



جمهورية العراق
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة كربلاء
كلية الإدارة و الاقتصاد
قسم الإحصاء
الدراسات العليا



تقدير معلمات Cardioid distribution لعينات مراقبة مضاعفة مع

تطبيق عملي

رسالة مقدمة الى

مجلس كلية الإدارة والاقتصاد في جامعة كربلاء

وهي جزء من متطلبات نيل درجة ماجستير في علوم الإحصاء

تقدم بها الطالب

حسام جبار جواد الصريفي

إشراف

أ. د شروق عبد الرضا سعيد السباح

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

وَهُوَ الَّذِي خَلَقَ اللَّيْلَ وَالنَّهَارَ وَالشَّمْسَ

وَالْقَمَرَ ط كُلٌّ فِي فَلَكٍ يَسْبَحُونَ ﴿٣٣﴾

صدق الله العلي العظيم

سورة الانبياء - الآية 33

إقرار المشرف

أشهد أن إعداد هذه الرسالة الموسومة (تقدير معلمات **cardioid distribution** لعينات مراقبة مضاعفة مع تطبيق عملي) والتي تقدم بها الطالب " حسام جبار جواد " قد جرت بإشرافي في قسم الاحصاء - كلية الادارة والاقتصاد - جامعة كربلاء، وهي جزء من متطلبات نيل درجة ماجستير علوم في الاحصاء.

أ.د شروق عبد الرضا سعيد

التاريخ / / 2023

توصية رئيس قسم الاحصاء

بناءً على توصية الاستاذ المشرف، أرشح الرسالة للمناقشة.

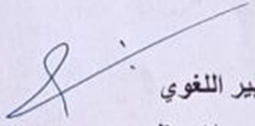
أ.م.د ايناس عبد الحافظ محمد

رئيس قسم الاحصاء

التاريخ: / / 2023

إقرار الخبير اللغوي

أشهد أن الرسالة الموسومة (تقدير معلمات cardioid distribution لعينات مراقبة مضاعفة مع تطبيق عملي) للطالب حسام جبار جواد / قسم الاحصاء قد جرت مراجعتها من الناحية اللغوية حتى اصبحت خالية من الاخطاء اللغوية والاسلوبية ولأجله وقعت.



الخبير اللغوي

م. د. محمد سلام مظهر

جامعة كربلاء - كلية الإدارة والاقتصاد

إقرار رئيس لجنة الدراسات العليا

بناءً على إقرار المشرف العلمي والخبير اللغوي على رسالة الماجستير للطالب " حسام جبار جواد " الموسومة بـ (تقدير معلمات **cardioid distribution** لعينات مراقبة مضاعفة مع تطبيق عملي) ارشح هذه الرسالة للمناقشة.

أ.د. علي أحمد فارسي

رئيس لجنة الدراسات العليا

مصادقة مجلس الكلية

صادق مجلس كلية الإدارة والاقتصاد/ جامعة كربلاء على قرار لجنة المناقشة.

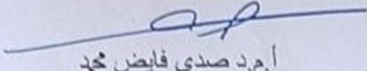
أ.د. محمد حسين الجبوري


عميد كلية الإدارة والاقتصاد- جامعة كربلاء


2023/10/18

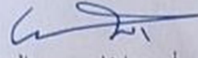
إقرار لجنة المناقشة

نشهد نحن أعضاء لجنة المناقشة بأننا قد اطلعنا على الرسالة الموسومة (تقدير معلمات **cardioid distribution** لعينات مراقبة مضاعفة مع تطبيق عملي) والمقدمة من قبل الطالب " حسام جبار جواد " وناقشنا الطالب في محتوياتها وفيما له علاقة بها، ووجدنا بأنه جدير بنيل درجة ماجستير علوم في الإحصاء بتقدير () .


أ.م.د صدى فايز محمد
عضواً


أ.د عبد الرحيم خلف راهي
رئيساً


أ.د شروق عبد الرضا سعيد
عضواً ومشرفاً


أ.م.د ايناس عبد الحافظ محمد
عضواً

الإهداء

إلى الذي لا يطيب الليل إلا بشكره ولا يطيب النهار إلا بطاعته .. ولا تطيب اللحظات إلا

بذكره ...

ولا تطيب الآخرة إلا بعفوه ... ولا تطيب الجنة إلا بقبوله

الله ﷻ

إلى من بلغ الرسالة وأدى الأمانة ... ونصح الأمة ... إلى نبي الرحمة ونور العالمين ...

النبي محمد صلى الله عليه وآله الطيبين الطاهرين

إلى سيد الشهداء الامام الحسين (عليه السلام) ... إلى ساقى عطاشى كربلاء أبي الفضل العباس

(عليه السلام) ...

إلى صاحب العصر والزمان ومنقذ البشرية الامام محمد ابن الحسن المهدي (عج).....

إلى كنز التضحية والايثار الى صاحب القلب الكبير الى تاج الزمان ومعلمي وملهمي الى الاب

المثالي...

والذي العزيز رحمه الله

إلى ملاكي في الحياة ... إلى معنى الحب والحنان والتفاني ... إلى بسملة الحياة وسر الوجود

إلى من كان دعائها سر نجاحي وحنانها بلسم جراحي إلى أعلى من روعي...

أمي الحبيبة رحمه الله

إلى أحبائي وسندي في الحياة ... زوجتي - بناتي - إخوتي وأخواتي وأولادهم

اهدي ثمرة جهدي المتواضع هذا ...

شكر وإمتنان

الحمد لله الذي ادعوه فيجيبني وإن كنت بطيئاً حين يدعوني الحمد لله الذي أسأله فيعطيني وإن كنت بخيلاً حين يستقرضني ، الحمد لله الذي تحبب إلي وهو غني عني فربي أحمد شيء عندي وأحق بحمدي الحمد لله رب العالمين وصلى الله على سيدنا محمد وآله الطيبين الطاهرين وأصحابه الغر الميامين ، اللهم لك الحمد والشكر لله الذي من علي بنور العلم ، وأنار لي الدرب ، وهداني لما أنا فيه ، ووفقني في أن أوفي لمن (علمني حرفاً وملكني عبداً) أعني بهم أساتذتي الأفاضل الذين لم يبخلوا علي بنصح أو مشوره .

أتقدم بجزيل الشكر والامتنان والتقدير إلى أساتذتي الفاضلة (الأستاذة الدكتورة شروق عبد الرضا سعيد السباح) لما بذلته من جهود علمية مغنية طيلة مدة إشرافها على هذه الرسالة .

كما أتقدم بجزيل الشكر والامتنان إلى الأستاذ الفاضل رئيس لجنة المناقشة المحترم وأعضائها المحترمين لتفضلهم بقبول مناقشة الرسالة وعلى آرائهم التي طرحوها وتقدم بجزيل الشكر والامتنان إلى المقوم العلمي والمقوم اللغوي (الدكتور محمد سلام مظهر العامري)

ومن واجب الوفاء أن أتقدم بالشكر الجزيل لأساتذتي في قسم الإحصاء - كلية الإدارة والاقتصاد - جامعة كربلاء الذين رفدوني بالعلم والمعرفة خلال دراستي التحضيرية ، وإلى موظفي مكتبة الكلية وجميع زملائي كما أتقدم بالشكر إلى كل من ساعدني سائلين العزيز القدير أن يوفقهم ويجزيهم خير الجزاء .

وآخر دعوانا إن الحمد لله رب العالمين

الباحث

قائمة المحتويات

الصفحة	الموضوع
ت	الآية القرآنية
ث	الإهداء
ج	شكر وامتنان
ض	المستخلص
	الفصل الأول (منهجية الرسالة وبعض الدراسات السابقة)
1-2	1.1 مقدمة
3	2.1 مشكلة الرسالة
3	1.3 هدف الرسالة
4-6	4.1 الاستعراض المرجعي
	الفصل الثاني (الجانب النظري)
7	2.1 تمهيد
8	2.2 الإحصاء الدائري
8	2.3 البيانات الدائرية

9	2.4 تمثيل البيانات الدائرية
9	الراديان أو الدرجات
10	مقياس دائري
10	المخطط الدائري
10	الالتفاف
10	التحويل
10	2.5 الإحصاء الوصفي الدائري
11	الوسط الدائري
11	التباين الدائري
11	الانحراف المعياري الدائري
11	المدى الدائري
11	الربيعات الدائرية
11	المدرج التكراري الدائري
12	2.6 التوزيع الدائري
12	توزيع (Von Mises) :
13	التوزيع الدائري الملتف

13	توزيع كوشي الملتف
14-21	2.7 التوزيع القلبي
21-22	2.8 العلاقة بين توزيع فون ميزيس والتوزيع القلبي
22	2.9 انواع البيانات
22	البيانات الكاملة
23	2.9.2البيانات المراقبة
23-24	بيانات مراقبة من النوع الاول
24	بيانات مراقبة من النوع الثاني
25	1- البيانات الخاضعة للمراقبة اليمنى
25	2- بيانات مراقبة من اليسار
26	3- بيانات الفترة
26-27	2.9.3 بيانات مراقبة مضاعفة
28	2.10 طرائق تقدير معالم التوزيع القلبي

28-30	2.10.1 طريقة الإمكان الأعظم
31-33	2.10.2 طريقة بيز
33-35	2.10.3 طريقة كرامر فون مايسس
35-36	2.11 معايير اختبار ملاءمة البيانات للتوزيع القلبي
	الفصل الثالث (الجانب التجريبي والتطبيقي)
37	3.1 تمهيد
37-38	3.2 مفهوم المحاكاة
38-42	3-3 مراحل تطبيق تجارب المحاكاة
43-86	3-4 مناقشة نتائج المحاكاة

87	3.5 الجانب التطبيقي
87-88	3.6 اتجاه الرياح
89-91	3.7 البيانات التطبيقية
92	3.8 اختبار ملاءمة البيانات
92	3.8.1 اختبار استقلالية البيانات
92-93	3.8.2 اختبار ملاءمة البيانات
93-97	3.9 تحليل البيانات
	الفصل الرابع (الاستنتاجات والتوصيات)
98	4.1 الاستنتاجات
99	4.2 التوصيات
	المصادر
100- 101	المصادر الأجنبية+القرآن الكريم
A	Abstract

قائمة الجداول

الصفحة	عنوان الجدول	رقم الجدول
39	قيم المعلمات الافتراضية	(3-1)
43-44	مختصرات جداول المحاكاة	(3-2)
45-51	تقدير المعلمات ومتوسط مربعات الخطأ MSE لكل طريقة من طرق التقدير للأنموذج الأول	(3-3)
53-59	تقدير المعلمات ومتوسط مربعات الخطأ MSE لكل طريقة من طرق التقدير للأنموذج الثاني	(3-4)
61-67	تقدير المعلمات ومتوسط مربعات الخطأ MSE لكل طريقة من طرق التقدير للأنموذج الثالث	(3-5)
69-75	تقدير المعلمات ومتوسط مربعات الخطأ MSE لكل طريقة من طرق التقدير للأنموذج الرابع	(3-6)
77-83	تقدير المعلمات ومتوسط مربعات الخطأ MSE لكل طريقة من طرق التقدير للأنموذج الخامس	(3-7)
85	عدد مرات الأفضلية ونسبة الأفضلية لكل طريقة من طرق التقدير ولكل معلمة من معلمات التوزيع القلبي	(3-8)
89-90	اتجاهات الرياح في العراق بالراديان $t_i rad$ وبالدرجات $t_i deg$	(3-9)
91	نتائج اختبار البيانات الحقيقية لأوقات الفشل لجهاز الماموجرام	(3-10)
92	نتائج اختبار البيانات الحقيقية	(3-11)
93	نتائج اختبار البيانات الحقيقية	(3-12)
93-96	البيانات الحقيقية وقيم دالة الكثافة الاحتمالية الحقيقية المقدره بطريقة الإمكان الأعظم	(3-13)

قائمة الأشكال

الصفحة	عنوان الشكل	رقم الشكل
9	التمثيل الدالة الاحتمالية (pdf)	(2-1)
13	التمثيل الدائري للتوزيع الدائري المستمر	(2-2)
18	منحنى دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع القلبي	(2-3)
21	منحنى دالة الكثافة الاحتمالية التراكمية للتوزيع القلبي	(2-4)
40	بيانات التوزيع القلبي عند حجم عينه (n=10)	(3-1)
40	بيانات التوزيع القلبي عند حجم عينه (n=30)	(3-2)
41	بيانات التوزيع القلبي عند حجم عينه (n=50)	(3-3)
41	بيانات التوزيع القلبي عند حجم عينه (n=75)	(3-4)
42	بيانات التوزيع القلبي عند حجم عينه (n=100)	(3-5)
91	البيانات الحقيقية	(3-6)
69	منحنى التوزيع القلبي وتوزيع Von-mises والبيانات الحقيقية بالإحداثي القطبي	(3-7)

المستخلص

يعد التوزيع القلبي (Cardioid distribution) من التوزيعات المهمة في نمذجة البيانات الدائرية التي تمثل القيم على النطاق الدائري ، مثل الزوايا أو الاتجاهات مثل اتجاهات الرياح ومحامل البوصلة واتجاه حركات الحيوانات اذ يوفر التوزيع القلبي إطارًا بسيطًا ومرنًا لالتقاط الطبيعة الدائرية لهذه البيانات فهو أداة قيمة لنمذجة البيانات ذات الخصائص الدائرية فلهذا يوفر طريقة ملائمة لوصف هذه البيانات وتقديم استنتاجات حولها. لذلك جاءت هذه الرسالة هادفة إلى إيجاد أفضل طريقة لتقدير معالم التوزيع القلبي (Cardioid distribution) في ظل بيانات مراقبة مضاعفة (Doubly censored data) من بين ثلاثة طرائق للتقدير وهي طريقة الإمكان الأعظم (Maximum Likelihood method) وطريقة بيز (Bayesian method) وطريقة (Cramer -Von-Misses method) والمقارنة بين هذه الطرائق باستعمال تجارب محاكاة مونت- كارو . إذ تم التوصل إلى أن طريقة الإمكان الأعظم (Maximum Likelihood method) هي افضل من باقي طرائق التقدير وخاصة عند احجام العينات الكبيرة (n=50, 75, 100) تليها طريقة كرامر فون مايسس , واخيرا كانت طريقة بيز عند احجام العينات الصغيرة (n=10, 30) . وفي الجانب التطبيقي تم استعمال بيانات حقيقية تمثل اتجاه الرياح في العراق تم الحصول عليها من الهيئة العامة للأتواء الجوية والرصد الزلزالي العراقية لسنة (2022) والتي هي عبارة عن (100) مشاهدة قيست بالدرجة في الساعة 6 صباحاً وفي الساعة الثانية عشر ليلاً لتقدير معالم التوزيع القلبي باستعمال طريقة الامكان الاعظم وتم التوصل الى ان قيم دالة الكثافة الاحتمالية المقدره ملائمة لقيم دالة الكثافة الاحتمالية الحقيقية . وان منحنى دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع القلبي المقدر بطريقة الامكان الاعظم اكثر ملائمة للبيانات الحقيقية . وعندما تكون زاوية اتجاه الرياح (6.10) درجة فهناك احتمال ان تكون زيادة في شدة الرياح بنسبة 27%. وعندما تكون زاوية اتجاه الرياح (0.07) درجة فهناك احتمال ان تكون زيادة في شدة الرياح بنسبة 17% وان الزاوية الاكثر شيوعا هي الاعلى احتمالية وهي(4.12)والزاوية الاقل شيوعا هي الاقل احتمالية وهي (0.07).

الفصل الأول

منهجية الرسالة

وبعض الدراسات السابقة

1.1 مقدمة (Introduction)

تكمن أهمية أي توزيع احتمالي في قابليته للتطبيق على بيانات حقيقية ، وقدرته على ملاءمة البيانات المشاهدة بدقة ، وفائدته في عمل التنبؤات ورسم رؤى ذات مغزى عند استعمال اي توزيع في مجال أو مجال بحث معين فسيتم تحديد أهميته من خلال مدى استيفائه لهذه المعايير للبيانات والتطبيقات المحددة . ومن هذه التوزيعات هي التوزيع القلبي الذي يشير إلى توزيع احتمالي يرتبط بطريقة ما بشكل القلب أو خصائصه الرياضية.

البيانات الدائرية ، والمعروفة أيضًا باسم البيانات الزاوية والبيانات الاتجاهية ، هي قياسات أو مشاهدات تحدث بطريقة دائرية أو دورية. يتميز هذا النوع من البيانات بقيم تلتف حولها بطريقة دائرية، حيث يتبع الحد الأقصى للقيمة الحد الأدنى للقيمة، مما يؤدي إلى إنشاء دورة. يتم مصادفة البيانات الدائرية بشكل شائع في سيناريوهات مختلفة في العالم الحقيقي وفي العديد من الظواهر الطبيعية مثل اتجاه الرياح واتجاه الطيور المهاجرة. عادةً ما يتم قياس البيانات الدائرية وتمثيلها بالدرجات أو الراديان اذ تطبق البيانات الدائرية من مجالات مختلفة ، حيث تكون القياسات هي الزاوية والاتجاهات ، مثل علم الأحياء والجيولوجيا وغيرها حيث تتعلق بعض الأمثلة بملاحة الطيور ، والاختلاف في ظهور سرطان الدم ، وبيانات التوجيه في القوام واتجاهات الرياح. تفرض الطبيعة الدورية للبيانات الدائرية معالجة محددة مناسبة للفضاء غير الإقليدي. على الرغم من أن التماثل يفترضه العديد من النماذج الدائرية ، إلا أن هناك العديد من المواقف العملية التي تكون فيها التوزيعات غير المتماثلة ضرورية.

الفصل الأول ————— منهجية الرسالة وبعض الدراسات السابقة

وكانت هيكله الرسالة متضمنة أربعة فصول:

الأول منهجية الرسالة ضم المقدمة، مشكلة الرسالة ، هدف الرسالة والأستعراض المرجعي

لأهم البحوث وبعض الدراسات السابقة ذات الصلة بموضوع الرسالة.

الثاني تضمن الجانب النظري الذي ضم عرضاً للبيانات الدائرية والقلبية وعينات المراقبة وأنواعها

وكذلك التوزيع القلبي وطرائق التقدير.

الثالث شمل مبحثين الأول هو الجانب التجريبي، إذ تضمن تجربة محاكاة باستعمال محاكاة

مونت-كارلو لاختبار المقارنة بين طرائق التقدير.

والمبحث الثاني تضمن الجانب التطبيقي، إذ استعملت بيانات حقيقية تمثل اتجاه الرياح في

العراق من الهيئة العامة لأنواء الجوية والرصد الزلزالي العراقية لسنة (2022) إذ إن البيانات التي تم

الحصول عليها عبارة عن (100) مشاهدة قيست بالدرجة في الساعة 6 صباحاً وفي الساعة الثانية

عشرة ليلاً .

الرابع شمل أهم الاستنتاجات والتوصيات التي تمخضت عنها الرسالة وتم التوصل إليها في

الجانبين التجريبي والتطبيقي.

1.2 مشكلة الرسالة (Problem of the thesis)

تناولت العديد من الدراسات والبحوث التوزيعات المستمرة في نمذجة العديد من الظواهر في العالم الحقيقي والتي تكون قياساتها على شكل بيانات خطية تُمَثَّل في المستوي الإحداثي الإقليدي، ولكن قد تواجهنا في العديد من الظواهر قياسات تقاس بالزوايا والاتجاهات والتي تفرض بسبب طبيعتها الدورية معالجة محددة ونمذجة محددة والتي تكون غير مناسبة للفضاء غير الإقليدي لذلك لابد من نمذجة مثل تلك البيانات وفق انموذج يمثل تلك البيانات ويقيس احتمالية حدوث مثل تلك الظواهر بصورة صحيحة ودقيقة والتوزيع القلبي (**Cardioid distribution**) واحد من تلك النماذج التي تستند على دالة كثافة احتمالية موجودة وهي دالة التوزيع الاحتمالي المنتظم المستمر ودالة مثلثية لإنتاج توزيع احتمالي قلبي دائري وخاصة عندما تكون بيانات تخص الرياح فإننا نحتاج إلى توزيعات تكون أكثر انسجاماً لحل المشكلات الناتجة من اتجاهات الرياح.

1.3 هدف الرسالة (Aim of the thesis)

يتلخص هدف الرسالة في :

- 1- الحصول على أفضل طريقة تقدير معالم التوزيع القلبي (**Cardioid distribution**) من بين ثلاثة طرائق للتقدير وهي طريقة الإمكان الأعظم (Maximum Likelihood method) وطريقة بيز (Baysian method) وطريقة (Cramer -Von-Misses method) في ظل بيانات مراقبة مضاعفة من خلال الاعتماد على معيار متوسط مربعات الخطأ (MSE).
- 2- تطبيق طريقة التقدير الأفضل على بيانات الرياح لمعرفة زوايا الرياح التي تتغير عندها اتجاه الرياح.

