي :

$$1- f(x) > 0 \quad \forall x \in X$$

$$2- \int_a^b f(x)dx = 1$$

### 3-1-2 دالة التوزيع التراكمية: [11, 28] Cumulative Distribution Function (C.D.F)

وتسمى احيانا دالة التوزيع **Distribution function (D.F)** او دالة الاحتمال التراكمي

وتعرف على انها قيمة الاحتمال المتراكم لغاية قيمة معطاة من قيم المتغير العشوائي X المعرفة في المجال  $\Omega$  ،

$$\Omega = \{x: a \leq x \leq b\}$$

لتكن x قيمة من قيم المتغير X المعرفة في  $\Omega$  وله دالة كثافة احتمالية  $f(x)$  عندئذ فان دالة التوزيع :

يرمز لها بالرمز  $F(x)$  وتعني:

$$F(x) = P_r(X \leq x) = \int_a^x f(u)du \quad \dots(2-1)$$

وهي دالة غير متناقصة **non- decreasing function** تعبيراً عن عملية تراكمي احتمالي ، ولهذه الدوال اهمية كبيرة في حساب ما يسمى بالقيم الحرجة او الجدولية **critical values** للتوزيعات الاحتمالية .

### 1-3-1-2 خصائص دالة التوزيع التراكمية [11, 28]

-1

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = F(a) = \int_a^b f(u)du = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = F(b) = \int_a^b f(u)du = 1$$

وهذا يعني  $0 \leq F(x) \leq 1$

ويمكن القول بان  $F(x)$  متغير عشوائي معرف في الفترة  $[0, 1]$  .

2- يعبر عن الاحتمال في مدة معينة مثل  $[a, b]$  ومعرفة في  $\Omega$  بدلالة  $F(x)$  كما يأتي :

$$P_r(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx = \int_{-\infty}^b f(x)dx - \int_{-\infty}^a f(x)dx \quad \dots(2-2)$$

$$= F(b) - F(a)$$

3 - العلاقة بين  $f(x)$  و  $F(x)$

$F(x)$  هي تكامل الدالة  $f(x)$  وذلك يعني ان مشتقة  $F(x)$  هي  $f(x)$  أي ان :

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_{\forall x} f(x)dx \right) = f(x) \quad \dots(2-3)$$

### 4-1-2 التوزيع الاحتمالي المشترك Joint distribution<sup>[11, 28]</sup>

وهو دالة احتمالية تجمع بين عدة متغيرات عشوائية في ان واحد فلو كان لدينا متغيرين عشوائيين  $X_1$  و  $X_2$  مثلاً ويعبر عن سلوك هذين المتغيرين بما يسمى التوزيع الاحتمالي لمتغيرين **Bivariate distribution** واذا كان لدينا اكثر من متغيرين  $X_1, X_2, \dots, X_k$  يدعى بالتوزيع الاحتمالي متعدد المتغيرات **Multivariate distribution**. ويمكن تحديد نوع التوزيع استناداً الى نوع المتغير اذا كان مستمراً او متقطعاً وايضا سوف نتطرق الى ما يخص المتغير المستمر.

### 1-4-1-2 دوال الكثافة الاحتمالية المشتركة: Joint probability density function (J.p.d.f)

لو كان لدينا  $X_1, X_2$  متغيرين عشوائيين من النوع المستمر فان دالة الكثافة الاحتمالية تعبر عن سلوك هذين المتغيرين معا هي  $f(x_1, x_2)$  وهنا لا تعبر عن قيمة احتمالية بل تعبر عن قيمة الدالة  $f$  عند قيم مخصصة الى  $x_1, x_2$  مثل  $(x_1, x_2)$  ويمكن إعمام ذلك الى اكثر من متغيرين  $X_1, X_2, \dots, X_k$  متغيرات عشوائية مستمرة.

الخصائص :

- ١- دالة  $f$  دالة وحيدة القيمة عند أي قيمة مخصصة الى  $x_1, x_2, \dots, x_k$
- ٢- دالة  $f$  دالة غير سالبة عند أي قيمة مخصصة الى  $x_1, x_2, \dots, x_k$
- ٣- التكامل للدوال بشكل عام

$$\int_{\forall x_1} \int_{\forall x_2} \dots \int_{\forall x_{k-1}} \int_{\forall x_k} f(x_1, x_2, \dots, x_k) dx_1 dx_2 \dots dx_k = 1 \quad \dots(2-4)$$

وفي حالة متغيرين فقط

$$\int_{\forall x_1} \int_{\forall x_2} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 1 \quad \dots(2-5)$$

**2-4-1-2 الدالة التوزيعية المشتركة (التراكمية) : Joint distribution function ( J.C.D.F )**

لأي توزيع احتمالي مشترك تعرف بانها قيمة الاحتمال المتراكم لغاية قيمة معطاة الى  $(x_1, x_2, \dots, x_k)$

لتكن  $(x_1, x_2, \dots, x_k)$  فاذا رمزنا للدالة التوزيعية بالرمز  $F(x_1, x_2, \dots, x_k)$  عندئذ :

$$F(x_1, x_2, \dots, x_k) = P_r( X_1 \leq x_1 , X_2 \leq x_2 , \dots, X_k \leq x_k ) \quad \dots (2 - 6)$$

ففي حالة المتغيرات المستمرة فان العلاقة بين دالة الكثافة الاحتمالية  $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$  والدالة التوزيعية المشتركة  $F(X_1, X_2, \dots, X_k)$  هي :

$$F(x_1, x_2, \dots, x_k) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_k} f(u_1, u_2, \dots, u_k) du_1 \dots du_{k-1} du_k \quad \dots (2 - 7)$$

$$\frac{\partial^k F(x_1 x_2 \dots x_k)}{\partial x_1 dx_2 \dots dx_k} = f(x_1 x_2 \dots x_k) \quad \dots (2 - 8)$$

وفي حالة المتغيرين كحالة خاصة

$$F(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f(u_1, u_2) du_2 du_1 \quad \dots (2 - 9)$$

$$\frac{\partial^2 F(x_1 x_2)}{\partial x_1 dx_2} = f(x_1 x_2) \quad \dots (2 - 10)$$

**خصائص الدالة التوزيعية المشتركة :**

١- على فرض وجود متغيرين عشوائيين  $X_1, X_2$  من النوع المستمر فإن

$$F(-\infty, x_2) = \lim_{x_1 \rightarrow -\infty} F(x_1, x_2) = 0$$

$$F(x_1, -\infty) = \lim_{x_2 \rightarrow -\infty} F(x_1, x_2) = 0$$

$$\lim_{x_1, x_2 \rightarrow \infty} F(x_1, x_2) = 1$$

$$\lim_{x_1, x_2 \rightarrow -\infty} F(x_1, x_2) = 0$$

$$\lim_{x_1 \rightarrow \infty} F(x_1, x_2) = F(x_2)$$

$$\lim_{x_2 \rightarrow \infty} F(x_1, x_2) = F(x_1)$$

٢- ان  $0 \leq F(x_1, x_2) \leq 1$  مادامت تمثل  $F$  التراكم الاحتمالي لغاية قيمة معطاة الى  $(x_1, x_2)$  مثل  $(x_1, x_2)$

٣- ان الدالة  $F(x_1, x_2)$  مستمرة نحو الجانب الايمن وغير متناقصة فاذا كانت

$a_1 \leq a_2$  ،  $b_1 \leq b_2$  اعداد حقيقية فان :

$$F(a_1, b_1) \leq F(a_2, b_1) \leq F(a_2, b_2)$$

$$F(x_1, x_2) = P( X_1 \leq x_1 , X_2 \leq x_2 ) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f(u, v) dv du$$

**5-1-2 التوزيع الحدي** [11, 28] **Marginal distribution**

لو كان لدينا عدة متغيرات عشوائية  $x_1, x_2, \dots, x_k$  وتطلب الامر ايجاد التوزيع الاحتمالي لأي متغير منهما عندئذ فان الدالة  $f(x_i)$  لكل  $i = 1, 2, \dots, k$  ، تسمى بالتوزيع الحدي (الدالة الحدية) للمتغير  $X_i$ .

ولو كان لدينا المتغيرين العشوائيين  $x_1, x_2$  تسلك وفق توزيع مشترك معين ولهما الدالة  $f(x_1, x_2)$  ، فلو اردنا التوزيع الاحتمالي الحدي لأي متغير منهما عندئذ يسمى  $f(x_1)$  او  $f(x_2)$  التوزيع الحدي او الدالة الحدية للمتغير المعني ، وتعني عملية ايجاد دالة التوزيع الحدي هي انتزاع دالة احتمالية لأي متغير او مجموعة من المتغيرات ، ونحصل على دالة الكثافة الحدية في حالة المتغيرات المستمرة كالآتي :

$$f(x_1) = \int_{\forall x_2} f(x_1, x_2) dx_2 \quad \dots (2 - 11)$$

$$f(x_2) = \int_{\forall x_1} f(x_1, x_2) dx_1 \quad \dots (2 - 12)$$

ويمكن تعميم ذلك لـ  $k$  من المتغيرات

**خصائص التوزيع الحدي :**

ان الدوال الحدية تتصف بالخواص الثلاث نفسها للدول الاحتمالية :

١- دوال وحيدة القيمة

٢- غير سالبة

٣- المجموع أو التكامل على قيم متغيرات الدالة الحدية الممكنة يجب ان يكون مساوياً للواحد .

- الدوال الحدية لمتغير واحد هي في الحقيقة الدول الاحتمالية الفردية نفسها اما الدول لمتغيرين او اكثر هي الدول الاحتمالية المشتركة نفسها .

وبالأسلوب نفسه يمكن الحصول على دول التوزيع التراكمية الحدية  $F(x_1)$  و  $F(x_2)$

**6-1-2 معامل التحويل (Jacobain)** [11, 28]

لنفرض ان لدينا المتغيرات العشوائية  $X$  و  $Y$  وهي دول بمتغيرات اخرى  $W$  و  $Z$  وكما يأتي :

$$X = g(Z, W)$$

$$Y = h(Z, W)$$

ولغرض ايجاد التحويل العكسي للمتغيرات يجب ان نجد معامل التحويل كما يأتي :

$$J(z, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial z} & \frac{\partial g}{\partial w} \\ \frac{\partial h}{\partial z} & \frac{\partial h}{\partial w} \end{vmatrix} \quad \dots (2 - 13)$$

ويتم الحصول على دالة التحويل بتطبيق الصيغة الآتية :

$$f(z, w) = \int f(x, y) |J(z, w)| dx dy \quad (2 - 14)$$



2-2 بعض التوزيعات الاحتمالية المستمرة

1-2-2 التوزيع المنتظم : Uniform Distribution [11, 28]

يسمى أحيانا بالتوزيع المستطيل كون مخطط التوزيع يأخذ شكل المستطيل Rectangular distribution

ليكن المتغير العشوائي المستمر  $X$  ضمن المجال  $a \leq X \leq b$  ، فان دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير  $X$  تعطى بالصيغة الآتية :

$$f(x, a, b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & o.w \end{cases} \quad \dots (2-15)$$

وبصورة مختصرة يمكن التعبير عن توزيع المتغير  $x$  كالآتي :

$$X \sim U(a, b)$$

اذ  $a, b$  تمثل معلمتا التوزيع وهما عدنان حقيقيان إذ  $a < b$  .

وان من اهم استعمالات التوزيع هي تكوين جداول الاعداد العشوائية .

ويتم تعريف دالة التوزيع التراكمي (c.d.f) للمتغير العشوائي  $X$  على انها :

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{b-a} dt \quad a \leq X \leq b \quad \dots (2-16)$$

ونظرا لكون القيم الاحتمالية لدالة الكثافة الاحتمالية (p.d.f) تكون موجبة فالقيم التي تقع خارج الحدود تكون مساوية للصفر وعليه فان المعادلة المذكور انفا تكون بالصورة الآتية :

$$F_x(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} dt \quad a \leq X \leq b \quad \dots (2-17)$$

وبعد اجراء التكامل ضمن الحدود المذكورة القابلة للتكامل يكون التعبير عن دالة التوزيع التراكمي (C.D.F) كما يأتي :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq X \leq b \\ 1 & x > b \end{cases} \quad \dots (2-18)$$

**Weibull Distribution** [3,11, 28] : توزيع ويبيل : 2-2-2

ويعد هذا التوزيع من التوزيعات المستمرة وينسب الى العالم الفيزيائي السويدي Waloddi Weibull اذ قام باشتقاق واستعمال هذا التوزيع عام 1939 في دراسة العدد المنتجة صناعيا وكذلك تم استعمال التوزيع من Kao عام 1958 في دراسة المعولية ، وأيضا يُستعمل توزيع ويبيل لمحاكاة كثير من التطبيقات الاحتمالية كسرعة الرياح مثلا وفي المجال الصناعي والحياتي.

ومن الجدير بالذكر أن الخصائص المهمة لهذا التوزيع إنه يعد إعماما لتوزيعات عدة، وقد أخذ حيزا واسعا من اهتمام الباحثين . وان الصيغة المستعملة لتوزيع ويبيل ذي المعلمتين قد اشتق من دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع كاما العامة على وفق الصيغة الاتية :

$$f(x; a, \lambda, k) = \begin{cases} \frac{a}{\Gamma(k)\lambda^{ka}} x^{ka-1} \cdot e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^a} , & X \geq 0, a, \lambda, k > 0 \quad \dots (2-19) \\ 0 & o.w \end{cases}$$

وعند التعويض عن  $(a = 1)$  نحصل على دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع كاما وحسب الصيغة الاتية:

$$f(x; \lambda, k) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(k)\lambda^k} x^{k-1} \cdot e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)} , & X \geq 0, a, \lambda, k > 0 \quad \dots (2-20) \\ 0 & o.w \end{cases}$$

وعند التعويض عن  $(k=1)$  في معادلة (2-19) نحصل على دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ويبيل حسب الصيغة الاتية :

$$f(x; a, \lambda) = \begin{cases} \frac{a}{\lambda^a} x^{a-1} \cdot e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^a} , & x \geq 0, a, \lambda > 0 \quad \dots (2-21) \\ 0 & o.w \end{cases}$$

اذ ان :  $a > 0$  ،  $\lambda > 0$  معلمتا التوزيع

$\lambda$  : تمثل معلمة القياس لتوزيع ويبيل ووحداتها هي وحدات المتغير X نفسها .

$a$  : تمثل معلمة الشكل لتوزيع ويبيل بدون وحدات .

ومن هذه الدالة يتضح انه اذا كانت قيمة  $a=1$  نعوض في معادلة (2-21) فان التوزيع يختزل الى التوزيع الاسي

(Exponential distribution)

$$f(x; \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\frac{x}{\lambda}} , & x \geq 0 \\ 0 & \dots (2-22) \end{cases}$$

والتي تمثل دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الاسي .

**اهم خصائص التوزيع:** Properties:

١- دالة التوزيع التراكمي (C.D.F)

وتعطي بالصيغة الاتية :

$$F(x; \lambda, a) = \begin{cases} 1 - e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^a} , & X \geq 0 \\ 0 , & x < 0 \end{cases} \quad \dots (2-23)$$

٢- المتوسط

$$\mu = EX = \lambda \Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)$$

٣- الوسيط ويمثل قيمة  $x$  الناتجة من حل الصيغة  $F(x) = 1/2$

$$Me = \lambda (\ln(2))^{1/a}$$

٤- المنوال ويمثل قيمة  $x$  الناتجة من حل المعادلة التفاضلية  $f'(x) = 0$  إذ أن  $f''(x) < 0$

$$Mo = \lambda \left(\frac{a-1}{a}\right)^{1/a}, \quad a > 1$$

٥- التباين

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \lambda^2 \Gamma\left(1 + \frac{2}{a}\right) - \mu^2 \\ &= \lambda^2 \left[ \Gamma\left(1 + \frac{2}{a}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{a}\right) \right] \end{aligned}$$

٦- الدالة المولدة للعزوم

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \lambda^n}{n!} \Gamma\left(1 + \frac{n}{a}\right), \quad a \geq 1$$

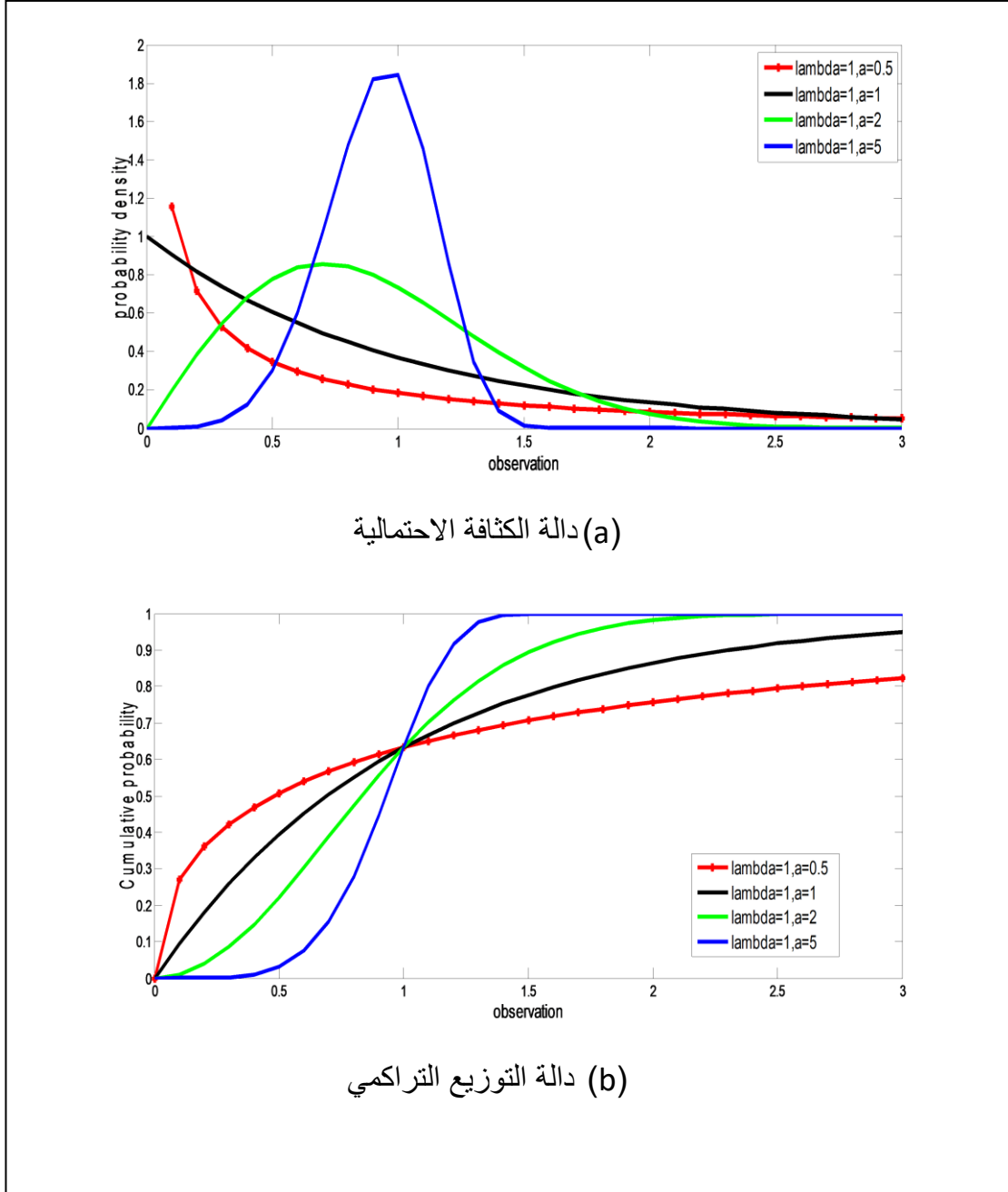
٧- الدالة المميزة

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n \lambda^n}{n!} \Gamma\left(1 + \frac{n}{a}\right)$$

$$EX^r = \lambda^r \Gamma\left(1 + \frac{r}{a}\right)$$

٨- العزم الرائي عن نقطة الاصل

والشكل (1-2) يوضح (a) دالة الكثافة الاحتمالية p.d.f و (b) دالة التوزيع التراكمي C.D.F لتوزيع ويبيل



الشكل (1-2) يمثل (a) دالة الكثافة الاحتمالية و (b) دالة التوزيع التراكمي لتوزيع ويبيل

• الرسم من اعداد الباحث بالاعتماد على برنامج Matlab2014-a

3-2 الاحداثيات القطبية: Polar Coordinate [31,41]

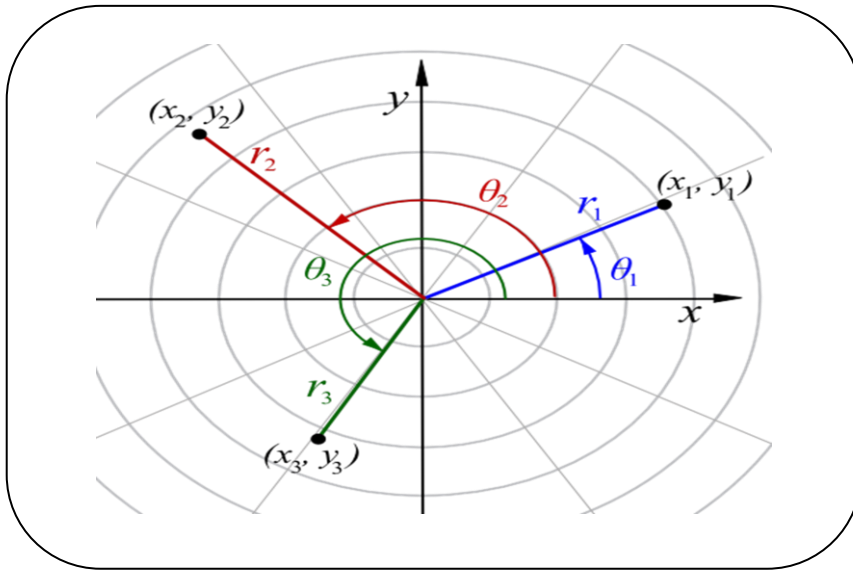
نظام الإحداثيات القطبية هو نظام إحداثيات ثنائي الأبعاد ويستعمل هذا النظام في العديد من المجالات مثل الرياضيات ، والأحياء ، والفيزياء ، والهندسة ، والبحرية ، والروبوتات ، ومضادات الطائرات ، وأجهزة الإرسال الهاتفية. يتم استعمال نظام الإحداثيات القطبية عندما يتم التعبير بسهولة عن العلاقة بين إحداثيات من حيث الزاوية والمسافة، إذ يتم تحديد هذه العلاقة أيضاً عن طريق الصيغ المثلثية.

في بعض مشكلات الحياة الواقعية يكون من الأفضل استعمال نظام الإحداثيات القطبية بدلاً من الإحداثيات الكارتيزية  $(x,y)$  على وجه الخصوص ، ويستعمل مراقبو الحركة الجوية أنظمة رادار حديثة لتوجيه مسار الطائرات والحصول على مسارات ورحلات جوية آمنة وهذا يضمن بقاء الطائرة على مسافة آمنة من الطائرات الأخرى والتضاريس الأرضية ويستعمل الرادار قياسات الزوايا والمسافات المتجهة لتمثيل موقع الطائرة ويقوم المراقبون بتبادل هذه المعلومات مع الطيارين .

وهناك عدة أنواع من الاحداثيات ومنها الاحداثيات الكارتيزية Cartesian coordinates والاحداثيات القطبية Polar Coordinate.

- الاحداثيات الكارتيزية Cartesian Coordinates : تتكون من محورين المحور الأفقي X والمحور العمودي Y وينقاطعان عند نقطة تسمى نقطة الأصل .
- الاحداثيات القطبية Polar Coordinate : تحدد المحاور القطبية بالبعد r (البعد عن نقطة الأصل (0,0) وموقع النقطة  $(x,y)$ ) والزاوية  $\theta$  التي يصنعها مع المحور الأفقي وتقاس بالدرجة او الراديان.

والشكل (2-2) يوضح زوايا مختلفة ثنائية الأبعاد في نظام الاحداثيات القطبية مقارنة مع الاحداثيات الكارتيزية



الشكل (2-2) ثلاث زوايا ثنائية الأبعاد لتمثل نظام الاحداثيات القطبي مقارنة بالكارتيزي

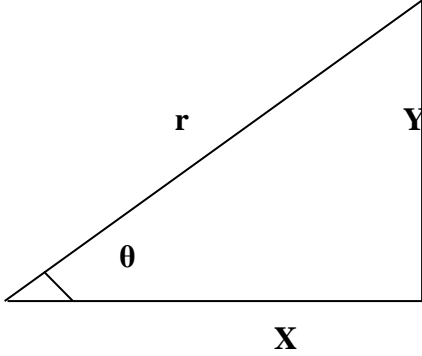
• المصدر [41]

ويمكن تعريف الاحداثيات القطبية: **polar coordinates**

لأي نقطة  $p(x,y)$  في المستوى الاحداثي الكارتي (  $x - y$  )، يكون الزوج المرتب من الاعداد الحقيقية  $( r, \theta )$  يشار اليها على انها الاحداثيات القطبية للنقطة  $p(x,y)$ .

### 1-3-2 العلاقة بين الاحداثيات الكارتيية والقطبية:

يمكن توضيح العلاقة بين الاحداثيات القطبية والكارتيية عن طريق رسم المثلث



$$\sin \theta = \frac{y}{r} \quad , \quad \cos \theta = \frac{x}{r}$$

يمكن تحويل المحاور القطبية المستوية لأي نقطة الى محاور ديكارتيه باستعمال العلاقة

$$x = r \cos \theta$$

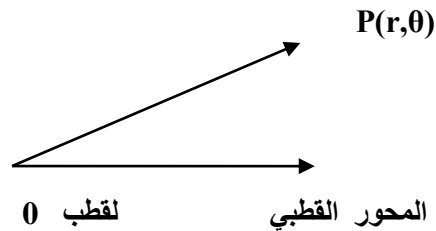
$$y = r \sin \theta$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \longrightarrow \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{يمكن الحصول على قيمة } r$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \quad \longrightarrow \quad \theta = \tan^{-1} \left( \frac{y}{x} \right)$$

$$r \geq 0 \quad , \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

- يمكن تحديد درجة الزاوية  $\theta =$  صفر عند الشرق او الشمال أي احداثي اخر .
- المحور القطبي : هو نصف مستقيم يمتد أفقيا من القطب الي اليمين
- $r$  : تمثل المسافة المتجهة من القطب  $0$  الى النقطة  $p$  أي تتضمن قيما واتجاها فمن الممكن ان تكون  $r$  قيمة سالبة .
- $\theta$  : الزاوية المتجهة أي تتضمن قيمة واتجاها من المحور القطبي الى النقطة  $p$ .



وهناك بعض الملاحظات او الخصائص وكما يأتي :

## الفصل الثاني

• عندما  $r = 0$  ليس مرغوب فيه لأنه يؤدي الى بعض التناقضات اذ تصبح النظريات الرياضية مستحيلة وذلك عندما يتم تغيير المتغيرات من الاحداثيات الكارتيزية الى الاحداثيات القطبية اذ يتطلب ان يكون معامل التحويل (Jacobian) مختلفا عن الصفر.

• وخلاصة القول  $r = 0 \rightarrow j = 0$  و يعني انه من المستحيل تغيير الاحداثيات القطبية في الاصل  
• ان المجال الخاص بالمتغير  $\theta$  هو  $\theta \in (-\infty, +\infty)$  ، هو مجرد نظري فقط ففي بعض التطبيقات عندما  $\theta$  تمثل متغير الزمن فان  $\theta \in [0, +\infty]$  .