1.4 بعض الدراسات السابقة (Literature Review)

في عام (2009) استعمل (Abe et al.) توسعة (Papakonstantinou's extension) لإيجاد التوزيع القلبي لمتغير عشوائي دائري أحادي النمط ومتماثل واستخرج العزوم المثلثية والمتوسط والتباين وقدرنا معلمات التوزيع باستعمال طريقة العزوم وطريقة الإمكان الأعظم وقارن بين الطرائق باستعمال محاكاة مونت-كارولو وتوصل بأن التوزيع الجديد أكثر مرونة وادق في التعامل مع البيانات الدائرية المتماثلة وأحادية النمط . [1]

في عام (2011) اشتق (Rao AV et al.) التوزيع القلبي كحل للمعادلة التفاضلية الجزئية من الدرجة الثانية واستطاع تحويل التوزيع القلبي لملاءمة البيانات المتماثلة والمتجانسة باستعمال تحويلة (Möbius transformation) . [6]

في عام (2012) طبق (Wang & Shimizu) تحويلة (Möbius transformation) لإيجاد التوزيع القلبي لمتغيرين عشوائيين دائريين واستخرج العزوم المثلثية والمتوسط والتباين وطبق التوزيع على بيانات اتجاه الرياح وتوصل بأن التوزيع القلبي ملائم للبيانات الدائرية ويعطي نتائج أدق من التوزيع التقليدي . [12]

في عام (2014) طور (SHAKERI & GROVER) طريقة (Trunbull, 1974) والتي استعمل فيها بيانات مراقبة من اليسار لبيانات الإصابة بفيروس نقص المناعة المكتسبة البشري (HIV) في ايران لتقدير دالة البقاء للتوزيع القلبي الى بيانات مراقبة مضاعفة باستعمال طريقة الإمكان الأعظم الكاملة وطريقة الإمكان الأعظم الشرطية وتوصل إلى أن كلا الطريقتين معقدتان في الحساب ولكن طريقة الإمكان الأعظم الكاملة اعقد من طريقة الإمكان الأعظم الشرطية وان دالة البقاء المقدره باستعمال طريقة الإمكان الأعظم الشرطية أفضل من طريقة الإمكان الأعظم الكاملة [33]

في عام (2017) قدم (V. Paula & et al.) توزيع قلبي موسع جديد (A New Extended Cardioid Distribution) لبيانات دائرية غير متماثلة (Asymmetric) وغير أحادية النمط (Multimodality) والذي يدعى بالتوزيع القلبي الأسّي (Exponentiated Cardioid)

الفصل الأول ————— منهجية الرسالة وبعض الدراسات السابقة

(Distribution) واشتقا خصائص التوزيع الجديد من عزوم مثلثية والتواء وتفلطح وقدرنا معلمات التوزيع الموسع الجديد باستعمال طريقة الإمكان الأعظم وطريقة المربعات الصغرى القسيمية (Quantile least squares) وقارنا بين الطريقتين والتوزيع القلبي وتوزيع (Von-Mises) باستعمال تجارب محاكاة مونت كارلو واثبتت النتائج تفوق التوزيع المقترح على التوزيع القلبي توزيع (Von-Mises) . [38]

في عام (2018) قدم (Mamadou & et al.) توزيع (Sine Skewed Cardioid (ssc) الجديد ودرسوا الخصائص المقاربة له من خلال تحديد مجال القيمة القصوى والدالة المميزة وعزوم التوزيع ومقدرات الإمكان الأعظم والعزوم لمعلمتي التوزيع ، وتم إجراء تجارب محاكاة بعد توليد عشوائي لبيانات التوزيع الجديد وتوصلوا إلى أن التوليد العشوائي أثبت قوة اداء طريقة العزوم لمعلمات التوزيع. [22]

في نفس عام (2018) قدم (Ahsanullah M.) التوزيع القلبي الملتوي جيبياً (Sine-Skewed Cardioid Distribution) نواستخرج العديد من الخصائص الخاصة بالتوزيع وتوصل إلى أنه أكثر ملاءمة للبيانات الملوّنية. [4]

في عام (2019) قدم (Salavati) تعميم للتوزيعات القلبية واستخرج خصائص التوزيع من عزوم ووسط وتباين والدالة المميزة للبيانات الدائرية المتماثلة . [31]

في عام (2021) قدم (V. Paula & et al.) توزيع قلبي عمومي (Generalizing Cardioid Distribution) لبيانات دائرية غير متماثلة (Asymmetric) وغير أحادية النمط (Multimodality) واشتقا خصائص التوزيع الجديد من عزوم مثلثية والتواء وتفلطح وقدرنا معلمات التوزيع الموسع وقدمنا أربعة توزيعات قلبية من التوزيع العمومي وهي (Kumaraswamy, gamma, and Marshall–Olkin) وقدرنا معلمات التوزيعات باستعمال طريقة الإمكان الأعظم وقارنا بين التوزيعات العمومية والتوزيع القلبي وتوصلوا بأن التوزيعات القلبية العمومية افضل من التوزيعات القلبية . [37]

الفصل الأول ————— منهجية الرسالة وبعض الدراسات السابقة

في عام (2022) قدر (V.J.Devaraaj & et al.) معاملات التوزيع القلبي (Cardioid Distribution) في ظل بيانات مراقبة مضاعفة دائرية تتبع التوزيع المعلمي الدائري (Von-Mises) باستعمال طريقة الإمكان الأعظم (Maximum Likelihood method) وأوجدوا حلول مقدرات الإمكان الأعظم لمعاملات التوزيع القلبي والتي تكون في صيغة غير مغلقة للحل باستعمال الخوارزمية المقترحة من قبل (Girija, 2010) وتوصلوا إلى أن التوزيعات القلبية تلعب دوراً مهماً و أساسياً في بيانات المراقبة. [39]

واستكمالاً لما تقدم فأنا نلاحظ أنه لا توجد دراسات عربية تناولت التوزيع القلبي ، لذلك فأنا قمنا بتقدير معاملات التوزيع القلبي بطرائق جديدة لم تستعمل من قبل مثل طريقة بيز (Baysian method) وطريقة (Cramer -Von-Misses method) وتمت مقارنتهما بطريقة الإمكان الأعظم التي تم استعمالها من قبل العديد من الباحثين ، إضافة الى تطبيق الطريقة الأفضل في تقدير معاملات التوزيع القلبي على بيانات الرياح في العراق.

الفصل الثاني

الجانب النظري

2.1 تمهيد (Preface)

التوزيع القلبي هو توزيع احتمالي سمي على اسم شكله المميز والذي يشبه منحني قلبي الشكل (شكل هندسي على شكل قلب) وهو توزيع احتمالي مستمر يستعمل غالبًا في الإحصاء والرياضيات التطبيقية لنمذجة الظواهر المختلفة وهو واحد في عائلة التوزيعات الدائرية وهي توزيعات محددة على سطح دائرة أو كرة واشتق من التوزيع المنتظم على دائرة الوحدة عن طريق تحويل يرسم النقاط الموزعة بشكل موحد على الدائرة إلى نقاط أكثر تركيزًا بالقرب من محيط الدائرة بحيث تشكل الشكل القلبي. ويطبق التوزيع القلبي في مختلف المجالات ، بما في ذلك الفيزياء ومعالجة الإشارات والإحصاء الجغرافي في الفيزياء ، يمكن استعماله لنمذجة توزيع الجسيمات أو الموجات في نظام دائري أو كروي. في معالجة الإشارات ، يمكن استعماله لتحليل اتجاهية مصادر الصوت في الإحصاء الجغرافي ، يمكن استعماله لنمذجة البيانات المكانية في مجال دائري أو كروي. وبشكل عام ، يعد التوزيع القلبي أداة مفيدة في نظرية الاحتمالات والإحصاءات لنمذجة البيانات التي تظهر تناظرًا دائريًا أو كرويًا وتتميز بنمط تركيز على شكل قلب شكلها المميز يجعلها قابلة للتطبيق في مجموعة واسعة من المجالات حيث يلزم تحليل البيانات الدائرية أو الاتجاهية.

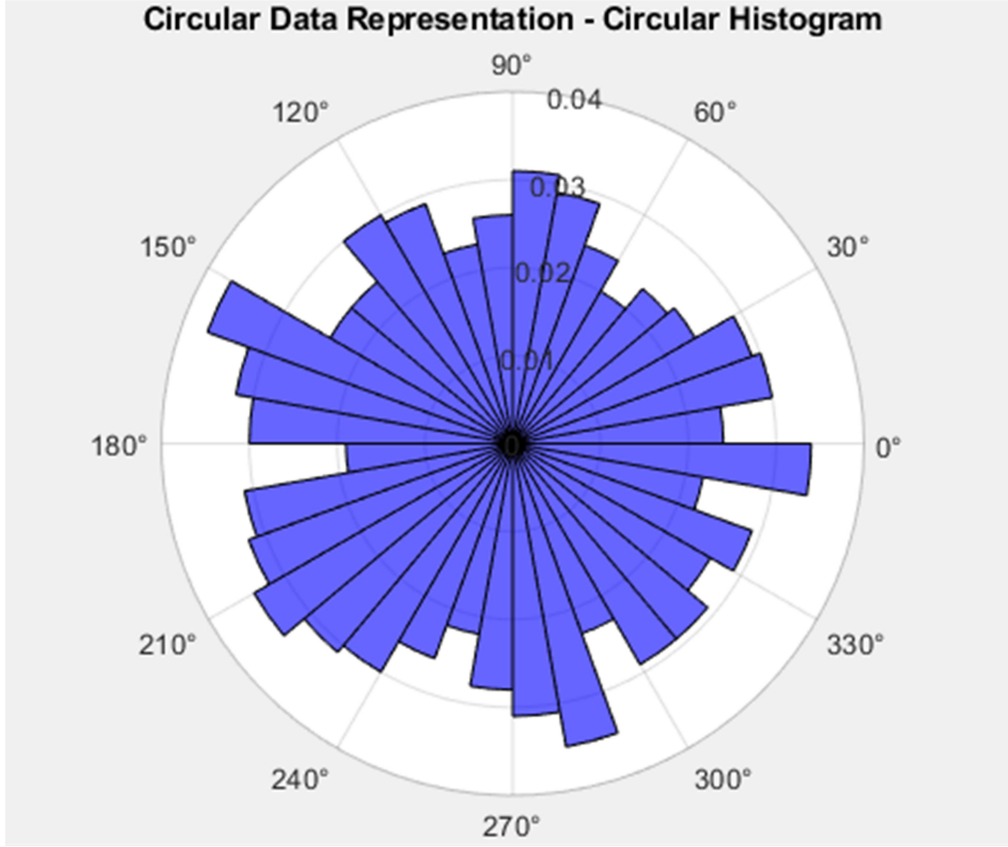
في هذا الفصل تم عرض المبادئ الأساسية للإحصاء الدائري والبيانات الدائرية وكذلك التوزيع القلبي والدوال المرتبطة به وكذلك طرق التقدير التي استعملت في هذه الرسالة.

2.2 الإحصاء الدائري (Circular Statistics)

هو فرع من فروع علم الإحصاء الذي يتعامل مع البيانات المقاسة على مقياس دائري أو البيانات التي تعرض أنماطاً دائرية أو دوريةً وهو ذو فائدة لتحليل البيانات التي يتم قياسها في الزوايا أو الاتجاهات مثل اتجاهات البوصلة أو اتجاهات الرياح أو الوقت من اليوم أو الظواهر البيولوجية أو السلوكية الدائرية.

2.3 البيانات الدائرية (Circular Data) [3][25]

تشير البيانات الدائرية إلى البيانات التي يتم قياسها على مقياس دائري ، مما يعني أن القيم تمثل الاتجاهات والزوايا والخطوط بدلاً من الكميات الخطية تتضمن أمثلة البيانات الدائرية اتجاهات البوصلة واتجاهات الرياح والوقت من اليوم والظواهر البيولوجية أو السلوكية الدورية إذ غالباً ما يتم تمثيل القياسات في أي مجال بعددًا حقيقيًا ، ولكن في الواقع وفي العديد من المجالات المتنوعة يمكن قياس أي مشاهدة على أنها اتجاه (Direction) ، إذ يمكن تمثيل الاتجاه كنقاط على محيط دائرة الوحدة أو متجهات وحدة تربط نقطة الأصل بهذه النقاط وبالتالي تسمى البيانات ثنائية الأبعاد بالبيانات الدائرية (Circular Data) وتسمى المشاهدات في ثلاثة أبعاد بالبيانات الكروية (Spherical Data) . ويمكن تمثيل البيانات الدائرية بالزاوية θ والتي مداها $[0, 2\pi]$ أو $[-\pi, \pi]$. والزاوية θ تكون دورية حيث إن $\theta = \theta + 2k\pi$.



شكل (2-1) المدرج النكراري الدائري لتمثيل البيانات الدائرية في الاحداثي القطبي

2.4 تمثيل البيانات الدائرية (Circular Data Representation) [25][2][26]

عادةً ما يتم تمثيل البيانات الدائرية باستعمال الزوايا أو الاتجاهات ، وغالبًا ما يتم قياسها بالراديان أو الدرجات. ومع ذلك ، ينشأ التحدي بسبب الطبيعة الدورية للبيانات الدائرية ، حيث تكون القيمة عند 0 درجة مكافئة للقيمة عند 360 درجة. وفيما يلي بعض الطرائق الأساسية لتمثيل البيانات الدائرية:

1. الراديان أو الدرجات (Radian or Degrees): يمكن قياس الزوايا في البيانات الدائرية

بوحدة الراديان أو الدرجات ويشيع استعمال الراديان في الحسابات الرياضية بينما الدرجات

مألوفة أكثر في الاستعمال اليومي.

الفصل الثاني — الجانب النظري

2. مقياس دائري (Circular Measure): على عكس البيانات الخطية ، فإن البيانات الدائرية لها طبيعة دورية أو اتجاهية. لذلك ، يتم استعمال مقياس دائري لتمثيل القيم ، حيث يتم توصيل نقطة البداية بنقطة النهاية. على سبيل المثال ، 0 درجة تعادل 360 درجة ، وكلاهما يمثل نفس الاتجاه.
3. المخطط الدائري (Circular Plot): تُستخدم المخططات والرسوم البيانية المتخصصة لتصوير البيانات الدائرية. أحد التصورات الشائعة هو الرسم البياني الدائري أو مخطط الورد (Rose Diagram) ، والذي يعرض تكراراً أو كثافة المشاهدات في صنابير زوايا مختلفة حول الدائرة. تصور آخر هو مخطط التشتت الدائري ، حيث يتم رسم نقاط البيانات الفردية باستعمال زواياها.
4. الالتفاف (Wrapping): عند تحليل البيانات الدائرية ، من المهم مراعاة الالتفاف أو الدورية. يشير الالتفاف إلى عملية إحضار البيانات ضمن نطاق محدد ، مثل 0 إلى 2π راديان أو من 0 إلى 360 درجة. يضمن ذلك التفاف القيم التي تتجاوز النطاق المحدد بشكل مناسب في النطاق للحفاظ على الطبيعة الدائرية للبيانات.
5. التحويل (Conversion): في بعض الحالات قد يكون من الضروري تحويل البيانات الدائرية إلى الشكل الخطي لبعض العمليات الحسابية أو التحليل الإحصائي. أحد الأساليب الشائعة هو تحويل الزوايا إلى إحداثيات ديكارتية (x ، y) باستعمال الدوال المثلثية مثل Sin و Cos.

2.5 الإحصاء الوصفي الدائري (Circular Data Descriptive) [26][21][22]

الإحصاء الوصفي الدائري يلخص خصائص البيانات الدائرية. وتشمل هذه القياسات مثل المتوسط الدائري (متوسط الاتجاه) ، والتباين الدائري (قياس التشتت) ، والانحراف المعياري الدائري ، والارتباط الدائري. توفر الإحصاءات الوصفية نظرة عامة على الاتجاه المركزي وتشتت وتوزيع البيانات الدائرية. يمكن استعمالها لفهم خصائص البيانات ، ومقارنة مجموعات البيانات المختلفة ، أو تحديد الأنماط والقيم المتطرفة في القياسات الدائرية.

الفصل الثاني — الجانب النظري

فيما يلي بعض الإحصاءات الوصفية الشائعة الاستعمال للبيانات الدائرية:

1. **الوسط الدائري (Circular mean)** : المتوسط الدائري ، المعروف أيضًا باسم الاتجاه المتوسط أو متوسط الاتجاه ، يمثل الاتجاه المركزي للبيانات الدائرية. يشير إلى الاتجاه النموذجي أو المتوسط على المقياس الدائري. غالبًا ما يتم التعبير عن المتوسط الدائري كزاوية أو اتجاه ويمكن حسابه باستعمال طرق مختلفة ، مثل متوسط المتجه أو متوسط الطول الناتج.
2. **التباين الدائري (Circular variance)**: يقيس التباين الدائري انتشار أو تشتت البيانات الدائرية حول الوسط الدائري. يقيس تركيز أو تشتت المشاهدات حول الاتجاه المتوسط. غالبًا ما يتم التعبير عنها كقيمة بين 0 و 1 ، حيث تشير القيم الأعلى إلى تشتت أكبر والقيم الأقل تشير إلى تركيز أكبر.
3. **الانحراف المعياري الدائري (Circular Standard Deviation)** : الانحراف المعياري الدائري هو مقياس آخر لانتشار البيانات الدائرية. يتم حسابه على أنه الجذر التربيعي للتباين الدائري. مثل التباين الدائري ، فإنه يوفر معلومات حول تشتت الملاحظات حول الوسط الدائري.
4. **المدى الدائري (Circular Range)**: يمثل النطاق الدائري الفرق بين القيم القصوى والدنيا في البيانات الدائرية. يعطي مؤشرًا على مدى أو مدى القياسات الدائرية.
5. **الربيعات الدائرية (Circular Percentiles)**: توفر الربيعات الدائرية معلومات حول مواضع أو قيم معينة في توزيع البيانات الدائري. وهي تمثل القيم التي تقع تحتها نسبة مئوية معينة من الملاحظات. على سبيل المثال ، النسب المئوية 25 و 75 تقسم البيانات الدائرية إلى أرباع.
6. **المدرج التكراري الدائري (Circular Histogram)** : يعرض مدرج تكراري دائري تواتر أو كثافة البيانات الدائرية. يوفر ملخصًا مرئيًا لتوزيع البيانات ، مع إبراز تواتر أو كثافة المشاهدات التي تقع في نطاقات أو مواضع مختلفة على المقياس الدائري.

2.6 التوزيع الدائري (Circular distribution) [24][27]

التوزيع الدائري ، المعروف أيضًا باسم التوزيع الاتجاهي ، هو توزيع احتمالي يصف احتمال وقوع حدث أو متغير عشوائي على مقياس دائري. يتم استعماله لنمذجة البيانات التي يتم قياسها في الزوايا أو الاتجاهات ، حيث تلتف القيم بطريقة دائرية بحيث يكون المدى للمتغير العشوائي الدائري (Circular Random Variable) θ هو $[0, 2\pi]$ أو $[-\pi, \pi]$. وتقسّم التوزيعات الاحتمالية الدائرية إلى قسمين ، الأول توزيعات دائرية متقطعة والتي تعيين كتلة احتمالية قابلة للعد والتي تسمى بالتوزيعات الشبكية الدائرية ، الثاني توزيعات دائرية مستمرة وتكون لها دالة الكثافة الاحتمالية الدائرية للمتغير العشوائي الدائري θ لها الخصائص الآتية:

$$1. f(\theta) \geq 0$$

$$2. \int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)d\theta = 1 \quad ; \quad -\infty < \theta < \infty$$

$$3. f(\theta) = f(\theta + k.2\pi)$$

في التوزيعات الدائرية ، يتم توزيع الاحتمال عبر الدائرة بأكملها ، وتكرر القيم بعد دورة كاملة. هذه الدورية هي السمة الرئيسية للتوزيعات الدائرية وتميزها عن التوزيعات على المقاييس الخطية.

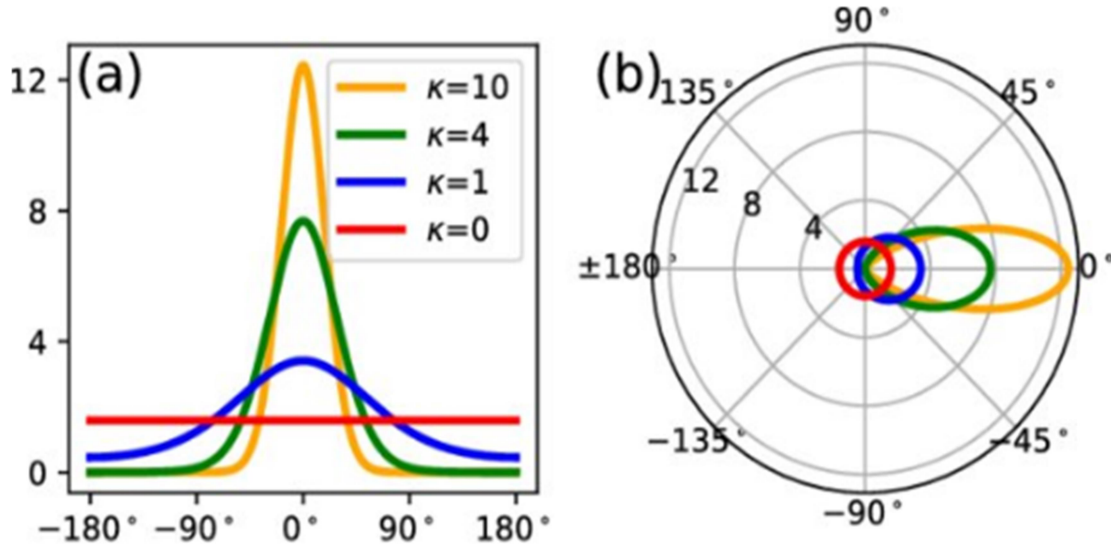
تتضمن بعض التوزيعات الدائرية الشائعة الاستعمال ما يلي:

1. **التوزيع المنتظم الدائري (Circular Uniform distribution):** التوزيع المنتظم هو أبسط

توزيع دائري. يفترض أن الاحتمال منتشر بالتساوي عبر المقياس الدائري بأكمله ، مما يؤدي إلى دالة كثافة احتمالية ثابتة (PDF) أو دالة كتلة (PMF) لجميع الزوايا أو الاتجاهات.

2. **توزيع (Von Mises) :** المعروف أيضًا بالتوزيع الطبيعي الدائري ، هو توزيع شائع لنمذجة البيانات الدائرية. إنه مشابه للتوزيع الطبيعي على مقياس دائري. له منحنى على شكل جرس يصف

تركيز أو تشتت المشاهدات حول اتجاه متوسط ، على غرار الطريقة التي يصف بها التوزيع الطبيعي التركيز حول قيمة متوسطة .



شكل (2-2) التمثيل الدائري للتوزيع الدائري المستمر [32]

يبين الشكل (a (2-2) منحنى دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الدائري Von-Mises تحت تأثير معامل التركيز k ومتوسط ثابت ($\mu=0$) (b) المخططات القطبية المقابلة لكل منحنى

3. التوزيع الدائري الملفت (Wrapped Normal Distribution): التوزيع الطبيعي الملفت مشتق من التوزيع الطبيعي عن طريق التفاف القيم حول المقياس الدائري. يكون مفيداً عندما يكون التوزيع الأساسي على المقياس الخطي أمراً طبيعياً ، ولكن يتم قياس البيانات على مقياس دائري.
4. توزيع كوشي الملفت (Wrapped Cauchy Distribution) : توزيع كوشي الملفت مشتق من توزيع كوشي بلف القيم حول المقياس الدائري. يكون مفيداً عندما يكون التوزيع الأساسي على المقياس الخطي هو Cauchy ، ولكن يتم قياس البيانات على مقياس دائري.