و يمكن كتابة الاحداثيات القطبية  $(r, \theta)$  بعدد لانهاهي من الطرائق

$$(r, \theta \pm 360) , \text{ Or } (r, \theta \pm 2\pi)$$

او بصورة عامة :

$$(r, \theta + 360 n)$$

اذ  $n$  عدد صحيح وكذلك يمكن كتابة الاحداثي كما يأتي:

$$(r, \theta + 2n \pi)$$

تعيين الاحداثيات القطبية في المستوى القطبي والذي يتخذ شكلا دائريا كما تعين الاحداثيات الكارتيزية في المستوى الاحداثي الذي يتخذ شكلا مستطيلا .

في النظام القطبي يتم التعبير عن الزوايا عموما أما بالدرجات او بالقياس الدائري (الراديان Radian) اعتمادا على الحاجة في منطقة الاستعمال يتم تحديد درجات او راديان فمثلا يتم استعمال مقياس الدرجة في التطبيقات البحرية بينما يتم استعمال مقياس الراديان في تطبيقات الفيزياء لاسيما في تطبيقات مثل ميكانيكا الدوران ، اذ تم اعطاء قيمة القياس المحددة بالقياس الدائري (الراديان) .

وان العلاقة بين قياس الزاوية بالدرجات او بالقياس الدائري تحسب من العلاقة التالية :

$$\theta^\circ = \frac{\theta}{\pi} 180$$

$$\theta = \frac{\theta^\circ}{180} \pi \quad \dots (2 - 24)$$

اذ ان:

$$\pi = 3.14 \text{ في القياس الدائري}$$

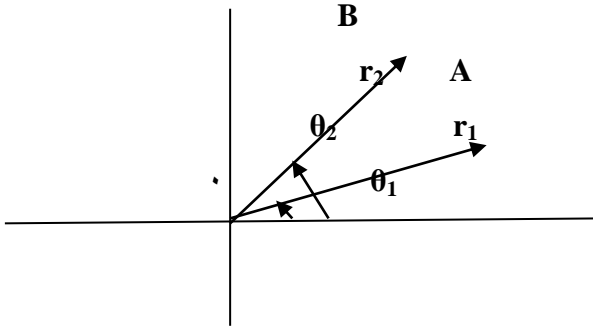
### 2-3-2 المسافة بين نقطتين في الاحداثي القطبي

لو كان لدينا نقطتان  $A(r_1, \theta_1)$  و  $B(r_2, \theta_2)$  في الاحداثيات القطبية وكما في الشكل المذكور انفا ولقياس المسافة بينهما تحسب وفق العلاقة الاتية:

$$AB = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}$$

و لإثبات ذلك نعمل المثلث الذي رؤوسه O,A,B وباستعمال قانون جيب التمام

$$(AB)^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)$$



### 3-3-2 الزوايا المنتظمة [52]

زوايا تتسم بتساوي اضلاعها وتوزع بانتظام حول نقطة مركزية (جميع الزوايا متساوية بالقياس).  
وهناك عدة انواع تشمل:

- ١- المثلث المتساوي الاضلاع جميع اضلاعه وزواياه متساوية وقياس كل زاوية فيه  $60^\circ$ .
- ٢- المربع جميع اضلاعه وزواياه متساوية وقياس كل زاوية فيه  $90^\circ$
- ٣- المستطيل جميع زواياه متساوية وبدرجة  $90^\circ$
- ٤- الدائرة جميع الزوايا تكون فيه  $90^\circ$  ونصف قطرها متساوي لجميع الاضلاع.

### 4-3-2 معامل التحويل في الاحداثيات القطبية, [37]

the Jacobian of the polar coordinates

يمكن الحصول على معامل التحويل للإحداثيات القطبية ذي البعدين (2-D) حسب الصيغة:

$$x = r \cos \theta \quad ; \quad \cos \theta = \frac{x}{r} \quad ; \quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{x}{r}\right)$$

$$y = r \sin \theta \quad ; \quad \sin \theta = \frac{y}{r} \quad ; \quad \theta = \sin^{-1}\left(\frac{y}{r}\right)$$

$$|J| = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r \quad \dots (2 - 25)$$

Where:

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$



الرسوم البيانية تظهر تكرارات البيانات اذ يتم استعمال مسافات زمنية متساوية عندما تكون الدوال احادية المتغير ويتم استعمال المساحة المتساوية للمتغير الثنائي بأن تلائم دالة كثافة الاحتمال .

لذلك عندما يتم تمثيل المدرج التكراري للبيانات ثنائية المتغير في الاحداثيات الكارتيزية يتم استعمال مناطق او مساحات متساوية بينما في الاحداثيات القطبية يتم استعمال شرائح متساوية .

يتم اخذ التغيير الزاوي على مدد متساوية في اثناء رسم المدرج التكراري (الرسم البياني) القطبي وعلى وفق ذلك يتم اخذ الدائرة بأكملها على انها  $2\pi = 360^\circ$  وكانت هذه الدائرة مقسمة الى شرائح  $C_\theta$  ، فان الفاصل الزمني أو المدة الزمنية لكل شريحة ( الفرق بين زاوية واخرى  $\Delta\psi$  ) يمكن التعبير عنه بالعلاقة :

$$\Delta\psi = \frac{2\pi}{C_\theta} \quad \dots (2 - 26)$$

وان حدود او نطاق هذه الشرائح يمكن ايجاده من العلاقة الاتية:

$$\Psi_j = j \cdot \Delta\psi \quad ; \quad j = 0,1,2,\dots,C_\theta \quad \dots(2-27)$$

لتوضيح الرسم البياني في الاحداثيات القطبية لنفرض ان لدينا 12 شريحة أي ان  $C_\theta = 12$

لذلك سوف تكون العلاقة

$$\Delta\psi = \frac{2\pi}{C_\theta} = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$$

$$\Psi_0 = (0)(30) = 0^\circ$$

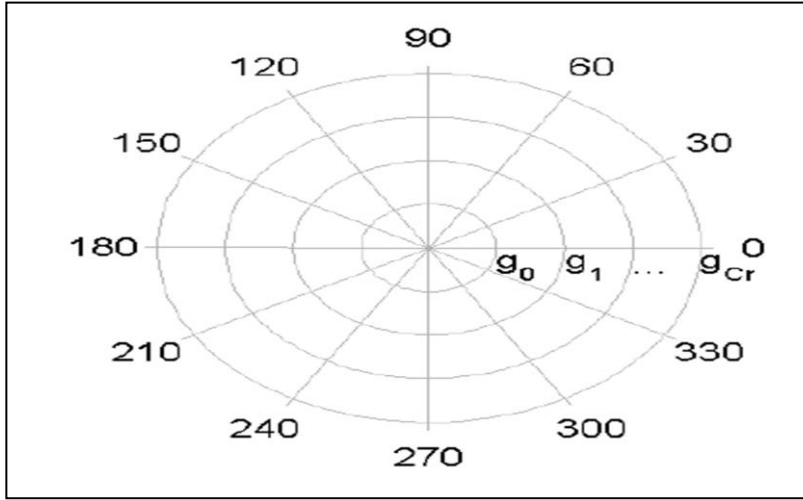
$$\Psi_1 = (1)(30) = 30^\circ$$

$$\Psi_2 = (2)(30) = 60^\circ$$

..

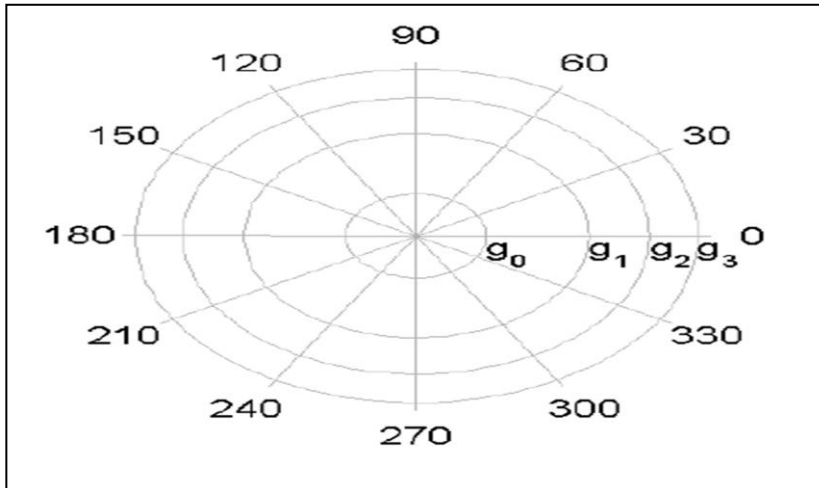
$$\Psi_{C_\theta} = (12)(30) = 360^\circ$$

والشكل (3-2) والشكل (4-2) يوضح تقسيم الدائرة الى شرائح (زوايا) متساوية ويختلف الشكل (3-2) الذي يوضح ان انطاف الاقطار للدوائر يكون بابعاد متساوية على العكس من الشكل (4-2) الذي تكون فيه ابعاد انصاف الاقطار غير متساوية في البعد عن مركز الدائرة(القطب)



الشكل (3-2) تمثيل الشبكات القطبية عندما تكون الشرائح بمساحة متساوية والاقطار متساوية

• المصدر [41]



الشكل (4-2) يوضح تمثيل الشبكات القطبية عندما تكون الشرائح بمساحة متساوية والاقطار غير متساوية

• المصدر [41]

نظرا لان الاحداثيات والزوايا القطبية تكون موزعة بالتساوي لذا يجب أخذ نصف القطر كمتغيرات لتساوي مناطق الشرائح ، ففي هذه الحالة اذا رغبتنا في تقسيم الدائرة على مقاطع دائرية ( $C_r$ ) بين الدائرة الداخلية ( $g_0$ ) والدائرة الخارجية ( $g_{cr}$ ) التي تمثل انصاف اقطار من اجل ان يكون كل مقطع دائري متساوياً مع الاخر . فتكون مساحة كل منطقة دائرية هي :

$$A_k = \frac{A_{cr}}{C_r} \quad ; \quad k=1,2,\dots,C_r \quad \dots(2 - 28)$$

K: تسلسل الشرائح (الدوائر)

5-2 دالة التوزيع القطبية : Polar Distribution Functions [31,41]

يتزايد استعمال دوال الاحتمال ثنائي المتغير في نظرية الاحتمالات تدريجا وعلى الرغم من ان دوال التوزيع ثنائية المتغير تجد مزيدا من الاستعمال في الاحداثيات الكارتيزية وان تحويلها إلى نظام إحداثيات قطبية سيسهل في حل مشكلات في عدد من المجالات ، وتستعمل الاحداثيات القطبية في دوال التوزيع القطبية وهذه الاحداثيات هي المسافة (r) من نقطة البداية والزاوية (θ) مع المحور الأفقي .

تعرف دالة التوزيع التراكمي ثنائية المتغير المستعملة في الاحداثيات الكارتيزية بانها :

$$F_{x,y}(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f_{x,y}(u, v) du dv \quad \dots (2 - 29)$$

وعن طريق التحويل من الاحداثي الكارتيزي الى الاحداثي القطبي الذي تم توضيحه في المعادلة (2-25) تكون دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة في الاحداثيات القطبية تحقق الشرط التالي(شرط دالة الكثافة الاحتمالية) وكما يأتي:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} f_{\theta,R}(\phi, R) R dR d\phi = 1 \quad \dots (2 - 30)$$

ويتم تعريف دالة التوزيع التراكمي القطبي على أنها:

$$F_{\phi,R}(\phi, R) = \int_0^{\theta} \int_0^r f_{\theta,r}(\phi, R) R dR d\phi \quad \dots (2 - 31)$$

وسوف يتم التطرق الى توزيع ويبيل في الاحداثيات القطبية (كنوزيع مقترح ) وكما يأتي:

**6-2 : توزيع ويبيل القطبي(التوزيع المقترح) Polar Weibull Distribution**

**1-6-2 : دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة لتوزيع ويبيل القطبي**

ان دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ويبيل في نظام الاحداثيات الكارتيزية احادي المتغير هي :

$$f(x; \lambda, a) = \begin{cases} \frac{a}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{a-1} \cdot e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^a} ; & x \geq 0 \\ 0 ; & o.w \end{cases} \quad \lambda > 0 ; a \geq 0 \quad \dots (2 - 32)$$

وان دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة لتوزيع ويبيل في الاحداثيات القطبية وبعد اخذ التغيير الزاوي θ ثابت(منتظم) تكون بالصورة الاتية :

$$f(\theta, r; \lambda, a) = C f(r; \lambda, a) r \quad \dots (2 - 33)$$

$$f(\theta, r; \lambda, a) = C \frac{a}{\lambda} \left(\frac{r}{\lambda}\right)^{a-1} \cdot e^{-\left(\frac{r}{\lambda}\right)^a} * r \quad \dots (2 - 34)$$

$$; \quad r > 0 , \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

## الفصل الثاني

فمن الضروري معرفة قيمة ثابت المقياس  $C$  لهذه العملية وبعد تحقق شرط دالة الكثافة الاحتمالية في المجال والذي يكون ناتج التكامل يساوي واحداً لذا فان :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} f(\theta, r; \lambda, a) r dr d\theta = 1$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} C \frac{a}{\lambda} \left(\frac{r}{\lambda}\right)^{a-1} \cdot e^{-\left(\frac{r}{\lambda}\right)^a} r dr d\theta = 1$$

$$C \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} \frac{a}{\lambda} \left(\frac{r}{\lambda}\right)^{a-1} \cdot e^{-\left(\frac{r}{\lambda}\right)^a} r dr = 1$$

$$C[\theta]_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{a}{\lambda} \left(\frac{r}{\lambda}\right)^{a-1} \cdot e^{-\left(\frac{r}{\lambda}\right)^a} r dr = 1$$

$$2\pi C \int_0^{\infty} \frac{a}{\lambda} \frac{r^{a-1}}{\lambda^{a-1}} \cdot r e^{-\left(\frac{r}{\lambda}\right)^a} dr = 1$$

$$2\pi C \int_0^{\infty} \frac{a}{\lambda^a} r^a \cdot e^{-\left(\frac{r}{\lambda}\right)^a} dr = 1$$

$$\text{Let } Z = \left(\frac{r}{\lambda}\right)^a \rightarrow Z^{\frac{1}{a}} = \frac{r}{\lambda}$$

$$r = \lambda Z^{\frac{1}{a}}$$

$$dr = \frac{1}{a} \lambda Z^{\frac{1}{a}-1} dz$$

ان حدود التكامل لـ  $r$  هي  $r \in [0, \infty]$  وكذلك حدود  $Z$  هي  $Z \in [0, \infty]$  بالتعويض نحصل على :

$$2\pi C \int_0^{\infty} \frac{a}{\lambda^a} \left(\lambda Z^{\frac{1}{a}}\right)^a \cdot e^{-Z} \frac{1}{a} \lambda Z^{\frac{1}{a}-1} dz = 1$$

وبعد اجراء بعض الاختصارات نحصل على :

$$2\pi \lambda C \int_0^{\infty} Z \cdot e^{-Z} \lambda Z^{\frac{1}{a}-1} dz = 1$$

$$2\pi \lambda C \int_0^{\infty} Z^{\frac{1}{a}} \cdot e^{-Z} dz = 1$$

وبالقسمة والضرب بالمقدار  $\Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right)$

$$2\pi\lambda C \Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right) \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right)} z^{\left(\frac{1}{a}+1\right)-1} \cdot e^{-z} dz = 1 \quad \dots (2-35)$$

• تعريف دالة كاما

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha) \beta^\alpha} x^{\alpha-1} \cdot e^{-\frac{x}{\beta}} \quad \dots (2-36)$$

نتيجة حد التكامل في المعادلة (2-35) تساوي واحد كونه دالة توزيع كاما بالمعلومات

$$Z \sim \text{Gamma dist.} \left[ \left( \frac{1}{a} + 1 \right), z \right]$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right)} z^{\left(\frac{1}{a}+1\right)-1} \cdot e^{-z} dz = 1 \quad \dots (2-37)$$

وبتعويض المعادلة (2-37) في المعادلة المذكورة انفا (2-35) نحصل على:

$$2\pi C \lambda \Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right) = 1$$

$$\therefore C = \frac{1}{2\pi \lambda \Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right)} \quad \dots (2-38)$$

وبتعويض قيمة C التي تم التوصل اليها بالمعادلة (2-38) في المعادلة (2-34) نحصل على دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة للمتغيرين  $(r, \theta)$  لتوزيع ويبيل في الاحداثيات القطبية وكما موضح في ادناه :

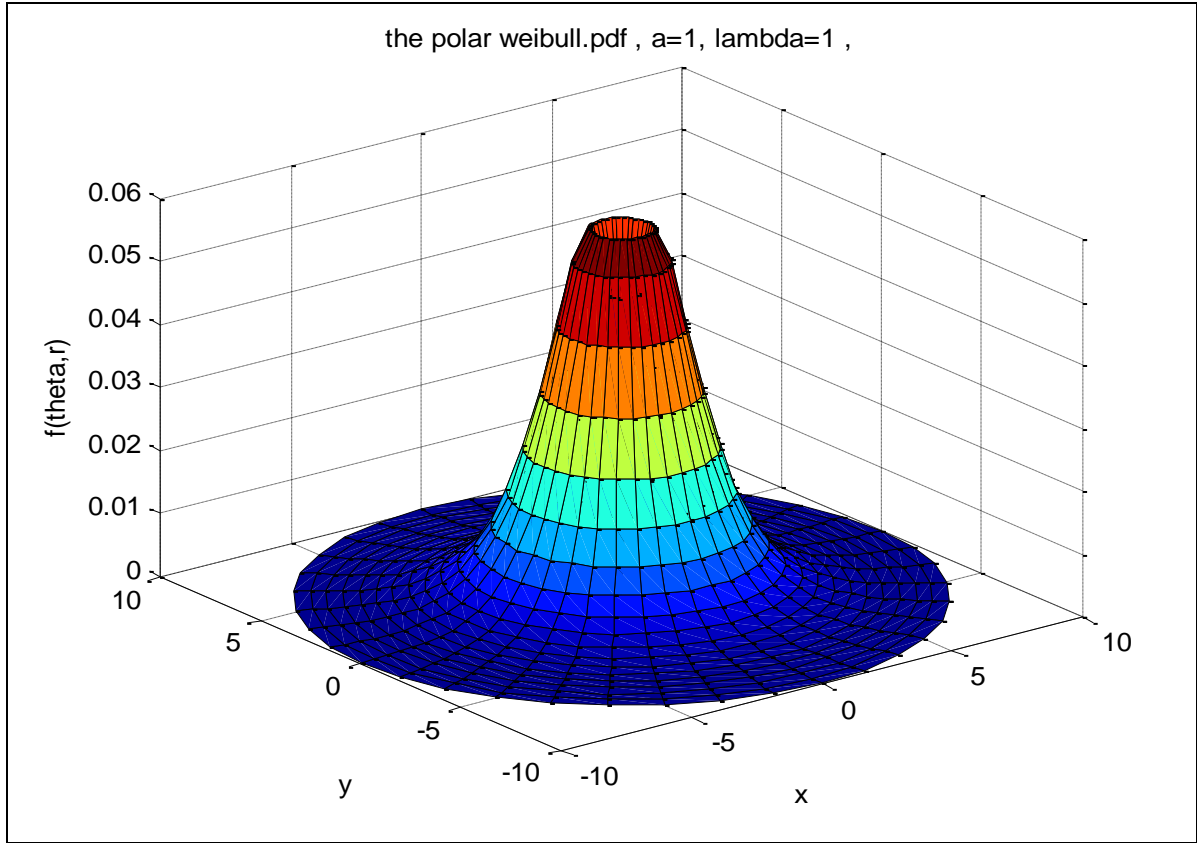
$$f(\theta, r; \lambda, a) = \frac{1}{2\pi \lambda \Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right)} \frac{a}{\lambda} \left(\frac{r}{\lambda}\right)^{a-1} \cdot e^{-\left(\frac{r}{\lambda}\right)^a} * r \quad \dots (2-39)$$

وبعد التبسيط نحصل على :

$$f(\theta, r; \lambda, a) = \frac{1}{2\pi \Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right)} \frac{a}{\lambda^{a+1}} (r)^a \cdot e^{-\left(\frac{r}{\lambda}\right)^a} \quad \dots (2-40)$$

$$a > 0 \text{ (shape)} ; \lambda > 0 \text{ (scale)} ; r > 0 , 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

ويمكن رسم الدالة بفرض قيمة  $\lambda = 1$  وقيمة a مثلا  $(a = 1)$  وكما موضح في الشكل (5-2)



الشكل (2-5) دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة لتوزيع ويبيل القطبي

المصدر : من اعداد الباحث بالاعتماد على برنامج matlab R2014a

من الشكل المذكور آنفاً نلاحظ ان المساحة تكون صفرا او صغيرة جدا عند اقترابها من النقطة (0,0) عند قمة الشكل والتي تمثل اعلى قيمة احتمالية للتوزيع، وتزداد المساحة بصورة تدريجية منتظمة والتي تكون على شكل شرائح مع تغير المتغير الزاوي .

### 2-6-2 : دالة التوزيع التراكمي المشتركة لتوزيع ويبيل القطبي

ولإيجاد دالة التوزيع الاحتمالي التراكمي (c.d.f) لتوزيع ويبيل في الاحداثيات القطبية من دالة الكثافة الاحتمالية الموضحة في المعادلة (2-40) وبالاعتماد على المتغير  $r$ .

$$F(\theta, r) = \int_0^\theta \int_0^r f(\phi, R; \lambda, a) dR d\phi \quad \dots (2 - 41)$$

وبعد التعويض في الصيغة المذكور آنفاً وعن دالة الكثافة الاحتمالية التي تم التوصل اليها في المعادلة (2-76) وبعد اجراء التكامل نحصل على:

$$F(\theta, r) = \int_0^\theta \int_0^r \frac{1}{2\pi \Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right)} \frac{a}{\lambda^{a+1}} (R)^a \cdot e^{-\left(\frac{R}{\lambda}\right)^a} dR d\phi$$

$$F(\theta, r) = \frac{1}{2\pi \Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right)} \int_0^\theta d\phi \int_0^r \frac{a}{\lambda^{a+1}} (R)^a \cdot e^{-\left(\frac{R}{\lambda}\right)^a} dR$$

$$F(\theta, r) = \frac{\theta}{2\pi \Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right)} \int_0^r \frac{a}{\lambda^{a+1}} (R)^a \cdot e^{-\left(\frac{R}{\lambda}\right)^a} dR$$

$$F(\theta, r) = \frac{\theta}{2\pi \Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right)} \int_0^r \frac{a}{\lambda^{a+1}} R^a \cdot e^{-\left(\frac{R}{\lambda}\right)^a} dR \quad \dots (2 - 42)$$

نأخذ حد التكامل :

$$\int_0^r \frac{a}{\lambda^{a+1}} R^a \cdot e^{-\left(\frac{R}{\lambda}\right)^a} dR \quad \dots (2 - 43)$$

$$\text{Let } Z = \left(\frac{R}{\lambda}\right)^a \rightarrow Z^{\frac{1}{a}} = \frac{R}{\lambda}$$

$$R = \lambda Z^{\frac{1}{a}}$$

$$dR = \frac{1}{a} \lambda Z^{\frac{1}{a}-1} dZ$$

وبالتعويض في المعادلة (2-43) والتبسيط نحصل على :

$$\int_0^Z \frac{a}{\lambda^{a+1}} \left(\lambda Z^{\frac{1}{a}}\right)^a \cdot e^{-Z} \left(\frac{1}{a} \lambda Z^{\frac{1}{a}-1} dZ\right)$$

بالتبسيط

$$= \int_0^Z Z^{\left(\frac{1}{a}+1\right)-1} \cdot e^{-Z} dZ \quad \dots (2 - 44)$$

$$= \gamma\left(1 + \frac{1}{a}, Z\right) = \gamma\left(1 + \frac{1}{a}, \left(\frac{R}{\lambda}\right)^a\right) \quad \dots (2 - 45)$$

اذ  $\gamma\left(1 + \frac{1}{a}, \left(\frac{R}{\lambda}\right)^a\right)$  تمثل دالة كاما غير التامة الدنيا

وبالتعويض في معادلة (2-42) نحصل على :

$$F(\theta, r) = \frac{\theta}{2\pi \Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right)} \cdot \gamma\left(1 + \frac{1}{a}, \left(\frac{r}{\lambda}\right)^a\right)$$

$$F(\theta, r) = \frac{\theta}{2\pi} \cdot \frac{\gamma\left(1 + \frac{1}{a}, \left(\frac{r}{\lambda}\right)^a\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right)} \quad ; \quad \dots (2 - 46)$$

$$a > 0 \text{ (shape)} ; \lambda > 0 \text{ (scale)} \quad ; \quad r > 0 , \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

والتي تمثل دالة التوزيع التراكمي المشتركة (c.d.f) للمتغيرين  $(\theta, r)$  لتوزيع ويبيل القطبي .

## الفصل الثاني

و دالة غاما التامة وغير التامة العليا والدنيا التي تقسم على اساس حدود التكامل و تكون بالأشكال الآتية [4,30,40]

$$1 - \Gamma(a) = \int_0^{\infty} u^{a-1} e^{-u} du \quad \text{دالة غاما التامة} \quad \dots (2-47)$$

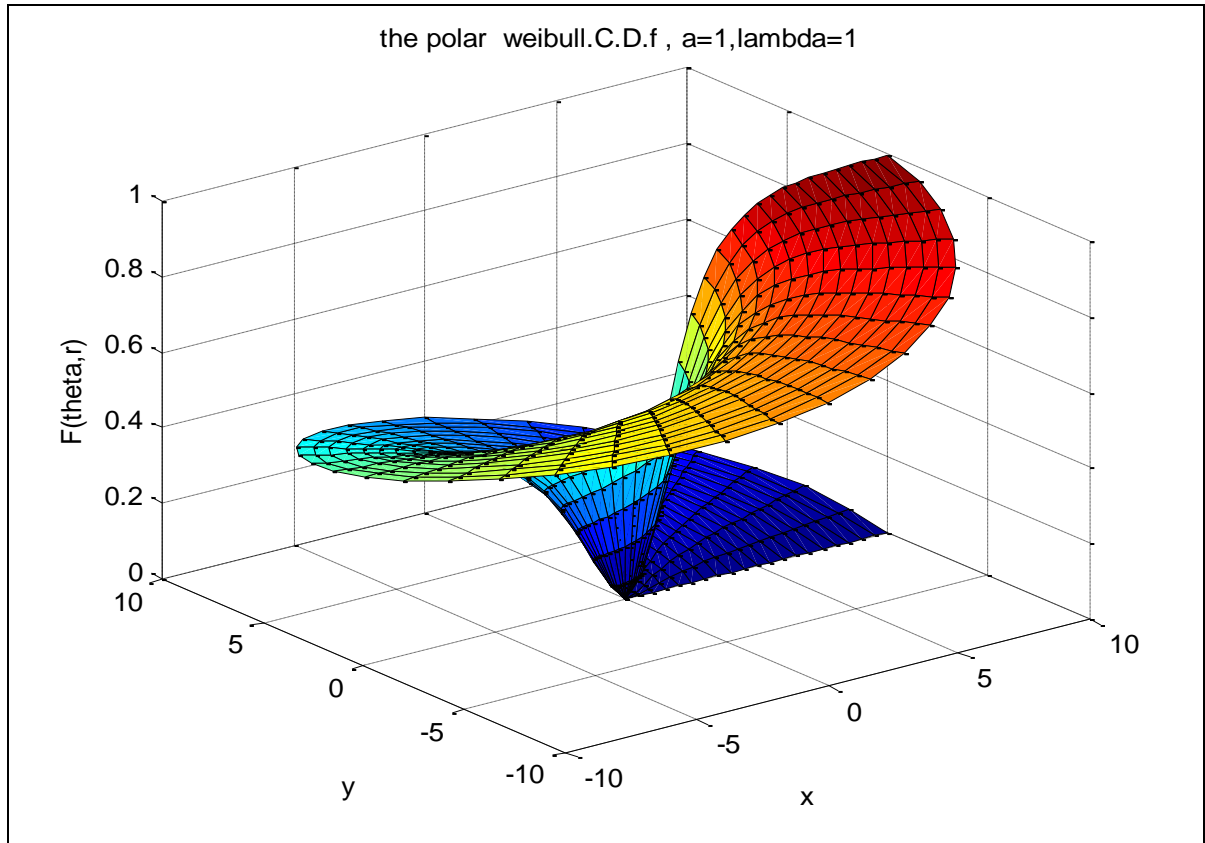
$$2 - \Gamma(a, t) = \int_t^{\infty} u^{a-1} e^{-u} du \quad \text{دالة غاما غير تامة العليا} \quad \dots (2-48)$$

$$3 - \gamma(a, t) = \int_0^t u^{a-1} e^{-u} du \quad \text{دالة غاما غير تامة الدنيا} \quad \dots (2-49)$$

$$\therefore \Gamma(a) = \Gamma(a, t) + \gamma(a, t) \quad \dots (2-50)$$

$$\therefore \gamma(a, t) = \Gamma(a) - \Gamma(a, t) \quad \dots (2-51)$$

ويمكن الحصول على الرسم البياني لشكل هذه الدالة التي تم التوصل إليها في المعادلة (2-46) بافتراض القيم  $\lambda = 1$  وكذلك نفرض قيمة  $a = 1$ ، وكما موضح في الشكل (6-2).



الشكل (6-2) الرسم البياني لدالة التوزيع التراكمي المشتركة لتوزيع ويبيل القطبي على فرض ان المعلمات

$$(\lambda=1, a=1)$$

المصدر : من اعداد الباحث بالاعتماد على برنامج matlab R2014a •



## الفصل الثاني

ومن ملاحظة الشكل (2-6) نرى انه يبدأ من نقطة الصفر وينتهي بنقطة (الواحد) وهذا مطابق لدالة التوزيع التراكمية (c.d.f) لاي توزيع فهي تزداد بزيادة قيم المتغيرات الى أن تصل الى أعلى قيمة لها وهي الواحد الصحيح.

### 3-6-2 : دالة الكثافة الاحتمالية الحدية فيما يتعلق بالمتغير $\Gamma$ (التوزيع المقترح)

ويمكن ايجاد دالة الكثافة الاحتمالية الحدية لتوزيع ويبيل القطبي فيما يتعلق بالمتغير  $r$  وذلك عن طريق ايجاد التكامل بالنسبة للمتغير  $\theta$  للدالة المشتركة الموضحة في المعادلة (2-40) وضمن حدود التكامل للمتغير  $\theta \in [0, 2\pi]$

$$f(r; \lambda, a) = \int_0^{2\pi} f(\theta, r; \lambda, a) d\theta \quad \dots (2-52)$$

$$f(r; \lambda, a) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi \Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right)} \frac{a}{\lambda^{a+1}} r^a \cdot e^{-\left(\frac{r}{\lambda}\right)^a} \cdot d\theta$$

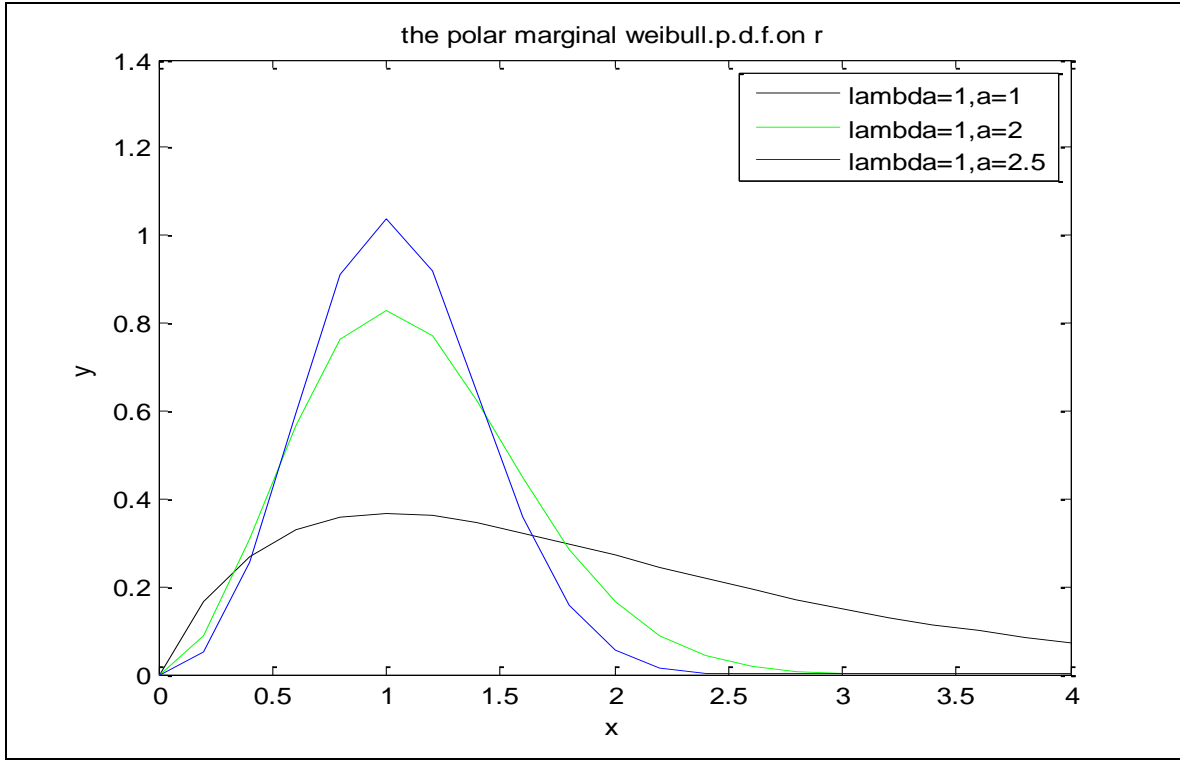
وبعد اجراء التكامل نحصل على دالة الكثافة الاحتمالية الحدية لتوزيع ويبيل القطبي

$$f(r; \lambda, a) = \frac{2\pi}{2\pi \Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right)} \frac{a}{\lambda^{a+1}} r^a \cdot e^{-\left(\frac{r}{\lambda}\right)^a}$$

وبالتبسيط نحصل على :

$$f(r; \lambda, a) = \frac{a}{\Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right)} \frac{1}{\lambda^{a+1}} r^a \cdot e^{-\left(\frac{r}{\lambda}\right)^a} ; \alpha, \lambda > 0 ; 0 \leq r \leq \infty \quad \dots (2-53)$$

وعلى فرض ان قيمة  $(\lambda=1)$  وقيم مختلفة للمعلمة  $(a=1,2,2.5)$  نقوم برسم الدالة التي تم الحصول عليها في المعادلة (2-53) كما موضح في الشكل (2-7).



الشكل ( 7-2 ) الدالة الحدية لتوزيع ويبيل القطبي بالاعتماد على المتغير  $r$  ولقيم مختلفة للمعلمات  
المصدر : من اعداد الباحث بالاعتماد على برنامج *matlab R2014a*

#### 4-6-2 : دالة التوزيع التراكمي الحدية لتوزيع ويبيل القطبي (التوزيع المقترح)

اما للحصول على دالة التوزيع التراكمي الحدي لتوزيع ويبيل القطبي نقوم بأجراء التكامل على الدالة المذكورة في المعادلة (2-53) وضمن مجال المتغير  $r \in [0, r]$  هي :

$$F(R; \lambda, a) = \int_0^r \frac{a}{\Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right)} \frac{1}{\lambda^{a+1}} R^a \cdot e^{-\left(\frac{R}{\lambda}\right)^a} dR \quad \dots (2 - 54)$$

وبالأسلوب السابق نفسه

$$\text{Let } Z = \left(\frac{R}{\lambda}\right)^a \rightarrow Z^{\frac{1}{a}} = \frac{R}{\lambda}$$

$$R = \lambda Z^{\frac{1}{a}}$$

$$dR = \frac{1}{a} \lambda Z^{\frac{1}{a}-1} dZ$$

بالتعويض والتبسيط

$$F(R; \lambda, a) = \int_0^Z \frac{a}{\Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right)} \frac{1}{\lambda^{a+1}} \left(\lambda Z^{\frac{1}{a}}\right)^a \cdot e^{-Z} \frac{1}{a} \lambda Z^{\frac{1}{a}-1} dZ \quad \dots (2 - 55)$$

$$F(R; \lambda, a) = \int_0^Z \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right)} \frac{1}{\lambda^{a+1}} \lambda^a z \cdot e^{-z} \lambda z^{\frac{1}{a}-1} dz$$

$$F(R; \lambda, a) = \int_0^Z \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right)} z^{\frac{1}{a}} \cdot e^{-z} dz$$

$$F(R; \lambda, a) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right)} \cdot \int_0^Z z^{\frac{1}{a}} \cdot e^{-z} dz \quad \dots (2 - 56)$$

incomplete gamma distribution إذ ان ناتج التكامل المذكور انفا يمثل دالة كاما الدنيا

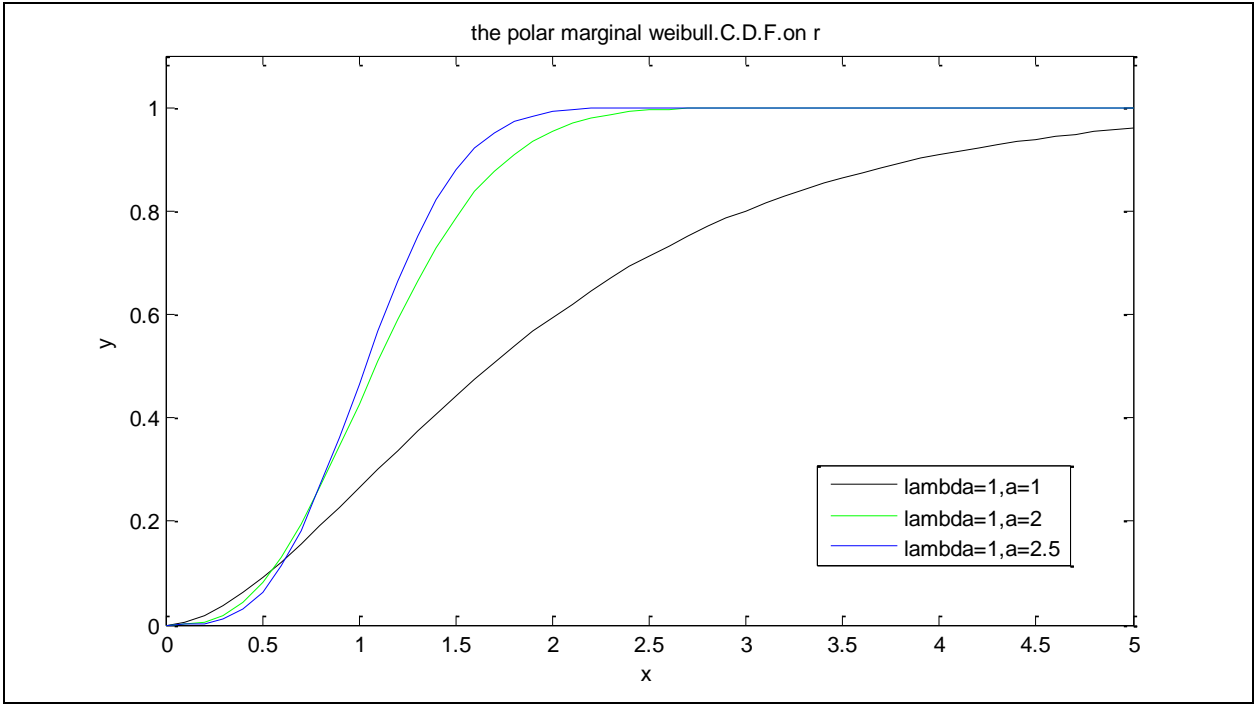
اذ  $\gamma\left(1 + \frac{1}{a}, Z\right)$  تمثل دالة كاما غير التامة الدنيا

$$F(R; \lambda, a) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right)} \cdot \gamma\left(1 + \frac{1}{a}, Z\right)$$

$$F(R; \lambda, a) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right)} \cdot \gamma\left(1 + \frac{1}{a}, \left(\frac{R}{\lambda}\right)^a\right) \quad \dots (2 - 57)$$

$$F(r; \lambda, a) = \frac{\gamma\left(\frac{1}{a} + 1, \left(\frac{r}{\lambda}\right)^a\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right)} \quad ; \alpha, \lambda > 0 \quad ; \quad 0 \leq r \leq \infty \quad \dots (2 - 58)$$

ويمكن الحصول على الرسم البياني لدالة التوزيع التراكمي الحدي لتوزيع ويبل القطبي المذكورة في المعادلة (2-58) بالاعتماد على المتغير  $r$  ، على افتراض قيم المعلمات  $\lambda = 1$  ، وكذلك قيم مختلفة لـ  $a = 1, 2, 2.5$  ، كما موضح في الشكل (8-2)



الشكل (2-8)

دالة التوزيع التراكمي الحدي لتوزيع ويبيل القطبي بالاعتماد على المتغير  $r$  ، ولقيم مختلفة من المعلمات

المصدر : من اعداد الباحث بالاعتماد على برنامج matlab R2014a

ومن ملاحظة الشكل (2-8) نجد انه بزيادة معلمة الشكل (a) يكون الشكل اكثر تناسقا وطبيعيا بحيث تتوزع النقاط بصورة متماثلة حول المتوسط وكذلك يؤكد ذلك عن طريق الشكل (2-9) الذي يمثل دالة التوزيع التراكمية والذي تكون اعلى قمة له عند القيمة (1) وهي دالة متزايدة.

### 2-6-5 : دالة الكثافة الاحتمالية الحدية فيما يتعلق بالمتغير الزاوي $\theta$

ان دالة الكثافة الاحتمالية الحدية لتوزيع ويبيل فيما يتعلق بالمتغير الزاوي  $\theta$ . وذلك عن طريق ايجاد التكامل للدالة المشتركة الموضحة في المعادلة (2-40) وضمن حدود التكامل للمتغير  $r \in [0, \infty]$

$$f(\theta; \lambda, a) = \int_0^{\infty} f(\theta, r; \lambda, a) dr \quad \dots (2 - 59)$$

$$f(\theta; \lambda, a) = \int_0^{\infty} \frac{1}{2\pi \Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right)} \frac{a}{\lambda^{a+1}} r^a \cdot e^{-\left(\frac{r}{\lambda}\right)^a} dr$$

وبعد اجراء التكامل نحصل على دالة الكثافة الاحتمالية الحدية لتوزيع ويبيل القطبي للمتغير  $\theta$ .

$$f(\theta; \lambda, a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{a}{\Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right) \cdot \lambda^{a+1}} r^a \cdot e^{-\left(\frac{r}{\lambda}\right)^a} dr \quad \dots (2 - 60)$$

وينفس الاسلوب السابق يمكن اجراء التكامل:

$$\text{Let } Z = \left(\frac{r}{\lambda}\right)^a \rightarrow Z^{\frac{1}{a}} = \frac{r}{\lambda}$$

$$r = \lambda z^{\frac{1}{a}}$$

$$dr = \frac{1}{a} \lambda z^{\frac{1}{a}-1} dz$$

بالتعويض

$$f(\theta; \lambda, a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{a}{\Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right) \cdot \lambda^{a+1}} \left(\lambda z^{\frac{1}{a}}\right)^a \cdot e^{-z} \left(\frac{1}{a} \lambda z^{\frac{1}{a}-1} dz\right) \quad \dots (2-61)$$

$$f(\theta; \lambda, a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right)} z^{(\frac{1}{a}+1)-1} \cdot e^{-z} dz$$

نتيجة التكامل تساوي واحد (دالة توزيع كاما)

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right)} z^{(\frac{1}{a}+1)-1} \cdot e^{-z} dz = 1$$

وبعد التعويض عن ناتج التكامل في المعادلة نحصل على:

$$f(\theta; \lambda, a) = \frac{1}{2\pi} \quad ; \quad \alpha, \lambda > 0 \quad ; \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad \dots (2-62)$$

وتمثل دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ويبيل القطبي بالاعتماد على المتغير  $\theta$  ، وهو مشابه للتوزيع المنتظم بالمعلمات  $(0, 2\pi)$ .

### 2-6-6 : دالة التوزيع التراكمي الحدي (C.D.F) فيما يتعلق بالمتغير الزاوي $\theta$

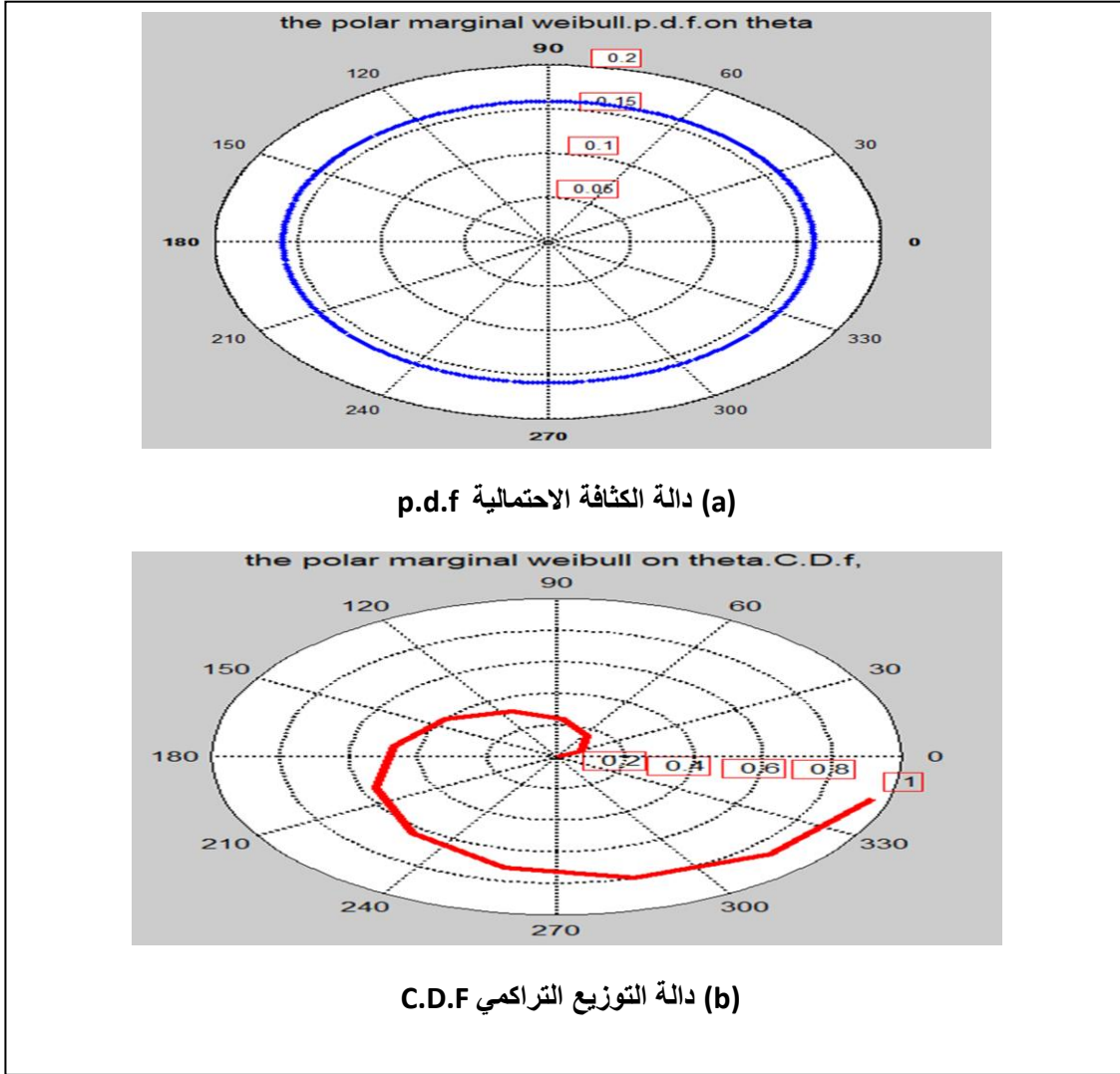
ويمكن الحصول على دالة التوزيع التراكمي الحدي لتوزيع ويبيل القطبي بالاعتماد على المتغير الزاوي  $\theta$  وذلك عن طريق اجراء التكامل على الدالة الموضحة في المعادلة (2-62) .

$$F(\theta; \lambda, a) = \int_0^{\theta} f(\theta; \lambda, a) d\theta \quad \dots (2-63)$$

$$F(\theta; \lambda, a) = \int_0^{\theta} \frac{1}{2\pi} d\theta = \left[ \frac{\theta}{2\pi} \right]_0^{\theta} = \frac{\theta}{2\pi}$$

$$F(\theta; \lambda, a) = \frac{\theta}{2\pi} \quad ; \quad \alpha, \lambda > 0 \quad ; \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad \dots (2-64)$$

ويمكن اجراء الرسم البياني لدالة كثافة الاحتمال الحدية على وفق المتغير الزاوي  $\theta$  لتوزيع ويبيل القطبي المذكور انفا في المعادلة (2-62) ، وكذلك يمكن الحصول على الرسم البياني لدالة التوزيع التراكمي الحدي لتوزيع ويبيل القطبي بالاعتماد على المتغير  $\theta$  المذكور انفا في معادلة (2-64) ، كما موضح في الشكل (2-9) .



الشكل (2-9) الرسم البياني (a) دالة كثافة الاحتمال (P.d.f) الحدية لتوزيع ويبيل القطبي .

الرسم (b) دالة التوزيع التراكمي (C.D.F) الحدية لتوزيع ويبيل القطبي على وفق للمتغير الزاوي  $\theta$ .

• المصدر : من اعداد الباحث بالاعتماد على برنامج matlab R2014a

نلاحظ من الشكل (2-9) نجد ان الشكل يكون على شكل دائرة ولا يتأثر بقيم المتغير الاخر (r) (نصف القطر) ويدعى المتغير  $\theta$  بالمتغير الدائري .

### 7-2 : خصائص توزيع ويبيل الحدي القطبي للمتغير r (التوزيع المقترح )

ويمكن ايجاد بعض الخصائص الاحصائية لهذا التوزيع الذي تم ذكره في المعادلة (2-57). كما يأتي :  
اولاً : لإثبات ان الدالة المذكورة في المعادلة (2-53) هي دالة كثافة احتمالية يجب اثبات ان تكامل الدالة يساوي واحداً.

$$\int_0^{\infty} \frac{a}{\Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right)} \frac{1}{\lambda^{a+1}} r^a \cdot e^{-\left(\frac{r}{\lambda}\right)^a} dr = 1 \quad \dots (2 - 65)$$

وبنفس الاسلوب المذكور انفا نحصل على :

$$\text{let } Z = \left(\frac{r}{\lambda}\right)^a \rightarrow Z^{\frac{1}{a}} = \frac{r}{\lambda}$$

$$r = \lambda Z^{\frac{1}{a}}$$

$$dr = \frac{1}{a} \lambda Z^{\frac{1}{a}-1} dZ$$

بالتعويض

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right)} z^{\left(\frac{1}{a}+1\right)-1} \cdot e^{-z} dz = 1 \quad \dots (2 - 66)$$

نتيجة التكامل تساوي واحداً كونه مشابهاً لدالة توزيع كما بالمعلومات

$$Z \sim \text{Gamma dist. } \left[\left(\frac{1}{a} + 1\right), Z\right]$$

$$Z \sim \text{Gamma dist. } \left[\left(\frac{1}{a} + 1\right), \left(\frac{r}{\lambda}\right)^a\right]$$

وبذلك تم اثبات ان دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الحدي القطبي لتوزيع ويبل تساوي واحداً وهو ما يحقق شرط دالة الكثافة الاحتمالية.