2.7 التوزيع القلبي (Cardioid Distribution)

يعد التوزيع القلبي او يطلق عليه (C distribution) من التوزيعات الملائمة بالدرجة الاساس للبيانات الدائرية (Circular Data) والذي قدم من قبل الباحث (Jeffery, 1961) واستعمله لنمذجة الاتجاهات الطيفية لموجبات المحيطات وهو توزيع احادي النمط (Unimodal) ومتماثل (Symmetric) حول معلمة الموقع (μ) وغالباً ما يطلق عليه اسم توزيع جتا (Cosine Distribution) لكنه يختلف عنه في دالة الكثافة الاحتمالية للزاوية (θ) والتي تكون : [39]

$$f(\theta) = \frac{1}{\pi} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \dots (2-1)$$

هو من التوزيعات الملائمة للبيانات الدائرية وسمي بالتوزيع القلبي كون ان منحنى التوزيع في الاحداثيات القطبية ياخذ شكل القلب .

يعد توزيع الكارديويد (Cardioid distribution) من التوزيعات الاحتمالية ثنائية الأبعاد بشكل منحنى يشبه القلب (Cardioid)، وهو ناتج عن مجموعة متغيرات عشوائية مستقلة وذات توزيعات ذات شكل دائري ينتمي إلى عائلة توزيعات التوازن المكاني (Spatial Equilibrium Distributions)، ويمكن استعمله في دراسة العمليات الإحصائية التي تحدث في الفضاء الثنائي الأبعاد، مثل توزيع مصادر الإشارة في الراديو، أو توزيع الجسيمات في الفضاء، أو توزيع النقاط في الخرائط الجغرافية.

يتم تحديد شكل توزيع الكارديويد بواسطة معلمة واحدة تسمى "معلمة التحكم" (control parameter)، والتي تحدد قوة الانحراف عن شكل الدائرة. وعندما تكون قيمة معلمة التحكم تساوي الصفر، يكون شكل التوزيع دائرياً تماماً، أما عندما تكون معلمة التحكم تزيد عن الصفر، فإن الشكل يتحول إلى شكل القلب وله بعض الخصائص المثيرة للاهتمام، مثل تقاربه لتوزيع كوشي (Cauchy)

الفصل الثاني — الجانب النظري

(distribution)، وكذلك تشابهه لتوزيع البيانات الخاص بحركة الجسيمات في الفضاء الثلاثي الأبعاد التي تشبه شكل السحابة (Cloud).

لحساب الاتجاهات الأكثر شيوعًا والأقل شيوعًا، يمكن استعمال الاحتماليات المحسوبة من توزيع الكارديويد. فبعد حساب معاملات التوزيع، يمكن استعمالها لتحديد الاحتماليات المتعلقة بكل من الاتجاهات المختلفة التي يمكن أن تأتي منها الرياح.

في العادة، يتم تقديم هذه الاحتماليات في صورة قائمة تحوي جميع الاتجاهات الممكنة، مرفقة بالاحتماليات المتعلقة بكل اتجاه. ويمكن استعمال هذه القائمة لتحديد الاتجاهات الأكثر شيوعًا والأقل شيوعًا.

إذا كانت القائمة تحوي الاتجاهات الرئيسية الأربع (الشمال، الجنوب، الشرق، الغرب)، فإنه يمكن تحديد الاتجاه الأكثر شيوعًا ببساطة عن طريق البحث عن الاتجاه الذي يحمل الاحتمالية الأعلى في القائمة. وبالمثل، يمكن تحديد الاتجاه الأقل شيوعًا عن طريق البحث عن الاتجاه الذي يحمل الاحتمالية الأقل في القائمة.

ومن الممكن أيضًا تحديد الاتجاهات الأكثر شيوعًا والأقل شيوعًا باستعمال المؤشرات الاحصائية الأخرى، مثل المتوسط والانحراف المعياري. فعلى سبيل المثال، يمكن حساب المتوسط للاتجاهات الرياح عن طريق ضرب كل احتمالية بالاتجاه الذي يمثله، وجمع النتائج. ويمكن حساب الانحراف المعياري باستعمال الاحتماليات والمتوسط، وذلك لتحديد مدى انتشار الاتجاهات حول المتوسط. [31]

ان دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع القلبي تكتب بالشكل الآتي: [37] [38] [39]

$$f(\theta, \mu, \rho) = \frac{1}{2\pi} (1 + 2\rho \cos(\theta - \mu)) \quad \dots (2-2)$$

اذ أن:

θ : يمثل المتغير العشوائي الدائري الذي يمثل التوزيع القلبي وهو ضمن المدى $0 \leq \theta \leq 2\pi$

μ : معلمة الموقع (**Location parameter**) او المتوسط الاتجاهي (**Mean Direction**) اذ أن

$$0 \leq \mu \leq 2\pi$$

ρ : معلمة الكثافة الاتجاهية (**Direction Concentration Parameter**) وقيمتها محصورة

بين (1) و (-1)

فعندما $\rho = 0$ فاننا نحصل على التوزيع المنتظم الدائري (Circular Uniform distribution)

بالفترة $(0, 2\pi]$

وان المتغير العشوائي θ الذي له توزيع قلبي يرمز له $\theta \sim C(\mu, \rho)$

ولاثبات ان الصيغة (2-2) هي دالة احتمالية قام الباحث ذلك وكالاتي:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} f(\theta, \mu, \rho) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} (1 + 2\rho \cos(\theta - \mu)) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 + 2\rho \cos(\theta - \mu)) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta + \int_0^{2\pi} 2\rho \cos(\theta - \mu) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_1 + 2\rho \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(\theta - \mu) d\theta}_2 \right] \end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta = [\theta]_0^{2\pi} = 2\pi$$

ناخذ التكامل الثاني :

$$2\rho \int_0^{2\pi} \cos(\theta - \mu) d\theta$$

$$= 2\rho [-\sin((\theta - \mu))]_0^{2\pi}$$

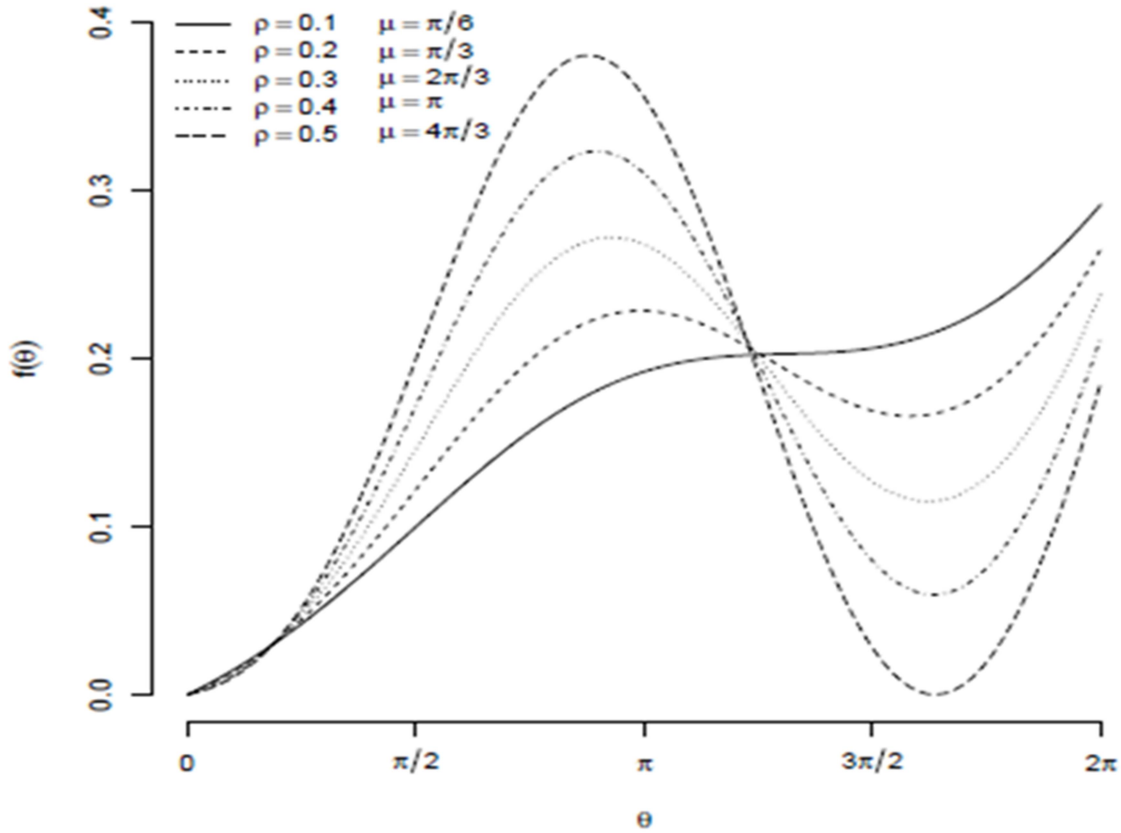
$$= 2\rho [\sin((- \theta + \mu))]_0^{2\pi}$$

$$= 2\rho [\sin(-\theta) \cos(\mu) + \cos(-\theta) \sin(\mu)]_0^{2\pi}$$

$$= 2\rho [\sin(-2\pi) \cos(\mu) + \cos(-2\pi) \sin(\mu) - \sin(-0) \cos(\mu) - \cos(-0) \sin(\mu)]$$

$$= 2\rho [\sin(\mu) - \sin(\mu)] = 0$$

$$\therefore \int_0^{2\pi} f(\theta, \mu, \rho) d\theta = \frac{1}{2\pi} [2\pi - 0] = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$



شكل (2-3) منحنى دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع القلبي

اما دالة الكثافة الاحتمالية التراكمية للتوزيع القلبي قام الباحث باشتقاقها كالآتي:

$$\begin{aligned}
 F(u, \mu, \rho) &= \int_0^\theta f(u, \mu, \rho) du \\
 &= \int_0^\theta \frac{1}{2\pi} (1 + 2\rho \cos(u - \mu)) du \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\theta (1 + 2\rho \cos(u - \mu)) du \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\underbrace{\int_0^\theta du}_1 + 2\rho \underbrace{\int_0^\theta \cos(u - \mu) du}_2 \right]
 \end{aligned}$$

ناخذ التكامل الأول:

$$\int_0^\theta du = [u]_0^\theta = \theta$$

ناخذ التكامل الثاني :

$$2\rho \int_0^\theta \cos(u - \mu) du$$

$$= 2\rho [-\sin((u - \mu))]_0^\theta$$

$$= 2\rho [\sin((-u + \mu))]_0^\theta$$

$$= 2\rho [\sin((u - \mu))]_0^\theta$$

$$= 2\rho [\sin(u) \cos(\mu) - \cos(u) \sin(\mu)]_0^\theta$$

$$= 2\rho [\sin(\theta) \cos(\mu) - \cos(\theta) \sin(\mu) - \sin(0) \cos(\mu) + \cos(0) \sin(\mu)]$$

$$= 2\rho [\sin((\theta - \mu)) + \sin(\mu)]$$

$$= [2\rho \sin((\theta - \mu)) + 2\rho \sin(\mu)]$$

$$\therefore F(u, \mu, \rho) = \int_0^\theta f(u, \mu, \rho) du$$

$$= \frac{1}{2\pi} [\theta + 2\rho \sin((\theta - \mu)) + 2\rho \sin(\mu)] \quad \dots (2-3)$$

ان الدالة المميزة للتوزيع القلبي (Cardioid Distribution) تكتب كالاتي:

$$\phi_{\theta}(t) = E e^{ip\theta} = 1 \quad \text{if } \rho = 0 \quad \dots (2-4)$$

$$\phi_{\theta}(t) = E e^{ip\theta} = \rho e^{i\mu} \quad \text{if } \rho = 1 \quad \dots (2-5)$$

$$\phi_{\theta}(t) = E e^{ip\theta} = 0 \quad \text{if } \rho \geq 2 \quad \dots (2-6)$$

$$i = \sqrt{-1} \text{ ان}$$

وبذلك فان عزوم التوزيع القلبي تكتب كالاتي:

$$E(\theta) = \mu \quad \dots (2-7)$$

ويمثل المتوسط الاتجاهي (Mean Direction)

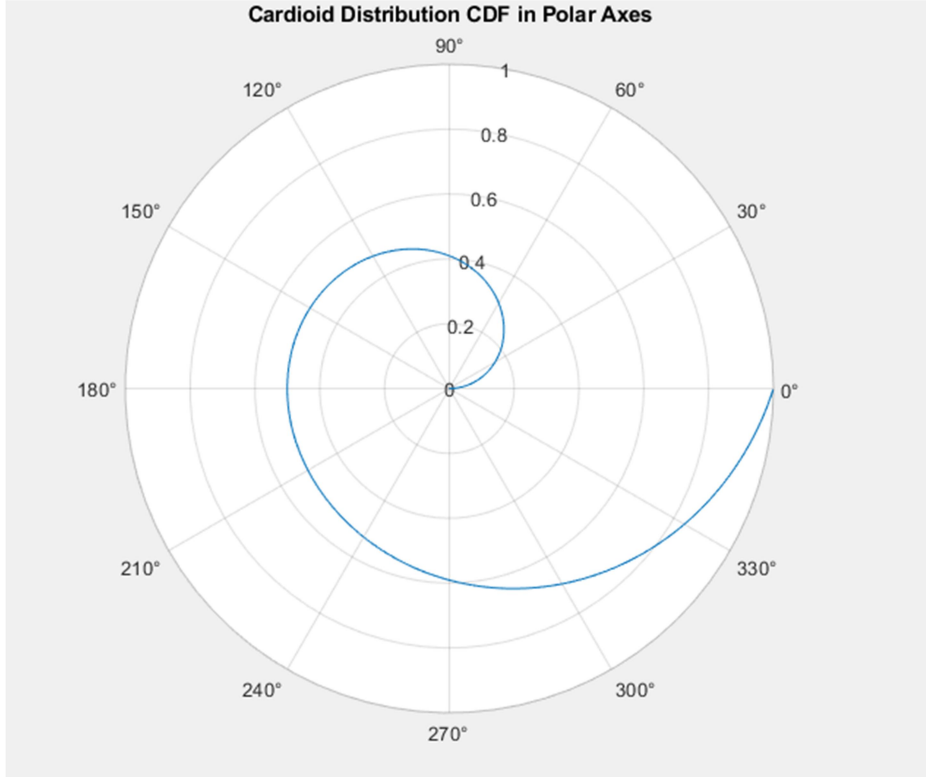
$$Var(\theta) = 1 - \rho \quad \dots (2-8)$$

وان طول المتوسط الناتج من البيانات الدورية (Mean resultant length) هو ρ

واذا كان لدينا متغيرين عشوائيين هما θ_1 و θ_2 لكل منهما توزيع قلبي بمتوسطات اتجاهية هي μ_1 و

μ_2 وطول المتوسط الناتج لكل منهما هو ρ_1 و ρ_2 فان حاصل جمع المتغيرين $\theta_1 + \theta_2$ لها توزيع

قلبي ايضاً بمتوسط اتجاهي $\mu_1 + \mu_2$ وطول متوسط ناتج $\rho_1 \rho_2$.



شكل (2-4) منحنى دالة الكثافة الاحتمالية التراكمية للتوزيع القلبي

2.8 العلاقة بين توزيع فون ميزيس والتوزيع القلبي

(Relationship between Von Mises and Cardoid distribution)

يستخدم توزيع فون ميزيس بشكل شائع لنمذجة البيانات الدائرية. إنه تناظري دائري للتوزيع الطبيعي ويتميز بالاتجاه المتوسط ومعلمة التركيز التي تتحكم في انتشار أو تركيز البيانات حول الاتجاه المتوسط. هو توزيع احتمالي يستعمل في الإحصاء لتمثيل البيانات الدائرية أو ذات الدوران المستمر، ويشبه توزيع الكارديويد في بعض الخصائص، ولكن يختلف عنه في بعض الجوانب الأخرى. في حين يشبه توزيع الكارديويد شكل القلب، يشبه توزيع فون ميزيس شكل دائري أو نصف دائري، ويتم استعماله عادة في تحليل البيانات الدائرية مثل الأوجه الإحصائية للاتجاهات أو الزوايا أو الأطوال المدارية. يتم تحديد شكل توزيع فون ميزيس بواسطة معلمتين، وهما "المتوسط المركزي" (central

الفصل الثاني — الجانب النظري

(mean) و "الانحراف المعياري" (concentration parameter)، وتحدد هذه المعلمات شكل التوزيع واحتمالية حدوث القيم الزاوية المختلفة في البيانات الدائرية.

على الرغم من وجود بعض الشبهات بين توزيع الكارديويد وتوزيع فون ميزيس، إلا أنهما يختلفان في بعض الجوانب الأساسية، وليس نفس التوزيع.

التوزيع القلبي هو في الواقع حالة خاصة لتوزيع فون ميزيس. عندما يتم تعيين معامل التركيز ρ لتوزيع von Mises على قيمة محددة ($\rho = 1$)، يأخذ التوزيع الناتج شكل القلب. بمعنى آخر، يمكن اعتبار توزيع Cardioid مثلاً محددًا لتوزيع von Mises حيث تم تثبيت المعلمة ρ عند 1.

2.9 انواع البيانات (Data types)

هنالك عدة انواع للبيانات وكالاتي:

2.9.1 البيانات الكاملة (Complete Data)

ونقصد بها ان جميع البيانات التي تم الحصول عليها لاجراء تجربة معينة تخضع للاختبار او المراقبة اي جميع وحدات العينة (n) تراقب ويكون وقت الفشل لكل وحدة من وحدات العينة معلوم ومشاهد.

ان دالة الامكان لهذا النوع من البيانات تكون كالاتي : [8]

$$L = \prod_{i=1}^n f(t_i, \theta) \quad \dots (2-9)$$

اذ ان $f(t_i, \theta)$ دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع.

وان عيوب استعمال البيانات الكاملة هو مراقبة جميع مفردات العينة الخاضعة للاختبار وان هذا الامر يترتب عليه خسارة في الوقت والجهد والتكلفة واحياناً الفحص التدميري لذلك يمكن الاستعاضة عن البيانات الكاملة ببيانات المراقبة. [9]

2.9.2 البيانات المراقبة (Censored Data)

هي عملية تحديد عدد الوحدات في تجربة الإختبار أو تحديد زمن التجربة وتكون البيانات غير كاملة عندما تكون هنالك بعض المفردات في العينة تمتلك الحدين الأدنى والأعلى لزمن الحياة، إن ما يميز دراسات دوال البقاء أو دوال المَعُولِيَّة عن غيرها من الدراسات الإحصائية هي ظاهرة المراقبة والتي يكون فيها جزء من المعلومات مفقود (معلومات جزئية عن المتغير العشوائي)، لأسباب عديدة فقد تكون التجربة محددة بوقت معين فيتم التضحية ببعض الوحدات التجريبية بعد نهاية التجربة أو قد يتم وقف التجربة بعد الحصول على عدد معين من حالات الفشل أو أن الوحدات التجريبية تدخل التجربة في أوقات مختلفة. [12][4]

وتقسم بيانات المراقبة الى عدة انواع نذكر بعضاً منها:

2.9.2.1 بيانات مراقبة من النوع الاول (Type I Censored Data)

يحدث هذا النوع من البيانات المراقبة عندما تكون لدينا عينة n تخضع للاختبار بحيث نراقب عمل الوحدات الى ان نصل الى فترة زمنية محددة كأن تكون t_0 (زمن المراقبة ثابت ومحدد مسبقاً) وبعد الوصول الى هذا الوقت نتوقف عن المراقبة حيث ان عدد الوحدات التي تم مراقبتها حتى الزمن t_0 هي m من الوحدات حيث $m < n$. [16][19]

ان دالة الامكان لهذا النوع من البيانات كالآتي :

$$L = \frac{n!}{(n-m)!} \prod_{i=1}^m f(t_i, \theta) [S(t_0)]^{n-m} \quad \dots (2-10)$$

إذ إن:

$$0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_m < t_0 \quad t_i$$

$S(t_0)$: دالة البقاء عند الزمن t_0 .

ان الوحدات التي فشلت بالاختبار هي m من الوحدات , وان m متغير عشوائي لايمكن تحديده او معرفته الا بعد انتهاء الزمن t_0 وان $(n-m)$ هي عدد الوحدات الباقية بعد الزمن t_0 .

2.9.2.2 بيانات مراقبة من النوع الثاني (Type II Censored Data)

يحدث هذا النوع من البيانات عندما تكون لدينا n من الوحدات التي تخضع للاختبار ونريد مراقبة عمل r من الوحدات حيث ان $r < n$ لذلك فأن الزمن في هذه الحالة متغير عشوائي لايمكن تحديده وبذلك نتوقف عن الاختبار لغاية الحصول على r من الوحدات المراقبة فأن دالة الامكان الاعظم لهذا النوع من البيانات هي: [19]

$$L = \frac{n!}{(n-r)!} \prod_{i=1}^r f(t_i, \theta) [S(t_r)]^{n-r} \quad \dots (2-11)$$

إذ إن :

$$0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_r ; \quad t_r$$

$S(t_r)$: دالة البقاء عند الزمن t_r . [16][19]

وتنقسم بيانات المراقبة من حيث نوع المشاهدات المراقبة كالاتي:

1- البيانات الخاضعة للرقابة اليمنى (Right censored data)

هي نوع من البيانات التي لا تُعرف فيها القيمة الدقيقة لمتغير الاهتمام ، ولكن من المعروف أن القيمة أكبر من عتبة معينة أو نقطة رقابة. بمعنى آخر ، البيانات المشاهدة غير كاملة على الجانب الأيمن. يمكن أن يحدث هذا عند إجراء الدراسات أو جمع البيانات حيث لم يحدث الحدث المهم بعد لبعض الأفراد أو كانت فترة جمع البيانات محدودة.

على سبيل المثال ، في دراسة الوقت الذي يستغرقه دواء معين لإظهار تأثيره تتبع الدراسة مجموعة من المرضى ، لكن الدراسة تنتهي بعد مدة معينة إذا لم يظهر بعض المرضى بعد أي استجابة للدواء بنهاية الدراسة فستخضع بياناتهم للرقابة اليمنى فنحن نعلم فقط أن الوقت الذي يستغرقه هؤلاء المرضى للاستجابة أطول من مدة الدراسة.[10]

2- بيانات مراقبة من اليسار (Left censored data):

هي نوع من البيانات التي لا تُعرف فيها القيمة الدقيقة لمتغير الاهتمام ، ولكن من المعروف أن القيمة أقل من عتبة معينة أو نقطة رقابة. بمعنى آخر ، البيانات لمشاهدة غير مكتملة على الجانب الأيسر يحدث هذا عندما يكون المتغير الذي يتم قياسه أقل من الحد الأدنى ولا يُعرف إلا حقيقة أنه أقل من هذا الحد.

على سبيل المثال في دراسة تقيس تركيز مادة كيميائية معينة في مصدر مائي فان أداة القياس المستخدمة لها حد اكتشاف أقل وأي قياسات أقل من هذا الحد يتم تسجيلها على أنها "أقل من" هذا الحد. البيانات المسجلة خاضعة للرقابة اليسرى لأننا نعلم أن القيم أقل من عتبة معينة ولكننا لا نعرف القيم الدقيقة.[33]

3- بيانات الفترة (Interval censored data):

يمكن أيضاً دمج البيانات الخاضعة للرقابة اليسرى مع البيانات الخاضعة للرقابة اليمنى لنحصل على بيانات الرقابة بفترة اذ من المعروف أن البيانات تقع ضمن فترة محددة.[38]

2.9.3 بيانات مراقبة مضاعفة (Doubly Censored Data)

البيانات الخاضعة للرقابة المضاعفة او المزدوجة والمعروفة أيضاً باسم البيانات الخاضعة للرقابة بفترة ، هي نوع من البيانات التي لا تُعرف فيها القيم الدقيقة لمتغير الاهتمام ولكن من المعروف أنها تقع ضمن فترات زمنية محددة أو فترات رقابة. إنها مزيج من الرقابة اليسرى واليمنى ، حيث يُعرف كل من الحدود الدنيا والعليا للمتغير ، لكن القيم الدقيقة داخل تلك الحدود غير معروفة.

تظهر البيانات الخاضعة للرقابة المضاعفة عندما توفر عملية جمع البيانات معلومات بفترة بدلاً من القياسات الدقيقة. يمكن أن يحدث هذا عندما تخضع القياسات لحد من الاكتشاف أو عندما يتم جمع البيانات في نقاط زمنية أو فترات زمنية منفصلة.[11]

على سبيل المثال ، في دراسة وقت استجابة المشاركين لتلقي حافز يتم قياس وقت الاستجابة بفترات زمنية منفصلة ، مثل 0-5 ثوانٍ ، و 5-10 ثوانٍ ، وما إلى ذلك. في هذه الحالة ، نعلم أن وقت الاستجابة يقع ضمن كل فترة زمنية ، لكن ليس لدينا قيم دقيقة لكل مشارك.

يتطلب تحليل البيانات الخاضعة للرقابة المضاعفة أساليب إحصائية متخصصة. هناك العديد من الطرائق التي يمكن استعمالها ، مثل تقدير الامكان الاعظم ، وطرائق بايز ، والطرائق اللامعلمية مثل مقدر Turnball. تهدف هذه الطرائق إلى تقدير التوزيع الأساسي للمتغير المدروس بالنظر إلى البيانات الخاضعة للرقابة المضاعفة.[10]

الفصل الثاني — الجانب النظري

من المهم ملاحظة أنه يمكن أيضاً دمج البيانات الخاضعة للرقابة المضاعفة مع أنواع أخرى من الرقابة ، مثل الرقابة اليسرى أو الرقابة اليمنى ، لتشكيل أنماط رقابة أكثر تعقيداً.

تحدث البيانات الخاضعة للرقابة المضاعفة في الدراسات التي تتكون من حدثين متصلين أحدهما يتبع الآخر وكمثال من خلال دراسة تطور المرض حيث يكون ظهور المرض سببه أو يسبقه عدوى فيروسية معينة. في هذه الحالات ، توجد ثلاثة متغيرات ، وهي وقت الإصابة ، والوقت بين الإصابة وظهور المرض ، ووقت ظهور المرض. من الواضح اننا نحتاج فقط معرفة اثنين من المتغيرات الثلاثة. إذا كان المتغير المدروس هو وقت الإصابة أو وقت ظهور المرض ، بشكل عام ، فاننا نحتاج فقط إلى تحليل المتغير المدروس دون الحاجة إلى التعامل مع المتغيرين الآخرين. اي نعني أن المتغير المدروس هو الوقت بين الإصابة وظهور مرض معين مثل وقت الكامن لمرض الإيدز. في هذه الحالة ، يتعين علينا أن نتعامل مع متغيرين من المتغيرات الثلاثة معاً. بمعنى آخر ، لا يمكننا تحويل بيانات المراقبة الخاضعة إلى بيانات مراقبة بفترة ما لم يكن من الممكن ملاحظة وقت الحدث الأول بالضبط. غالباً ما تظهر بيانات المراقبة المضاعفة في الدراسات الطبية والوبائية عندما تخضع الملاحظات لكل من الرقابة اليسرى والرقابة اليمنى. [14]

فعندما تكون لدينا n من الوحدات التي تخضع للاختبار ونريد مراقبة عمل عدد ثابت (r) من الوحدات من جهة اليمين وعدد ثابت (s) من جهة اليسار اي انه اذا كان لدينا $t_{r+1} < t_{r+2} < \dots < t_{n-s}$ فان دالة الامكان للبيانات المراقبة المضاعفة تكتب كالاتي: [39][20][32]

$$L = [F(t_{r+1})]^r \prod_{i=r+1}^{n-s} f(t_i, \theta) [S(t_{n-s})]^s \quad \dots (2-12)$$

$F(t_{r+1})$ دالة الكثافة الاحتمالية التراكمية عند الزمن t_{r+1}

$S(t_{n-s})$: دالة البقاء عند الزمن t_{n-s}

2.10 طرائق تقدير معالم التوزيع القلبي

(Methods of estimation the parameters of Cardioid Distribution)

2.10.1 طريقة الإمكان الأعظم (Maximum Likelihood method)

ليكن لدينا $\theta_{r+1} < \theta_{r+2} < \dots < \theta_{n-s}$ مشاهدات عينة بحجم (n) بعد مراقبة (r) (عدد ثابت) و (s) (عدد ثابت) من المشاهدات من جهة اليسار واليمين على التوالي.

فان دالة الامكان $L(\theta, \mu, \rho)$ لعينة مراقبة مضاعفة كالاتي:

$$L(\theta, \mu, \rho) = [F(\theta_{r+1})]^r \prod_{i=1}^{n-s} f(\theta, \mu, \rho) [F(\theta_{r+1})]^s \quad \dots (2-13)$$

وباخذ اللوغاريتم الطبيعي للدالة (2-13) نحصل على لوغاريتم دالة الامكان وكالاتي:

$$l(\theta, \mu, \rho) = \log \left([F(\theta_{r+1})]^r \prod_{i=1}^{n-s} f(\theta_i) [1 - F(\theta_{r+1})]^s \right)$$

$$= r \log(F(\theta_{r+1})) + \sum_{i=1}^{n-s} \log(f(\theta_i)) + s \sum_{i=1}^{n-s} \log(1 - F(\theta_{r+1})) \quad \dots (2-14)$$

وباخذ المشتقة الجزئية لمعادلة (2-14) بالنسبة لكل معلمة من المعلمات المراد تقديرها ومساواتها بالصفر نحصل على الآتي:

$$\frac{\partial l(\theta, \mu, \rho)}{\partial \mu} = g(\mu, \rho) = \frac{2r\rho(\cos(\mu) - \cos(\theta_{r+1} - \mu))}{\theta_{r+1} + 2r\rho(\sin(\theta_{r+1} - \mu) + \sin(\mu))} + \sum_{i=1}^{n-s} \frac{2\rho(\sin(\theta_i) - \mu)}{1 + 2r\rho(\cos(\theta_i) - \mu)} -$$

$$\frac{2s\rho(\cos(\mu) - \cos(\theta_{n-s} - \mu))}{2\pi - \theta_{r+1} - 2\rho(\sin(\theta_{n-s} - \mu) + \sin(\mu))} = 0 \quad \dots (2-15)$$

$$\frac{\partial l(\theta, \mu, \rho)}{\partial \rho} = h(\mu, \rho) = \frac{2r(\sin(\mu) + \sin(\theta_{r+1} - \mu))}{\theta_{r+1} + 2r\rho(\sin(\theta_{r+1} - \mu) + \sin(\mu))} + \sum_{i=1}^{n-s} \frac{2(\cos(\theta_i) - \mu)}{1 + 2\rho(\cos(\theta_i) - \mu)} -$$

$$\frac{2s(\sin(\mu) - \sin(\theta_{n-s} - \mu))}{2\pi - \theta_{r+1} - 2\rho(\sin(\theta_{n-s} - \mu) + \sin(\mu))} = 0 \quad \dots (2-16)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu} g_{\mu}(\mu, \rho) =$$

$$\frac{2r\rho[-\theta_{r+1}(\sin(\mu)+\sin(\theta_{r+1}-\mu))+4\rho(\cos(\theta_i-1))]}{(\theta_{r+1}+2\rho(\sin(\theta_{r+1}-\mu)+\sin(\mu)))^2} + \sum_{i=1}^{n-s} \frac{(-2\rho \cos((\theta_i)-\mu)-4\rho^2)}{((1+2\rho \cos((\theta_i)-\mu))^2} +$$

$$\frac{2s\rho[(2\pi-\theta_{r+1})(\sin(\mu)+\sin(\theta_{r+1}-\mu))+4\rho(\cos((\theta_i)-\mu))]}{((2\pi-\theta_{r+1})-2\rho(\sin(\theta_{r+1}-\mu)+\sin(\mu)))^2} \dots (2-17)$$

$$\frac{\partial l(\theta, \mu, \rho)}{\partial \rho} = h(\mu, \rho) = \frac{2r(\sin(\mu)+\sin(\theta_{r+1}-\mu))}{\theta_{r+1}+2r\rho(\sin(\theta_{r+1}-\mu)+\sin(\mu))} + \sum_{i=1}^{n-s} \frac{2(\cos(\theta_i)-\mu)}{1+2\rho(\cos(\theta_i)-\mu)} -$$

$$\frac{2s(\sin(\mu)-\sin(\theta_{n-s}-\mu))}{2\pi-\theta_{r+1}-2\rho(\sin(\theta_{n-s}-\mu)+\sin(\mu))} = 0 \dots (2-18)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} g(\mu, \rho) = g_{\rho}(\mu, \rho) = \frac{2r\theta_{r+1}(\cos(\mu)-\cos(\theta_i)-\mu)}{(\theta_{r+1}+2\rho(\sin(\theta_{n-s}-\mu)+\sin(\mu)))^2} + \sum_{i=1}^{n-s} \frac{2(\sin(\theta_i)-\mu)}{(1+2\rho(\cos(\theta_i)-\mu))^2} -$$

$$\frac{2s(2\pi-\theta_{n-s})(\cos(\mu)-(\cos(\theta_i)-\mu))}{2\pi-\theta_{n-s}-2\rho(\sin(\theta_{n-s}-\mu)+\sin(\mu))} \dots (2-19)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} h(\mu, \rho) = h_{\rho}(\mu, \rho) = \frac{-4r(\sin(\mu)-\sin(\theta_{r+1}-\mu))^2}{(\theta_{r+1}+2\rho(\sin(\theta_{r+1}-\mu)+\sin(\mu)))^2} + \sum_{i=1}^{n-s} \frac{-4(\cos^2((\theta_i)-\mu))}{(1+2\rho \cos(\theta_i)-\mu)^2} -$$

$$\frac{4s((\sin(\mu)+(\sin(\theta_{n-s}-\mu)))^2)}{((2\pi-\theta_{n-s}-2\rho(\sin(\theta_{n-s}-\mu)+\sin(\mu)))^2} \dots (2-20)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} h(\mu, \rho) = h_{\mu}(\mu, \rho) =$$

$$\frac{2r\theta_{r+1}(\cos(\mu)-\cos(\theta_{r+1}-\mu))}{(\theta_{r+1}+2\rho(\sin(\theta_{r+1}-\mu)+\sin(\mu)))^2} + \sum_{i=1}^{n-s} \frac{2(\sin(\theta_i)-\mu)}{(1+2\rho(\cos(\theta_i)-\mu))^2} -$$

$$\frac{2s(2\pi-\theta_{n-s})(\cos(\mu)-(\cos(\theta_{n-s}-\mu)))}{(2\pi-\theta_{n-s}-2\rho(\sin(\theta_{n-s}-\mu)+\sin(\mu)))^2} \dots (2-21)$$

ونلاحظ انه عندما $r = s = 0$ فان المعادلتين (2-20) و (2-21) تتحولان الى مقدرات الإمكان الأعظم في حالة

البيانات الكاملة.

$$g(\mu, \rho) = \sum_{i=1}^n \frac{2\rho(\sin(\theta_i) - \mu)}{1 + 2r\rho(\cos(\theta_i) - \mu)} = 0 \quad \dots (2-22)$$

$$h(\mu, \rho) = \sum_{i=1}^n \frac{2(\cos(\theta_i) - \mu)}{1 + 2\rho(\cos(\theta_i) - \mu)} = 0 \quad \dots (2-23)$$

وعندما نعوض $r = 0$ فإننا نحصل على مقدر الإمكان الأعظم في حالة البيانات المراقبة من اليمين وكالاتي:

$$g(\mu, \rho) = \sum_{i=1}^s 2\rho(\sin(\theta_i) - \mu) - \frac{2s\rho(\cos(\mu) - \cos(\theta_s - \mu))}{2\pi - \theta_1 - 2\rho(\sin(\theta_s) - \mu + \sin(\mu))} = 0 \quad \dots (2-24)$$

$$h(\mu, \rho) = \sum_{i=1}^s \frac{2(\cos(\theta_i) - \mu)}{1 + 2\rho(\cos(\theta_i) - \mu)} - \frac{2s(\sin(\mu) - \sin(\theta_s - \mu))}{2\pi - \theta_1 - 2\rho(\sin(\theta_s) - \mu + \sin(\mu))} = 0 \quad \dots (2-25)$$

وعندما نعوض $s = 0$ فإننا نحصل على مقدر الإمكان الأعظم في حالة البيانات المراقبة من اليسار وكالاتي:

$$g(\mu, \rho) = \frac{2r\rho(\cos(\mu) - \cos(\theta_{r+1} - \mu))}{\theta_{r+1} + 2r\rho(\sin(\theta_{r+1} - \mu) + \sin(\mu))} + \sum_{i=1}^n \frac{2\rho(\sin(\theta_i) - \mu)}{1 + 2r\rho(\cos(\theta_i) - \mu)} = 0 \quad \dots (2-26)$$

$$h(\mu, \rho) = \frac{2r(\sin(\mu) + \sin(\theta_{r+1} - \mu))}{\theta_{r+1} + 2r\rho(\sin(\theta_{r+1} - \mu) + \sin(\mu))} + \sum_{i=1}^n \frac{2(\cos(\theta_i) - \mu)}{1 + 2\rho(\cos(\theta_i) - \mu)} = 0 \quad \dots (2-27)$$

وفي كل الحالات اعلاه فان مصفوفة التباين المشترك تعطى بالشكل الآتي:

$$(J)^{-1} = \begin{pmatrix} -g(\mu) & -g(\rho) \\ -h(\mu) & -h(\rho) \end{pmatrix}^{-1} \quad \dots (2-28)$$

ويمكن ايجاد مقدرات الامكان الاعظم لمعاملات التوزيع القلبي بتعظيم لوغاريتم دالة الامكان بالنسبة للمعاملات المراد تقديرها باستعمال برنامج MatLab 2022 باستعمال الدالة (fmincon) وهي دالة تعتمد على أسلوب التكرار القياسي لتحسين الأداء وهي مفيدة لحل مشاكل البرمجة الرياضية الخطية واللاخطية وكالاتي:

$$\max_{(\mu, \rho)} l(\theta, \mu, \rho) \mid n, r, s, \theta_{r+1} < \theta_{r+2} < \dots < \theta_{n-s} \quad \dots (2-29)$$

اذان $0 \leq \mu \leq 2\pi$ و $0 \leq \rho \leq 0.5$ [1][3][7] [33]

2.10.2 طريقة بيز (Bayesian method)

توجد مدرستان في التقدير الاولى تسمى المدرسة التقليدية والتي تفترض ان المعلمات المراد تقديرها كميات ثابتة يتم تقديرها بالطرائق التقليدية مثل طريقة الامكان الاعظم وطريقة المربعات الصغرى وطريقة العزوم وغيرها ، والأخرى تسمى المدرسة البيزية والتي تفترض أن المعلمة (المعلمات) المجهولة الخاصة بالتوزيع الاحتمالي تعد كمتغيرات عشوائية وان هنالك معلومات سابقة عنها (اولية) تصاغ تلك المعلومات على شكل توزيع احتمالي يعرف بدالة الكثافة الاحتمالية السابقة (*Prior Probability function*) وعادة ما يكون هذا التوزيع غير ملائم أي أن تكامله لكل مجاله لا يساوي واحداً إذ يتم التعرف على هذه المعلومات من بيانات وتجارب سابقة أو من النظرية التي تحكم الظاهرة. وايضاً تعتمد نظرية بيز على المعلومات الحالية للعينة التي يمكن ان تُمثل بدالة الامكان (*Likelihood Function*) الخاصة بالملاحظات الحالية. ودمج دالة الكثافة الاحتمالية السابقة للمعلمات مع دالة الامكان الاعظم للملاحظات الحالية نحصل على التوزيع الاحتمالي اللاحق (*Posterior*) وعند دالة خسارة (*Loss Function*) التي يمكن عن طريقها قياس الخسارة الناتجة عن اتخاذ القرار بالاعتماد على قيمة المعلمة المقدره بينما القرار الواجب اتخاذه يعتمد على قيمة المعلمة الحقيقية اي وجود فرق بين المعلمة وتقديرها. [17]

ليكن لدينا $\theta_{r+1} < \theta_{r+2} < \dots < \theta_{n-s}$ مشاهدات عينة بحجم (n) بعد مراقبة (r) (عدد ثابت) و (s) (عدد ثابت) من المشاهدات من جهة اليسار واليمين على التوالي.

فان دالة الامكان $L(\theta, \mu, \rho)$ لعينة مراقبة مضاعفة كالاتي:

$$L(\theta, \mu, \rho) = [F(\theta_{r+1})]^r \prod_{i=1}^{n-s} f(\theta, \mu, \rho) [F(\theta_{r+1})]^s \quad \dots (2-30)$$

وباخذ اللوغاريتم الطبيعي للدالة (2-2) نحصل على لوغاريتم دالة الامكان وكالاتي:

$$l(\theta, \mu, \rho) = \log \left([F(\theta_{r+1})]^r \prod_{i=1}^{n-s} f(\theta_i) [1 - F(\theta_{r+1})]^s \right)$$

$$= r \log(F(\theta_{r+1})) + \sum_{i=1}^{n-s} \log(f(\theta_i)) + s \sum_{i=1}^{n-s} \log(1 - F(\theta_{r+1})) \quad \dots (2-31)$$

ولنفرض ان هنالك معلومات أولية عن المعلمات المراد تقديرها (μ, ρ) والمتمثلة بدالة الكثافة

الاحتمالية المشتركة وهي التوزيع المنتظم الدائري بالفترة $(0, 2\pi)$ وكما يأتي:

ليكن لدينا دالة الكثافة الاحتمالية التوزيع المنتظم كما في المعادلة الآتية:

$$\pi(\mu) = \frac{1}{2\pi} \quad \dots (2-32)$$

$$\pi(\rho) = \frac{1}{2\pi} \quad \dots (2-33)$$

الآن نجد التوزيع اللاحق (*Posterior Distribution*) وحسب نظرية بيز نحصل على التوزيع

اللاحق باستعمال صيغة بيز العكسية (*Bays Inversion Formula*) وكالاتي:

$$h(\mu, \rho \mid \theta_{r+1} < \theta_{r+2} < \dots < \theta_{n-s}) = \frac{l(\theta_{r+1} < \theta_{r+2} < \dots < \theta_{n-s} \mid \mu, \rho) \pi(\mu, \rho)}{\int_{\mu} \int_{\rho} l(\theta_{r+1} < \theta_{r+2} < \dots < \theta_{n-s} \mid \alpha) \pi(\mu, \rho) d\mu d\rho}$$

$$= \frac{G(\theta_{r+1} < \theta_{r+2} < \dots < \theta_{n-s}, \mu, \rho)}{M(\theta_{r+1} < \theta_{r+2} < \dots < \theta_{n-s})} \quad \dots (2-34)$$

اذ ان :

$G(\theta_{r+1} < \theta_{r+2} < \dots < \theta_{n-s}, \mu, \rho)$ الدالة المشتركة التي تعبر عن مجال المعلمات

(μ, ρ) بوجود معلومات العينة الحالية والمعلومات السابقة والحالية عن (μ, ρ) المراد تقديرها .