ثانياً : العزوم اللامركزية (العزم (K) عند نقطة الاصل) Non Central moment

$$E(r^K) = \int_0^{\infty} r^k f(r) dr \quad \dots (2 - 67)$$

$$\mu_k = E r^k = \int_0^{\infty} r^k * \frac{a}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} \frac{1}{\lambda^{a+1}} r^a \cdot e^{-\left(\frac{r}{\lambda}\right)^a} dr$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{a}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} \frac{1}{\lambda^{a+1}} r^{a+k} \cdot e^{-\left(\frac{r}{\lambda}\right)^a} dr$$

$$\text{let } Z = \left(\frac{r}{\lambda}\right)^a \rightarrow Z^{\frac{1}{a}} = \frac{r}{\lambda}$$

$$r = \lambda Z^{\frac{1}{a}}$$

$$dr = \frac{1}{a} \lambda Z^{\frac{1}{a}-1} dZ$$

وعند التعويض والتبسيط نحصل على:

$$\therefore \mu_k = \int_0^{\infty} \frac{a}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} \frac{1}{\lambda^{a+1}} \left(\lambda Z^{\frac{1}{a}}\right)^{a+k} \cdot e^{-z} \frac{1}{a} \lambda Z^{\frac{1}{a}-1} dZ \quad \dots (2 - 68)$$

$$\mu_k = \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} \frac{1}{\lambda^{a+1}} (\lambda)^{a+k} \left(z \frac{1}{a}\right)^{a+k} \cdot e^{-z} \lambda z^{\frac{1}{a}-1} dz$$

$$\mu_k = \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} \frac{1}{\lambda^{a+1}} (\lambda)^{a+k+1} z^{1+\frac{k}{a}+\frac{1}{a}-1} \cdot e^{-z} dz$$

$$\mu_k = \frac{\lambda^k}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} \int_0^{\infty} z^{1+\frac{k}{a}+\frac{1}{a}-1} \cdot e^{-z} dz$$

$$\mu_k = \frac{\lambda^k}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} \int_0^{\infty} z^{\left(\frac{k+1}{a}+1\right)-1} \cdot e^{-z} dz$$

بالمضرب والقسمة على المقدار  $\Gamma\left(1 + \frac{k+1}{a}\right)$

$$\mu_k = \frac{\lambda^k \Gamma\left(1 + \frac{k+1}{a}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma\left(1 + \frac{k+1}{a}\right)} z^{\left(\frac{k+1}{a}+1\right)-1} \cdot e^{-z} dz$$

$Z \sim \text{Gamma dist.} \left[\left(1 + \frac{k+1}{a}\right), \left(\frac{r}{\lambda}\right)^a\right]$

نتيجة التكامل تساوي واحداً كونه دالة توزيع كاما

$$\therefore \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma\left(1 + \frac{k+1}{a}\right)} z^{\left(\frac{k+1}{a}+1\right)-1} \cdot e^{-z} dz = 1$$

ومن ثم نحصل على الصيغة العامة للعزم k وكما يأتي:

$$\mu_k = \frac{\lambda^k \cdot \Gamma\left(1 + \frac{k+1}{a}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} \quad \dots (2-69)$$

للحصول على قيمة العزم الاول (المتوسط) عندما  $K=1$  وكما يأتي :

$$m_1 = \mu = \frac{\lambda \Gamma\left(1 + \frac{2}{a}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} \quad \dots (2-70)$$

بنفس الأسلوب يمكن إيجاد العزم الثاني

نعوض (  $K=2$  ) في المعادلة (2-69)



$$\mu_2 = \frac{\lambda^2 * \Gamma\left(1 + \frac{3}{a}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} \quad \dots (2 - 71)$$

ويمكن حساب التباين من العلاقة الآتية :

$$\sigma^2 = m_2 - m_1^2$$

$$\sigma^2 = \frac{\lambda^2 * \Gamma\left(1 + \frac{3}{a}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} - \left[ \frac{\lambda * \Gamma\left(1 + \frac{2}{a}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} \right]^2$$

$$\sigma^2 = \frac{\lambda^2}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} \left[ \Gamma\left(1 + \frac{3}{a}\right) - \frac{\Gamma^2\left(1 + \frac{2}{a}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} \right] \quad \dots (2 - 72)$$

ثالثا : العزوم المركزية (حول الوسط الحسابي) Central moment

$$E(r - \mu)^k = \int_0^{\infty} (r - \mu)^k f(r) dr \quad \dots (2 - 73)$$

$$\mu_k = E(r - \mu)^k = \int_0^{\infty} (r - \mu)^k * \frac{a}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} \frac{1}{\lambda^{a+1}} r^a \cdot e^{-\left(\frac{r}{\lambda}\right)^a} dr$$

وحسب نظرية ذي الحدين

$$(X - \mu)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} X^j (-\mu)^{k-j} \quad \dots (2 - 74)$$

بالتعويض نحصل على:

$$\mu_k = \int_0^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} r^j (-\mu)^{k-j} * \frac{a}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} \frac{1}{\lambda^{a+1}} r^a \cdot e^{-\left(\frac{r}{\lambda}\right)^a} dr$$

$$\mu_k = \int_0^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-\mu)^{k-j} * \frac{a}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} \frac{1}{\lambda^{a+1}} r^{a+j} \cdot e^{-\left(\frac{r}{\lambda}\right)^a} dr$$

$$\text{let } Z = \left(\frac{r}{\lambda}\right)^a \rightarrow Z^{\frac{1}{a}} = \frac{r}{\lambda}$$

$$r = \lambda Z^{\frac{1}{a}}$$

$$dr = \frac{1}{a} \lambda Z^{\frac{1}{a}-1} dZ$$

وعند التعويض والتبسيط نحصل على:

$$\mu_k = \int_0^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-\mu)^{k-j} * \frac{a}{\Gamma(1 + \frac{1}{a})} \frac{1}{\lambda^{a+1}} \left(\lambda z \frac{1}{a}\right)^{a+j} \cdot e^{-z} \frac{1}{a} \lambda z \frac{1}{a-1} dz$$

$$\mu_k = \int_0^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-\mu)^{k-j} * \frac{1}{\Gamma(1 + \frac{1}{a})} \frac{1}{\lambda^{a+1}} (\lambda)^{a+j} (z)^{1+\frac{j}{a}} \cdot e^{-z} \lambda z \frac{1}{a-1} dz$$

$$\mu_k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-\mu)^{k-j} * \frac{1}{\Gamma(1 + \frac{1}{a})} \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda^{a+1}} (\lambda)^{a+1+j} (z)^{1+\frac{j+1}{a}-1} \cdot e^{-z} dz$$

$$\mu_k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-\mu)^{k-j} * \frac{1}{\Gamma(1 + \frac{1}{a})} \int_0^{\infty} (\lambda)^j (z)^{(1+\frac{j+1}{a})-1} \cdot e^{-z} dz$$

بالمضرب والقسمة على المقدار  $\Gamma(1 + \frac{j+1}{a})$

$$\mu_k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-\mu)^{k-j} * \frac{(\lambda)^j \Gamma(1 + \frac{j+1}{a})}{\Gamma(1 + \frac{1}{a})} \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(1 + \frac{j+1}{a})} (z)^{(1+\frac{j+1}{a})-1} \cdot e^{-z} dz$$

نتيجة حد التكامل يساوي واحداً كونه يمثل دالة كاما ومن ثم نحصل على :

$$\mu_k = E(r - \mu)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-\mu)^{k-j} \frac{\Gamma(1 + \frac{j+1}{a}) \cdot \lambda^j}{\Gamma(1 + \frac{1}{a})} \dots (2 - 75)$$

وتمثل المعادلة (2-75) الصيغة العامة للعزوم المركزية حول الوسط الحسابي

عندما

•  $K=1$  نحصل على العزم المركزي الاول

$$\mu_1 = E(r - \mu)^1 = \mu - \mu = 0$$

$$E(r) = \mu$$

$$\mu_1 = E(r - \mu)^1 = \sum_{j=0}^1 \binom{1}{j} (-\mu)^{1-j} \frac{\Gamma(1 + \frac{j+1}{a}) \cdot \lambda^j}{\Gamma(1 + \frac{1}{a})}$$

$$\begin{aligned}
 &= \binom{1}{0} (-\mu)^{1-0} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{0+1}{a}\right) \cdot \lambda^0}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} + \binom{1}{1} (-\mu)^{1-1} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1+1}{a}\right) \cdot \lambda^1}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} \\
 &= -\mu + \frac{\lambda \Gamma\left(1 + \frac{2}{a}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} \\
 &= -\mu + \mu = 0
 \end{aligned}$$

•  $K=2$  نحصل على العزم المركزي الثاني (والذي يمثل التباين)

$$\begin{aligned}
 \mu_2 = E(r - \mu)^2 &= \sum_{j=0}^2 \binom{2}{j} (-\mu)^{2-j} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{j+1}{a}\right) \cdot \lambda^j}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} \\
 &= \binom{2}{0} (-\mu)^{2-0} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{0+1}{a}\right) \cdot \lambda^0}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} + \binom{2}{1} (-\mu)^{2-1} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1+1}{a}\right) \cdot \lambda^1}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} \\
 &\quad + \binom{2}{2} (-\mu)^{2-2} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{2+1}{a}\right) \cdot \lambda^2}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} \\
 \sigma^2 &= \mu^2 - 2\mu \frac{\Gamma\left(1 + \frac{2}{a}\right) \cdot \lambda}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} + \frac{\Gamma\left(1 + \frac{3}{a}\right) \cdot \lambda^2}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} \quad \dots (2-76)
 \end{aligned}$$

أذ تمثل الصيغة (2-76) صيغة التباين

ويمكن اثبات انها الصيغة نفسها التي توصلنا اليها في حالة العزوم اللامركزية في المعادلة (2-72) اذ ان المتوسط هو

$$\mu = \frac{\lambda \Gamma\left(1 + \frac{2}{a}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)}$$

بالتعويض في المعادلة (2-76)

$$\begin{aligned}
 \sigma^2 &= \mu^2 - 2\mu^2 + \frac{\Gamma\left(1 + \frac{3}{a}\right) \cdot \lambda^2}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} \\
 \sigma^2 &= \frac{\Gamma\left(1 + \frac{3}{a}\right) \cdot \lambda^2}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} - \mu^2 \\
 &= \frac{\lambda^2 * \Gamma\left(1 + \frac{3}{a}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} - \left[ \frac{\lambda * \Gamma\left(1 + \frac{2}{a}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} \right]^2
 \end{aligned}$$

$$\sigma^2 = \frac{\lambda^2}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} \left[ \Gamma\left(1 + \frac{3}{a}\right) - \frac{\Gamma^2\left(1 + \frac{2}{a}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} \right] \quad \dots (2-77)$$

وهي الصيغة نفسها التي تم التوصل اليها في المعادلة (2-72)

• عندما (K=3)

$$\begin{aligned} \mu_3 = E(r - \mu)^3 &= \sum_{j=0}^3 \binom{3}{j} (-\mu)^{3-j} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{j+1}{a}\right) \cdot \lambda^j}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} \\ &= \binom{3}{0} (-\mu)^{3-0} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{0+1}{a}\right) \cdot \lambda^0}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} + \binom{3}{1} (-\mu)^{3-1} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1+1}{a}\right) \cdot \lambda^1}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} \\ &\quad + \binom{3}{2} (-\mu)^{3-2} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{2+1}{a}\right) \cdot \lambda^2}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} + \binom{3}{3} (-\mu)^{3-3} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{3+1}{a}\right) \cdot \lambda^3}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} \\ E(r - \mu)^3 &= -\mu^3 + 3\mu^2 \frac{\Gamma\left(1 + \frac{2}{a}\right) \cdot \lambda}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} - 3\mu \frac{\Gamma\left(1 + \frac{3}{a}\right) \cdot \lambda^2}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} + \frac{\Gamma\left(1 + \frac{4}{a}\right) \cdot \lambda^3}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} \quad \dots (2-78) \end{aligned}$$

• عندما (K=4)

$$\begin{aligned} \mu_4 = E(r - \mu)^4 &= \sum_{j=0}^4 \binom{4}{j} (-\mu)^{4-j} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{j+1}{a}\right) \cdot \lambda^j}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} \\ &= \binom{4}{0} (-\mu)^{4-0} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{0+1}{a}\right) \cdot \lambda^0}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} + \binom{4}{1} (-\mu)^{4-1} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1+1}{a}\right) \cdot \lambda^1}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} \\ &\quad + \binom{4}{2} (-\mu)^{4-2} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{2+1}{a}\right) \cdot \lambda^2}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} + \binom{4}{3} (-\mu)^{4-3} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{3+1}{a}\right) \cdot \lambda^3}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} \\ &\quad + \binom{4}{4} (-\mu)^{4-4} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{4+1}{a}\right) \cdot \lambda^4}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} \end{aligned}$$

$$E(r - \mu)^4 = \mu^4 - 4\mu^3 \frac{\Gamma(1 + \frac{2}{a}) \cdot \lambda}{\Gamma(1 + \frac{1}{a})} + 6\mu^2 \frac{\Gamma(1 + \frac{3}{a}) \cdot \lambda^2}{\Gamma(1 + \frac{1}{a})} - 4\mu \frac{\Gamma(1 + \frac{4}{a}) \cdot \lambda^3}{\Gamma(1 + \frac{1}{a})} + \frac{\Gamma(1 + \frac{5}{a}) \cdot \lambda^4}{\Gamma(1 + \frac{1}{a})} \quad \dots (2 - 79)$$

**رابعاً: "معامل الالتواء : Skewness Coefficient**

$$C.S = \frac{E(X - \mu)^3}{\sigma^3} = \frac{E(X - \mu)^3}{(\sigma^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$C.k = \frac{-\mu^3 + 3\mu^2 \frac{\Gamma(1 + \frac{2}{a}) \cdot \lambda}{\Gamma(1 + \frac{1}{a})} - 3\mu \frac{\Gamma(1 + \frac{3}{a}) \cdot \lambda^2}{\Gamma(1 + \frac{1}{a})} + \frac{\Gamma(1 + \frac{4}{a}) \cdot \lambda^3}{\Gamma(1 + \frac{1}{a})}}{\left( \frac{\lambda^2}{\Gamma(1 + \frac{1}{a})} \left[ \Gamma(1 + \frac{3}{a}) - \frac{\Gamma^2(1 + \frac{2}{a})}{\Gamma(1 + \frac{1}{a})} \right] \right)^{\frac{3}{2}}} \quad \dots (2 - 80)$$

**خامساً: "معامل التفلطح Kurtosis coefficient**

$$C.k = \frac{E(X - \mu)^4}{\sigma^4}$$

$$= \frac{\mu^4 - 4\mu^3 \frac{\Gamma(1 + \frac{2}{a}) \cdot \lambda}{\Gamma(1 + \frac{1}{a})} + 6\mu^2 \frac{\Gamma(1 + \frac{3}{a}) \cdot \lambda^2}{\Gamma(1 + \frac{1}{a})} - 4\mu \frac{\Gamma(1 + \frac{4}{a}) \cdot \lambda^3}{\Gamma(1 + \frac{1}{a})} + \frac{\Gamma(1 + \frac{5}{a}) \cdot \lambda^4}{\Gamma(1 + \frac{1}{a})}}{\left( \frac{\lambda^2}{\Gamma(1 + \frac{1}{a})} \left[ \Gamma(1 + \frac{3}{a}) - \frac{\Gamma^2(1 + \frac{2}{a})}{\Gamma(1 + \frac{1}{a})} \right] \right)^2} \quad \dots (2 - 81)$$

$$C.V = \frac{\sigma}{\mu}$$

$$C.V = \frac{\sqrt{\frac{\lambda^2}{\Gamma(1+\frac{1}{a})} \left[ \Gamma(1+\frac{3}{a}) - \frac{\Gamma^2(1+\frac{2}{a})}{\Gamma(1+\frac{1}{a})} \right]}}{\lambda * \Gamma(1+\frac{2}{a})} \quad \dots (2-82)$$

$$C.V = \frac{\sqrt{\Gamma(1+\frac{1}{a}) \left[ \Gamma(1+\frac{3}{a}) - \frac{\Gamma^2(1+\frac{2}{a})}{\Gamma(1+\frac{1}{a})} \right]}}{\Gamma(1+\frac{2}{a})} \quad \dots (2-83)$$

### 8-2 : طرائق التقدير : Method of estimation

سوف يتم التركيز في طرائق التقدير على توزيع ويبل القطبي الحدي الذي تم التوصل اليه في المعادلة (2-57) وان من اهم الطرائق التي سوف يتم التطرق اليها في التقدير هي:

### 1-8-2: طريقة الامكان الاعظم [2,10,12,14,19] : Maximum Likelihood Estimation (MLE)

تعد طريقة الامكان الاعظم من الاساليب الكلاسيكية المستعملة في تقدير المعلمات لأي توزيع وكان العالم فيشر اول من طبق هذه الطريقة في ابحاث عديدة له ، وتهدف هذه الطريقة الى جعل الدالة الاحتمالية للمتغيرات العشوائية اعظم ما يمكن ، وغالبا ما يتم استعمالها لتقدير معلمات التوزيع لأنها تتميز بخصائص جيدة منها خاصية الثبات وتمتلك اقل تباين وخاصة عدم التحيز عندما يكون حجم العينة كبير .

ويتم تطبيق الطريقة كالآتي:

لو كان لدينا  $x_1, x_2, \dots, x_n$  تمثل مفردات عينة عشوائية بحجم (n) قد سحبت من مجتمع معين بدالة كثافة احتمالية  $f(x, \beta)$  في حالة المتغيرات المستمرة مثلا، فان دالة الامكان لهذه المفردات تتمثل بالتوزيع المشترك لها ، فاذا رمزنا لدالة الامكان بالرمز ( L ) فان هذه الدالة هي:

$$L = f(x_1, x_2, \dots, x_n, \beta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \beta) \quad \dots (2-84)$$

## الفصل الثاني

فإن مبدأ الطريقة هو إيجاد تقدير مثل  $\hat{\beta}$  هو تقدير الامكان الاعظم (M.L.E) للمعلمة  $\beta$  الذي يجعل دالة الامكان في نهايتها العظمى والذي يحقق الشرطين

$$1- \frac{\partial \ln L}{\partial \beta} = 0 \quad \text{المشتقة الاولى}$$

$$2- \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta^2} < 0 \quad \text{المشتقة الثانية}$$

وان دالة الامكان الاعظم لتوزيع ويبيل القطبي الحدي والتي تم ذكرها بالمعادلة (2-53) سوف تكون بالصيغة الاتية :

$$L = f(r_1, r_2, \dots, r_n, a, \lambda) = \prod_{i=1}^n \frac{a}{\Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right)} \frac{1}{\lambda^{a+1}} r_i^a \cdot e^{-\left(\frac{r_i}{\lambda}\right)^a}$$

$$L = \left(\frac{a}{\Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right)}\right)^n \left(\frac{1}{\lambda^{a+1}}\right)^n \left(\prod_{i=1}^n r_i^a\right) \cdot e^{-\sum_{i=1}^n \left(\frac{r_i}{\lambda}\right)^a} \quad \dots (2 - 85)$$

يتم تحويل الصيغة المذكور انفا الى الشكل الخطي وذلك بعد اخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين

$$\ln L = n \ln a - n \ln \left[\Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right)\right] - n \ln(\lambda^{a+1}) + a \left(\sum_{i=1}^n \ln r_i\right) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{r_i}{\lambda}\right)^a$$

$$\ln L = n \ln a - n \ln \left[\Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right)\right] - n(a + 1) \ln \lambda + a \left(\sum_{i=1}^n \ln r_i\right) - \frac{\sum_{i=1}^n r_i^a}{\lambda^a} \quad \dots (2 - 86)$$

ولإيجاد القيم التقديرية لكل من معلمتي القياس والشكل  $(a, \lambda)$  التي تجعل من دالة الامكان اعظم ما يمكن نأخذ المشتقة الجزئية للمعادلة (2-86) ومساواتها للصفر وكما يأتي :

اولاً: الاشتقاق بالنسبة للمعلمة  $\lambda$ .

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = - \frac{n(a + 1)}{\lambda} - \frac{[\lambda^a \cdot (0) - \sum_{i=1}^n r_i^a (a\lambda^{a-1})]}{\lambda^{2a}} \quad \dots (2 - 87)$$

وبمساواة المعادلة للصفر وبعد التبسيط نحصل على

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = - \frac{n(a + 1)}{\lambda} + \frac{a \sum_{i=1}^n r_i^a}{\lambda^{a+1}} = 0$$

وبإعادة الترتيب

$$\frac{n(a + 1)}{\lambda} = \frac{a \sum_{i=1}^n r_i^a}{\lambda^{a+1}}$$

$$n(a+1)\lambda^{a+1} = \lambda a \sum_{i=1}^n r_i^a$$

$$n(a+1)\lambda^a = a \sum_{i=1}^n r_i^a$$

$$\lambda^a = \frac{a \sum_{i=1}^n r_i^a}{n(a+1)} \quad \dots (2-88)$$

$$\hat{\lambda} = \left[ \frac{a \sum_{i=1}^n r_i^a}{n(a+1)} \right]^{\frac{1}{a}} \quad \dots (2-89)$$

ثانياً: الاشتقاق بالنسبة للمعلمة a.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{Ln } L}{\partial a} &= \frac{n}{a} - n \frac{d}{da} \left[ \text{Ln } \Gamma \left( \frac{1}{a} + 1 \right) \right] - n \text{Ln } \lambda + \sum_{i=1}^n \text{Ln } r_i \\ &\quad - \frac{[\lambda^a \cdot (\sum_{i=1}^n r_i^a \text{Ln } r_i) - \sum_{i=1}^n r_i^a \lambda^a \text{Ln } \lambda]}{\lambda^{2a}} \quad \dots (2-90) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \text{Ln } L}{\partial a} = \frac{n}{a} - n \left[ - \frac{\psi \left( \frac{1}{a} + 1 \right)}{a^2} \right] - n \text{Ln } \lambda + \sum_{i=1}^n \text{Ln } r_i - \frac{\lambda^a [\sum_{i=1}^n r_i^a \text{Ln } r_i - \sum_{i=1}^n r_i^a \text{Ln } \lambda]}{\lambda^{2a}}$$

$$\frac{\partial \text{Ln } L}{\partial a} = \frac{n}{a} + \frac{n}{a^2} \psi \left( \frac{1}{a} + 1 \right) - n \text{Ln } \lambda + \sum_{i=1}^n \text{Ln } r_i - \frac{\sum_{i=1}^n r_i^a \text{Ln } r_i - \sum_{i=1}^n r_i^a \text{Ln } \lambda}{\lambda^a}$$

اذ  $\psi \left( \frac{1}{a} + 1 \right) = \frac{\dot{\Gamma} \left( \frac{1}{a} + 1 \right)}{\Gamma \left( \frac{1}{a} + 1 \right)}$  وتسمى دالة كاما الثنائية <sup>[36]</sup> (Digamma function)

وتمثل لوغاريتم مشتقة دالة كاما

$$\psi(x) = \frac{d}{dx} \text{Ln } (\Gamma(x)) = \frac{\dot{\Gamma}(x)}{\Gamma(x)} \sim \text{Ln } (x) - \frac{1}{2(x)}$$

$$\psi \left( \frac{1}{a} + 1 \right) = \frac{\dot{\Gamma} \left( \frac{1}{a} + 1 \right)}{\Gamma \left( \frac{1}{a} + 1 \right)} \sim \text{Ln} \left( \frac{1}{a} + 1 \right) - \frac{1}{2 \left( \frac{1}{a} + 1 \right)}$$

بالتعويض عن دالة  $\psi \left( \frac{1}{a} + 1 \right)$



$$\frac{\partial \ln L}{\partial a} = \frac{n}{a} + \frac{n}{a^2} \left[ \ln \left( \frac{1}{a} + 1 \right) - \frac{1}{2 \left( \frac{1}{a} + 1 \right)} \right] - n \ln \lambda + \sum_{i=1}^n \ln r_i - \frac{\sum_{i=1}^n r_i^a \ln r_i}{\lambda^a} + \frac{\sum_{i=1}^n r_i^a \ln \lambda}{\lambda^a}$$

وبالتعويض في المعادلة المذكور انفا عن قيمة  $\lambda^a = \frac{a \sum_{i=1}^n r_i^a}{n(a+1)}$  التي تم الحصول عليها في المعادلة (2-84)

وبعد التبسيط والاختصار

$$\frac{\partial \ln L}{\partial a} = \frac{n}{a} + \frac{n}{a^2} \ln \left( \frac{1}{a} + 1 \right) - \frac{n}{a^2} \frac{1}{2 \left( \frac{1}{a} + 1 \right)} - n \ln \lambda + \sum_{i=1}^n \ln r_i - \frac{\sum_{i=1}^n r_i^a \ln r_i}{\frac{a \sum_{i=1}^n r_i^a}{n(a+1)}} + \frac{\sum_{i=1}^n r_i^a \ln \lambda}{\frac{a \sum_{i=1}^n r_i^a}{n(a+1)}}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial a} = \frac{n}{a} + \frac{n}{a^2} \ln \left( \frac{1}{a} + 1 \right) - \frac{n}{(2a + 2a^2)} - n \ln \lambda + \sum_{i=1}^n \ln r_i - \frac{n(a+1) \sum_{i=1}^n r_i^a \ln r_i}{a \sum_{i=1}^n r_i^a} + \frac{n(a+1) \sum_{i=1}^n r_i^a \ln \lambda}{a \sum_{i=1}^n r_i^a}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial a} = \frac{n}{a} + \frac{n}{a^2} \ln \left( \frac{1}{a} + 1 \right) - \frac{n}{(2a + 2a^2)} - n \ln \lambda + \sum_{i=1}^n \ln r_i - \frac{n(a+1) \sum_{i=1}^n r_i^a \ln r_i}{a \sum_{i=1}^n r_i^a} + \frac{n(a+1)}{a} \ln \lambda$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial a} = \frac{n}{a} + \frac{n}{a^2} \ln \left( \frac{1}{a} + 1 \right) - \frac{n}{(2a + 2a^2)} - n \ln \lambda + \sum_{i=1}^n \ln r_i - \frac{n(a+1) \sum_{i=1}^n r_i^a \ln r_i}{a \sum_{i=1}^n r_i^a} + n \ln \lambda + \frac{n \ln \lambda}{a}$$

وبعد الاختصار وبمساواة المشتقة للصفر واعادة الترتيب نحصل على:

$$\frac{n}{a} + \frac{n}{a^2} \ln \left( \frac{1}{a} + 1 \right) - \frac{n}{(2a + 2a^2)} + \sum_{i=1}^n \ln r_i - \frac{n(a+1) \sum_{i=1}^n r_i^a \ln r_i}{a \sum_{i=1}^n r_i^a} + \frac{n \ln \lambda}{a} = 0$$

نقسم المعادلة على (n)

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} \ln \left( \frac{1}{a} + 1 \right) - \frac{1}{(2a + 2a^2)} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln r_i - \frac{(a+1) \sum_{i=1}^n r_i^a \ln r_i}{a \sum_{i=1}^n r_i^a} + \frac{\ln \lambda}{a} = 0$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} \ln \left( \frac{1}{a} + 1 \right) - \frac{1}{2a(1+a)} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln r_i - \frac{\sum_{i=1}^n r_i^a \ln r_i}{\sum_{i=1}^n r_i^a} - \frac{\sum_{i=1}^n r_i^a \ln r_i}{a \sum_{i=1}^n r_i^a} + \frac{\ln \lambda}{a} = 0$$

$$\frac{1}{a} \left[ 1 + \frac{1}{a} \ln \left( \frac{1}{a} + 1 \right) - \frac{1}{2(1+a)} + \ln \lambda \right] = \frac{\sum_{i=1}^n r_i^a \ln r_i}{\sum r_i^a} + \frac{\sum_{i=1}^n r_i^a \ln r_i}{a \sum_{i=1}^n r_i^a} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln r_i$$

$$\frac{1}{a} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^n r_i^a \ln r_i}{\sum_{i=1}^n r_i^a} + \frac{\sum_{i=1}^n r_i^a \ln r_i}{a \sum_{i=1}^n r_i^a} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln r_i}{1 + \frac{1}{a} \ln \left( \frac{1}{a} + 1 \right) - \frac{1}{2(1+a)} + \ln \lambda} \quad \dots (2-91)$$

$$\hat{a} = \frac{1 + \frac{1}{a} \ln \left( \frac{1}{a} + 1 \right) - \frac{1}{2(1+a)} + \ln \lambda}{\frac{\sum_{i=1}^n r_i^a \ln r_i}{\sum_{i=1}^n r_i^a} + \frac{\sum_{i=1}^n r_i^a \ln r_i}{a \sum_{i=1}^n r_i^a} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln r_i} \quad \dots (2-92)$$

وبالتعويض عن قيمة  $\hat{\lambda} = \left[ \frac{a \sum_{i=1}^n r_i^a}{n(a+1)} \right]^{\frac{1}{a}}$  التي تم الحصول عليها في المعادلة (2-92) نحصل على:

$$\hat{a} = \frac{1 + \frac{1}{a} \ln \left( \frac{1}{a} + 1 \right) - \frac{1}{2(1+a)} + \frac{1}{a} \ln \left[ \frac{a \sum_{i=1}^n r_i^a}{n(a+1)} \right]}{\frac{\sum_{i=1}^n r_i^a \ln r_i}{\sum r_i^a} + \frac{\sum_{i=1}^n r_i^a \ln r_i}{a \sum_{i=1}^n r_i^a} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln r_i} \quad \dots (2-93)$$

والمعادلة (2-93) لا يمكن حلها الا بطرائق التحليل العددي ومنها طريقة نيوتن رافسون Newton-Raphson method .