$M(\theta_{r+1} < \theta_{r+2} < \dots < \theta_{n-s})$ الدالة الحدية للمتغير θ_i

وعليه فان الدالة المشتركة $G(\theta_{r+1} < \theta_{r+2} < \dots < \theta_{n-s}, \mu, \rho)$ تكون كالاتي:

$$G(\theta_{r+1} < \theta_{r+2} < \dots < \theta_{n-s}, \mu, \rho) = l(\theta_{r+1} < \theta_{r+2} < \dots < \theta_{n-s} \mid \mu, \rho) \pi(\mu, \rho)$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[r \log(F(\theta_{r+1})) + \sum_{i=1}^{n-s} \log(f(\theta_i)) + s \sum_{i=1}^{n-s} \log(1 - F(\theta_{r+1})) \right] \frac{1}{4\pi^2} \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \left[r \log \left(\frac{1}{2\pi} [\theta + 2\rho \sin((\theta - \mu)) + 2\rho \sin(\mu)] \right) + \sum_{i=1}^{n-s} \log \left(\frac{1}{2\pi} (1 + 2\rho \cos(\theta_i - \mu)) \right) + s \sum_{i=1}^{n-s} \log \left(1 - \frac{1}{2\pi} [\theta + 2\rho \sin((\theta - \mu)) + 2\rho \sin(\mu)] \right) \right] \dots (2-35)
 \end{aligned}$$

بذلك تكون الدالة الحدية للمتغير θ_i $M(\theta_{r+1} < \theta_{r+2} < \dots < \theta_{n-s})$ كالآتي:

$$\begin{aligned}
 M(\theta_{r+1} < \theta_{r+2} < \dots < \theta_{n-s}) &= \int_{\mu} \int_{\forall \rho} \left[r \log(F(\theta_{r+1})) + \sum_{i=1}^{n-s} \log(f(\theta_i)) + s \sum_{i=1}^{n-s} \log(1 - F(\theta_{r+1})) \right] \frac{1}{4\pi^2} d\mu d\rho \\
 &= \int_{\mu} \int_{\forall \rho} \frac{1}{4\pi^2} \left[r \log \left(\frac{1}{2\pi} [\theta + 2\rho \sin((\theta - \mu)) + 2\rho \sin(\mu)] \right) + \sum_{i=1}^{n-s} \log \left(\frac{1}{2\pi} (1 + 2\rho \cos(\theta_i - \mu)) \right) + s \sum_{i=1}^{n-s} \log \left(1 - \frac{1}{2\pi} [\theta + 2\rho \sin((\theta - \mu)) + 2\rho \sin(\mu)] \right) \right] d\mu d\rho \dots (2-36)
 \end{aligned}$$

وعليه فان التوزيع اللاحق الشرطي يكون كما يأتي:

$$\begin{aligned}
 h(\mu, \rho / \theta_{r+1} < \theta_{r+2} < \dots < \theta_{n-s}) &= \frac{\frac{1}{4\pi^2} \left[r \log \left(\frac{1}{2\pi} [\theta + 2\rho \sin((\theta - \mu)) + 2\rho \sin(\mu)] \right) + \sum_{i=1}^{n-s} \log \left(\frac{1}{2\pi} (1 + 2\rho \cos(\theta_i - \mu)) \right) + s \sum_{i=1}^{n-s} \log \left(1 - \frac{1}{2\pi} [\theta + 2\rho \sin((\theta - \mu)) + 2\rho \sin(\mu)] \right) \right]}{\int_{\mu} \int_{\forall \rho} \frac{1}{4\pi^2} \left[r \log \left(\frac{1}{2\pi} [\theta + 2\rho \sin((\theta - \mu)) + 2\rho \sin(\mu)] \right) + \sum_{i=1}^{n-s} \log \left(\frac{1}{2\pi} (1 + 2\rho \cos(\theta_i - \mu)) \right) + s \sum_{i=1}^{n-s} \log \left(1 - \frac{1}{2\pi} [\theta + 2\rho \sin((\theta - \mu)) + 2\rho \sin(\mu)] \right) \right] d\mu d\rho} \\
 &= \frac{\left[r \log \left(\frac{1}{2\pi} [\theta + 2\rho \sin((\theta - \mu)) + 2\rho \sin(\mu)] \right) + \sum_{i=1}^{n-s} \log \left(\frac{1}{2\pi} (1 + 2\rho \cos(\theta_i - \mu)) \right) + s \sum_{i=1}^{n-s} \log \left(1 - \frac{1}{2\pi} [\theta + 2\rho \sin((\theta - \mu)) + 2\rho \sin(\mu)] \right) \right]}{\int_{\mu} \int_{\forall \rho} \left[r \log \left(\frac{1}{2\pi} [\theta + 2\rho \sin((\theta - \mu)) + 2\rho \sin(\mu)] \right) + \sum_{i=1}^{n-s} \log \left(\frac{1}{2\pi} (1 + 2\rho \cos(\theta_i - \mu)) \right) + s \sum_{i=1}^{n-s} \log \left(1 - \frac{1}{2\pi} [\theta + 2\rho \sin((\theta - \mu)) + 2\rho \sin(\mu)] \right) \right] d\mu d\rho} \dots (2-37)
 \end{aligned}$$

وبما ان مقدر بيز القياسي المعلوماتي عند دالة خسارة تربيعية هو متوسط التوزيع اللاحق للمعلمة المراد تقديرها وكالآتي:

$$\begin{aligned}
 \hat{\mu}_{\text{INSSBCD}} &= E(h(\mu, \rho / \theta_{r+1} < \theta_{r+2} < \dots < \theta_{n-s})) = \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \mu h(\mu, \rho / \theta_{r+1} < \theta_{r+2} < \dots < \theta_{n-s}) d\mu \\
 &= \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \frac{\mu \left[r \log \left(\frac{1}{2\pi} [\theta + 2\rho \sin((\theta - \mu)) + 2\rho \sin(\mu)] \right) + \sum_{i=1}^{n-s} \log \left(\frac{1}{2\pi} (1 + 2\rho \cos(\theta_i - \mu)) \right) + s \sum_{i=1}^{n-s} \log \left(1 - \frac{1}{2\pi} [\theta + 2\rho \sin((\theta - \mu)) + 2\rho \sin(\mu)] \right) \right]}{\int_{\mu} \int_{\forall \rho} \left[r \log \left(\frac{1}{2\pi} [\theta + 2\rho \sin((\theta - \mu)) + 2\rho \sin(\mu)] \right) + \sum_{i=1}^{n-s} \log \left(\frac{1}{2\pi} (1 + 2\rho \cos(\theta_i - \mu)) \right) + s \sum_{i=1}^{n-s} \log \left(1 - \frac{1}{2\pi} [\theta + 2\rho \sin((\theta - \mu)) + 2\rho \sin(\mu)] \right) \right] d\mu d\rho} d\mu \dots (2-38)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{\rho}_{\text{INSSBCD}} &= E(h(\mu, \rho / \theta_{r+1} < \theta_{r+2} < \dots < \theta_{n-s})) = \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \rho h(\mu, \rho / \theta_{r+1} < \theta_{r+2} < \dots < \theta_{n-s}) d\rho \\
 &= \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \frac{\rho \left[r \log \left(\frac{1}{2\pi} [\theta + 2\rho \sin((\theta - \mu)) + 2\rho \sin(\mu)] \right) + \sum_{i=1}^{n-s} \log \left(\frac{1}{2\pi} (1 + 2\rho \cos(\theta_i - \mu)) \right) + s \sum_{i=1}^{n-s} \log \left(1 - \frac{1}{2\pi} [\theta + 2\rho \sin((\theta - \mu)) + 2\rho \sin(\mu)] \right) \right]}{\int_{\mu} \int_{\forall \rho} \left[r \log \left(\frac{1}{2\pi} [\theta + 2\rho \sin((\theta - \mu)) + 2\rho \sin(\mu)] \right) + \sum_{i=1}^{n-s} \log \left(\frac{1}{2\pi} (1 + 2\rho \cos(\theta_i - \mu)) \right) + s \sum_{i=1}^{n-s} \log \left(1 - \frac{1}{2\pi} [\theta + 2\rho \sin((\theta - \mu)) + 2\rho \sin(\mu)] \right) \right] d\mu d\rho} d\rho \dots (2-39)
 \end{aligned}$$

والمعادلتين (2-38) و (2-39) دوال لاختية لا يمكن ان تحل بالطرائق التحليلية الاعتيادية ولذلك سيتم استعمال طريقة (Metropolis – Hasting) عن طريق محاكاة سلسلة ماركوف مونت-كارلوا (MCMC).

2.10.3 طريقة كرامر فون مايسس (Method of Cramer-Von Misses)

[39](method

تعتمد هذه الطريقة على تقدير المسافة الدنيا (*Minimum Distance*) ، حيث يمكننا الحصول على تقديرات المسافة الدنيا لكرامر فون- مايسز من خلال تصغير الدالة التالية بالنسبة للمعلمات المراد تقديرها (μ, ρ) حيث يتم الاشتقاق الجزئي الدالة بالنسبة للمعلمات الغير معرفة ومساواتها للصفر للحصول على تقديرها. وكما يلي:

$$C(\mu, \rho) = \frac{1}{12r} + \sum_{i=1}^r \left[F(\theta_i, \mu, \rho) - \frac{2i-1}{2r} \right]^2 \quad \dots (2-40)$$

حيث ان: $F(\theta_i, \mu, \rho)$ تمثل الدالة الكثافة التجميعية للتوزيع القلبي، وبتطبيق المعادلة (2-2) نحصل على الآتي:

$$C(\mu, \rho) = \frac{1}{12r} + \sum_{i=1}^r \left[\frac{1}{2\pi} [\theta + 2\rho \sin((\theta - \mu)) + 2\rho \sin(\mu)] - \frac{2i-1}{2r} \right]^2 \quad \dots (2-41)$$

ولتصغير المسافة الدنيا لـ (*cramer Von – Mises (CVEs)*) يتم اشتقاق جزئي للصيغة (2-41) بالنسبة للمعلمات المراد تقديرها ومساواتها المشتقة للصفر نحصل على الآتي:

الاشتقاق بالنسبة الى μ للحصول على المقدر $\hat{\mu}$ وكالاتي:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C(\mu, \rho)}{\partial \mu} &= \frac{\partial}{\partial \mu} \sum_{i=1}^r \left[\frac{1}{2\pi} [\theta + 2\rho \sin((\theta - \mu)) + 2\rho \sin(\mu)] - \frac{2i-1}{2r} \right]^2 \\ &= (-2\rho \cos((\theta - \mu)) + 2\rho \cos(\mu)) \cdot \sum_{i=1}^r \left(\left[\theta + 2\rho \sin((\theta - \mu)) + 2\rho \sin(\mu) \right] - \frac{2i-1}{2r} \right) \end{aligned}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^r (\cos(\hat{\mu}) - \cos(\theta - \hat{\mu})) \left([\theta + 2\hat{\rho}\sin((\theta - \hat{\mu})) + 2\hat{\rho}\sin(\hat{\mu})] - \frac{2i-1}{2r} \right) \right) = 0 \dots (2-42)$$

Type equation here. بعدها نجد المشتقة بالنسبة الى (ρ) ومساواتها للصفر لنحصل على المقدر $\hat{\rho}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial C(\mu, \rho)}{\partial \rho} &= \frac{\partial}{\partial \rho} \sum_{i=1}^r \left[\frac{1}{2\pi} [\theta + 2\rho\sin((\theta - \mu)) + 2\rho\sin(\mu)] - \frac{2i-1}{2r} \right]^2 \\ &= (\sin((\theta - \hat{\mu})) + \sin(\hat{\mu})) \cdot \sum_{i=1}^r (\sin((\theta - \hat{\mu})) + \sin(\mu)) \left([\theta + 2\hat{\rho}\sin((\theta - \hat{\mu})) \right. \\ &\left. + 2\hat{\rho}\sin(\hat{\mu})] - \frac{2i-1}{2r} \right) = 0 \dots (2-43) \end{aligned}$$

والمعادتين (2-42) و (2-43) دوال لاقضية لايمكن ان تحل بالطرائق التحليلية الاعتيادية ولذلك سيتم استعمال طريقة (Newton – Raphson) عن طريق محاكاة مونت-كارلوا .

2.11 معايير اختبار ملائمة البيانات للتوزيع القلبي (Criterion of fitting data)

تم استعمال احصاءة Kuiper (K) واحصاءة Watson(W) لغرض ملائمة البيانات الحقيقية وكالاتي [38]

1- احصاءة Kuiper : وصيغتها كالاتي:

$$K = \sqrt{n} \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} \left(U_{(i)} - \frac{i-1}{n} \right) + \max_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{i}{n} - U_{(i)} \right) \right\} \dots (2-44)$$

2- احصاءة Watson: وصيغتها كالاتي:

$$W = \sum_{i=1}^n \left[\left(U_{(i)} - \frac{i-1}{n} \right) - \left(U_{(i)} - 0.5 \right) \right]^2 + \frac{1}{12n} \dots (2-45)$$

اذ ان :

$U_{(i)} = F(\theta_i)$ دالة الكثافة الاحتمالية التراكمية المقابلة لـ θ_i وهي الاحصاء المرتب للعينة

الحقيقية $\theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n$

وان القيمة الاقل لاي احصاءة تعطي التوزيع الاكثر ملائمة لكلا الاختبارين

الفصل الثالث

الجانب التجريبي

والتطبيقي

3.1 تمهيد Preface

يعتمد في هذا الفصل على مبحثين الأول تم فيه استعمال أسلوب المحاكاة مونت-كارلو لاختيار طرائق التقدير التي تم عرضها في الجانب النظري من الرسالة ثم المقارنة بين هذه الطرائق عن طريق المعيار الإحصائي متوسط مربعات الخطأ ، وكذلك شمل هذا الفصل بعض المفاهيم العامة للمحاكاة وكذلك وصف لتجارب المحاكاة الخاصة بالرسالة من حيث أحجام العينات وكذلك القيم الافتراضية الخاصة بقيم المعلمات الافتراضية، وتم عرض نتائج تجربة المحاكاة في جداول. أما الثاني فشمل الجانب التطبيقي الذي تناول بيانات زاوية اتجاهات الرياح في العراق وطبقت عليه الطريقة الأفضل في التقدير .

3.2 مفهوم المحاكاة Simulation Concept [3]

تعد المحاكاة عملية تطبيق لخيال المستخدم على واقع افتراضي تجريبي لغرض فحص مشكلة معينة او قياس اداء معين لغرض دراسة السلوك وتعميم النتائج على الواقع الحقيقي ، اي هو عملية تقليد لنظام معين ينطوي بناء تاريخ اصطناعي مع مميزات النظام الحقيقي لغرض فهم ذلك النظام افضل ما يكون ودراسة سلوكه وتطوره بمرور الوقت . وكثيرا ما نجد في الواقع الحقيقي أن هناك عمليات تكون معقدة الفهم والتحليل لذلك فمن الافضل ان نوصف هذه العمليات بصورة مشابهة للصور الحقيقية بنماذج معينة، ففهم الانموذج يحقق لنا قدرأ من الإدراك للعملية الأصلية أو الواقع الحقيقي من خلال محاكاة الانموذج، ومن الطبيعي ان درجة المشابهة بين أي تجربة محاكاة والواقع الحقيقي تعتمد على مدى مطابقة او مشابهة أنموذج المحاكاة للنظام الحقيقي. لقد تعددت أساليب المحاكاة ولاسيما بعد التطور السريع الذي حصل في استعمال الحاسبة الالكترونية ولكونها الاسلوب الفعال الذي يمكننا من ادارته بشكل تطبيقي واسع في التطبيق العملي .

ومن المبادئ الأساسية للمحاكاة باستعمال الحاسبة وضع برنامج يمثل أو يشابه سلوك العملية الحقيقية بشكل مقارب للواقع الحقيقي قدر الامكان، وغالباً ما يكون هذا الواقع معقداً جداً لتمثيله أو تقليده بصورة متقنة في برنامج الحاسبة وعلى الرغم من ذلك فإن أسلوب المحاكاة يمكن ان يعطي معلومات مفيدة حول الواقع الحقيقي الذي يشابهه، ونماذج المحاكاة الاكثر شبيهه للواقع الحقيقي تكون اكثر دقة في النتائج والمعلومات المستخلصة منها. ان اول مراحل استعمال اسلوب المحاكاة هو توليد المتغيرات العشوائية قيد الدراسة، كما ان أي تجربة محاكاة ماهي الا عبارة عن نوع معين من انواع المعاينة اذ تسحب هذه العينة من المجتمع الافتراضي الممثل للظاهرة المدروسة باحجام مختلفة من العينات , وتكرر العملية مرات كثيرة بدلاً من ان تسحب من المجتمع الحقيقي وبذلك فإن أسلوب المحاكاة يمكن ان يحقق للباحثين حلاً تحليلية وكذلك يؤمن قاعدة تجريبية تكون دليلاً لهم مع القاعدة النظرية لاختيار الاسلوب الملائم او الطريقة الملائمة لتحليل ودراسة بيانات الظواهر التي يدرسونها من خلال مطابقة خصائصها مع الانواع التي طبقت المحاكاة عليها.

3.3 مراحل تطبيق تجارب المحاكاة:

تتضمن تجارب المحاكاة المراحل الاتية:

المرحلة الأولى: تعيين القيم الافتراضية لتجارب المحاكاة:

تعد هذه المرحلة من اهم المراحل التي تعتمد عليها المراحل اللاحقة حيث يتم فيها اختيار القيم الافتراضية وكما يأتي:

تعيين حجوم العينات المفترضة وكما يأتي:

$$n = 10, 30, 50, 75, 100$$

ومن ثم اختيار عدد المشاهدات المراقبة بعمل توافيق بعدد المشاهدات المراقبة من جهتين حيث ان المشاهدات من جهة اليسار (r=1, 2) وعدد المشاهدات المراقبة من جهة اليمين (s=1, 2) للحصول على عينة مراقبة مضاعفة.

الفصل الثالث الجانب التجريبي والتطبيقي

اختيار قيم المعلمات الافتراضية (التجريبية) والتي تم اختيارها وفقا لمخطط الدالة الاحتمالية للتوزيع القلبي كما مبينة بالجدول الاتي:

جدول (3-1) قيم المعلمات الافتراضية

Model	1	2	3	4	5
ρ	-0.5	-0.2	0.3	0.2	0.5
μ	0	π	$\pi/2$	$\pi/4$	$\pi/8$

المرحلة الثانية: توليد البيانات (Data Generating) :

تم توليد بيانات تتبع التوزيع القلبي باستعمال الخوارزمية الآتية :

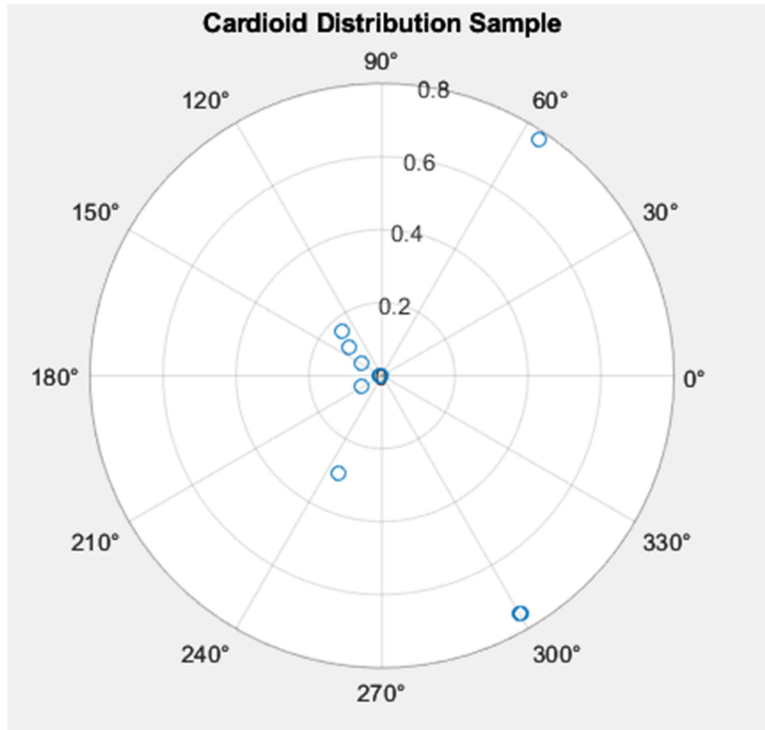
1- توليد عينات بحجم (n) من توزيع (Von-Mises) باستعمال الدالة (circ-vmrnd) في برنامج ماتلاب بالمعلمات (ρ, μ) عن طريق الايعاز الآتي:

$$r = \text{circ-vmrnd}(\rho, \mu, n) \quad \dots (3-1)$$

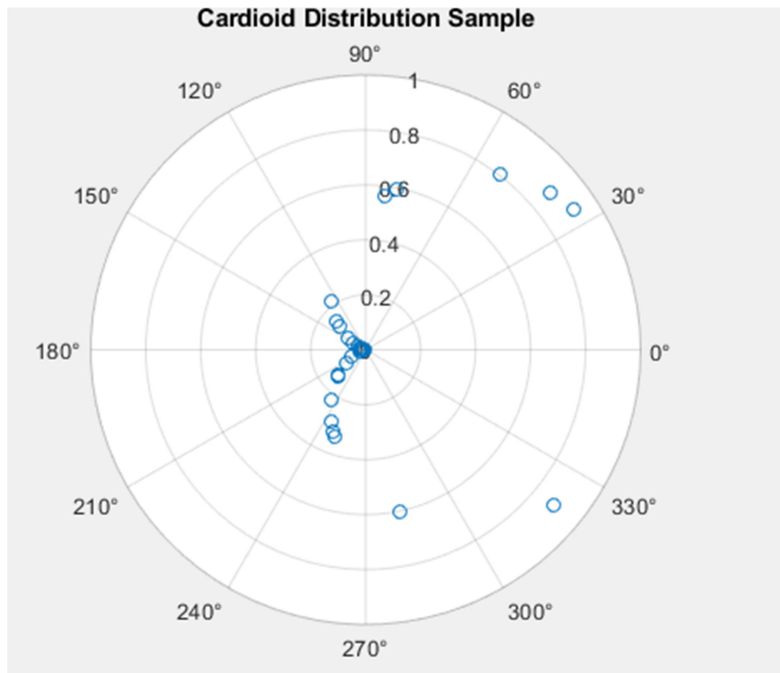
2- تحويل عينة (Von-Mises) الى التوزيع القلبي عن طريق :

$$\theta = \frac{(1 + \cos(r))}{2} \quad \dots (3-2)$$

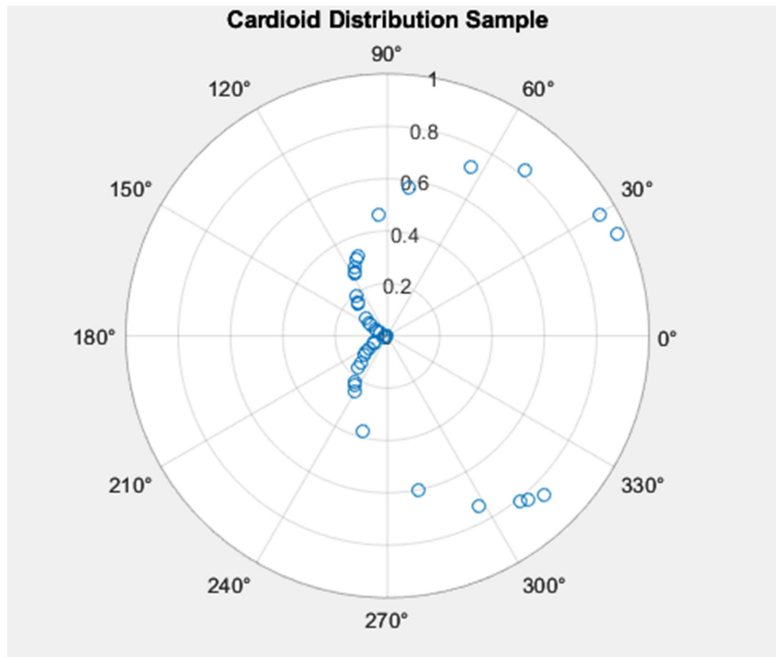
والاشكال التالية تبين بيانات التوزيع القلبي التي تم توليدها والتي استعملت في تجارب المحاكاة



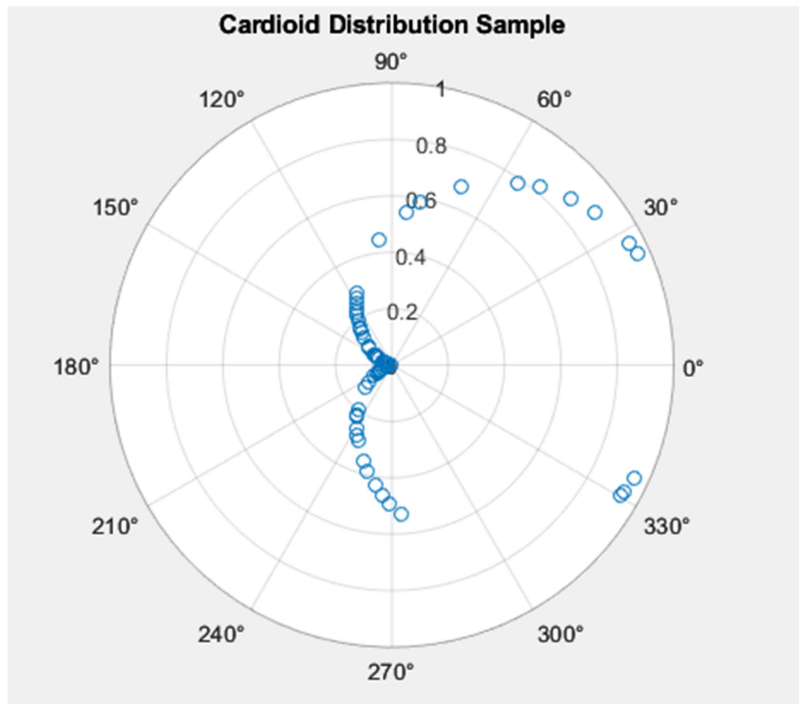
شكل (3-1) بيانات التوزيع القلبي عند حجم عينه (n=10)



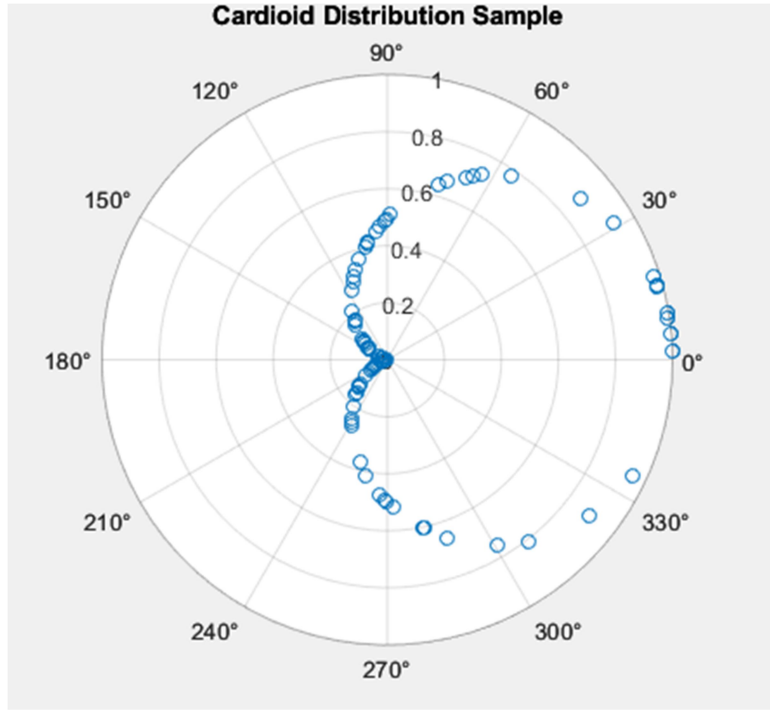
شكل (3-2) بيانات التوزيع القلبي عند حجم عينه (n=30)



شكل (3-3) بيانات التوزيع القلبي عند حجم عينه (n=50)



شكل (3-4) بيانات التوزيع القلبي عند حجم عينه (n=75)



شكل (3-5) بيانات التوزيع القلبي عند حجم عينه (n=100)

المرحلة الرابعة: المقارنة بين طرائق التقدير:

وهي المرحلة الأخيرة حيث يتم فيها المقارنة بين طرائق تقدير معالم التوزيع القلبي لغرض الوصول للتقدير الأكفأ من خلال المفاضلة بين طرائق التقدير المدروسة. فقد تم الاعتماد على متوسط مربعات الخطأ (MSE) وصيغة هذا المقياس تكون كما يأتي:

$$MSE(\hat{\rho}) = Bias^2(\hat{\rho}) + var(\hat{\rho}) \quad \dots(3-3)$$

$$MSE(\hat{\mu}) = Bias^2(\hat{\mu}) + var(\hat{\mu}) \quad \dots(3-4)$$

$$Bias(\hat{\rho}) = |\rho - \hat{\rho}| \quad \dots(3-5)$$

$$Bias(\hat{\mu}) = |\mu - \hat{\mu}| \quad \dots(3-6)$$

$$var(\hat{\rho}) = \frac{[\sum_{i=1}^k (\rho_k - \hat{\rho})^2]}{k} \quad \dots(3-7)$$

$$var(\hat{\mu}) = \frac{[\sum_{i=1}^k (\mu_k - \hat{\mu})^2]}{k} \quad \dots(3-8)$$

اذ ان :

الفصل الثالث — الجانب التجريبي والتطبيقي

μ , ρ القيم الافتراضية لمعاملات التوزيع القلبي

$\hat{\mu}$, $\hat{\rho}$ القيم التقديرية لمعاملات التوزيع القلبي

k عدد مرات تكرار التجربة

3.4 مناقشة نتائج تجارب المحاكاة :

تم عرض وتحليل نتائج تجارب المحاكاة لتقدير المعلمات للتوزيع القلبي حسب الطرائق المبينة في الجانب النظري. حيث تم الحصول على هذه النتائج باعتماد برنامج كُتِبَ بلغة (Mat lab) . ولغرض توضيح مختصرات الرموز التي وردت في جداول تحليل نتائج المحاكاة يمكن توضيحها كما يأتي

جدول (2-3) مختصرات جداول المحاكاة

المختصر	الطريقة
$\hat{\rho}_{ML}$	تقدير الإمكان الأعظم للمعلمة ρ
$\hat{\rho}_{Bayes}$	تقدير بيز للمعلمة ρ
$\hat{\rho}_{GVM}$	تقدير كرامر فون مايسس للمعلمة ρ
$\hat{\mu}_{ML}$	تقدير الإمكان الأعظم للمعلمة μ
$\hat{\mu}_{Bayes}$	تقدير بيز للمعلمة μ
$\hat{\mu}_{GVM}$	تقدير كرامر فون مايسس للمعلمة μ
$r\%$	نسبة المشاهدات المراقبة من جهة لليسار
$s\%$	نسبة المشاهدات المراقبة من جهة اليمين
N	حجم العينة الكلي
$Bias^2$	مربع التحيز لكل معلمة
$Var.$	تباين كل معلمة

الفصل الثالث _____ الجانب التجريبي والتطبيقي

متوسط مربعات الخطأ لكل معلمة تقديرية	MSE
معدل كل معيار مقارنة لمكررات تجارب المحاكاة	Average of method
الطريقة الافضل	Best
تقدير كل معلمة	Estimation
المعلمة التقديرية	Parameter

وفيما يلي النتائج الموضحة في الجداول التي تتم تحليلها وكما يأتي:

التجربة الأولى: ($\rho = -0.5, \mu = 0$)

جدول (3-3) تقدير المعلمات ومتوسط مربعات الخطا MSE لكل طريقة من طرق التقدير للانموذج الأول

n	r%	s%	Parameter	Estimation	Bias ²	Var.	MSE
10	1	1	ρ_{ML}	-0.88902	0.15134	0.00015	0.15149
30	1	1		-0.87876	0.14346	0.00014	0.14360
50	1	1		-0.76866	0.07218	0.00007	0.07225
75	1	1		-0.66787	0.02818	0.00003	0.02821
100	1	1		-0.56788	0.00461	0.00000	0.00461
Average of method					0.07995	0.00008	0.08003
10	1	1	ρ_{Bayes}	-0.55355	0.00287	0.00000	0.00287
30	1	1		-0.56724	0.00452	0.00000	0.00453
50	1	1		-0.68975	0.03601	0.00004	0.03604
75	1	1		-0.69076	0.03639	0.00004	0.03643
100	1	1		-0.95864	0.21035	0.00021	0.21056
Average of method					0.05803	0.00006	0.05808
10	1	1	ρ_{GVM}	-0.99785	0.24785	0.00025	0.24810
30	1	1		-0.96446	0.21572	0.00022	0.21594
50	1	1		-0.93332	0.18777	0.00019	0.18795
75	1	1		-0.76755	0.07158	0.00007	0.07165
100	1	1		-0.66784	0.02817	0.00003	0.02820
Average of method					0.15022	0.00015	0.15037
Best					Bayes		
10	1	1	μ_{ML}	0.01653	0.26680	0.00027	0.26707
30	1	1		0.01454	0.26475	0.00026	0.26502

50	1	1		0.00111	0.25111	0.00025	0.25136
75	1	1		0.00078	0.25078	0.00025	0.25103
100	1	1		0.00066	0.25066	0.00025	0.25091
Average of method					0.25682	0.00026	0.25708
10	1	1	μ_{Bayes}	0.00016	0.25016	0.00025	0.25041
30	1	1		0.00025	0.25025	0.00025	0.25050
50	1	1		0.00178	0.25178	0.00025	0.25203
75	1	1		0.01994	0.27034	0.00027	0.27061
100	1	1		0.02335	0.27390	0.00027	0.27417
Average of method					0.25929	0.00026	0.25954
10	1	1	μ_{GVM}	0.01114	0.26126	0.00026	0.26153
30	1	1		0.01976	0.27015	0.00027	0.27042
50	1	1		0.01674	0.26702	0.00027	0.26729
75	1	1		0.01545	0.26569	0.00027	0.26595
100	1	1		0.01346	0.26364	0.00026	0.26390
Average of method					0.26555	0.00027	0.26582
Best					ML		
n	r%	s%	Parameter	Estimation	Bias ²	Var.	MSE
10	1	2	ρ_{ML}	-0.77187	0.07391	0.00007	0.07399
30	1	2		-0.67561	0.03084	0.00003	0.03087
50	1	2		-0.55321	0.00283	0.00000	0.00283
75	1	2		-0.53156	0.00100	0.00000	0.00100
100	1	2		-0.52561	0.00066	0.00000	0.00066
Average of method					0.02185	0.00002	0.02187
10	1	2	ρ_{Bayes}	-0.53113	0.00097	0.00000	0.00097

30	1	2		-0.54224	0.00178	0.00000	0.00179
50	1	2		-0.56672	0.00445	0.00000	0.00446
75	1	2		-0.67762	0.03155	0.00003	0.03158
100	1	2		-0.76863	0.07216	0.00007	0.07223
Average of method					0.02218	0.00002	0.02221
10	1	2	ρ_{GVM}	-0.87917	0.14377	0.00014	0.14391
30	1	2		-0.66781	0.02816	0.00003	0.02819
50	1	2		-0.62536	0.01572	0.00002	0.01573
75	1	2		-0.55333	0.00284	0.00000	0.00285
100	1	2		-0.54589			
Average of method					0.04762	0.00005	0.04767
Best					Bayes		
10	1	2	μ_{ML}	0.00621	0.25625	0.00026	0.25650
30	1	2		0.00581	0.25584	0.00026	0.25610
50	1	2		0.00556	0.25559	0.00026	0.25585
75	1	2		0.00042	0.25042	0.00025	0.25067
100	1	2		0.00011	0.25011	0.00025	0.25036
Average of method					0.25364	0.00025	0.25390
10	1	2	μ_{Bayes}	0.00022	0.25022	0.00025	0.25047
30	1	2		0.00034	0.25034	0.00025	0.25059
50	1	2		0.00056	0.25056	0.00025	0.25081
75	1	2		0.00899	0.25907	0.00026	0.25933
100	1	2		0.01352	0.26370	0.00026	0.26397
Average of method					0.25478	0.00025	0.25503
10	1	2	μ_{GVM}	0.00994	0.26004	0.00026	0.26030

30	1	2		0.00891	0.25899	0.00026	0.25925
50	1	2		0.00788	0.25794	0.00026	0.25820
75	1	2		0.00421	0.25423	0.00025	0.25448
100	1	2		0.00325	0.25326	0.00025	0.25351
Average of method					0.25689	0.00026	0.25715
Best					ML		
n	r%	s%	Parameter	Estimation	Bias ²	Var.	MSE
10	2	1	ρ_{ML}	-0.65043	0.02263	0.00002	0.02265
30	2	1		-0.64538	0.02114	0.00002	0.02116
50	2	1		-0.54211	0.00177	0.00000	0.00178
75	2	1		-0.51892	0.00036	0.00000	0.00036
100	2	1		-0.51556			
Average of method					0.01147	0.00001	0.01149
10	2	1	ρ_{Bayes}	-0.51242	0.00015	0.00000	0.00015
30	2	1		-0.53214	0.00103	0.00000	0.00103
50	2	1		-0.55242	0.00275	0.00000	0.00275
75	2	1		-0.85626	0.12692	0.00013	0.12705
100	2	1		-0.89633	0.15708	0.00016	0.15723
Average of method					0.05759	0.00006	0.05764
10	2	1	ρ_{GVM}	-0.77988	0.07833	0.00008	0.07841
30	2	1		-0.68988	0.03605	0.00004	0.03609
50	2	1		-0.66565	0.02744	0.00003	0.02747
75	2	1		-0.65799	0.02496	0.00002	0.02499
100	2	1		-0.62589	0.01585	0.00002	0.01586
Average of method					0.03653	0.00004	0.03656

Best					ML		
10	2	1	μ_{ML}	0.00556	0.25559	0.00026	0.25585
30	2	1		0.00568	0.25571	0.00026	0.25597
50	2	1		0.00678	0.25683	0.00026	0.25708
75	2	1		0.00034	0.25034	0.00025	0.25059
100	2	1		0.00008	0.25008	0.00025	0.25033
Average of method					0.25371	0.00025	0.25396
10	2	1	μ_{Bayes}	0.00019	0.25019	0.00025	0.25044
30	2	1		0.00028	0.25028	0.00025	0.25053
50	2	1		0.00033	0.25033	0.00025	0.25058
75	2	1		0.00996	0.26006	0.00026	0.26032
100	2	1		0.02345	0.27400	0.00027	0.27427
Average of method					0.25697	0.00026	0.25723
10	2	1	μ_{GVM}	0.00886	0.25894	0.00026	0.25920
30	2	1		0.00779	0.25785	0.00026	0.25811
50	2	1		0.00689	0.25694	0.00026	0.25719
75	2	1		0.00569	0.25572	0.00026	0.25598
100	2	1		0.00446	0.25448	0.00025	0.25473
Average of method					0.25679	0.00026	0.25704
Best					ML		
n	r%	s%	Parameter	Estimation	Bias ²	Var.	MSE
10	2	2	ρ_{ML}	-0.98965	0.23976	0.00024	0.24000
30	2	2		-0.89895	0.15916	0.00016	0.15932
50	2	2		-0.54944	0.00244	0.00000	0.00245
75	2	2		-0.50433	0.00002	0.00000	0.00002

100	2	2		-0.50231	0.00001	0.00000	0.00001
Average of method					0.08028	0.00008	0.08036
10	2	2	ρ_{Bayes}	-0.50788	0.00006	0.00000	0.00006
30	2	2		-0.51897	0.00036	0.00000	0.00036
50	2	2		-0.78355	0.08040	0.00008	0.08048
75	2	2		-0.98956	0.23967	0.00024	0.23991
100	2	2		-0.99667	0.24668	0.00025	0.24693
Average of method					0.11343	0.00011	0.11355
10	2	2	ρ_{GVM}	-0.56132	0.00376	0.00000	0.00376
30	2	2		-0.55222	0.00273	0.00000	0.00273
50	2	2		-0.54432	0.00196	0.00000	0.00197
75	2	2		-0.53453	0.00119	0.00000	0.00119
100	2	2		-0.53182	0.00101	0.00000	0.00101
Average of method					0.00213	0.00000	0.00213
Best					GVM		
10	2	2	μ_{ML}	0.16884	0.44735	0.00045	0.44779
30	2	2		0.14533	0.41645	0.00042	0.41687
50	2	2		0.00052	0.25052	0.00025	0.25077
75	2	2		0.00012	0.25012	0.00025	0.25037
100	2	2		0.00003	0.25003	0.00025	0.25028
Average of method					0.32289	0.00032	0.32322
10	2	2	μ_{Bayes}	0.00003	0.25003	0.00025	0.25028
30	2	2		0.00001	0.25001	0.00025	0.25026
50	2	2		0.00007	0.25007	0.00025	0.25032
75	2	2		0.00675	0.25680	0.00026	0.25705

100	2	2		0.04343	0.29532	0.00030	0.29561
Average of method					0.26044	0.00026	0.26070
10	2	2	μ GVM	0.00886	0.25894	0.00026	0.25920
30	2	2		0.00452	0.25454	0.00025	0.25479
50	2	2		0.00453	0.25455	0.00025	0.25481
75	2	2		0.00343	0.25344	0.00025	0.25370
100	2	2		0.00221	0.25221	0.00025	0.25247
Average of method					0.25474	0.00025	0.25499
Best					ML		

نلاحظ من جدول (3-3) ما يأتي:

عندما $r=1, s=1$:

1. تقدير المعلمة (ρ) هو الافضل عند طريقة بيز بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.05808) و اقل تحيز و اقل تباين يليه طريقة الإمكان الأعظم بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.08003) , واخيراً طريقة كرامر فون مايسس بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.15037) .

2. تقدير المعلمة (μ) هو الافضل عند طريقة الإمكان الأعظم بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.25708) و اقل تحيز و اقل تباين يليه طريقة بيز بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.25954) , واخيراً طريقة كرامر فون مايسس بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.26582) .

3. عند حجم عينة ($n=10, 30$) فان طريقة بيز هي الافضل في تقدير معاملات التوزيع القلبي , وعند حجم عينة ($n=50, 75, 100$) فان طريقة الإمكان الأعظم هي الافضل تليها طريقة كرامر فون مايسس.

عندما $r=1, s=2$:

1. تقدير المعلمة (ρ) هو الافضل عند طريقة الإمكان الأعظم بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.02187) و اقل تحيز و اقل تباين يليه طريقة بيز بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ

(0.02221) , واخيراً طريقة كرامر فون مايسس بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.04767) .

2. تقدير المعلمة (μ) هو الافضل عند طريقة الإمكان الأعظم بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.25390) و اقل تحيز و اقل تباين يليه طريقة بيز بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.25503) , واخيراً طريقة كرامر فون مايسس بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.21557) .

3. عند حجم عينة ($n=10, 30$) فان طريقة بيز هي الافضل في تقدير معالم التوزيع القلبي , وعند حجم عينة ($n=50, 75, 100$) فان طريقة الإمكان الأعظم الامكان الاعظم هي الافضل تليها طريقة كرامر فون مايسس.

عندما $r=2, s=1$:

1. تقدير المعلمة (ρ) هو الافضل عند الإمكان الأعظم طريقة الامكان بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.01149) و اقل تحيز و اقل تباين يليه طريقة فون مايسس بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.03656) , واخيراً طريقة بيز بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.05764) .

2. تقدير المعلمة (μ) هو الافضل عند طريقة الإمكان الأعظم بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.25396) و اقل تحيز و اقل تباين يليه طريقة كرامر فون مايسس بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.25704) , واخيراً طريقة بيز بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.25723) .

3. عند حجم عينة ($n=10, 30$) فان طريقة بيز هي الافضل في تقدير معالم التوزيع القلبي , وعند حجم عينة ($n=50, 75, 100$) فان طريقة الإمكان الأعظم هي الافضل تليها طريقة كرامر فون مايسس.

عندما $r=2, s=2$:

1. تقدير المعلمة (ρ) هو الافضل عند طريقة كرامر فون مايسس بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.00213) و اقل تحيز و اقل تباين يليه طريقة الإمكان الأعظم بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.08036) , واخيراً طريقة بيز بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.11355) .

2. تقدير المعلمة (μ) هو الافضل عند طريقة كرامر فون مايسس بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.25400) و اقل تحيز و اقل تباين يليه طريقة بيز بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.2070) , واخيراً طريقة الإمكان الأعظم بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.32322) .

3. عند حجم عينة (n=10, 30) فان طريقة بيز هي الافضل في تقدير معلمات التوزيع القلبي ,
وعند حجم عينة (n=50, 75, 100) فان طريقة الإمكان الأعظم هي الافضل تليها طريقة
كرامر فون مايسس.