### 2-8-2 : طريقة العزوم (MOM) :<sup>[2,10,12,14]</sup>

وهي من الطرائق شائعة الاستعمال وتمتاز بسهولة تطبيقها وفكرتها الاساس هي مساواة العزم الخاص بالعينة  $m_k$  مع عزم المجتمع  $\mu_k$  ومن ثم ايجاد صيغة لتقدير المعلمات .  
من معادلة (2-69)

$$\mu_k = \frac{\lambda^k * \Gamma \left( 1 + \frac{k+1}{a} \right)}{\Gamma \left( 1 + \frac{1}{a} \right)} \quad \dots (2-94)$$

ويمكن الحصول على المتوسط اذ يمثل العزم الاول ( $k=1$ )

$$Mean = \mu_1 = \frac{\lambda * \Gamma \left( 1 + \frac{2}{a} \right)}{\Gamma \left( 1 + \frac{1}{a} \right)} \quad \dots (2-95)$$

وكذلك التباين

$$\text{Variance} = \mu_2 - (\mu_1)^2$$

اذ ان العزم الثاني يكون بالصورة الاتية (k=2)

$$\mu_2 = \frac{\lambda^2 * \Gamma\left(1 + \frac{3}{a}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} \quad \dots (2 - 96)$$

التباين

$$\text{var} = \sigma^2 = \frac{\lambda^2}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} \left[ \Gamma\left(1 + \frac{3}{a}\right) - \frac{\Gamma^2\left(1 + \frac{2}{a}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} \right] \quad \dots (2 - 97)$$

### 3-8-2 طريقة المربعات الصغرى: [5,,6,12,14] Least Squares Method(OLS)

تعد من احد اكثر الاساليب شيوعا واهمية في تقدير المعلمات عندما تكون معادلة الانموذج متغيرات خطيه او غير خطيه ، وتستعمل في الكثير من الظواهر الاقتصادية والطبية والهندسية والرياضية... الخ .  
وتتماز هذه الطريقة بعدة خصائص منها خطية المعلمات المقدرة وكذلك خاصية عدم التحيز وخاصية اقل تباين و ايضا بخاسية الاتساق ، والهدف الرئيس لهذه الطريقة هو تقليل مجموع مربعات الخطأ(مربع الفروق بين القيم الحقيقية للعينة والقيم المتوقعة لها) ويرمز لها بالرمز ( S ) وكما موضح في الصيغة الاتية :

$$\sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n [Y_i - E(Y_i)]^2 \quad \dots (2 - 98)$$

$$S = \sum_{i=1}^n [F(X_i) - E(F(X_i))]^2 \quad \dots (2 - 99)$$

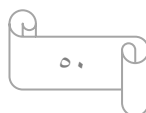
ويمكن اخذ دالة التوزيع التجميعية (C.D.F) لتوزيع ويبيل القطبي الحدي  $(F(X_i))$  المذكورة في المعادلة (2-58) وكما يأتي :

$$F(r; \lambda, a) = \frac{\gamma\left(\frac{1}{a} + 1, \left(\frac{r}{\lambda}\right)^a\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right)} \quad \dots (2 - 100)$$

ويتم ايجاد القيم التقديرية الى  $\hat{F}(X_i)$  عن طريق احدى الطرائق اللامعلمية

$$E(F(X_i)) = \frac{i}{n+1} = q_i \quad ; \quad V((F(X_i))) = \frac{i(n-i+1)}{(n+1)^2+(n+2)} \quad \dots (2 - 101)$$

وبالتعويض في المعادلة (2-99) وكالاتي :



$$S = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\gamma\left(\frac{1}{a} + 1, \left(\frac{r}{\lambda}\right)^a\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right)} - q_i \right]^2 \quad \dots (2 - 102)$$

عن طريق العلاقة بين دالة كاما التامة ودالة كاما الدنيا والعليا

$$\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right) = \Gamma\left(1 + \frac{1}{a}, \left(\frac{r}{\lambda}\right)^a\right) + \gamma\left(1 + \frac{1}{a}, \left(\frac{r}{\lambda}\right)^a\right) \quad (2 - 103)$$

$$\gamma\left(1 + \frac{1}{a}, \left(\frac{r}{\lambda}\right)^a\right) = \Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right) - \Gamma\left(1 + \frac{1}{a}, \left(\frac{r}{\lambda}\right)^a\right) \quad \dots (2 - 104)$$

ومن ثم تكون المعادلة (2-102) بعد التعويض كالآتي:

$$S = \sum_{i=1}^n \left[ 1 - \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}, \left(\frac{r}{\lambda}\right)^a\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right)} - q_i \right]^2 \quad \dots (2 - 105)$$

ويأخذ المشتقة الجزئية للمعادلة (2-105) بالنسبة للمعلمات  $(a, \lambda)$  ومساواة المشتقة للصفر للحصول على القيم المقدرة للمعلمات وكما يأتي:

أولاً: بالنسبة للمعلمة  $a$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^n \left[ 1 - q_i - \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}, \left(\frac{r}{\lambda}\right)^a\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right)} \right] & \left( \frac{1}{a^2 \Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} e^{-\left(\frac{r}{\lambda}\right)^a} \right) \left[ e^{\left(\frac{r}{\lambda}\right)^a} G_{2,3}^{3,0} \left( \left(\frac{r}{\lambda}\right)^a \middle| \begin{matrix} 1, 1 \\ 0, 0, 1 + \frac{1}{a} \end{matrix} \right) \right. \\ & + a^2 \left(\frac{r}{\lambda}\right)^{\frac{1}{a}+1} \log\left(\frac{r}{\lambda}\right) \\ & \left. + e^{\left(\frac{r}{\lambda}\right)^a} \Gamma\left(1 + \frac{1}{a}, \left(\frac{r}{\lambda}\right)^a\right) \left[ \log\left(\left(\frac{r}{\lambda}\right)^a\right) - \psi\left(1 + \frac{1}{a}\right) \right] \right] \quad \dots (2 - 106) \end{aligned}$$

بالقسمة على (2) والمساواة مع الصفر نحصل على:

$$\sum_{i=1}^n \left[ 1 - q_i - \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}, \left(\frac{r}{\lambda}\right)^a\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right)} \right] \left( \frac{1}{a^2 \Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} e^{-\left(\frac{r}{\lambda}\right)^a} \right) \left[ e^{\left(\frac{r}{\lambda}\right)^a} G_{2,3}^{3,0} \left( \left(\frac{r}{\lambda}\right)^a \middle| \begin{matrix} 1, 1 \\ 0, 0, 1 + \frac{1}{a} \end{matrix} \right) \right. \\ \left. + a^2 \left(\frac{r}{\lambda}\right)^{\frac{1}{a}+1} \log \left(\frac{r}{\lambda}\right) \right. \\ \left. + e^{\left(\frac{r}{\lambda}\right)^a} \Gamma\left(1 + \frac{1}{a}, \left(\frac{r}{\lambda}\right)^a\right) \left[ \log \left(\frac{r}{\lambda}\right)^a - \psi \left(1 + \frac{1}{a}\right) \right] \right] = 0 \quad \dots (2 - 107)$$

تم تعريف دالة (Meijer G function) اخر مرة عام 1946 من Meijer والتي تعد احد انواع التكامل المعقد من نوع Mellin -Barnes integrals ويتم تعريفها بصورة عامة كما يأتي : [15]

$$G_{p,q}^{m,n} \left( Z \middle| \begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_p \\ b_1, b_2, \dots, b_q \end{matrix} \right) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{(\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j - s)) (\prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j + s))}{(\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j + s)) (\prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j - s))} z^s ds$$

ويمكن كتابتها ايضا بالصيغة الاتية :

$MeijerG(a, b, c, d, z)$

$$MeijerG \left( \left[ \begin{matrix} \phantom{a} \\ \phantom{a} \end{matrix} \right], \left[ \begin{matrix} 1, 1 \end{matrix} \right], \left[ \begin{matrix} 0, 0, 1 + \frac{1}{a} \end{matrix} \right], \left[ \begin{matrix} \phantom{a} \\ \phantom{a} \end{matrix} \right], \left(\frac{r}{\lambda}\right)^a \right)$$

وتمثل المعلمات a,b,c,d متجهات ممكن ان تكون فارغة او تأخذ رقماً معيناً او دالة و Z المتغير وهو عبارة عن مصفوفة او متغير او رقم .

ثانياً: بالنسبة للمعلمة  $(\lambda)$

وبالطريقة نفسها نأخذ المشتقة الجزئية للمعادلة (2-105) بالنسبة للمعلمة  $(\lambda)$  ومساواة المشتقة بالصفر .

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} = 2 \sum_{i=1}^n \left[ \left[ 1 - q_i - \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}, \left(\frac{r}{\lambda}\right)^a\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right)} \right] \right] \left[ - \frac{\left(\left(\frac{r}{\lambda}\right)^a\right)^{\frac{1}{a}+1} a e^{-\left(\frac{r}{\lambda}\right)^a}}{\lambda \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} \right] = 0 \quad \dots (2 - 108)$$

بالقسمة على (- 2) والمساواة مع الصفر وبعد التبسيط نحصل على :

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^n \left[ \left[ 1 - q_i - \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}, \left(\frac{r}{\lambda}\right)^a\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right)} \right] \right] \left[ \frac{\left(\frac{r}{\lambda}\right)^{1+a} a e^{-\left(\frac{r}{\lambda}\right)^a}}{\lambda \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} \right] = 0 \quad \dots (2 - 109)$$

$$= \sum_{i=1}^n \left[ \left[ 1 - q_i - \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}, \left(\frac{r}{\lambda}\right)^a\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right)} \right] \right] \left[ \frac{a r^{1+a} e^{-\left(\frac{r}{\lambda}\right)^a}}{\lambda^{2+a} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} \right] = 0 \dots (2-110)$$

والمعادلات (2-107) و (2-110) تمثل معادلات غير خطية لا يمكن حلها الا باستعمال الطرائق العددية لغرض الحصول على مقدرات طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية وتم استعمال طريقة نيوتن رافسون في الحصول على المعلمات المقدرة.

#### 4-8-2 طريقة المربعات الصغرى الموزونة<sup>[5,14]</sup>: Weighted least Square Method(WLS)

ويمكن الحصول على مقدرات هذه الطريقة وذلك عن طريق تصغير المعادلة الآتية :

$$W_s = \sum_{i=1}^n W_i [F(X_i) - E(F(X_i))]^2 \quad \dots (2-111)$$

Where :

$$W_i = \frac{1}{\text{var } F(x_i)} = \frac{(n+1)^2(n+2)}{i(n-i+1)} \quad \dots (2-112)$$

$$W_s = \sum_{i=1}^n W_i \left[ \frac{\gamma\left(1 + \frac{1}{a}, \left(\frac{r}{\lambda}\right)^a\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} - q_i \right]^2 \quad \dots (2-113)$$

$$W_s = \sum_{i=1}^n W_i \left[ 1 - \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}, \left(\frac{r}{\lambda}\right)^a\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right)} - q_i \right]^2 \quad \dots (2-114)$$

وبأخذ المشتقة الجزئية للمعلمات  $(a, \lambda)$  للمعادلة (2-114) نحصل على:

اولاً: بالنسبة للمعلمة a

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^n W_i \left[ 1 - q_i \right. \\ \left. - \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}, \left(\frac{r}{\lambda}\right)^a\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right)} \right] \left( \frac{1}{a^2 \Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} e^{-\left(\frac{r}{\lambda}\right)^a} \right) \left[ e^{\left(\frac{r}{\lambda}\right)^a} G_{2,3}^{3,0} \left( \left(\frac{r}{\lambda}\right)^a \middle| \begin{matrix} 1, 1 \\ 0, 0, 1 + \frac{1}{a} \end{matrix} \right) \right. \\ \left. + a^2 \left(\frac{r}{\lambda}\right)^{\frac{1}{a}+1} \log \left(\frac{r}{\lambda}\right) \right. \\ \left. + e^{\left(\frac{r}{\lambda}\right)^a} \Gamma\left(1 + \frac{1}{a}, \left(\frac{r}{\lambda}\right)^a\right) \left[ \log \left(\left(\frac{r}{\lambda}\right)^a\right) - \psi \left(1 + \frac{1}{a}\right) \right] \right] \quad \dots (2 - 115) \end{aligned}$$

بالقسمة على (2) والمساواة مع الصفر نحصل على:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n W_i \left[ 1 - q_i - \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}, \left(\frac{r}{\lambda}\right)^a\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right)} \right] \left( \frac{1}{a^2 \Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} e^{-\left(\frac{r}{\lambda}\right)^a} \right) \left[ e^{\left(\frac{r}{\lambda}\right)^a} G_{2,3}^{3,0} \left( \left(\frac{r}{\lambda}\right)^a \middle| \begin{matrix} 1, 1 \\ 0, 0, 1 + \frac{1}{a} \end{matrix} \right) \right. \\ \left. + a^2 \left(\frac{r}{\lambda}\right)^{\frac{1}{a}+1} \log \left(\frac{r}{\lambda}\right) + e^{\left(\frac{r}{\lambda}\right)^a} \Gamma\left(1 + \frac{1}{a}, \left(\frac{r}{\lambda}\right)^a\right) \left[ \log \left(\left(\frac{r}{\lambda}\right)^a\right) - \psi \left(1 + \frac{1}{a}\right) \right] \right] \\ = 0 \quad \dots (2 - 116) \end{aligned}$$

ثانياً: بالنسبة للمعلمة  $(\lambda)$

وبالطريقة نفسها نأخذ المشتقة الجزئية للمعادلة (2-114) بالنسبة للمعلمة  $(\lambda)$  ومساواة المشتقة بالصفر .

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} = 2 \sum_{i=1}^n W_i \left[ \left[ 1 - q_i - \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}, \left(\frac{r}{\lambda}\right)^a\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right)} \right] \right] \left[ - \frac{\left(\left(\frac{r}{\lambda}\right)^a\right)^{\frac{1}{a}+1} a e^{-\left(\frac{r}{\lambda}\right)^a}}{\lambda \Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} \right] = 0 \dots (2 - 117)$$

بالقسمة على (2) والمساواة مع الصفر وبعد التبسيط نحصل على :

$$\sum_{i=1}^n W_i \left[ \left[ 1 - q_i - \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}, \left(\frac{r}{\lambda}\right)^a\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right)} \right] \right] \left[ \frac{\left(\frac{r}{\lambda}\right)^{1+a} a e^{-\left(\frac{r}{\lambda}\right)^a}}{\lambda \Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} \right] = 0 \dots (2 - 118)$$

$$= \sum_{i=1}^n W_i \left[ \left[ 1 - q_i - \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}, \left(\frac{r}{\lambda}\right)^a\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right)} \right] \right] \left[ \frac{a r^{1+a} e^{-\left(\frac{r}{\lambda}\right)^a}}{\lambda^{2+a} \Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)} \right] = 0 \dots (2 - 119)$$

والمعادلات (2-116) و (2-119) تمثل معادلات غير خطية لا يمكن حلها الا باستعمال الطرائق العددية لغرض الحصول على مقدرات طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية وتم استعمال طريقة نيوتن رافسون في الحصول على المعلمة المقدره.

وبعد التبسيط والتعويض عن قيمة  $W_i$  وكذلك  $q_i$  نحصل على :

$$W_i = \sum_{i=1}^n \frac{(n+1)^2(n+2)}{i(n-i+1)}$$

$$q_i = \frac{i}{n+1}$$

## 9-2 معايير اختيار أفضل نموذج : [2,4] (Criteria for selection of the best)

يعد اختيار أفضل نموذج توزيع احتمالي من العمليات المهمة في التحليل الإحصائي إذ يتباين تمثيل البيانات و نمذجتها من توزيع لآخر لذا يتم المفاضلة بين التوزيعات الاحتمالية واختيار أفضلها كفاية ودقة في النمذجة، ويتم ذلك وفق معايير معينة، والتوزيع الذي يمتلك أقل قيمة يعد الأفضل في تمثيل هذه العينة من البيانات ومن أهم هذه المعايير هي:

### 1-9-2: معيار معلومات اكيائي (AIC) [2,4] (Akaike Information Criteria):

يعرف المعيار حسب الصيغة الرياضية الآتية:

$$AIC = -2 \log(L) + 2k \quad \dots (2 - 120)$$

إذ ان:

$\log(L)$  : تمثل اللوغاريتم الطبيعي لدالة الإمكان الأعظم (MLE) للنموذج.

$K$  : تمثل عدد معاملات النموذج.

### 2-9-2: معيار المعلومات البيزي (BIC) [2,4] (Bayesian Information Criterion):

يعبر عن المعيار حسب الصيغة الرياضية الآتية :

$$BIC = -2 \log(L) + k \log(n) \quad \dots (2 - 121)$$

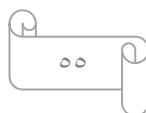
إذ ان:

$n$ : تمثل حجم العينة.

## 10-2 : اختبار جودة الملازمة في الإحداثيات القطبية

### Goodness of Fit Test in Polar Coordinates

من أهم اختبارات جودة التوافق للتوزيعات المحددة في الإحداثيات القطبية هي اختبارات كولموغوروف - سمير نوف واندرسون دارلينك ، إذ تم تفضيل هذه الاختبارات لأنها أكثر الطرائق شيوعاً لاختبارات جودة الملازمة في الاختبارات التي





سيتم إجراؤها باستعمال دوال التوزيع الحدي القطبي في جودة اختبارات الملاءمة ، و قبول فرضية العدم يكون لكل من نتائج الاختبارات بصورة منفصلة وتنص فرضية العدم بان البيانات المشاهدة تتوزع حسب التوزيع الاحتمالي المفترض .

**1-10-2: اختبار سمير نوف -كولمجروف** [41,35,26]

**Polar Kolmogorov-Smirnov Goodness of Fit Test(K-S)**

عند إجراء اختبار الملاءمة على وفق دوال التوزيع الحدية ، يتم إجراء اختبار Kolmogorov-Smirnov بافتراض أن المتغير الزاوي موزع بشكل منتظم.

بالنسبة لاختبار Kolmogorov-Smirnov أحادي المتغير أحادي المتغير وعلى فرض أن قيم العينة  $r = [r_i , i= 1,2,.....,n]$  تم الحصول عليها من توزيع حدي مستمر مستقل ومتسق  $F_R(r)$  . وتكون فرضية العدم والفرضية البديلة لهذا الاختبار كالآتي:

$H_0 : [ F_R(r) = F_0(r) ]$  ،  $F_0(r)$  البيانات الخاصة بالمتغير لها توزيع احتمالي تراكمي

$H_1 : [ F_R(r) \neq F_0(r) ]$  ،  $F_0(r)$  البيانات الخاصة بالمتغير لا تتوزع بحسب هذا التوزيع الافتراضي

اذ ان:

$F_0(r)$ : دالة التوزيع التي تمثل قيم المشاهدات وكذلك يتم تحديد حد الخطأ  $(\alpha)$  عند إجراء الاختبارات .

ولاختبار صحة الفرضيات الموضوعية لابد من تحديد احصاءة الاختبار  $D_n$  والتي يتم حسابها حسب الصيغة الآتية :

$$D_n = \max_{i=1}^n (|F_n(r_i) - F_0(r_i)|) \quad \dots (2 - 122)$$

وتمثل  $F_n(r)$  دالة التوزيع التجريبية الحدية ويتم حسابها بالصيغة الآتية :

$$F_n(r_i) = \frac{I(r_i, r)}{n} \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \dots (2 - 123)$$

ويتم حساب دالة المؤشر  $I(r_i, r)$  حسب الصيغة الآتية :

$$I(r_i, r) = \sum_{k=1}^n \begin{cases} 1, & r_k \leq r_i \\ 0, & r_k > r_i \end{cases} \quad \dots (2 - 124)$$

ويتم رفض الفرضية الصفرية (التوزيع المحدد لا يمثل البيانات) عند المستوى  $(\alpha)$  إذا كانت

$$D_n > d_{n,\alpha}$$

والعكس صحيح .

**2-10-2: اختبار اندرسون-دارلنك** [7, 26] **Anderson-Darling Test(A-D)**

يستعمل هذا الاختبار في حالة البيانات المأخوذة من مجتمع له توزيع محدد ويعتمد في حسابة على دالة التوزيع التراكمية CDF ويرمز له اختصارا بالرمز A-D ، ولغرض إجراء الاختبار نتبع الخطوات الآتية :

١- ترتيب البيانات تنازلي او تصاعدي

٢- تحديد التوزيع المفترض مع تقدير معالمته.

٣- حساب صيغة الاختبار من الصيغة الآتية :

$$A_D = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i - 1) [\ln F(x_i) + \ln(1 - F(x_{n+1-i}))] \quad \dots (2 - 125)$$

٤- القرار يكون بمقارنة القيمة المحسوبة لـ (A-D) في الصيغة (2-147) مع القيمة الجدولية لـ (A-D) وبمستوى معنوية ( $\alpha$ ) فإذا كانت القيمة المحسوبة اقل من القيمة الجدولية فهذا دليل على ان التوزيع المحدد هو التوزيع الذي يمثل البيانات واما اذا كان العكس أي ان القيمة المحسوبة اكبر من القيمة الجدولية فيدل ذلك على ان التوزيع المحدد لا يمثل البيانات .

ويمكن استعمال اختبار A-D لمقارنة مدى ملائمة عدة توزيعات لتحديد التوزيع الافضل ولغرض الوصول الى ان توزيعا واحدا هو الافضل يجب ان تكون قيمة الاحصاء A-D اقل من بقية الاحصاءات الاخرى .

## 11-2: معيار المقارنة بين طرائق التقدير <sup>[2,10]</sup> (Criteria for comparing estimation ) (methods)

لبيان أي الطرائق افضل في التقدير نستعمل معيار (MSE)(Mean square Error) متوسط مربعات الخطأ اذ تفضل الطريقة التي تمتلك اقل قيمة لهذا المعيار ويتم حسابه من الصيغة الآتية.

$$MSE(\hat{\theta}) = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R (\beta_i^{\wedge} - \beta)^2 \quad \dots (2 - 126)$$

إذ ان:

$\beta$  : تمثل القيم الافتراضية لمعالم الانموذج أي ان  $\beta = (a, \lambda)$  .

$\beta_i^{\wedge}$  : تمثل القيم المقدرة لمعالم الانموذج وحسب طريقة التقدير المستعملة.

R : يمثل عدد تكرار التجربة .

# الفصل الثالث

## الجانب التجريبي

### تمهيد

تم التطرق في الفصل الثاني الى بعض طرائق التقدير لغرض تقدير معلمات انموذج توزيع ويبل القطبي وفي هذا الفصل سوف يتم توضيح مفهوم المحاكاة وطريقة توليد البيانات العشوائية وكذلك تقدير معلمات التوزيع بالطرائق الاربعية المذكورة ومن ثم تفسير نتائج المحاكاة واختيار افضل طريقة تقدير لتقدير معلمات انموذج التوزيع الجديد اعتمادا على معيار MSE.

### 1-3 : مفهوم المحاكاة [1,2]

هناك الكثير من النظريات الاحصائية يصعب تحليلها رياضيا بسبب بعض الصعوبات او التعقيد والتي لا تؤدي الى التوصل الى البرهان الرياضي لها ، لذا لا بد من وصف هذه العمليات بصورة مشابهة للصورة الحقيقية بشكل نماذج معينة لذا يمكن القول ان عملية المحاكاة ماهي الا تمثيل للواقع الحقيقي باستعمال بعض النماذج أي ان المحاكاة هي الاسلوب الذي ينتج انموذجاً جديداً يمثل الانموذج الحقيقي من دون التوصل اليه ومن ثم فان المحاكاة توفر الجهد والوقت للباحث عن طريق استعمال البرامج الحاسوبية .

ومن اهم الطرائق المستعملة والاكثر شيوعا هي طريقة مونت كارلو (Monte Carlo) وتستعمل في توليد المتغيرات العشوائية التي تتبع احد التوزيعات الاحصائية ولهذه الطريقة اهمية كبيرة في تقدير معلمات التوزيعات الاحتمالية والمقارنة بين طرائق التقدير وبالاعتماد على محاكاة احجام عينات مختلفة من البيانات المتولدة بحسب هذه الطريقة ، والتي تعد ايضا من الطرائق العددية الخاصة والتي تتعامل مع المتغيرات العشوائية وتطبيقاتها المتمثلة بحساب المساحة تحت المنحنى لاي دالة وكذلك في حساب الحجم وغيرها من التطبيقات الحياتية .

### 2-3: مراحل وصف تجارب المحاكاة

تضمنت مراحل المحاكاة عدة مراحل لغرض تطبيق طرائق تقدير المعلمات للانموذج الجديد وتم استعمال البرنامج الاحصائي R-4.2.3 (احدث نسخة 2023) وهذه المراحل هي :

### 1-2-3: مرحلة اختيار القيم الافتراضية وحجم العينة

في هذه المرحلة يتم اختيار القيم الافتراضية لمعلمات التوزيع المقترح (توزيع ويبل القطبي الحدي) وهذه المعلمات هي ( معلمة الشكل  $a$  ومعلمة القياس  $\lambda$  ) فقد تم اختيارها وكما في الجدول (1-3):

الجدول (1-3)

القيم الافتراضية الأولية للمعاملات والنماذج المقترحة

Model	a	$\lambda$
1	0.5	1
2	1	1
3	1.5	1
4	2	1
5	2.5	1
6	0.5	2
7	1	2
8	1.5	2
9	2	2
10	2.5	2

المصدر : من اعداد الباحث

- ويتم اختيار حجم العينة فقد تم اختيار اربع حجوم عينات مختلفة ( 30 , 50 , 75 , 100,150 ) وذلك لغرض تحديد حجم العينة المناسب .
- وتم تكرار التجربة لعدة مرات لغرض الوصول الى نتائج تقدير جيدة وتم اختيار تكرار التجربة (K=1000) مرة لكل حالة من حالات القيم الافتراضية .

### 2-2-3 توليد بيانات عشوائية في دوال التوزيع القطبي [21,41]

#### Generating Random Data in Polar Distribution Functions

البيانات العشوائية هي متتالية أعداد لها الصفة العشوائية وتعد هذه البيانات جزءا اساسيا في محاكاة مونت كارلو وهناك طرائق عدة لتوليد الاعداد العشوائية .

و من الطرائق الاكثر شيوعا في توليد المشاهدات العشوائية هي:

- 1- التحويل العكسي
- 2- الرفض والقبول

على الرغم من أن طريقة التحويل العكسي هي أقوى طريقة من بين هذه الطرائق إلا أنه في بعض الأحيان يتم استعمال طريقة الرفض والقبول بسبب بعض المشكلات اذا لا يمكن حساب معكوس بعض التوزيعات.

تم التوصل الى دوال التوزيع الحدية للمتغيرات ( $\theta$  و  $r$ ) في دوال التوزيع القطبي الموضحة في الفصل الثاني ، وتم توضيح ان هذان المتغيران مستقلان عن بعضهما البعض وذلك لاستيفانهم شرط الاستقلالية

$$F_{\theta,r}(\theta, r) = F_{\theta}(\theta) \cdot F_r(r)$$

## الفصل الثالث

في هذه الاطروحة تم إنشاء أرقام عشوائية باستعمال توزيع ويبيل القطبي لتوليد أرقام عشوائية. إذ لدينا نموذجان، الأول توزيع ويبيل الحدي القطبي بدلالة  $r$  والآخر توزيع ويبيل الحدي القطبي بدلالة  $\theta$ . وطريقة التحويل العكسي تتضمن خطوتين:

١- توليد ارقام عشوائية  $(U_i)$  تتبع التوزيع المنتظم المستمر في الفترة  $[0, 1]$  أي ان:

$$U_i \sim \text{Uniform dist.} (0, 1) \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

٢- تحويل الارقام العشوائية المنتظمة المولدة في الخطوة الاولى الى متغيرات عشوائية ملائمة للنموذج الجديد المستعمل (توزيع ويبيل القطبي الحدي) عن طريق مساواة دالة التوزيع التراكمية للتوزيع مع القيم المولدة  $U_i$  في الخطوة الاولى.

اذ يتم استعمال دالة c.d.f لتوزيع ويبيل الحدي القطبي بدلالة  $r$  المعادلة (2-58) وكذلك يمكن استعمال دالة c.d.f لتوزيع ويبيل الحدي القطبي بدلالة  $\theta$  المعادلة (2-64).