التجربة الثانية: ($\rho = -0.2, \mu = \pi$)

جدول (3-4) تقدير المعلمات ومتوسط مربعات الخطا MSE لكل طريقة من طرئق التقدير
للانموذج الثاني

n	r%	s%	Parameter	Estimation	Bias ²	Var.	MSE
10	1	1	ρ_{ML}	-0.54286	0.11755	0.00012	0.11767
30	1	1		-0.49522	0.08715	0.00009	0.08724
50	1	1		-0.33462	0.01812	0.00002	0.01814
75	1	1		-0.32157	0.01478	0.00001	0.01479
100	1	1		-0.26733	0.00453	0.00000	0.00454
Average of method					0.04843	0.00005	0.04848
10	1	1	ρ_{Bayes}	-0.23124	0.00098	0.00000	0.00098
30	1	1		-0.23478	0.00121	0.00000	0.00121
50	1	1		-0.31234	0.01262	0.00001	0.01263
75	1	1		-0.39864	0.03946	0.00004	0.03950
100	1	1		-0.45653	0.06581	0.00007	0.06587
Average of method					0.02401	0.00002	0.02404
10	1	1	ρ_{GVM}	-0.54543	0.11932	0.00012	0.11944
30	1	1		-0.43244	0.05403	0.00005	0.05408
50	1	1		-0.32222	0.01494	0.00001	0.01495
75	1	1		-0.31889	0.01413	0.00001	0.01415
100	1	1		-0.29754	0.00951	0.00001	0.00952

Average of method					0.04239	0.00004	0.04243
Best					Bayes		
10	1	1	μ_{ML}	3.34089	12.53790	0.01254	12.55044
30	1	1		3.31569	12.36008	0.01236	12.37244
50	1	1		3.18181	11.43664	0.01144	11.44808
75	1	1		3.16199	11.30298	0.01130	11.31428
100	1	1		3.15781	11.27489	0.01127	11.28616
Average of method					11.78250	0.01178	11.79428
10	1	1	μ_{Bayes}	3.14223	11.17050	0.01117	11.18167
30	1	1		3.15171	11.23396	0.01123	11.24519
50	1	1		3.22346	11.72008	0.01172	11.73180
75	1	1		3.28976	12.17842	0.01218	12.19060
100	1	1		3.34676	12.57951	0.01258	12.59209
Average of method					11.77649	0.01178	11.78827
10	1	1	μ_{GVM}	3.44577	13.29164	0.01329	13.30493
30	1	1		3.34264	12.55030	0.01255	12.56285
50	1	1		3.21678	11.67439	0.01167	11.68606
75	1	1		3.17895	11.41730	0.01142	11.42872
100	1	1		3.15689	11.26871	0.01127	11.27998
Average of method					12.04047	0.01204	12.05251
Best					Bayes		
n	r%	s%	Parameter	Estimation			
10	1	2	ρ_{ML}	-0.41124	0.04462	0.00004	0.04467
30	1	2		-0.41045	0.04429	0.00004	0.04433
50	1	2		-0.32146	0.01475	0.00001	0.01477

75	1	2		-0.31111	0.01235	0.00001	0.01236
100	1	2		-0.22454	0.00060	0.00000	0.00060
Average of method					0.02332	0.00002	0.02335
10	1	2	ρ_{Bayes}	-0.21654	0.00027	0.00000	0.00027
30	1	2		-0.22891	0.00084	0.00000	0.00084
50	1	2		-0.31563	0.01337	0.00001	0.01338
75	1	2		-0.36211	0.02628	0.00003	0.02631
100	1	2		-0.67557	0.22617	0.00023	0.22639
Average of method					0.05339	0.00005	0.05344
10	1	2	ρ_{GVM}	-0.43783	0.05656	0.00006	0.05662
30	1	2		-0.35856	0.02514	0.00003	0.02517
50	1	2		-0.35522	0.02409	0.00002	0.02412
75	1	2		-0.37996	0.03239	0.00003	0.03242
100	1	2		-0.39444	0.03781	0.00004	0.03784
Average of method					0.03520	0.00004	0.03523
Best					ML		
10	1	2	μ_{ML}	3.28433	12.14056	0.01214	12.15270
30	1	2		3.22113	11.70413	0.01170	11.71583
50	1	2		3.18181	11.43664	0.01144	11.44808
75	1	2		3.14578	11.19424	0.01119	11.20544
100	1	2		3.14533	11.19123	0.01119	11.20242
Average of method					11.53336	0.01153	11.54489
10	1	2	μ_{Bayes}	3.15688	11.26864	0.01127	11.27991
30	1	2		3.16733	11.33891	0.01134	11.35025
50	1	2		3.32422	12.42013	0.01242	12.43255

75	1	2		3.33367	12.48682	0.01249	12.49931
100	1	2		3.34653	12.57788	0.01258	12.59045
Average of method					12.01848	0.01202	12.03049
10	1	2	μ_{GVM}	3.29644	12.22509	0.01223	12.23732
30	1	2		3.26522	12.00775	0.01201	12.01976
50	1	2		3.23565	11.80369	0.01180	11.81549
75	1	2		3.19886	11.55225	0.01155	11.56380
100	1	2		3.16744	11.33965	0.01134	11.35099
Average of method					11.78569	0.01179	11.79747
Best					ML		
n	r%	s%	Parameter	Estimation	0.00000	0.00000	0.00000
10	2	1	ρ_{ML}	-0.410891	0.04448	0.00004	0.04452
30	2	1		-0.41011	0.04415	0.00004	0.04419
50	2	1		-0.32142	0.01474	0.00001	0.01476
75	2	1		-0.31001	0.01210	0.00001	0.01211
100	2	1		-0.22212	0.00049	0.00000	0.00049
Average of method					0.02319	0.00002	0.02321
10	2	1	ρ_{Bayes}	-0.38124	0.03285	0.00003	0.03288
30	2	1		-0.41457	0.04604	0.00005	0.04609
50	2	1		-0.62144	0.17761	0.00018	0.17779
75	2	1		-0.67876	0.22921	0.00023	0.22944
100	2	1		-0.76444	0.31859	0.00032	0.31891
Average of method					0.16086	0.00016	0.16102
10	2	1	ρ_{GVM}	-0.40009	0.04004	0.00004	0.04008
30	2	1		-0.39092	0.03645	0.00004	0.03649

50	2	1		-0.36744	0.02804	0.00003	0.02806
75	2	1		-0.32446	0.01549	0.00002	0.01551
100	2	1		-0.31235	0.01262	0.00001	0.01264
Average of method					0.02653	0.00003	0.02655
Best					ML		
10	2	1	μ_{ML}	4.33463	20.56287	0.02056	20.58343
30	2	1		3.89644	16.78082	0.01678	16.79760
50	2	1		3.37818	12.80337	0.01280	12.81618
75	2	1		3.21452	11.65895	0.01166	11.67061
100	2	1		3.18643	11.46791	0.01147	11.47938
Average of method					14.65478	0.01465	14.66944
10	2	1	μ_{Bayes}	4.15664	18.98031	0.01898	18.99929
30	2	1		3.16768	11.34127	0.01134	11.35261
50	2	1		3.31909	12.38399	0.01238	12.39638
75	2	1		3.19755	11.54335	0.01154	11.55489
100	2	1		3.16896	11.34989	0.01135	11.36124
Average of method					13.11976	0.01312	13.13288
10	2	1	μ_{GVM}	3.54633	14.03499	0.01403	14.04902
30	2	1		3.34773	12.58639	0.01259	12.59897
50	2	1		3.21356	11.65239	0.01165	11.66404
75	2	1		3.22221	11.71152	0.01171	11.72323
100	2	1		3.16777	11.34187	0.01134	11.35322
Average of method					12.26543	0.01227	12.27770
Best					GVM		
n	r%	s%	Parameter	Estimation			

10	2	2	ρ_{ML}	-0.34689	0.02158	0.00002	0.02160
30	2	2		-0.33467	0.01814	0.00002	0.01815
50	2	2		-0.32134	0.01472	0.00001	0.01474
75	2	2		-0.22341	0.00055	0.00000	0.00055
100	2	2		-0.21673	0.00028	0.00000	0.00028
Average of method					0.01105	0.00001	0.01106
10	2	2	ρ_{Bayes}	-0.22355	0.00055	0.00000	0.00056
30	2	2		-0.31113	0.01235	0.00001	0.01236
50	2	2		-0.22464	0.00061	0.00000	0.00061
75	2	2		-0.22161	0.00047	0.00000	0.00047
100	2	2		-0.214453	0.00021	0.00000	0.00021
Average of method					0.00284	0.00000	0.00284
10	2	2	ρ_{GVM}	-0.32896	0.01663	0.00002	0.01665
30	2	2		-0.32355	0.01526	0.00002	0.01528
50	2	2		-0.31787	0.01389	0.00001	0.01391
75	2	2		-0.27854	0.00617	0.00001	0.00617
100	2	2		-0.234543	0.00119	0.00000	0.00119
Average of method					0.01063	0.00001	0.01064
Best				Bayes			
10	2	2	μ_{ML}	3.76854	15.74931	0.01575	15.76506
30	2	2		3.44577	13.29164	0.01329	13.30493
50	2	2		3.22345	11.72001	0.01172	11.73173
75	2	2		3.16422	11.31798	0.01132	11.32929
100	2	2		3.14245	11.17197	0.01117	11.18314
Average of method					12.65018	0.01265	12.66283

10	2	2	μ_{Bayes}	3.17853	11.41446	0.01141	11.42588
30	2	2		3.19543	11.52894	0.01153	11.54047
50	2	2		3.21332	11.65075	0.01165	11.66240
75	2	2		4.23533	19.67215	0.01967	19.69182
100	2	2		4.33553	20.57103	0.02057	20.59160
Average of method					14.96747	0.01497	14.98244
10	2	2	μ_{GVM}	3.34245	12.54895	0.01255	12.56150
30	2	2		3.33211	12.47580	0.01248	12.48828
50	2	2		3.21223	11.64331	0.01164	11.65496
75	2	2		3.25667	11.94857	0.01195	11.96052
100	2	2		2.54522	7.53623	0.00754	7.54377
Average of method					11.23057	0.01123	11.24180
Best					GVM		

نلاحظ من جدول (3-4) ما يأتي:

عندما $r=1, s=1$:

- تقدير المعلمة (ρ) هو الأفضل عند طريقة بيز بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.02404) و أقل تحيز و أقل تباين يليه طريقة كرامر فون مايسس بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.04242) , و أخيراً طريقة الإمكان الأعظم بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.04848) .
- تقدير المعلمة (μ) هو الأفضل عند طريقة بيز بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (11.78827) و أقل تحيز و أقل تباين يليه طريقة الإمكان الأعظم بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (11.79428) , و أخيراً طريقة كرامر فون مايسس بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (12.05251) .
- عند حجم عينة ($n=10, 30$) فان طريقة بيز هي الأفضل في تقدير معلمات التوزيع القلبي , وعند حجم عينة ($n=50, 75, 100$) فان الإمكان الأعظم هي الأفضل تليها طريقة كرامر فون مايسس.

عندما $r=1, s=2$:

4. تقدير المعلمة (ρ) هو الافضل عند الإمكان الأعظم بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.02335) و اقل تحيز و اقل تباين يليه طريقة كرامر فون مايسس بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.03523) , واخيراً طريقة بيز بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.05344) .
5. تقدير المعلمة (μ) هو الافضل عند طريقة الإمكان الأعظم بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (11.54489) و اقل تحيز و اقل تباين يليه طريقة كرامر فون مايسس بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (11.79747) , واخيراً طريقة بيز بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (12.03049) .
6. عند حجم عينة ($n=10, 30$) فان طريقة بيز هي الافضل في تقدير معلمات التوزيع القلبي , وعند حجم عينة ($n=50, 75, 100$) فان طريقة الإمكان الأعظم هي الافضل تليها طريقة كرامر فون مايسس.

عندما $r=2, s=1$:

4. تقدير المعلمة (ρ) هو الافضل عند الإمكان الأعظم بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.02321) و اقل تحيز و اقل تباين يليه طريقة فون مايسس بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.02658) , واخيراً طريقة بيز بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.16102) .
5. تقدير المعلمة (μ) هو الافضل عند طريقة كرامر فون مايسس بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (12.27770) و اقل تحيز و اقل تباين يليه طريقة بيز بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (13.13288) , واخيراً طريقة الإمكان الأعظم بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (14.66944) .
6. عند حجم عينة ($n=10, 30$) فان طريقة بيز هي الافضل في تقدير معلمات التوزيع القلبي , وعند حجم عينة ($n=50, 75, 100$) فان طريقة الإمكان الأعظم هي الافضل تليها طريقة كرامر فون مايسس.

عندما $r=2, s=2$:

4. تقدير المعلمة (ρ) هو الافضل عند طريقة بيز بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.00284) و اقل تحيز و اقل تباين يليه طريقة كرامر فون مايسس بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.01064) , واخيراً طريقة الإمكان الأعظم بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.01106) .

الفصل الثالث الجانب التجريبي والتطبيقي

5. تقدير المعلمة (μ) هو الأفضل عند طريقة كرامر فون مايسس بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (11.24180) و أقل تحيز و أقل تباين يليه طريقة الإمكان الأعظم بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (12.66283) , واخيراً طريقة بيز بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (14.24180).
6. نلاحظ انه كلما زادت نسبة المشاهدات المراقبة قلت معايير المقارنة
7. كلما زادت قيمة المعلمة (μ) زاد التحيز وقل متوسط مربعات الخطأ
8. عند حجم عينة ($n=10, 30$) فان طريقة بيز هي الأفضل في تقدير معالم التوزيع القلبي , وعند حجم عينة ($n=50, 75, 100$) فان طريقة الإمكان الأعظم هي الأفضل تليها طريقة كرامر فون مايسس.

التجربة الثالثة: ($\rho=0.3, \mu=\pi/2$)

جدول (3-5) تقدير المعالم و متوسط مربعات الخطا MSE لكل طريقة من طرئق التقدير للانموذج الثالث

n	r%	s%	Parameter	Estimation	Bias ²	Var.	MSE
10	1	1	ρ_{ml}	0.87833	0.33447	0.00033	0.33480
30	1	1		0.786222	0.23641	0.00024	0.23665
50	1	1		0.563222	0.06929	0.00007	0.06936
75	1	1		0.435674	0.01841	0.00002	0.01843
100	1	1		0.421167	0.01468	0.00001	0.01470
Average of method					0.13465	0.00013	0.13479
10	1	1	ρ_{Bayes}	0.32444	0.00060	0.00000	0.00060
30	1	1		0.42168	0.01481	0.00001	0.01482
50	1	1		0.65332	0.12484	0.00012	0.12496
75	1	1		0.75325	0.20544	0.00021	0.20564
100	1	1		0.97335	0.45340	0.00045	0.45385
Average of method					0.15981	0.00016	0.15997

10	1	1	ρ_{GVM}	0.535621	0.05552	0.00006	0.05557
30	1	1		0.452784	0.02334	0.00002	0.02337
50	1	1		0.41356	0.01290	0.00001	0.01291
75	1	1		0.34564	0.00208	0.00000	0.00209
100	1	1		0.33456	0.00119	0.00000	0.00120
Average of method					0.01901	0.00002	0.01903
Best					GVM		
10	1	1	μ_{ml}	2.56313	5.12176	0.00512	5.12688
30	1	1		1.97463	2.80439	0.00280	2.80719
50	1	1		1.75774	2.12501	0.00213	2.12713
75	1	1		1.658986	1.84684	0.00185	1.84869
100	1	1		1.61663	1.73351	0.00173	1.73525
Average of method					2.72630	0.00273	2.72903
10	1	1	μ_{Bayes}	1.66435	1.86145	0.00186	1.86331
30	1	1		1.65463	1.83502	0.00184	1.83686
50	1	1		1.98976	2.85529	0.00286	2.85814
75	1	1		2.23563	3.74666	0.00375	3.75041
100	1	1		2.87654	6.63856	0.00664	6.64520
Average of method					3.38740	0.00339	3.39078
10	1	1	μ_{GVM}	1.96785	2.78172	0.00278	2.78451
30	1	1		1.85762	2.42618	0.00243	2.42861
50	1	1		1.77785	2.18404	0.00218	2.18622
75	1	1		1.76899	2.15793	0.00216	2.16009
100	1	1		1.71562	2.00398	0.00200	2.00598
Average of method					2.31077	0.00231	2.31308

Best					GVM		
n	r%	s%	Parameter	Estimation			
10	1	2	ρ_{ml}	0.521963	0.04927	0.00005	0.04932
30	1	2		0.443674	0.02064	0.00002	0.02066
50	1	2		0.404552	0.01093	0.00001	0.01094
75	1	2		0.336893	0.00136	0.00000	0.00136
100	1	2		0.323563	0.00056	0.00000	0.00056
Average of method					0.01655	0.00002	0.01657
10	1	2	ρ_{Bayes}	0.341678	0.00174	0.00000	0.00174
30	1	2		0.353673	0.00288	0.00000	0.00288
50	1	2		0.455782	0.02427	0.00002	0.02429
75	1	2		0.531131	0.05342	0.00005	0.05347
100	1	2		0.621143	0.10313	0.00010	0.10324
Average of method					0.03709	0.00004	0.03713
10	1	2	ρ_{GVM}	0.368836	0.00474	0.00000	0.00474
30	1	2		0.352168	0.00272	0.00000	0.00272
50	1	2		0.343466	0.00189	0.00000	0.00189
75	1	2		0.321743	0.00047	0.00000	0.00047
100	1	2		0.313565	0.00018	0.00000	0.00018
Average of method					0.00200	0.00000	0.00200
Best					GVM		
10	1	2	μ_{ml}	1.67994	1.90423	0.00190	1.90614
30	1	2		1.66789	1.87112	0.00187	1.87299
50	1	2		1.59224	1.66988	0.00167	1.67155
75	1	2		1.5798	1.63789	0.00164	1.63953

100	1	2		1.56897	1.61028	0.00161	1.61190
Average of method					1.73868	0.00174	1.74042
10	1	2	μ_{Bayes}	1.57865	1.63495	0.00163	1.63658
30	1	2		1.613564	1.72545	0.00173	1.72718
50	1	2		1.78589	2.20787	0.00221	2.21008
75	1	2		1.87884	2.49274	0.00249	2.49523
100	1	2		1.886875	2.51817	0.00252	2.52069
Average of method					2.11583	0.00212	2.11795
10	1	2	μ_{GVM}	1.67992	1.90418	0.00190	1.90608
30	1	2		1.66556	1.86475	0.00186	1.86662
50	1	2		1.65789	1.84387	0.00184	1.84571
75	1	2		1.65778	1.84357	0.00184	1.84541
100	1	2		1.57897	1.63576	0.00164	1.63740
Average of method					1.81843	0.00182	1.82024
Best					ML		
n	r%	s%	Parameter	Estimation	0.00000	0.00000	0.00000
10	2	1	ρ_{ml}	0.365567	0.00430	0.00000	0.00430
30	2	1		0.352213	0.00273	0.00000	0.00273
50	2	1		0.341134	0.00169	0.00000	0.00169
75	2	1		0.321137	0.00045	0.00000	0.00045
100	2	1		0.311356	0.00013	0.00000	0.00013
Average of method					0.00186	0.00000	0.00186
10	2	1	ρ_{Bayes}	0.335533	0.00126	0.00000	0.00126
30	2	1		0.342224	0.00178	0.00000	0.00178
50	2	1		0.351111	0.00261	0.00000	0.00261

75	2	1		0.372113	0.00520	0.00001	0.00521
100	2	1		0.353511	0.00286	0.00000	0.00287
Average of method					0.00274	0.00000	0.00275
10	2	1	ρ_{GVM}	0.456753	0.02457	0.00002	0.02460
30	2	1		0.356671	0.00321	0.00000	0.00321
50	2	1		0.345684	0.00209	0.00000	0.00209
75	2	1		0.334666	0.00120	0.00000	0.00120
100	2	1		0.332346	0.00105	0.00000	0.00105
Average of method					0.00642	0.00001	0.00643
Best					ML		
10	2	1	μ_{ml}	1.99897	2.88650	0.00289	2.88939
30	2	1		1.87658	2.48560	0.00249	2.48809
50	2	1		1.77894	2.18726	0.00219	2.18945
75	2	1		1.71567	2.00412	0.00200	2.00613
100	2	1		1.67895	1.90150	0.00190	1.90340
Average of method					2.29300	0.00229	2.29529
10	2	1	μ_{Bayes}	1.56784	1.60742	0.00161	1.60903
30	2	1		1.61855	1.73857	0.00174	1.74031
50	2	1		1.68996	1.93199	0.00193	1.93392
75	2	1		1.78996	2.21998	0.00222	2.22220
100	2	1		1.955772	2.74158	0.00274	2.74432
Average of method					2.04791	0.00205	2.04996
10	2	1	μ_{GVM}	1.66789	1.87112	0.00187	1.87299
30	2	1		1.65566	1.83781	0.00184	1.83965
50	2	1		1.652111	1.82820	0.00183	1.83003

75	2	1		1.652005	1.82792	0.00183	1.82975
100	2	1		1.651134	1.82556	0.00183	1.82739
Average of method					1.83812	0.00184	1.83996
Best					GVM		
n	r%	s%	Parameter	Estimation			
10	2	2	ρ_{ml}	0.678933	0.14359	0.00014	0.14373
30	2	2		0.66773	0.13523	0.00014	0.13536
50	2	2		0.56784	0.07174	0.00007	0.07181
75	2	2		0.56134	0.06830	0.00007	0.06837
100	2	2		0.56113	0.06819	0.00007	0.06826
Average of method					0.09741	0.00010	0.09751
10	2	2	ρ_{Bayes}	0.56644	0.07099	0.00007	0.07106
30	2	2		0.56223	0.06876	0.00007	0.06883
50	2	2		0.78854	0.23867	0.00024	0.23891
75	2	2		0.78964	0.23975	0.00024	0.23999
100	2	2		0.88883	0.34672	0.00035	0.34707
Average of method					0.19298	0.00019	0.19317
10	2	2	ρ_{GVM}	0.778762	0.22921	0.00023	0.22944
30	2	2		0.674675	0.14038	0.00014	0.14052
50	2	2		0.667742	0.13523	0.00014	0.13537
75	2	2		0.657754	0.12799	0.00013	0.12812
100	2	2		0.567887	0.07176	0.00007	0.07184
Average of method					0.14092	0.00014	0.14106
Best					ML		
10	2	2	μ_{ml}	1.87891	2.49296	0.00249	2.49545

30	2	2		1.66788	1.87110	0.00187	1.87297
50	2	2		1.65566	1.83781	0.00184	1.83965
75	2	2		1.651143	1.82559	0.00183	1.82741
100	2	2		1.651077	1.82541	0.00183	1.82723
Average of method					1.97057	0.00197	1.97254
10	2	2	μ Bayes	1.56454	1.59906	0.00160	1.60066
30	2	2		1.61335	1.72489	0.00172	1.72661
50	2	2		1.65566	1.83781	0.00184	1.83965
75	2	2		1.65456	1.83483	0.00183	1.83667
100	2	2		1.65132	1.82607	0.00183	1.82789
Average of method					1.76453	0.00176	1.76630
10	2	2	μ GVM	1.76454	2.14488	0.00214	2.14702
30	2	2		1.67433	1.88878	0.00189	1.89067
50	2	2		1.67787	1.89853	0.00190	1.90042
75	2	2		1.65342	1.83175	0.00183	1.83358
100	2	2		1.65121	1.82577	0.00183	1.82759
Average of method					1.91794	0.00192	1.91986
Best					Bayes		

نلاحظ من جدول (3-5) ما يأتي:

عندما $r=1, s=1$:

1. تقدير المعلمة (ρ) هو الافضل عند طريقة كرامر فون مايسز بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.01903) و اقل تحيز و اقل تباين يليه طريقة الإمكان الأعظم بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.13479) , واخيراً طريقة بيز بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.15997) .