اولاً: في حالة توزيع ويبيل الحدي القطبي بدلالة  $r$  فان دالة التوزيع التراكمي CDF هي:

$$F(r) = \frac{\gamma\left(\frac{1}{a} + 1, \frac{r^a}{\lambda^a}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right)}$$

$$U_i = F(r)$$

$$r = F^{-1}(U_i)$$

باستعمال الطرائق العددية يتم الحصول على قيم المتغير  $r$ .

ثانياً: في حالة توزيع ويبيل الحدي القطبي بدلالة  $\theta$  فان دالة التوزيع التراكمي CDF هي:

$$F(\theta; \lambda, a) = \frac{\theta}{2\pi}$$

$$U_i = F(\theta)$$

$$U_i = \frac{\theta}{2\pi}$$

$$\theta = 2\pi U_i$$

وبذلك نحصل على ارقام عشوائية للمتغيرين  $r, \theta$

## الفصل الثالث

بعد اجراء وتنفيذ برنامج المحاكاة باستعمال برنامج ( R-4.2.3 ) وتم الحصول على نتائج تقدير قيم المعلمات وكذلك حساب قيم متوسط مربعات الخطأ (MSE) للمعلمات المقدره لتوزيع ويبل القطبي وتم تلخيص النتائج في جداول خاصة موضحة في الملحق (A) .

### 3-2-3 : مراحل المقارنة بين طرائق التقدير

وتم استعمال طريقة الرتب للمقارنة بين طرائق التقدير وباستعمال معيار متوسط مربعات الخطأ (MSE) وكانت عملية المقارنة على ثلاث مراحل وكما يأتي :

#### اولا : مرحلة تحديد افضل طريقة للتقدير

يتم في هذه المرحلة تقدير معلمات الانموذج لكل حالة افتراضية للمعلمات باستعمال طرائق التقدير التي تم ذكرها انفا ( MLE , OLS , WLS , MOM ) وتتم المقارنة بين هذه الطرائق باستعمال الرتب اذ تم اعطاء الرتبة الاولى للطريقة التي تمتلك اقل متوسط مربعات الخطأ (MSE) وحسب كل معلمة وحجم كل عينة ولكل حالة افتراضية

#### ثانيا : مرحلة تحديد حجم العينة الامثل

تأتي هذه المرحلة بعد اختيار الطريقة الفضلى في تقدير المعلمات يتم تحديد حجم العينة الفضلى وذلك بأسلوب الرتب نفسه المتبع إذ نعطي الرتبة الأولى لحجم العينة الذي يمتلك اقل قيمة لمتوسط مربعات الخطأ (MSE) وعلى اساس المعلمة ولكل حالة افتراضية ويتم تطبيق ذلك لجميع الحالات ومن ثم نتوصل الى الحجم الامثل .

### 3-3: تحليل ومناقشة نتائج تجربة المحاكاة

#### 1-3-3 تقدير المعلمات واختيار افضل طريقة

تم استعمال طرائق التقدير المذكورة انفا في الانموذج الجديد (توزيع ويبل القطبي) وتم تحليل وعرض نتائج المحاكاة في الجداول المذكورة في الملحق (A) اذ تم تقدير المعلمات على وفق للطرائق الاربعة (MLE , OLS , WLS , MOM) وعند حجوم عينات مختلفة وحسب الحالات الافتراضية لكل معلمة . ويتم التفضيل بين تلك الطرائق بناء على اقل قيمة لمعيار متوسط مربعات الخطأ (MSE) و باعتمادا على طريقة الرتب باعطاء الرتبة الاولى لاقل قيمة لمعيار MSE ، وتم تلخيص تلك النتائج في الجدولين (2-3) و (3-3).

الفصل الثالث

الجدول ( 3-2 )

الرتب الجزئية والكلية لطرائق التقدير وحالات مختلفة من القيم الافتراضية لمعاملات توزيع ويبل القطبي

Case	n	Method				Best
		MLE	OLS	WLS	MOM	
a=0.5 , λ=1	30	2	3	1	4	MLE
	50	1	3.5	2	3.5	
	75	1	3.5	2	3.5	
	100	1	3.5	2	3.5	
	150	1	3	2	4	
$\sum Rank$		6	16.5	9	18.5	
Partial Rank		1	3	2	4	
a=1 , λ=1	30	1	4	2.5	2.5	MLE
	50	1	3.5	2	3.5	
	75	1	4	3	2	
	100	1	4	2	3	
	150	1	4	2	3	
$\sum Rank$		5	19.5	11.5	14	
Partial Rank		1	4	2	3	
a=1.5 , λ=1	30	2	4	3	1	MLE
	50	2	4	3	1	
	75	1	4	3	2	
	100	1	4	3	2	
	150	1	4	3	2	
$\sum Rank$		7	20	15	8	
Partial Rank		1	4	3	2	
a=2 , λ=1	30	2	4	3	1	MLE
	50	2	4	3	1	
	75	1	4	3	2	MOM
	100	1	4	3	2	
	150	1.5	4	3	1.5	
$\sum Rank$		7.5	20	15	7.5	
Partial Rank		1.5	4	3	1.5	
	30	2	4	3	1	



الفصل الثالث

a=2.5 ,λ=1	50	1.5	4	3	1.5	MLE
	75	1	4	3	2	
	100	2	4	3	1	
	150	1	4	3	2	
$\sum Rank$		7.5	20	15	7.5	MOM
Partial Rank		1.5	4	3	1.5	
a=0.5 ,λ=2	30	3.5	3.5	2	1	MOM
	50	2	4	3	1	
	75	2	4	3	1	
	100	2	4	3	1	
	150	2	4	3	1	
$\sum Rank$		11.5	19.5	14	5	MOM
Partial Rank		2	4	3	1	
a=1 ,λ=2	30	1	4	3	2	MLE
	50	1	4	2.5	2.5	
	75	1	4	2.5	2.5	
	100	1	4	2	3	
	150	1	4	2.5	2.5	
$\sum Rank$		5	20	12.5	12.5	MLE
Partial Rank		1	4	2.5	2.5	
a=1.5 ,λ=2	30	2	4	3	1	MLE
	50	1	4	3	2	
	75	1	4	3	2	
	100	1	4	3	2	
	150	1	4	3	2	
$\sum Rank$		6	20	15	9	MLE
Partial Rank		1	4	3	2	
a=2 ,λ=2	30	2	4	3	1	MLE
	50	2	4	3	1	
	75	2	4	3	1	
	100	2	4	3	1	

الفصل الثالث

	150	2	4	3	1	MOM
$\sum Rank$		10	20	15	5	
Partial Rank		2	4	3	1	
a=2.5 , $\lambda=2$	30	2	4	3	1	MLE
	50	1.5	4	3	1.5	
	75	1	4	3	2	
	100	1	4	3	2	
	150	1	4	3	2	
$\sum Rank$		6.5	20	15	8.5	
Partial Rank		1	4	3	2	
$\sum \sum Rank$		72	195.5	137	95.5	BEST Method
Over all Ranks		1	4	3	2	
		MLE				

• المصدر من اعداد الباحث

نلاحظ من نتائج المحاكاة الموضحة في الجدول (2-3) ما يأتي :

اظهرت عملية التقدير باستعمال الطرائق الاربعة المذكورة ان طريقة الامكان الاعظم MLE هي الطريقة الفضلى في التقدير، لأنها تمتلك الرتبة الاولى لمجموع جميع الحالات Over all Ranks ولجميع حجوم العينات (30,50,75,100,150) ، وتأتي طريقة MOM في المرتبة الثانية وطريقة WLS في المرتبة الثالثة واخيرا في المرتبة الرابعة طريقة OLS .

## الفصل الثالث

### الجدول (3-3)

الرتب الكلية لمتوسط مربعات الخطأ (MSE) لكفة طرائق التقدير ولجميع الحالات الافتراضية لمعلمات التوزيع وحسب احجام العينة

n	Sum of Ranks	MLE	OLS	WLS	MOM
30	$\sum Rank$	19.5	38.5	26.5	15.5
	Over all Ranks	2	4	3	1
50	$\sum Rank$	15	39	27.5	18.5
	Over all Ranks	1	4	3	2
75	$\sum Rank$	12	39.5	28.5	20
	Over all Ranks	1	4	3	2
100	$\sum Rank$	13	39.5	27	20.5
	Over all Ranks	1	4	3	2
150	$\sum Rank$	12.5	39	27.5	21
	Over all Ranks	1	4	3	2

• المصدر من اعداد الباحث

عن طريق نتائج الجدول (3-3) يتضح ما يأتي :

- ١- طريقة الامكان الاعظم (MLE) في تقدير معلمات توزيع وييل القطبي جاءت في المرتبة الاولى في التقدير من بين الطرائق الاخرى عند احجام العينة (50,75,100,150) بينما في حالة حجم العينة (n=30) جاءت في المرتبة الثانية وبذلك نجد انها ليست ملائمة في العينات الصغيرة مقارنة بملائمتها في العينات الكبيرة .
- ٢- طريقة المربعات الصغرى (OLS) جاءت بالمرتبة الرابعة وعند جميع احجام العينات المختلفة ومن بين جميع الطرائق التقدير بصورة عامه .
- ٣- طريقة المربعات الصغرى الموزونة (WLS) جاءت بالمرتبة الثالثة وعند جميع احجام العينات المختلفة ومن بين جميع الطرائق التقدير .
- ٤- طريقة العزوم (MOM) احتلت المرتبة الاولى فقط عند حجم العينة صغير (n=30) وجاءت بالمرتبة الثانية عند بقية الاحجام المختلفة (n=50,75,100,150) وبذلك نجد انها مناسبة فقط في حالة حجم العينة صغير .

وأخيرا نستنتج من الجدولين (2-3) و (3-3) أن الطريقة الفضلى والملائمة لتقدير معلمات توزيع وييل القطبي هي طريقة الامكان الاعظم (MLE).

**2-3-3: تحديد افضل حجم عينة**

بعد تحديد طريقة التقدير MLE كطريقة فضلى للتقدير في المرحلة السابقة نقوم باختيار حجم العينة المناسب وذلك عن طريق التفضيل بالاستعانة بمعيار مجموع الرتب والموضح في الجدول (3-3) والخاص بطريقة التقدير MLE وعلى اساس الحجوم المختلفة للعينات ( 30 , 50 , 75 , 100 , 150 ) .

اذ نلاحظ انه حجم العينة (n=75) جاء بالمرتبة الاولى لانه يمتلك اقل مجموع للرتب ، وبالمرتبة الثانية الحجم (n=150) وبالمرتبة الثالثة الحجم (n=100) وبالمرتبة الرابعة (n=50) وبالمرتبة الاخيرة (n=30).

ومن خلال هذه النتائج تم التوصل الى افضل طريقة تقدير وهي طريقة الامكان الاعظم وعند حجم عينة مناسب (n=75).

# الفصل الرابع

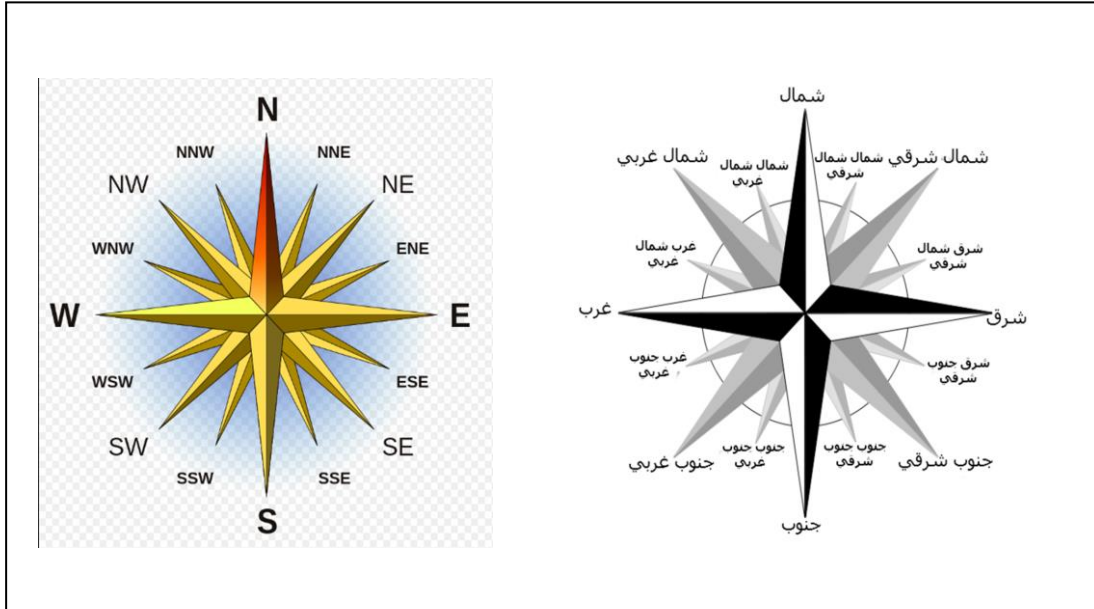
## الجانب التطبيقي

**تمهيد :**

يتم التطرق في هذا الفصل دراسة البيانات الحقيقية وهي عبارة عن سرعة واتجاه الرياح في محافظة كربلاء للمدة من 1/10/2022 لغاية 30/11/2022 والتي تمثل (61) مشاهدة وكما موضح في الجدول (2-4) ، والتي سوف يتم تطبيقها على دالة توزيع القطبي وباستعمال طريقة التقدير الامكان الاعظم (MLE) والتي تم اختيارها من بين مجموعة من الطرائق في الجانب التجريبي وبالاعتماد على البرنامج R-4.2.3. وسوف يتم اختبار مدى ملائمة البيانات للتوزيع الجديد .

**1-4 : بعض المفاهيم الخاصة بالرياح [8,51]**

١- اتجاه الرياح : ويطلق على الجهة التي تهب منها الرياح ويعبر عنها بالدرجات مقاسة حسب اتجاه عقارب الساعة ابتداء من الشمال الجغرافي ويوجد 16 اتجاهها رئيسا وهناك 32 اتجاهها فرعيا للرياح ومن الأمثلة على اتجاه الرياح ( شمال، شمال شرق، شرق، شمال شمال شرق .... ) وكما موضح في الشكل (1-4) .



الشكل (1-4) اتجاهات الرياح الرئيسية والفرعية (المصدر [51]- ويكيبيديا)

ويتم تعيين اتجاه الرياح في محطات الرصد الجوي بواسطة دوارة الرياح .

والجدول الاتي (1-4) يوضح الرموز الخاصة باتجاهات الرياح وقياس الزاوية بالدرجات وكذلك قياس الزاوي بالقياس الدائري (الراديان ) بحسب المعادلة المذكورة في الفصل الثاني (2-24).

## الفصل الرابع

### الجدول (1-4)

زوايا الاتجاهات الرئيسية للرياح بالقياس الدائري والدرجات مع الرموز المستعملة

ت	اتجاهات الرياح الرئيسية	رمز زاوية الاتجاه	الزاوي بالدرجات $\theta^\circ$	الزاوية حسب القياس الدائري $\theta$
1.	الشمال	N	0	0.000
2.	شمال شمال شرقي	NNE	22.5	0.393
3.	شمال شرقي	NE	45	0.786
4.	شرق شمال شرقي	ENE	67.5	1.179
5.	شرق	E	90	1.571
6.	شرق جنوب شرقي	ESE	112.5	1.964
7.	جنوب شرقي	SE	135	2.357
8.	جنوب جنوب شرقي	SSE	157.5	2.750
9.	جنوب	S	180	3.143
10.	جنوب جنوب غربي	SSW	202.5	3.536
11.	جنوب غربي	SW	225	3.929
12.	غرب جنوب غربي	WSW	247.5	4.321
13.	غرب	W	270	4.714
14.	غرب شمال غربي	WNW	292.5	5.107
15.	شمال غربي	NW	315	5.500
16.	شمال شمال غربي	NNW	337.5	5.893

• الجدول من إعداد الباحث

٢- سرعة الرياح : وتمثل المسافة التي تقطعها جزيئات الهواء في اثناء مدة زمنية محددة وعادة ما تقاس (بالمتر/ثانية ) او على الاغلب بـ (كم/ساعة) .

٣- مفهوم الرياح : هي خليط من الغازات والتي لا توجد بشكل متوافق في اثناء حركتها فهي تتحرك استنادا الى حزم الضغط الجوي تكون على شكل ومضات او نفحات ، ومن ثم هي عبارة عن مراحل متتالية من السكون والهدوء ويعبر عن ذلك السرعة الوسطية للرياح .

وتقاس سرعة الرياح في محطات الرصد الجوي بواسطة مقياس يدعى بالانيمومتر عند ارتفاع ٢ متر فوق مستوى سطح الارض ويستعمل ايضا عداد الرياح لقياس اجمالي ما تقطعه الرياح في اليوم ، وهناك مسجل لسرعة الرياح واتجاهاتها المختلفة على ارتفاع ١٠ متر فوق مستوى الارض.

واحيانا يتعذر قياس سرعة الرياح فيلجأ الى التقدير اذ تم وضع عدة علاقات تجريبية لتقدير هذه السرعة التي تعتمد على الضغط الجوي وتختلف هذه العلاقات بحسب طبيعة قيم الضغط ونوعه .

## الفصل الرابع

### 2-4 : البيانات الحقيقية ( عينة البحث)

عبارة عن سرعة واتجاه الرياح يوميا في محافظة كربلاء للمدة من 1/10/2022 لغاية 30/11/2022 والتي تمثل (61) مشاهدة وكما موضح في الجدول (2-4).<sup>[48,49,53]</sup>

#### الجدول (2-4)

سرعة واتجاه الرياح في محافظة كربلاء للمدة من 1/10/2022 لغاية 30/11/2022

ت	التاريخ	سرعة الرياح- r (كم/ساعة)	زاوية الاتجاه	الزاوية بالدرجات $\theta^\circ$	الزاوي بالقياس الدائري - $\theta$
1	01/10/2022	12	W	270	4.71
2	02/10/2022	12	SW	225	3.93
3	03/10/2022	10	SW	225	3.93
4	04/10/2022	15	SSE	157.5	2.75
5	05/10/2022	12	SW	225	3.93
6	06/10/2022	14	W	270	4.71
7	07/10/2022	14	W	270	4.71
8	08/10/2022	8	SSW	202.5	3.54
9	09/10/2022	13	W	270	4.71
10	10/10/2022	18	NW	315	5.50
11	11/10/2022	18	NW	315	5.50
12	12/10/2022	14	NW	315	5.50
13	13/10/2022	8	ESE	112.5	1.96
14	14/10/2022	11	NE	45	0.79
15	15/10/2022	18	S	180	3.14
16	16/10/2022	14	S	180	3.14
17	17/10/2022	11	SE	135	2.36
18	18/10/2022	11	S	180	3.14
19	19/10/2022	11	W	270	4.71
20	20/10/2022	11	S	180	3.14
21	21/10/2022	18	E	90	1.57
22	22/10/2022	29	SE	135	2.36
23	23/10/2022	18	NW	315	5.50
24	24/10/2022	16	ESE	112.5	1.96
25	25/10/2022	14	NW	315	5.50
26	26/10/2022	11	N	0	0.00
27	27/10/2022	11	SE	135	2.36
28	28/10/2022	18	W	270	4.71



## الفصل الرابع

29	29/10/2022	11	WNW	292.5	5.11
30	30/10/2022	13	NNE	22.5	0.39
31	31/10/2022	18	ESE	112.5	1.96
32	01/11/2022	12	NW	315	5.50
33	02/11/2022	11	N	0	0.00
34	03/11/2022	12	WNW	292.5	5.11
35	04/11/2022	14	W	270	4.71
36	05/11/2022	8	SW	225	3.93
37	06/11/2022	7	W	270	4.71
38	07/11/2022	11	W	270	4.71
39	08/11/2022	18	ESE	112.5	1.96
40	09/11/2022	9	NNE	22.5	0.39
41	10/11/2022	7	SW	225	3.93
42	11/11/2022	11	NE	45	0.79
43	12/11/2022	14	ESE	112.5	1.96
44	13/11/2022	9	NW	315	5.50
45	14/11/2022	11	NW	315	5.50
46	15/11/2022	10	NE	45	0.79
47	16/11/2022	15	N	0	0.00
48	17/11/2022	7	NW	315	5.50
49	18/11/2022	14	WNW	292.5	5.11
50	19/11/2022	13	NW	315	5.50
51	20/11/2022	16	W	270	4.71
52	21/11/2022	14	W	270	4.71
53	22/11/2022	10	S	180	3.14
54	23/11/2022	7	ESE	112.5	1.96
55	24/11/2022	16	SE	135	2.36
56	25/11/2022	14	E	90	1.57
57	26/11/2022	16	SSW	202.5	3.54
58	27/11/2022	10	NW	315	5.50
59	28/11/2022	11	N	0	0.00
60	29/11/2022	14	E	90	1.57
61	30/11/2022	11	SSW	202.5	3.54

• الجدول من اعداد الباحث

**3-4 : الاحصاءات الوصفية: Descriptive Statistics**

والجدول (3-4) يمثل بعض المؤشرات الاحصائية للبيانات الحقيقية المتمثلة بسرعة الرياح واتجاهها

الجدول (3-4)

اهم المؤشرات الإحصائية للبيانات الحقيقية

Statistic	المتغير $r$ - سرعة الرياح (كم/ساعة)	المتغير الزاوي- $\theta$ بالقياس الدائري
Mean	12.852	3.3675
Variance	14.295	3.1655
Std. Deviation	3.7808	1.7792
Max	29	5.5
Min	7	0
Skewness	1.2814	0.44489
Kurtosis	4.1717	-1.0337

• الجدول من إعداد الباحث

بالنسبة للمتغير  $r$  نجد ان المتوسط لملاحظات سرعة الرياح كان 12.85 والتباين هو 14.295 كانت قيمة الانحراف المعياري 3.78 وان اعلى قيمة وصلت اليها سرعة الرياح هي 29 كم/ساعة وان اقل سرعة مسجله هي 7 كم /ساعة ،وان قيمة معامل الالتواء Skewness =1.2814 وهذا يعني ان المنحنى ذو التواء موجب وتدل قيمة معامل التفلطح Kurtosis= 4.1717 وهي اكبر من 3 مما يعني ان المنحنى ذي قمة مدببة .

**4-4 : تقدير المعلمات**

بعد ان تم اختيار طريقة التقدير الافضل (MLE) وذلك عن طريق برنامج المحاكاة في الجانب التجريبي وباستعمال البرنامج الاحصائي R4.2.3 تم تطبيق هذه الطريقة على البيانات الحقيقية و الحصول على تقدير معلمات الامتداد الجديد وكما موضح في الجدول (4-4)

الجدول (4-4)

نتائج تقدير معلمات توزيع ويبيل القطبي بطريقة الامكان الاعظم MLE

Distribution	Parameters	
	A	$\lambda$
Polar Weibull distribution	2.9176	12.5883

• المصدر من إعداد الباحث ( مخرجات البرنامج الاحصائي R-4.2.3 )

5-4 : اختبار حسن الملائمة ( Goodness of fit test )

يتم اختبار البيانات الحقيقية باستعمال اختبار كولموكروف - سمير نوف K-S واختبار اندرسون A-D وتتضمن فكرة الاختبار هو مقارنة التوزيع الفعلي للبيانات مع التوزيع النظري المحدد من الباحث وتم التطرق الى صيغ الاختبارين في الفصل الثاني في المعادلة (2-122) والمعادلة (2-125) على الترتيب .

ويكون الاختبار على قيم المتغيرين (متغير السرعة  $r$  و متغير الاتجاه  $\theta$ ) كلا على حده .

المتغير الاول : متغير الاتجاه الزاوي  $\theta$  يجب ان يتلائم مع التوزيع المنتظم المستمر ضمن الفترة  $[0, 2\pi]$  وذلك كون موضوع الاطروحة يشترط ان متغير الزاوية هو توزيع منتظم وعلى هذا الافتراض تم التوصل الى الصيغ الخاصة بالتوزيع الجديد في الفصل الثاني .

لذلك يتم تطبيق اختبار ملائمة Kolmogorov-Smirnov لإظهار ما إذا كانت قيم الزاوية لها توزيع منتظم في النطاق  $[0, 2\pi]$  أم لا. أيضاً يتم تحويل قيم الزاوية من درجات إلى راديان.

اما فرضيتي الاختبار الفرضية الصفرية  $H_0$  والفرضية البديلة  $H_1$  سوف تكون كما يأتي :

$H_0$  : قيم الزاوية تمتلك توزيعاً منتظماً في المجال  $[0, 2\pi]$

$H_1$  : قيم الزاوية لا تمتلك توزيعاً منتظماً في المجال  $[0, 2\pi]$

تم استعمال برنامج ( Easy fit 5.6 ) لغرض معرفة توزيع البيانات الحقيقية وباستعمال اختبار كولموكروف- سمير نوف للمتغير اتجاه الرياح (اذ تكون الزاوية بالقياس الدائري). والجدول (5-4) يبين نتائج اختبار حسن الملائمة باستعمال اختبار Kolmogorov – smirnov لمتغير الاتجاه الزاوي للرياح  $\theta$ .

الجدول (5-4)

نتائج اختبار حسن الملائمة Kolmogorov – smirnov لمتغير اتجاه الرياح  $\theta$ .

Test	Kolmogorov – smirnov		
Uniform-distribution	Statistics	Critical Value	p-value
a=0		$\alpha=0.05$	
b=2 $\pi$	0.15915	0.17091	0.08126

• المصدر من إعداد الباحث بالاعتماد على البرنامج الاحصائي Easy fit 5.6

من نتيجة الاختبار Kolmogorov-Smirnov ، ونظراً لأن قيمة ( p-value =0.08126 ) أكبر من قيمة (  $\alpha = 0.05$  ) ، لذا لا يتم رفض فرضية  $H_0$  بمستوى ثقة 0.95 ، ومن ثم فإن قيم الزاوية لها توزيع منتظم في المدى  $[0, 2\pi]$  . ومن ثم فإنه يطابق فرضية الاطروحة .

## الفصل الرابع

**المتغير الثاني :** متغير سرعة الرياح  $r$  والذي يتم اختبار ملائمته مع توزيع ويبيل القطبي (التوزيع المقترح) الذي تم التطرق اليه في المعادلة (2-53) .

اما فرضيتي الاختبار الفرضية الصفرية  $H_0$  والفرضية البديلة  $H_1$  سوف تكون كما يأتي :

$H_0$  : قيم سرعة الرياح تتوزع حسب التوزيع الجديد(توزيع ويبيل القطبي)

$H_1$  : قيم سرعة الرياح لا تتوزع حسب التوزيع الجديد(توزيع ويبيل القطبي)

تم استعمال البرنامج ( R-4.2.3 ) لغرض معرفة توزيع البيانات الحقيقية وباستعمال اختباري كولموكروف- سميرنوف Kolmogorov - smirnov واختبار اندرسون- دارلنك Anderson-Darling لمتغير سرعة الرياح .

والجدول (6-4) يبين نتائج اختبار حسن الملائمة باستعمال الاختبارين المذكورين لمتغير سرعة الرياح  $r$

### الجدول (6-4)

نتائج اختبار حسن الملائمة لمتغير سرعة الرياح  $r$ .

Test	Kolmogorov – smirnov		Anderson-Darling	
	Cal	Tab	Cal	Tab
Polar Weibull distribution a= 2.917556 λ= 12.58832	0.1329679	0.1741302	1.349553	1.959964

• المصدر من إعداد الباحث بالاعتماد على البرنامج R-4.2.3

من نتيجة الاختبار الموضحة في الجدول (6-4) نجد ان القيمة المحسوبة لاختبار Kolmogorov – smirnov هي (0.1329679) هي اصغر من القيمة الجدولية (0.1741302) ومن ثم لا يتم رفض فرضية العدم . وكذلك بالنسبة لاختبار Anderson-Darling نجد ان القيمة المحسوبة هي (1.349553) وهي اصغر من القيمة الجدولية (1.959964) وعليه لا يتم رفض فرضية العدم ، وبذلك نستنتج من نتائج الاختبارين المذكورين اننا لم نرفض فرضية العدم أي ان البيانات الحقيقية المسجلة لسرعة الرياح هي تتوزع حسب التوزيع المقترح (توزيع ويبيل القطبي) .

### 6-4 اختبار الاستقلالية

نجري اختبار الاستقلالية (اختبار مربع كاي  $\chi^2$ ) بين متغيرات الدراسة  $(r, \theta)$  وحسب الفرضيات الاتية

$H_0$  : المتغيرات مستقلة  $(r, \theta)$

$H_1$  : المتغيرات غير مستقلة  $(r, \theta)$

تم استعمال البرنامج ( R-4.2.3 ) لغرض اختبار الفرضية المذكورة آنفاً باستعمال اختبار مربع كاي  $\chi^2$  لاختبار الاستقلالية بين المتغيرين وكانت النتائج كما مذكور في الجدول (4-7)

## الفصل الرابع

### الجدول (4-7)

اختبار  $\chi^2$  للاستقلالية بين المتغيرين (السرعة وزاوية اتجاه الرياح)

الاحصاءة $\chi^2$	P- Value
154.079	0.0917

• المصدر من إعداد الباحث بالاعتماد على البرنامج R-4.2.3

من الجدول نجد ان قيمة (p-value) هي أكبر من قيمة مستوى المعنوية 0.05 ، لذا لا نرفض فرضية العدم وبذلك نستنتج ان المتغيران مستقلان .

### 7-4: مقارنة بين توزيع ويبيل وتوزيع ويبيل القطبي

توزيع ويبيل يستعمل في التحليل الاحصائي للبيانات وهو الأفضل لتحليل توزيع سرعة الرياح ودراسة طاقتها ، وتم استعمال بعض المعايير التي تم ذكرها في الفصل الثاني لغرض المفاضلة بين توزيع ويبيل في الاحداثيات الكارتيزية (التوزيع الاعتيادي) مع التوزيع الجديد (توزيع ويبيل القطبي) والجدول (4-8) يوضح هذه المعايير وعلى اساس ذلك يتم تفضيل التوزيع الملائم وعلى اساس اقل قيمة للمعيار.

- توزيع ويبيل Weibull Distribution

وتعطى الدالة الاحتمالية لتوزيع ويبيل بالعلاقة الاتية :

$$f(x) = \frac{a}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{a-1} \cdot e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^a}$$

- توزيع ويبيل القطبي Polar Weibull Distribution

وتعطى الدالة الاحتمالية لتوزيع ويبيل القطبي بالعلاقة الاتية :

$$f(r) = \frac{a}{\Gamma\left(\frac{1}{a} + 1\right)} \frac{1}{\lambda^{a+1}} r^a \cdot e^{-\left(\frac{r}{\lambda}\right)^a}$$

اذ ان :

$f(r)$  : احتمالية تواجد سرعة الرياح  $r$  .

$\lambda$  : معلمة القياس للتوزيع ووحداتها هي وحدات سرعة الرياح .

$a$  : معلمة الشكل للتوزيع بدون وحدات .

• ان ازدياد قيمة معلمة القياس  $\lambda$  تشير الى زيادة سرعة الرياح بينما قيمة معلمة الشكل  $a$  تشير الى استقرارية الرياح.

## الفصل الرابع

### الجدول (8-4)

معايير المفاضلة لتوزيع ويبيل وتوزيع ويبيل الحدي القطبي

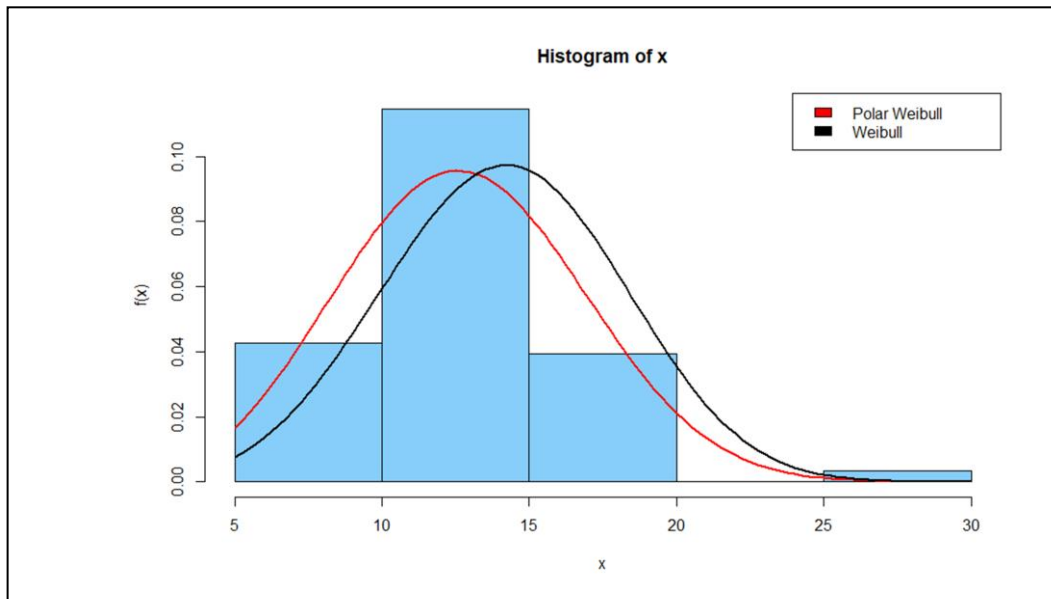
Distribution	AIC	BIC
Weibull	342.1854	346.4071
polar marginal Weibull	338.9861	343.2078

• المصدر من إعداد الباحث بالاعتماد على مخرجات برنامج R 4.2.3

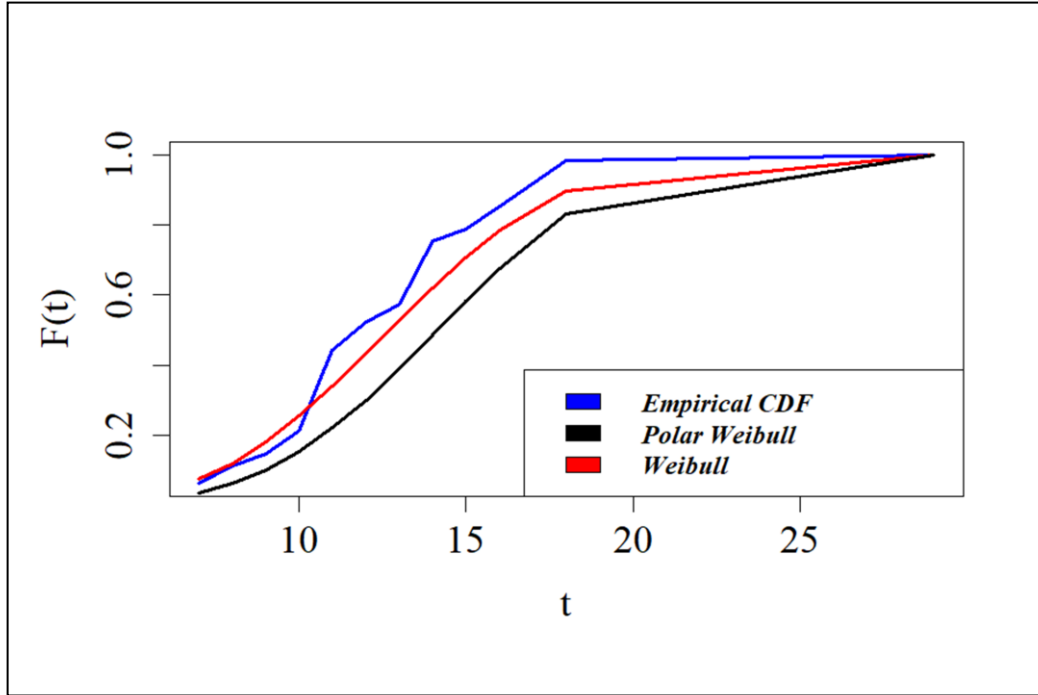
ومن قيم المعايير الموضحة في الجدول المذكور آنفاً (8-4) نجد ان قيمة المعايير (AIC) و (BIC) لتوزيع ويبيل الحدي القطبي polar marginal Weibull Distribution هي اقل من نظيرتها في توزيع ويبيل الاعتيادي Weibull Distribution ، وبهذا نستدل ان البيانات تتوزع حسب التوزيع الجديد (ويبيل الحدي القطبي) افضل من توزيعها حسب توزيع ويبيل الاعتيادي .

كما يعزز الشكل (2-4) والشكل (3-4) النتائج التي تم الحصول عليها في الجداول المذكور آنفاً اذ نلاحظ تقارباً بين منحنى دالة الكثافة الاحتمالية ودالة التوزيع التراكمية لتوزيع ويبيل القطبي مع التوزيع التجريبي للبيانات الحقيقية ، ما يدل على صحة توافق الاختبارات التي تم اجراؤها .

وتشير دالة الكثافة الاحتمالية p.d.f الى النسبة المئوية للوقت الذي تتدفق فيه الرياح مع سرعة رياح محددة ، وكذلك تشير الدالة الاحتمالية التراكمية C.D.F الى النسبة المئوية من الوقت الذي تكون فيه سرعة الرياح اقل من او تساوي سرعة الرياح المحددة.



الشكل (4-2) دالة الكثافة الاحتمالية pdf لتوزيع ويبيل الحدي القطبي للبيانات الحقيقية مقارنة بتوزيع ويبيل الاعتيادي.



الشكل (3-4) الدالة التراكمية CDF لتوزيع ويبيل الحدي القطبي وتوزيع ويبيل الاعتيادي مقارنة مع التوزيع التجريبي للبيانات الحقيقية

# الفصل الخامس

الأستنتاجات

و

التوصيات



**1-5 الاستنتاجات : (Conclusions)**

في هذه الاطروحة تم التوصل الى الاستنتاجات الآتية :

- ١- تم اختيار توزيع ويبيل كونه الاكثر ملائمة للبيانات التي تتعلق بسرعة الرياح وتم تحديد معادلة التوزيع في الاحداثيات القطبية اعتمادا على معادلة التوزيع في الاحداثيات الكارتيزية ، والتوزيعات القطبية لها متغيران مثل المسافة (r) والزاوية ( $\theta$ ).
- ٢- في الجانب التجريبي وباستعمال المحاكاة تم توليد أرقام عشوائية لتوزيع ويبيل القطبي، وكانت أفضل طريقة لتقدير معالم التوزيع هي طريقة الامكان الاعظم (MLE) من بين طرائق التقدير الاخرى (OLS , WLS , MOM) وذلك بالاعتماد على معيار المقارنة متوسط مربعات الخطأ (MSE) ولإحجام العينات الكبيرة (50, 75, 100, 150) , ماعدا حجم العينة (n=30) كانت طريقة العزوم هي الطريقة الفضلى في المرتبة الاولى . وجاءت بالمرتبة الثانية طريقة العزوم MOM من بين الطرائق التقدير الاخرى عند احجام العينات (50,75,100,150).
- ٣- ومن نتائج الجداول المذكورة في الملحق (A) الخاصة بنتائج التقدير ولجميع الحالات الافتراضية نجد ان معيار متوسط مربعات الخطأ (MSE) لمعلمات التوزيع في تناقص مع ازدياد حجم العينة ما يؤكد خاصية الاتساق انسجاما مع النظرية الاحصائية . كما موضح في الجدول (3-5).
- ٤- تم اجراء اختبار الملائمة باستعمال اختبار كولمجروف - سمير نوف K-S لاختبار ان المتغير الزاوي  $\theta$  للبيانات الحقيقية يتوزع توزيعا منتظما وتم اثبات ذلك ما يتوافق مع عنوان الاطروحة وكما موضح في الجدول (4-5). كذلك تم اجراء الملائمة اختبار كولمجروف - سمير نوف K-S واختبار اندرسون دارلنك A-D على متغير (سرعة الرياح r) للبيانات الحقيقية وتم التوصل الى ان البيانات الحقيقية تتلائم مع توزيع ويبيل القطبي (التوزيع الجديد) كما موضح في الجدول (4-6).
- ٥- اخيرا تم اجراء مقارنة بين توزيع ويبيل في الاحداثيات الكارتيزية مع توزيع ويبيل القطبي باستعمال بعض معايير المقارنة (AIC , BIC) لبيان أي التوزيعين أفضل في تمثيل البيانات وكانت النتيجة ان توزيع ويبيل القطبي هو الافضل كما موضح في الجدول (4-7).
- ٦- تم اثبات النتائج التي تم التوصل اليها ايضا عن طريق رسم دوال PDF و CDF للتوزيع الجديد .

**2-5 التوصيات: (Recommendations)**

من أهم الاستنتاجات التي تم التوصل إليها في هذه الأطروحة يوصي الباحث بالتوصيات الآتية :

- ١- تطبيق نظام الاحداثيات القطبية على الكثير من التوزيعات الاحتمالية ولاسيما التي يمكن تطبيقها للحالات التي تتضمن متغيرين (bivariate).
- ٢- إمكانية استعمال طرائق اخرى في التقدير .
- ٣- التوسع في نظام الاحداثيات لأكثر من متغيرين ولاسيما في الحالات التي تعتمد على ثلاث متغيرات (الاحداثيات الكروية \_ Spherical coordinates) ومن ثم إمكانية الوصول الى توزيعات احتمالية لهذه الإحداثيات وبنفس الأسلوب .
- ٤- ممكن احتساب دالة المعولية او دالة البقاء لأي توزيع احتمالي ان تطلب الامر .
- ٥- ممكن الاستفادة من التوزيع المقترح الذي تم التوصل في تقدير احتمالية سرعة الرياح المستقبلية . ويمكن اجراء المقارنة في تطبيق الانموذج في مناطق او مدن متفرقة لغرض الاستفادة منها في توليد الطاقة الكهربائية التي تعتمد على سرعة الرياح .
- ٦- تسهيل مهمة الباحثين من قبل الجهات المختصة في الحصول على هكذا بيانات تخص هذه التطبيقات خدمة للبحث العلمي .

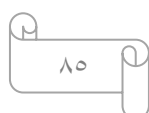


المصادر

- [١] ابراهيم ، وضاح صبري و رشيد، حسام عبدالرزاق (2021) " التطبيقات الاحصائية والمحاكاة باستعمال برنامج MATLAB "، الجزيرة للطباعة والنشر، بغداد- ط٢ .
- [٢] العامري، بهاء عبدالرزاق قاسم (2021) " استعمال بعض التوزيعات المبتورة في بناء نظام خبير لتقدير الفترة المثلى لاستبدال المكانن والمعدات مع تطبيق عملي " اطروحة دكتوراه في الاحصاء غير منشورة ، جامعة كربلاء/كلية الادارة والاقتصاد.
- [٣] بدر، دريد حسين ، الحكيم، معاني احمد (٢٠١٩) "مقارنة بعض طرائق تقدير دالة المعولية لتوزيع وايبل ذي المعلمتين باستخدام المحاكاة " مجلة كلية الرافدين الجامعة للعلوم العدد ٤٥ ، ص ٦٥-٥٠ .
- [٤] جبار،فلاح حسن و محمد، ايناس عبد الحافظ (2022)، " تقدير المعولية لتوزيع دالة القوى الموسع باستعمال (NLTE-X Family) مع تطبيق عملي ، رسالة ماجستير في الاحصاء غير منشورة -جامعة كربلاء-كلية الادارة والاقتصاد .
- [٥] راهي، عبدالرحيم خلف و شرهان، راند فيصل (٢٠١٩)، " تقدير معلمات توزيع ويبل باستخدام طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية وطريقة المربعات الصغرى الموزونة - دراسة مقارنة" مجلة الادارة والاقتصاد العدد 42 - / الجامعة المستنصرية .
- [٦] سعيد ، شروق عبد الرضا ، مجلي ، احمد مجلي (٢٠٢٠)" مقارنة طريقتي المربعات الصغرى والامكان الاعظم لتقدير معلمات ودالة البقاء لتوزيع (ويبل- رايلي) المركب " مجلة كلية الادارة والاقتصاد للدراسات الاقتصادية والادارية والمالية/جامعة بابل ، المجلد ١٢ العدد ٢، ص ١١٤-١٢٧ .
- [٧] طاهر ، رفز محمد صالح (2017) "استخدام أفضل توزيع احتمالي في التنبؤ بالاحتمالات المتوقعة بمقدار الحمل في الطاقة الكهربائية في مدينة اربيل مستخدما البيانات الفعلية للفترة(2014-2015) " ، مجلة جامعة الانبار للعلوم الاقتصادية والإدارية /جامعة الانبار المجلد ٩ العدد ١٤ .
- [٨] عباس ، اياد عبدالعزيز واخرون (٢٠١٤) " تقدير معاملات ويبل وقدرة الرياح لثلاث مواقع في العراق " ، المجلة العراقية للعلوم مجلد ٥٥ ، العدد B2 ، ص٧٢٩-٧٤٠ .
- [٩] محمد، نجوى حميد فرج(2018) ، " دراسة مقارنة لتقدير معلمتي الشكل والقياس لتوزيع ويبل بمدينة سبها - ليبيا ١٩٦٢ - ٢٠١٣ م" رسالة ماجستير في الاحصاء/جامعة السودان للعلوم والتكنولوجيا كلية الدراسات العليا.
- [١٠] نصر الله، مهدي وهاب (2015) "بناء توزيع احتمالي موزون ومضاعف موزون مع تطبيق عملي " اطروحة دكتوراه في الاحصاء غير منشورة ،جامعة بغداد/ كلية الادارة والاقتصاد .
- [١١] هرمز، امير حنا .(١٩٩٠). الإحصاء الرياضي . مديرية دار الكتب للطباعة والنشر، الموصل، العراق .

- [12] Al-Fawzan, M. A. (2000). Methods for estimating the parameters of the Weibull distribution. *King Abdulaziz City for Science and Technology, Saudi Arabia*
- [13] Alford, M. H., MacKinnon, J. A., Pinkel, R., & Klymak, J. M. (2017). Space-time scales of shear in the North Pacific. *Journal of Physical Oceanography*, 47(10), 2455-2478.
- [14] Attia, Ali Mutair, Karam, Nada Sabah, (2021), "The New Weibull-Pareto Distribution Stress-Strength Reliability for  $p(T < X < Z)$ ", *Al-Qadisiyah Journal of Pure Science* Vol.(26) Issue (2) 39–51 .
- [15] Bateman, H. (1953). *Higher transcendental functions [volumes i-iii]* (Vol. 1). McGraw-HILL book company.
- [16] Bidaoui, H., El Abbassi, I., El Bouardi, A., & Darcherif, A. (2019). Wind speed data analysis using Weibull and Rayleigh distribution functions, case study: five cities northern Morocco. *Procedia Manufacturing*, 32, 786-793.
- [17] Bui, H. Q. (2021). A Generalized Polar-coordinate Integration Formula, Oscillatory Integral Techniques, and Applications to Convolution Powers of Complex-valued Functions on  $\mathbb{Z}^d$ .
- [18] Cumming, B. G., & De Angelis, G. C. (2001). The physiology of stereopsis. *Annual review of neuroscience*, 24(1), 203-238.
- [19] Cohen, A. C. (1965). Maximum likelihood estimation in the Weibull distribution based on complete and on censored samples. *Technometrics*, 7(4), 579-588.
- [20] De Sá, J. P. M. (2007). Applied statistics using SPSS, Statistica, Matlab and R. Springer Science & Business Media.
- [21] Devroye, L., (1986) ,Non-Uniform Random Variate Generation, Springer, New York .
- [22] Ertel, R. B., & Reed, J. H. (1999). Angle and time of arrival statistics for circular and elliptical scattering models. *IEEE Journal on selected areas in communications*, 17(11), 1829-1840.
- [23] Evans, M., Hastings, N., Peacock, B., & Forbes, C. (2011). Statistical distributions. John Wiley & Sons.
- [24] Faridi, M., & Khaledi, M. J. (2020). The polar-generalized normal distribution. *arXiv preprint arXiv:2008.11765*.

- [25] Fazio, V. S., Komitov, L., Radüge, C., Lager wall, S. T., & Motschmann, H. (2001). Influence of the flow on the anchoring of nematic liquid crystals on Langmuir-Blodgett monolayers studied by optical second-harmonic generation. *The European Physical Journal E*, 5(3), 309-315.
- [26] Gibbons, J. D. ve Chakraborti, S., 2011. Nonparametric statistical inference, Springer.
- [27] Hayder A. H.,(2020) “Statistical Approach for Bivariate Circular Data with Application to Bioinformatics” MSc. Thesis, University of Kufa .
- [28] Hogg ,R.V & McKean ,J.W & Craig, A.T. (2019). Introduction to mathematical statistics.(eighth edition).
- [29] Huan Q. Bui (2021) ; “A Generalized Polar-coordinate Integration Formula, Oscillatory Integral Techniques, and Applications to Convolution Powers of Complex-valued Functions on  $\mathbb{Z}^d$ ” “A thesis presented to the faculty of the Department of Mathematics and Statistics at Colby College .
- [30] Jameson, G. J. O. (2016). The incomplete gamma functions. *The Mathematical Gazette*, 100(548), 298-306.
- [31] Kesemen, O., TIRYAKI, B. K., TEZEL, Ö., & Ayşe, P. A. K. (2020). Some Statistics in Polar Coordinate System with Uniform Angles. *Gazi University Journal of Science*, 33(3): 846-882.
- [32] Kesemen, O., & TIRYAKI, B. K. (2019). A Novel Approximation for Computation Bivariate Distribution Functions in Polygonal Area. *Gumushane University Journal of Science Institute*, 9(1), 88-98.
- [33] Khuri, A. I. (2003). *Advanced calculus with applications in statistics*. John Wiley & Sons.
- [34] Krishnamoorthy, K. (2016). *Handbook of Statistical Distributions with Applications. (No Title)*.
- [35] Massey Jr, F. J. (1951). The Kolmogorov-Smirnov test for goodness of fit. *Journal of the American statistical Association*, 46(253), 68-78 .
- [36] Murty, M. R., & Saradha, N. (2007). Transcendental values of the digamma function. *Journal of Number Theory*, 125(2), 298-318.
- [37] Nguyen, T. M. (2014). *N-Dimensional Quasi polar Coordinates-Theory and Application*.



- [38] Nomura, N. (2014). Computation of multivariate normal probabilities with polar coordinate systems. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 84(3), 491-512.
- [39] O'Connor, P., & Kleyner, A. (2012). *Practical reliability engineering*. John Wiley & Sons .
- [40] Olver , F. W. J., A. B. Olde Daalhuis, D. W. Lozier, B. I. Schneider, R. F. Boisvert, C. W. Clark, B. R. Miller, and B. V. Saunders, eds., **Chapter 8. Incomplete Gamma and Related Functions**, *NIST Digital Library of Mathematical Functions*, Release 1.0.22, Mar. 15, 2018.
- [41] Pak, A. (2017). Chi-Square and Kolmogorov-Smirnov Goodness of Fit Tests in Polar Coordinates (Doctoral dissertation, MSc. Thesis, Karadeniz Technical University, Trabzon, 19-43).
- [42] Papoulis, A., Pillai, S.U., (2002). *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes* 4th ed., McGraw Hill, New York p.296 .
- [43] Robinson, N. H., Newton, H. M., Allan, J. D., Irwin, M., Hamilton, J. F., Flynn, M., ... & Coe, H. (2011). Source attribution of Bornean air masses by back trajectory analysis during the OP3 project. *Atmospheric Chemistry and Physics*, 11(18), 9605-9630 .
- [44] Schonefeld, J. (2015). *Architectures for embedded multimodal sensor data fusion systems in the robotics-and airport traffic surveillance-domain* (Doctoral dissertation, Zugl.: Clausthal -Zellerfeld, Techn. Univ., Diss., 2015).
- [45] Shamshad, A., Hussin, W., & Bawadi, M. (2013). Analysis of Wind Speed Variations and Estimation of Weibull Parameters for Wind Power Generation in Malavsia.
- [46] Solman, G. J., & Kingstone, A. (2014). Balancing energetic and cognitive resources: Memory use during search depends on the orienting effector. *Cognition*, 132(3), 443-454.
- [47] Tan, Z. (2009). A new approach to MLE of Weibull distribution with interval data. *Reliability Engineering & System Safety*, 94(2), 394-403 .

[48] شبكة الأنترنت - حالة الطقس - كربلاء ( تسجيل الحالة يوميا)

<https://www.meteoblue.com/ar/weather/week/%d9%83%d8%b1%d8%a8d9%84%d8%a7%d8%a1 %d8%a7d9%84d8%b9d8%b1d8%a7d9%82 94824>

[49] وزارة الزراعة-مركز الأرصاد الجوية الزراعية

<http://agromet.gov.iq/?name=Pages&op=page&pid=143>

[50]

<https://www.wunderground.com>

[51]

الموسوعة ويكيبيديا

<https://ar.wikipedia.org/wiki/%D8%A7%D8%AA%D8%AC%D8%A7%D9%87 %D8%B1%D9%8A%D8%A7%D8%AD>

[52]

<https://www.marefa.org/%D9%85%D8%B6%D9%84%D8%B9 %D9%85%D9%86%D8%AA%D8%B8%D9%85#:~:text=%D8%AE%D8%B5%D8%A7%D8%A6%D8%B5%20%D8%B9%D8%A7%D9%85%D8%A9,-Regular%20convex%20and&text=%D8%AC%D9%85%D9%8A%D8%B9%20%D8%B1%D8%A4%D9%88%D8%B3%20%D8%A7%D9%84%D9%85%D8%B6%D9%84%D8%B9%20%D8%A7%D9%84%D9%85%D9%86%D8%AA%D8%B8%D9%85%20%D8%AA%D9%82%D8%B9,%D8%B1%D8%A7%D8%AC%D8%B9%20%D8%A7%D9%84%D9%85%D8%B6%D9%84%D8%B9%20%D8%A7%D9%84%D9%82%D8%A7%D8%A8%D9%84%20%D9%84%D9%84%D8%A5%D9%86%D8%B4.%D8%A7%D8%A1>

[53]

<https://vi.cleanpng.com/png-0jux19/>

البرامج الإحصائية:

- برنامج Matlab R2014 a
- برنامج R4.2.3 مع برنامج RStudio
- برنامج Maple 15
- برنامج ماتميكا اونلاين <https://www.wolframalpha.com>



الملاحق

ملحق (A)

نتائج محاكاة توزيع ويبل الحدي القطبي للمتغير  $r$

جدول (A- 1): نتائج تقدير المعلمات بالطرائق الاربع مع قيم MSE والرتب المرافقة لها عند حجوم عينات ( $n= 30,50,75,100,150$ ) مع القيم الافتراضية للمعلمات  $a=0.5, \lambda=1$

Methods		MLE	OLS	WLS	MOM
n=30	$\hat{a}$	0.5406992	0.4998802	0.5079981	0.5777388
	MSE	0.01406644	0.01674951	0.01491217	0.01908422
	Rank	1	3	2	4
	$\hat{\lambda}$	1.4043276	1.1358589	1.1791012	1.7092106
	MSE	1.03140602	0.94839551	0.90395418	1.62875518
	Rank	3	2	1	4
$\sum Rank$		$4^2$	$5^3$	$3^1$	$8^4$
n=50	$\hat{a}$	0.5258887	0.5066995	0.5117896	0.5515228
	MSE	0.008913424	0.01221809	0.01028292	0.01116846
	Rank	1	4	2	3
	$\hat{\lambda}$	1.2731914	1.1514637	1.1770992	1.4950685
	MSE	0.657193686	0.74694637	0.66346716	0.99688470
	Rank	1	3	2	4
$\sum Rank$		$2^1$	$7^{3.5}$	$4^2$	$7^{3.5}$
n=75	$\hat{a}$	0.5156863	0.5003303	0.504868	0.5379299
	MSE	0.005024771	0.007266258	0.006004382	0.006649404
	Rank	1	4	2	3
	$\hat{\lambda}$	1.1693091	1.0702516	1.095484	1.3634676
	MSE	0.358386632	0.427818686	0.375914151	0.565794161
	Rank	1	3	2	4
$\sum Rank$		$2^1$	$7^{3.5}$	$4^2$	$7^{3.5}$
n=100	$\hat{a}$	0.5124048	0.5009478	0.5048555	0.5306579
	MSE	0.003912062	0.005326025	0.00437899	0.005136721
	Rank	1	4	2	3
	$\hat{\lambda}$	1.1345136	1.0617715	1.0828455	1.2916659
	MSE	0.267156134	0.320644170	0.27805686	0.407018907
	Rank	1	3	2	4
$\sum Rank$		$2^1$	$7^{3.5}$	$4^2$	$7^{3.5}$
n=150	$\hat{a}$	0.5105567	0.5021385	0.5055292	0.5239971
	MSE	0.002594031	0.00354322	0.002876169	0.003949016
	Rank	1	3	2	4
	$\hat{\lambda}$	1.1034759	1.0508361	1.0698029	1.2254471
	MSE	0.177638947	0.21670655	0.187217465	0.308362722
	Rank	1	3	2	4
$\sum Rank$		$2^1$	$6^3$	$4^2$	$8^4$

جدول (A- 2): نتائج تقدير المعلمات بالطرائق الاربع مع قيم MSE والرتب المرافقة لها عند حجوم عينات (n= 30,50,75,100,150) مع القيم الافتراضية للمعلمات  $a=1, \lambda=1$

Methods		MLE	OLS	WLS	MOM
n=30	$\hat{a}$	1.076151	1.0070234	1.020187	1.094916
	MSE	0.05182986	0.0630719	0.0550981	0.05681853
	Rank	1	4	2	3
	$\hat{\lambda}$	1.068752	0.9797992	1.000232	1.090960
	MSE	0.09067967	0.1085911	0.0986798	0.09447418
	Rank	1	4	3	2
$\sum Rank$		$2^1$	$8^4$	$5^{2.5}$	$5^{2.5}$
n=50	$\hat{a}$	1.043295	1.0026707	1.013007	1.054725
	MSE	0.02556721	0.03498138	0.02932701	0.02941959
	Rank	1	4	2	3
	$\hat{\lambda}$	1.039844	0.9835911	1.000359	1.052974
	MSE	0.05129147	0.06321601	0.05622142	0.05708334
	Rank	1	2	2	3
$\sum Rank$		$2^1$	$6^{3.5}$	$4^2$	$6^{3.5}$
n=75	$\hat{a}$	1.026816	1.0076090	1.012888	1.035533
	MSE	0.01601519	0.02415907	0.01958599	0.01858480
	Rank	1	4	3	2
	$\hat{\lambda}$	1.025745	0.9973073	1.007018	1.035803
	MSE	0.03563039	0.04610281	0.04022042	0.03944388
	Rank	1	4	3	2
$\sum Rank$		$2^1$	$8^4$	$6^3$	$4^2$
n=100	$\hat{a}$	1.014704	0.9930381	1.000743	1.022414
	MSE	0.01189436	0.01726074	0.01394148	0.01409871
	Rank	1	4	2	3
	$\hat{\lambda}$	1.010341	0.9801059	0.992016	1.019465
	MSE	0.02678021	0.03439785	0.02972391	0.03053011
	Rank	1	4	2	3
$\sum Rank$		$2^1$	$8^4$	$4^2$	$6^3$
n=150	$\hat{a}$	1.012327	0.9987459	1.0040267	1.018374
	MSE	0.007863622	0.01114631	0.00902173	0.009644189
	Rank	1	4	2	3
	$\hat{\lambda}$	1.009553	0.9910153	0.9988865	1.016728
	MSE	0.018215037	0.02223545	0.01944955	0.021861131
	Rank	1	4	2	3
$\sum Rank$		$2^1$	$8^4$	$4^2$	$6^3$

جدول (A-3): نتائج تقدير المعلمات بالطرائق الاربع مع قيم MSE والرتب المرافقة لها عند حجوم عينات (n= 30,50,75,1,100,150) مع القيم الافتراضية للمعلمات  $\lambda=1$ ,  $a=1.5$

Methods		MLE	OLS	WLS	MOM
n=30	$\hat{a}$	1.605637	1.5125945	1.5329194	1.609744
	MSE	0.10111022	0.12123114	0.10874716	0.09962065
	Rank	2	4	3	1
	$\hat{\lambda}$	1.022580	0.9804795	0.9913268	1.024883
	MSE	0.02863367	0.03451328	0.03207387	0.02826218
	Rank	2	4	3	1
$\sum Rank$		$4^2$	$8^4$	$6^3$	$2^1$
n=50	$\hat{a}$	1.568534	1.5073807	1.5259695	1.570976
	MSE	0.05484499	0.07570235	0.06401678	0.05461847
	Rank	2	4	3	1
	$\hat{\lambda}$	1.018896	0.9889674	0.9996481	1.020013
	MSE	0.01790858	0.02256338	0.01994108	0.01777083
	Rank	2	4	3	1
$\sum Rank$		$4^2$	$8^4$	$6^3$	$2^1$
n=75	$\hat{a}$	1.533256	1.4971598	1.5096824	1.534427
	MSE	0.03228726	0.04434253	0.03700720	0.03295109
	Rank	1	4	3	2
	$\hat{\lambda}$	1.008690	0.9900059	0.9975116	1.009021
	MSE	0.01170511	0.01375820	0.01242419	0.01194394
	Rank	1	4	3	2
$\sum Rank$		$2^1$	$8^4$	$6^3$	$4^2$
n=100	$\hat{a}$	1.527959	1.4987040	1.5098420	1.528128
	MSE	0.02375589	0.03343668	0.027793252	0.024156997
	Rank	1	4	3	2
	$\hat{\lambda}$	1.006228	0.9915459	0.9975158	1.006093
	MSE	0.008296567	0.01016724	0.009026677	0.008427369
	Rank	1	4	3	2
$\sum Rank$		$2^1$	$8^4$	$6^3$	$4^2$
n=150	$\hat{a}$	1.520337	1.4993505	1.507583	1.522360
	MSE	0.014500224	0.021962235	0.017801427	0.01490152
	Rank	1	4	3	2
	$\hat{\lambda}$	1.006667	0.9968479	1.000973	1.007503
	MSE	0.005463865	0.006955776	0.006164036	0.00553632
	Rank	1	4	3	2
$\sum Rank$		$2^1$	$8^4$	$6^3$	$4^2$

جدول (4- A): نتائج تقدير المعلمات بالطرائق الاربع مع قيم MSE والرتب المرافقة لها عند حجوم عينات (n= 30,50,75,100,150) مع القيم الافتراضية للمعلمات  $a=2, \lambda=1$

Methods		MLE	OLS	WLS	MOM
n=30	$\hat{a}$	2.105298	1.9852530	2.0051589	2.099927
	MSE	0.14306047	0.19266258	0.15978739	0.13766120
	Rank	2	4	3	1
	$\hat{\lambda}$	1.007407	0.9813701	0.9879724	1.006500
	MSE	0.01281118	0.01664863	0.01477566	0.01270792
	Rank	2	4	3	1
$\sum Rank$		$4^2$	$8^4$	$6^3$	$2^1$
n=50	$\hat{a}$	2.075749	1.9996744	2.0201755	2.072445
	MSE	0.086795217	0.113164642	0.095253830	0.085200383
	Rank	2	4	3	1
	$\hat{\lambda}$	1.004871	0.9884406	0.9937502	1.004187
	MSE	0.008243199	0.009793328	0.008860205	0.008186073
	Rank	2	4	3	1
$\sum Rank$		$4^2$	$8^4$	$6^3$	$2^1$
n=75	$\hat{a}$	2.041705	2.0012754	2.0142255	2.041168
	MSE	0.055680864	0.081320736	0.067745900	0.055939281
	Rank	1	4	3	2
	$\hat{\lambda}$	1.004655	0.9952082	0.9988299	1.004494
	MSE	0.005584468	0.006634397	0.006062783	0.005622844
	Rank	1	4	3	2
$\sum Rank$		$2^1$	$8^4$	$6^3$	$4^2$
n=100	$\hat{a}$	2.040389	2.006282	2.0190318	2.039650
	MSE	0.040599328	0.05646465	0.046398760	0.040680652
	Rank	1	4	3	2
	$\hat{\lambda}$	1.002766	0.994568	0.9980207	1.002551
	MSE	0.004057834	0.00467729	0.004302656	0.004064961
	Rank	1	4	3	2
$\sum Rank$		$2^1$	$8^4$	$6^3$	$4^2$
n=150	$\hat{a}$	2.024206	1.9992425	2.0098416	2.023741
	MSE	0.024513245	0.037155104	0.029686944	0.024407172
	Rank	1	4	3	2
	$\hat{\lambda}$	1.002264	0.9965054	0.9991569	1.002145
	MSE	0.002821847	0.003257909	0.003005202	0.002821295
	Rank	2	4	3	1
$\sum Rank$		$3^{1.5}$	$8^4$	$6^3$	$3^{1.5}$

جدول (A-5): نتائج تقدير المعلمات بالطرائق الاربع مع قيم MSE والرتب المرافقة لها عند حجوم عينات (n= 30,50,75,100,150) مع القيم الافتراضية للمعلمات  $a=2.5, \lambda=1$

Methods		MLE	OLS	WLS	MOM
n=30	$\hat{a}$	2.634471	2.4924655	2.520733	2.627001
	MSE	0.252604758	0.323524617	0.290869059	0.247424936
	Rank	2	4	3	1
	$\hat{\lambda}$	1.000379	0.9839969	0.987995	0.999480
	MSE	0.007380277	0.008944431	0.008274838	0.007363128
	Rank	2	4	3	1
$\sum Rank$		$4^2$	$8^4$	$6^3$	$2^1$
n=50	$\hat{a}$	0.2590082	2.4952040	2.5214388	2.586508
	MSE	0.129069973	0.177771643	0.148354694	0.12953679
	Rank	1	4	3	2
	$\hat{\lambda}$	1.003486	0.9924594	0.9962278	1.002904
	MSE	0.004602169	0.005319366	0.004900714	0.004589943
	Rank	2	4	3	1
$\sum Rank$		$3^{1.5}$	$8^4$	$6^3$	$3^{1.5}$
n=75	$\hat{a}$	2.570762	2.5101062	2.5278966	2.568142
	MSE	0.076097537	0.109210708	0.089530012	0.077372515
	Rank	1	4	3	2
	$\hat{\lambda}$	1.003815	0.9970626	0.994796	1.003373
	MSE	0.002765811	0.003232713	0.002956233	0.002789117
	Rank	1	4	3	2
$\sum Rank$		$2^1$	$8^4$	$6^3$	$4^2$
n=100	$\hat{a}$	2.544246	2.4931324	2.511085	2.540946
	MSE	0.059081701	0.075736548	0.064053926	0.05879092
	Rank	2	4	3	1
	$\hat{\lambda}$	1.001447	0.9965504	0.998509	1.001026
	MSE	0.002286864	0.002510389	0.002362783	0.00228211
	Rank	2	4	3	1
$\sum Rank$		$4^2$	$8^4$	$6^3$	$2^1$
n=150	$\hat{a}$	2.527896	2.499379	2.510361	2.525320
	MSE	0.037083132	0.055070622	0.04458062	0.037515682
	Rank	1	4	3	2
	$\hat{\lambda}$	1.001233	0.998324	0.999554	1.000883
	MSE	0.001569197	0.001762905	0.00165462	0.001582201
	Rank	1	4	3	2
$\sum Rank$		$2^1$	$8^4$	$6^3$	$4^2$

جدول (6- A): نتائج تقدير المعلمات بالطرائق الاربع مع قيم MSE والرتب المرافقة لها عند حجوم عينات (n= 30,50,75,100,150) مع القيم الافتراضية للمعلمات  $a=0.5, \lambda=2$

Methods		MLE	OLS	WLS	MOM
n=30	$\hat{a}$	0.5516135	0.5155954	0.5207633	0.5424816
	MSE	0.01687842	0.01922866	0.01679931	0.007089647
	Rank	3	4	2	1
	$\hat{\lambda}$	3.0111973	2.5329327	2.5836122	2.6530253
	MSE	5.53408639	5.07129622	4.75280278	2.474639251
	Rank	4	3	2	1
$\sum Rank$		$7^{3.5}$	$7^{3.5}$	$4^2$	$2^1$
n=50	$\hat{a}$	0.5247712	0.5040366	0.5090037	0.5279934
	MSE	0.00801173	0.01065338	0.008927914	0.003921394
	Rank	2	4	3	1
	$\hat{\lambda}$	2.5263579	2.2625751	2.3155569	2.4700089
	MSE	2.53327334	2.83254484	2.550918721	1.393838702
	Rank	2	4	3	1
$\sum Rank$		$4^2$	$8^4$	$6^3$	$2^1$
n=75	$\hat{a}$	0.5143201	0.4999425	0.5044461	0.5229554
	MSE	0.004481956	0.006506863	0.005128932	0.002988358
	Rank	2	4	3	1
	$\hat{\lambda}$	2.3212739	2.1450906	2.1920688	2.4170022
	MSE	1.317041261	1.583832072	1.351923718	1.061887927
	Rank	2	4	3	1
$\sum Rank$		$4^2$	$8^4$	$6^3$	$2^1$
n=100	$\hat{a}$	0.5146717	0.5018269	0.5065821	0.5210557
	MSE	0.003682559	0.005209361	0.004223603	0.002380434
	Rank	2	4	3	1
	$\hat{\lambda}$	2.3032198	2.1435762	2.1959385	2.3585192
	MSE	1.075590833	1.288534321	1.121715320	0.804264397
	Rank	2	4	3	1
$\sum Rank$		$4^2$	$8^4$	$6^3$	$2^1$
n=150	$\hat{a}$	0.5062089	0.4986441	0.5017532	0.5130163
	MSE	0.00242564	0.003526152	0.002818405	0.001628842
	Rank	2	4	3	1
	$\hat{\lambda}$	2.1526158	2.0573433	2.0924036	2.2458365
	MSE	0.65137910	0.823451819	0.69862606	0.496257967
	Rank	2	4	3	1
$\sum Rank$		$4^2$	$8^4$	$6^3$	$2^1$

جدول (A-7): نتائج تقدير المعلمات بالطرائق الاربع مع قيم MSE والرتب المرافقة لها عند حجوم عينات (n= 30,50,75,100,150) مع القيم الافتراضية للمعلمات  $a=1, \lambda=2$

Methods		MLE	OLS	WLS	MOM
n=30	$\hat{a}$	1.048380	0.9813277	0.9946373	1.067597
	MSE	0.04614486	0.06009174	0.05249003	0.05174502
	Rank	1	4	3	2
	$\hat{\lambda}$	2.064942	1.8871935	1.9291882	2.111264
	MSE	0.32511117	0.43197563	0.38338740	0.35479396
	Rank	1	4	3	2
$\sum Rank$		$2^1$	$8^4$	$6^3$	$4^2$
n=50	$\hat{a}$	1.040566	1.005945	1.013361	1.052490
	MSE	0.02568613	0.0349324	0.02913903	0.02972761
	Rank	1	4	2	3
	$\hat{\lambda}$	2.070768	1.974519	2.000852	2.096868
	MSE	0.20917119	0.2603720	0.23229097	0.22963663
	Rank	1	4	3	2
$\sum Rank$		$2^1$	$8^4$	$5^{2.5}$	$5^{2.5}$
n=75	$\hat{a}$	1.027594	0.999089	1.008603	1.034458
	MSE	0.01609828	0.02321211	0.01871675	0.01863827
	Rank	1	4	3	2
	$\hat{\lambda}$	2.045106	1.963731	1.994420	2.060226
	MSE	0.13259799	0.17356819	0.1480287	0.14856575
	Rank	1	4	2	3
$\sum Rank$		$2^1$	$8^4$	$5^{2.5}$	$5^{2.5}$
n=100	$\hat{a}$	1.020609	0.996149	1.004548	1.030961
	MSE	0.01275966	0.0169394	0.01400134	0.0152800
	Rank	1	4	2	3
	$\hat{\lambda}$	2.036039	1.974373	1.997669	2.060946
	MSE	0.11448383	0.1437488	0.12454763	0.1297365
	Rank	1	4	2	3
$\sum Rank$		$2^1$	$8^4$	$4^2$	$6^3$
n=150	$\hat{a}$	1.011685	0.9994334	1.004422	1.016744
	MSE	0.00773759	0.01132111	0.009215374	0.009121911
	Rank	1	4	3	2
	$\hat{\lambda}$	2.024054	1.9884518	2.004036	2.036389
	MSE	0.07217828	0.08946683	0.078749170	0.083833791
	Rank	1	4	2	3
$\sum Rank$		$2^1$	$8^4$	$5^{2.5}$	$5^{2.5}$



جدول (A- 8): نتائج تقدير المعلمات بالطرائق الاربع مع قيم MSE والرتب المرافقة لها عند حجوم عينات (n= 30,50,75,100,150) مع القيم الافتراضية للمعلمات  $a=1.5, \lambda=2$

Methods		MLE	OLS	WLS	MOM
n=30	$\hat{a}$	1.602726	1.512022	1.529133	1.604193
	MSE	0.1047477	0.1389435	0.1206125	0.1027040
	Rank	2	4	3	1
	$\hat{\lambda}$	2.044378	1.953076	1.976181	2.046194
	MSE	0.1174833	0.1441431	0.1307668	0.1167862
	Rank	2	4	3	1
$\sum Rank$		$4^2$	$8^4$	$6^3$	$2^1$
n=50	$\hat{a}$	0.1552033	1.503693	1.516946	1.553923
	MSE	0.05269085	0.07699892	0.06448355	0.05280084
	Rank	1	4	3	2
	$\hat{\lambda}$	2.018963	1.967215	1.985061	2.020399
	MSE	0.06255054	0.08174980	0.07149542	0.06250657
	Rank	1	4	3	2
$\sum Rank$		$2^1$	$8^4$	$6^3$	$4^2$
n=75	$\hat{a}$	1.533477	1.495051	1.506693	1.534941
	MSE	0.03508843	0.04542637	0.03853676	0.03555242
	Rank	1	4	3	2
	$\hat{\lambda}$	2.015281	1.977711	1.991469	2.016204
	MSE	0.05048858	0.05874045	0.05382695	0.05112039
	Rank	1	4	3	2
$\sum Rank$		$2^1$	$8^4$	$6^3$	$4^2$
n=100	$\hat{a}$	1.531944	1.503615	1.513956	1.534183
	MSE	0.02366463	0.03413942	0.02797361	0.02396767
	Rank	1	4	3	2
	$\hat{\lambda}$	2.011287	1.984210	1.994922	2.013289
	MSE	0.03246580	0.04073387	0.03630531	0.03278852
	Rank	1	4	3	2
$\sum Rank$		$2^1$	$8^4$	$6^3$	$4^2$
n=150	$\hat{a}$	1.519924	1.498464	1.507052	1.521468
	MSE	0.01457291	0.02006290	0.01661186	0.01494887
	Rank	1	4	3	2
	$\hat{\lambda}$	2.007550	1.988786	1.996935	2.008761
	MSE	0.02171966	0.02566511	0.02328095	0.02201096
	Rank	1	4	3	2
$\sum Rank$		$2^1$	$8^4$	$6^3$	$4^2$

جدول (A- 9): نتائج تقدير المعلمات بالطرائق الاربع مع قيم MSE والرتب المرافقة لها عند حجوم عينات (n= 30,50,75,100,150) مع القيم الافتراضية للمعلمات  $a=2, \lambda=2$

Methods		MLE	OLS	WLS	MOM
n=30	$\hat{a}$	2.126482	2.003777	2.027662	2.122643
	MSE	0.17871537	0.22814258	0.20005799	0.17482152
	Rank	2	4	3	1
	$\hat{\lambda}$	2.012735	1.956389	1.971816	2.011385
	MSE	0.05376099	0.0691254	0.06244947	0.05305695
	Rank	2	4	3	1
$\sum Rank$		$4^2$	$8^4$	$6^3$	$2^1$
n=50	$\hat{a}$	2.087174	2.01158	2.029955	2.083285
	MSE	0.09444383	0.11748985	0.1026709	0.09253738
	Rank	2	4	3	1
	$\hat{\lambda}$	2.020023	1.98809	1.997524	2.018353
	MSE	0.03350045	0.03907663	0.0361409	0.03324778
	Rank	2	4	3	1
$\sum Rank$		$4^2$	$8^4$	$6^3$	$2^1$
n=75	$\hat{a}$	2.057566	1.997245	2.018645	2.055052
	MSE	0.05878507	0.07876022	0.06619690	0.05749176
	Rank	2	4	3	1
	$\hat{\lambda}$	2.010461	1.984648	1.994646	2.009404
	MSE	0.02209154	0.02578324	0.02361277	0.02202905
	Rank	2	4	3	1
$\sum Rank$		$4^2$	$8^4$	$6^3$	$2^1$
n=100	$\hat{a}$	2.040592	2.006652	2.020023	2.039610
	MSE	0.03985026	0.05474479	0.04617934	0.03934019
	Rank	2	4	3	1
	$\hat{\lambda}$	2.003843	1.988828	1.995440	2.003434
	MSE	0.01608948	0.01875212	0.01720307	0.01602984
	Rank	2	4	3	1
$\sum Rank$		$4^2$	$8^4$	$6^3$	$2^1$
n=150	$\hat{a}$	2.020674	1.996695	2.007235	2.020031
	MSE	0.02363562	0.03383579	0.02740892	0.02352708
	Rank	2	4	3	1
	$\hat{\lambda}$	2.002016	1.991304	1.996286	2.001684
	MSE	0.01047913	0.01180376	0.01087343	0.01043557
	Rank	2	4	3	1
$\sum Rank$		$4^2$	$8^4$	$6^3$	$2^1$

جدول (A- 10): نتائج تقدير المعلمات بالطرائق الاربع مع قيم MSE والرتب المرافقة لها عند حجوم عينات (n= 30,50,75,100,150) مع القيم الافتراضية للمعلمات  $a=2.5, \lambda=2$

Methods		MLE	OLS	WLS	MOM
n=30	$\hat{a}$	2.656865	2.504526	2.531322	2.647506
	MSE	0.22277104	0.28139872	0.23966624	0.21597691
	Rank	2	4	3	1
	$\hat{\lambda}$	2.011098	1.977832	1.986487	2.009030
	MSE	0.02929049	0.03498996	0.03229143	0.02903622
	Rank	2	4	3	1
$\sum Rank$		$4^2$	$8^4$	$6^3$	$2^1$
n=50	$\hat{a}$	2.586721	2.504203	2.526294	2.586257
	MSE	0.12756744	0.16370884	0.14064614	0.13164200
	Rank	1	4	3	2
	$\hat{\lambda}$	2.001468	1.981912	1.988527	2.000919
	MSE	0.01894647	0.02167538	0.02009362	0.01894128
	Rank	2	4	3	1
$\sum Rank$		$3^{1.5}$	$8^4$	$6^3$	$3^{1.5}$
n=75	$\hat{a}$	2.556147	2.499920	2.516501	2.553037
	MSE	0.08037186	0.11957061	0.09747785	0.08150082
	Rank	1	4	3	2
	$\hat{\lambda}$	2.004046	1.990997	1.995686	2.003105
	MSE	0.01247436	0.01453084	0.01344270	0.01251617
	Rank	1	4	3	2
$\sum Rank$		$2^1$	$8^4$	$6^3$	$4^2$
n=100	$\hat{a}$	2.534390	2.489102	2.503953	2.532078
	MSE	0.054560297	0.07988314	0.06598489	0.054927960
	Rank	1	4	3	2
	$\hat{\lambda}$	2.007071	1.996927	2.000540	2.006367
	MSE	0.009290733	0.01072200	0.01001906	0.009360849
	Rank	1	4	3	2
$\sum Rank$		$2^1$	$8^4$	$6^3$	$4^2$
n=150	$\hat{a}$	2.546026	2.514696	2.529232	2.545269
	MSE	0.039654522	0.057508391	0.046946974	0.040296566
	Rank	1	4	3	2
	$\hat{\lambda}$	2.004384	1.996842	2.000440	2.004083
	MSE	0.006304066	0.007002019	0.006536097	0.006349398
	Rank	1	4	3	2
$\sum Rank$		$2^1$	$8^4$	$6^3$	$4^2$

## Abstract

There are numerous data sets that are expressed with variables having angles and distance, particularly in the fields of mathematics, physics, marine engineering, robotics, unmanned aerial vehicles, receivers, telecommunication, and others. Researchers face difficulties in selecting a probability distribution that accurately represents a given phenomenon in the best possible way. In such cases, it is not possible to effectively express the data within Cartesian coordinates since it requires expressing them in a coordinate system that incorporates angles and distance, namely the polar coordinate system. In this thesis, the joint probability function of the Weibull distribution in the polar coordinate system is constructed, followed by finding the marginal distribution function of the polar Weibull distribution and deriving some important properties of the new distribution.. Four estimation methods (MLE,MOM,OLS,WLS ) are then discussed to estimate the parameters of the distribution. To achieve the objective of the thesis, the results are analyzed and discussed using both simulated data and real data representing wind speed and direction in the holy city of Karbala.

Simulation was employed by using various sample sizes( 30,50,75,100,150) and different hypothetical parameter values, and the experiment was repeated 1000 times. After obtaining the results, a comparison was made using the mean square error criterion, revealing that the maximum likelihood method is the most suitable for parameter estimation among the other methods. In the applied aspect, real data representing wind direction and speed in the city of Karbala period (1/10/2022 to 30/11/2022 ) were recorded. The suitability of the real data for the new distribution was examined using some tests(Kolmogorov-Smirnov & Anderson –Darling Test). Subsequently, the estimated parameters for the real data were obtained using the maximum likelihood method, and a comparison was made between the estimation results of the new polar Weibull distribution and the Weibull distribution in Cartesian coordinates using some comparison and preference criteria (AIC,BIC) , which showed the superiority of the new distribution, aligning with the thesis's objective.

**Republic of Iraq  
Ministry of higher Education  
and Scientific Research  
Karbala University  
College of Administration  
and Economics  
Department of statistics**



**Building a Probability Distribution in Polar  
Coordinate System with Uniform Angles with  
practical application**

**A Dissertation**

**submitted to the Council of College of Administration and  
Economics in University of *Karbala* as a Partial fulfillment of the  
requirements for Ph.D. degree in Statistics Sciences**

**by**

**Ali Abdulzahra Hassan Ali AL-Bedhani**

**Supervised by**

**Ass .Prof .Dr.**

**&**

**Ass .Prof .Dr.**

**Enas Abdul hafidh Mohammed**

**Mushtak K Abd Al-Rahem**

**A.H.1445**

***Karbala***

**A.D. 2023**