2. تقدير المعلمة (μ) هو الافضل عند طريقة كرامر فون مايسز بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (2.31308) و اقل تحيز و اقل تباين يليه طريقة الإمكان الأعظم بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (2.72903) , و اخيراً طريقة بيز بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (3.39078).
3. عند حجم عينة ($n=10, 30$) فان طريقة بيز هي الافضل في تقدير معلمات التوزيع القلبي , وعند حجم عينة ($n=50, 75, 100$) فان طريقة الإمكان الأعظم هي الافضل تليها طريقة كرامر فون مايسس.

عندما $r=1, s=2$:

1. تقدير المعلمة (P) هو الافضل عند طريقة كرامر فون مايسس بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.00200) و اقل تحيز و اقل تباين يليه طريقة الإمكان الأعظم بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.01657) , و اخيراً طريقة بيز بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.03713) .
2. تقدير المعلمة (μ) هو الافضل عند طريقة الإمكان الأعظم بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (1.74042) و اقل تحيز و اقل تباين يليه طريقة كرامر فون مايسس بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (1.82024) , و اخيراً طريقة بيز بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (2.11795).
3. عند حجم عينة ($n=10, 30$) فان طريقة بيز هي الافضل في تقدير معلمات التوزيع القلبي , وعند حجم عينة ($n=50, 75, 100$) فان طريقة الإمكان الأعظم هي الافضل تليها طريقة كرامر فون مايسس.

عندما $r=2, s=1$:

1. تقدير المعلمة (P) هو الافضل عند طريقة الإمكان الأعظم بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.0018) و اقل تحيز و اقل تباين يليه طريقة بيز بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.00275) , و اخيراً طريقة فون مايسس بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.00643) .
2. تقدير المعلمة (μ) هو الافضل عند طريقة كرامر فون مايسس بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (1.83996) و اقل تحيز و اقل تباين يليه طريقة بيز بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (2.04996) , و اخيراً طريقة الإمكان الأعظم بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (2.29529).
3. عند حجم عينة ($n=10, 30$) فان طريقة بيز هي الافضل في تقدير معلمات التوزيع القلبي , وعند حجم عينة ($n=50, 75, 100$) فان طريقة الإمكان الأعظم هي الافضل تليها طريقة كرامر فون مايسس.

عندما $r=2, s=2$:

1. تقدير المعلمة (ρ) هو الافضل عند طريقة الإمكان الأعظم بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.09751) و اقل تحيز و اقل تباين يليه طريقة كرامر فون مايسس بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.14106) , واخيراً طريقة بيز بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.19317) .
2. تقدير المعلمة (μ) هو الافضل عند طريقة بيز بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (1.76630) و اقل تحيز و اقل تباين يليه طريقة كرامر فون مايسس بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (1.91986) , واخيراً طريقة الإمكان الأعظم بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (1.97254) .
3. عند حجم عينة ($n=10, 30$) فان طريقة بيز هي الافضل في تقدير معالم التوزيع القلبي , وعند حجم عينة ($n=50, 75, 100$) فان طريقة الإمكان الأعظم هي الافضل تليها طريقة كرامر فون مايسس.

التجربة الرابعة: ($\rho=0.2, \mu=\pi/4$)

جدول (3-6) تقدير المعالم ومتوسط مربعات الخطا MSE لكل طريقة من طرئق التقدير للانموذج الرابع

n	r%	s%	Parameter	Estimation	Bias ²	Var.	MSE
10	1	1	ρ_{ml}	0.55767	0.12793	0.00013	0.12806
30	1	1		0.52671	0.10674	0.00011	0.10685
50	1	1		0.43572	0.05556	0.00006	0.05562
75	1	1		0.345637	0.02121	0.00002	0.02123
100	1	1		0.29022	0.00814	0.00001	0.00815
Average of method					0.06392	0.00006	0.06398
10	1	1	ρ_{Bayes}	0.33201	0.01743	0.00002	0.01744
30	1	1		0.37885	0.03199	0.00003	0.03202
50	1	1		0.54525	0.11920	0.00012	0.11932
75	1	1		0.59781	0.15825	0.00016	0.15841

100	1	1		0.69192	0.24199	0.00024	0.24223
Average of method					0.11377	0.00011	0.11388
10	1	1	ρ_{GVM}	0.63322	0.18768	0.00019	0.18787
30	1	1		0.57688	0.14204	0.00014	0.14218
50	1	1		0.47995	0.07837	0.00008	0.07845
75	1	1		0.35667	0.02455	0.00002	0.02457
100	1	1		0.31902	0.01417	0.00001	0.01418
Average of method					0.08936	0.00009	0.08945
Best					ML		
10	1	1	μ_{ml}	1.91891	1.28441	0.00295	1.28737
30	1	1		1.89356	1.22760	0.00287	1.23047
50	1	1		0.88441	0.00977	0.00047	0.01023
75	1	1		0.87721	0.00839	0.00046	0.00885
100	1	1		0.83661	0.00260	0.00041	0.00301
Average of method					0.50655	0.00143	0.50799
10	1	1	μ_{Bayes}	0.94743	0.02619	0.00056	0.02675
30	1	1		0.86771	0.00674	0.00045	0.00719
50	1	1		0.89881	0.01282	0.00049	0.01331
75	1	1		1.62166	0.69901	0.00202	0.70103
100	1	1		1.79434	1.01758	0.00254	1.02012
Average of method					0.35247	0.00121	0.35368
10	1	1	μ_{GVM}	1.89991	1.24171	0.00289	1.24460
30	1	1		1.31684	0.28223	0.00125	0.28347
50	1	1		0.98643	0.04034	0.00062	0.04096
75	1	1		0.88542	0.00997	0.00047	0.01044

100	1	1		0.85311	0.00456	0.00043	0.00499
Average of method					0.31576	0.00113	0.31689
Best					GVM		
n	r%	s%	Parameter	Estimation			
10	1	2	ρ_{ml}	0.53532	0.11244	0.00011	0.11255
30	1	2		0.51134	0.09693	0.00010	0.09703
50	1	2		0.41342	0.04555	0.00005	0.04559
75	1	2		0.30311	0.01063	0.00001	0.01064
100	1	2		0.23022	0.00091	0.00000	0.00091
Average of method					0.05329	0.00005	0.05335
10	1	2	ρ_{Bayes}	0.31222	0.01259	0.00001	0.01261
30	1	2		0.33892	0.01930	0.00002	0.01932
50	1	2		0.44511	0.06008	0.00006	0.06014
75	1	2		0.45722	0.06616	0.00007	0.06623
100	1	2		0.59191	0.15359	0.00015	0.15375
Average of method					0.06235	0.00006	0.06241
10	1	2	ρ_{GVM}	0.53345	0.11119	0.00011	0.11130
30	1	2		0.51622	0.10000	0.00010	0.10010
50	1	2		0.39921	0.03968	0.00004	0.03972
75	1	2		0.31642	0.01355	0.00001	0.01357
100	1	2		0.30901	0.01188	0.00001	0.01190
Average of method					0.05526	0.00006	0.05532
Best					ML		
10	1	2	μ_{ml}	1.53892	0.56751	0.00179	0.56930
30	1	2		1.31351	0.27870	0.00124	0.27994
50	1	2		0.80532	0.00039	0.00037	0.00076

75	1	2		0.80012	0.00021	0.00036	0.00057
100	1	2		0.80061	0.00023	0.00036	0.00059
Average of method					0.16941	0.00082	0.17023
10	1	2	μ_{Bayes}	0.92727	0.02007	0.00053	0.02060
30	1	2		0.91256	0.01612	0.00051	0.01663
50	1	2		0.90851	0.01511	0.00050	0.01561
75	1	2		1.69161	0.82087	0.00222	0.82310
100	1	2		1.68431	0.80770	0.00220	0.80990
Average of method					0.33597	0.00119	0.33717
10	1	2	μ_{GVM}	1.89991	1.24171	0.00289	1.24460
30	1	2		1.31684	0.28223	0.00125	0.28347
50	1	2		0.98643	0.04034	0.00062	0.04096
75	1	2		0.88542	0.00997	0.00047	0.01044
100	1	2		0.85311	0.00456	0.00043	0.00499
Average of method					0.31576	0.00113	0.31689
Best					ML		
n	r%	s%	Parameter	Estimation	0.00000	0.00000	0.00000
10	2	1	ρ_{ml}	0.53456	0.11193	0.00011	0.11204
30	2	1		0.51015	0.09619	0.00010	0.09629
50	2	1		0.30136	0.01027	0.00001	0.01028
75	2	1		0.30123	0.01025	0.00001	0.01026
100	2	1		0.22126	0.00045	0.00000	0.00045
Average of method					0.04582	0.00005	0.04587
10	2	1	ρ_{Bayes}	0.30156	0.01031	0.00001	0.01032
30	2	1		0.30057	0.01011	0.00001	0.01012
50	2	1		0.43475	0.05511	0.00006	0.05516

75	2	1		0.43462	0.05505	0.00006	0.05510
100	2	1		0.52127	0.10321	0.00010	0.10332
Average of method					0.04676	0.00005	0.04681
10	2	1	ρ_{GVM}	0.52895	0.10821	0.00011	0.10832
30	2	1		0.51136	0.09695	0.00010	0.09704
50	2	1		0.35321	0.02347	0.00002	0.02350
75	2	1		0.31556	0.01335	0.00001	0.01337
100	2	1		0.21253	0.00016	0.00000	0.00016
Average of method					0.04843	0.00005	0.04848
Best					ML		
10	2	1	μ_{ml}	1.53235	0.55765	0.00178	0.55943
30	2	1		1.21553	0.18485	0.00103	0.18588
50	2	1		0.80113	0.00024	0.00036	0.00060
75	2	1		0.80011	0.00021	0.00036	0.00057
100	2	1		0.80021	0.00021	0.00036	0.00057
Average of method					0.14863	0.00078	0.14941
10	2	1	μ_{Bayes}	0.85211	0.00442	0.00043	0.00485
30	2	1		0.86533	0.00636	0.00044	0.00680
50	2	1		0.87544	0.00807	0.00046	0.00853
75	2	1		1.56322	0.60471	0.00186	0.60657
100	2	1		1.44366	0.43306	0.00155	0.43460
Average of method					0.21132	0.00095	0.21227
10	2	1	μ_{GVM}	0.91117	0.01577	0.00051	0.01628
30	2	1		0.91167	0.01590	0.00051	0.01640
50	2	1		0.89633	0.01226	0.00048	0.01275
75	2	1		1.45573	0.44909	0.00158	0.45066

100	2	1		1.43133	0.41698	0.00152	0.41850
Average of method					0.18200	0.00092	0.18292
Best					ML		
n	r%	s%	Parameter	Estimation			
10	2	2	ρ_{ml}	0.41178	0.04485	0.00004	0.04490
30	2	2		0.45322	0.06412	0.00006	0.06418
50	2	2		0.23543	0.00126	0.00000	0.00126
75	2	2		0.21743	0.00030	0.00000	0.00030
100	2	2		0.21134	0.00013	0.00000	0.00013
Average of method					0.02213	0.00002	0.02215
10	2	2	ρ_{Bayes}	0.25633	0.00317	0.00000	0.00318
30	2	2		0.23432	0.00118	0.00000	0.00118
50	2	2		0.33432	0.01804	0.00002	0.01806
75	2	2		0.41233	0.04508	0.00005	0.04513
100	2	2		0.41121	0.04461	0.00004	0.04465
Average of method					0.02242	0.00002	0.02244
10	2	2	ρ_{GVM}	0.49353	0.08616	0.00009	0.08625
30	2	2		0.45677	0.06593	0.00007	0.06600
50	2	2		0.32323	0.01519	0.00002	0.01520
75	2	2		0.27854	0.00617	0.00001	0.00617
100	2	2		0.21147	0.00013	0.00000	0.00013
Average of method					0.03472	0.00003	0.03475
Best					ML		
10	2	2	μ_{ml}	1.14877	0.13190	0.00090	0.13280
30	2	2		1.11533	0.10873	0.00084	0.10957
50	2	2		0.80091	0.00023	0.00036	0.00060

75	2	2		0.80001	0.00021	0.00036	0.00057
100	2	2		0.8001	0.00021	0.00036	0.00057
Average of method					0.04826	0.00056	0.04882
10	2	2	μ Bayes	0.81181	0.00069	0.00037	0.00106
30	2	2		0.85413	0.00470	0.00043	0.00513
50	2	2		0.8564	0.00501	0.00043	0.00544
75	2	2		1.41322	0.39392	0.00147	0.39539
100	2	2		1.44134	0.43001	0.00154	0.43155
Average of method					0.16687	0.00085	0.16771
10	2	2	μ GVM	0.87865	0.00866	0.00046	0.00912
30	2	2		0.86477	0.00627	0.00044	0.00671
50	2	2		0.81241	0.00072	0.00038	0.00109
75	2	2		1.33211	0.29868	0.00128	0.29997
100	2	2		1.13784	0.12408	0.00088	0.12496
Average of method					0.08768	0.00069	0.08837
Best					ML		

نلاحظ من جدول (3-6) ما يأتي:

عندما $r=1, s=1$:

1. تقدير المعلمة (ρ) هو الافضل عند طريقة الإمكان الأعظم بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.06398) و اقل تحيز و اقل تباين يليه طريقة كرامر فون مايسس بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.08945), واخيراً طريقة بيز بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.11388).
2. تقدير المعلمة (μ) هو الافضل عند طريقة كرامر فون مايسس بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.31689) و اقل تحيز و اقل تباين يليه طريقة بيز بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.35368), واخيراً طريقة الإمكان الأعظم بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.50799).

3. عند حجم عينة (30, 10) فان طريقة بيز هي الافضل في تقدير معلمات التوزيع القلبي , وعند حجم عينة (100, 75, 50) فان طريقة الإمكان الأعظم هي الافضل تليها طريقة كرامر فون مايسس.

عندما $r=1, s=2$:

1. تقدير المعلمة (ρ) هو الافضل عند طريقة الإمكان الأعظم بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.05335) و اقل تحيز و اقل تباين يليه طريقة كرامر فون مايسس بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.05532) , واخيراً طريقة بيز بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.063241) .

2. تقدير المعلمة (μ) هو الافضل عند طريقة كرامر فون مايسس بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.04587) و اقل تحيز و اقل تباين يليه طريقة بيز بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.31689) , واخيراً طريقة الإمكان الأعظم بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.33717) .

3. عند حجم عينة (30, 10) فان طريقة بيز هي الافضل في تقدير معلمات التوزيع القلبي , وعند حجم عينة (100, 75, 50) فان طريقة الإمكان الأعظم هي الافضل تليها طريقة كرامر فون مايسس.

عندما $r=2, s=1$:

1. تقدير المعلمة (ρ) هو الافضل عند طريقة الإمكان الأعظم الامكان بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.04587) و اقل تحيز و اقل تباين يليه طريقة بيز بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.04681) , واخيراً طريقة فون مايسس بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.04848) .

2. تقدير المعلمة (μ) هو الافضل عند طريقة الإمكان الأعظم بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.14941) و اقل تحيز و اقل تباين يليه طريقة كرامر فون مايسس بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.19292) , واخيراً طريقة بيز بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.21227) .

3. عند حجم عينة (30, 10) فان طريقة بيز هي الافضل في تقدير معلمات التوزيع القلبي , وعند حجم عينة (100, 75, 50) فان طريقة الإمكان الأعظم هي الافضل تليها طريقة كرامر فون مايسس.

عندما $r=2, s=2$:

1. تقدير المعلمة (ρ) هو الافضل عند طريقة الإمكان الأعظم بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.02215) و اقل تحيز و اقل تباين يليه طريقة بيز بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ

الفصل الثالث الجانب التجريبي والتطبيقي

(0.02244) , واخيراً طريقة كرامر فون مايسس بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.03475) .

2. تقدير المعلمة (μ) هو الافضل عند طريقة الإمكان الأعظم بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.16771) و اقل تحيز و اقل تباين يليه طريقة كرامر فون مايسس بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.08837) , واخيراً طريقة بيز بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.16771) .

3. عند حجم عينة (n=10, 30) فان طريقة بيز هي الافضل في تقدير معالم التوزيع القلبي , وعند حجم عينة (n=50, 75, 100) فان طريقة الإمكان الأعظم هي الافضل تليها طريقة كرامر فون مايسس.

التجربة الخامسة: ($\rho=0.5, \mu=\pi/8$)

جدول (3-7) تقدير المعالم ومتوسط مربعات الخطا MSE لكل طريقة من طرق التقدير للانموذج الخامس

n	r%	s%	Parameter	Estimation	Bias ²	Var.	MSE
10	1	1	ρ_{ml}	0.95019	0.20267	0.00020	0.20287
30	1	1		0.86178	0.13088	0.00013	0.13102
50	1	1		0.66872	0.02847	0.00003	0.02849
75	1	1		0.57178	0.00515	0.00001	0.00516
100	1	1		0.56811	0.00464	0.00000	0.00464
Average of method					0.07436	0.00007	0.07444
10	1	1	ρ_{Bayes}	0.54522	0.00204	0.00000	0.00205
30	1	1		0.51094	0.00012	0.00000	0.00012
50	1	1		0.72888	0.05239	0.00005	0.05244
75	1	1		0.89344	0.15480	0.00015	0.15495
100	1	1		0.93448	0.18877	0.00019	0.18896
Average of method					0.07962	0.00008	0.07970
10	1	1	ρ_{GVM}	0.96031	0.21189	0.00021	0.21210

30	1	1		0.88124	0.14534	0.00015	0.14549
50	1	1		0.67871	0.03194	0.00003	0.03197
75	1	1		0.54155	0.00173	0.00000	0.00173
100	1	1		0.53822	0.00146	0.00000	0.00146
Average of method				0.07847	0.00008	0.07855	
Best				ML			
10	1	1	μ_{ml}	0.77543	0.14095	0.00008	0.14102
30	1	1		0.71633	0.10006	0.00005	0.10011
50	1	1		0.66432	0.06987	0.00003	0.06989
75	1	1		0.44632	0.00215	0.00000	0.00215
100	1	1		0.45346	0.00286	0.00000	0.00286
Average of method				0.06318	0.00003	0.06321	
10	1	1	μ_{Bayes}	0.54352	0.02060	0.00000	0.02060
30	1	1		0.56433	0.02700	0.00000	0.02701
50	1	1		0.61243	0.04513	0.00001	0.04514
75	1	1		0.71753	0.10083	0.00005	0.10087
100	1	1		0.75211	0.12398	0.00006	0.12405
Average of method				0.06351	0.00003	0.06353	
10	1	1	μ_{GVM}	0.67784	0.07720	0.00003	0.07723
30	1	1		0.66532	0.07039	0.00003	0.07042
50	1	1		0.61123	0.04462	0.00001	0.04463
75	1	1		0.42342	0.00055	0.00001	0.00055
100	1	1		0.41135	0.00013	0.00001	0.00014
Average of method				0.03858	0.00002	0.03859	
Best				GVM			

n	r%	s%	Parameter	Estimation	Bias ²	Var.	MSE
10	1	2	ρ_{ml}	0.83019	0.10903	0.00011	0.10913
30	1	2		0.74178	0.05846	0.00006	0.05852
50	1	2		0.54872	0.00237	0.00000	0.00238
75	1	2		0.53178	0.00101	0.00000	0.00101
100	1	2		0.52811	0.00079	0.00000	0.00079
Average of method					0.03433	0.00003	0.03437
10	1	2	ρ_{Bayes}	0.52522	0.00064	0.00000	0.00064
30	1	2		0.51094	0.00012	0.00000	0.00012
50	1	2		0.51217	0.00015	0.00000	0.00015
75	1	2		0.87344	0.13946	0.00014	0.13960
100	1	2		0.81448	0.09890	0.00010	0.09900
Average of method					0.04785	0.00005	0.04790
10	1	2	ρ_{GVM}	0.84031	0.11581	0.00012	0.11593
30	1	2		0.76124	0.06825	0.00007	0.06831
50	1	2		0.55871	0.00345	0.00000	0.00345
75	1	2		0.52155	0.00046	0.00000	0.00046
100	1	2		0.51822	0.00033	0.00000	0.00033
Average of method					0.03766	0.00004	0.03770
Best					ML		
10	1	2	μ_{ml}	0.58543	0.03438	0.00001	0.03439
30	1	2		0.52633	0.01596	0.00000	0.01596
50	1	2		0.47432	0.00552	0.00000	0.00552
75	1	2		0.45632	0.00317	0.00000	0.00317
100	1	2		0.41346	0.00018	0.00001	0.00019

Average of method					0.01184	0.00000	0.01185
10	1	2	μ_{Bayes}	0.35352	0.00216	0.00002	0.00218
30	1	2		0.37433	0.00066	0.00002	0.00067
50	1	2		0.42243	0.00050	0.00001	0.00051
75	1	2		0.52753	0.01626	0.00000	0.01626
100	1	2		0.56211	0.02628	0.00000	0.02628
Average of method					0.00917	0.00001	0.00918
10	1	2	μ_{GVM}	0.48784	0.00772	0.00000	0.00772
30	1	2		0.47532	0.00567	0.00000	0.00567
50	1	2		0.42123	0.00045	0.00001	0.00046
75	1	2		0.42042	0.00042	0.00001	0.00042
100	1	2		0.41131	0.00013	0.00001	0.00014
Average of method					0.00288	0.00000	0.00288
Best					GVM		
n	r%	s%	Parameter	Estimation	Bias ²	Var.	MSE
10	2	1	ρ_{ml}	0.82909	0.10830	0.00011	0.10841
30	2	1		0.74068	0.05793	0.00006	0.05798
50	2	1		0.54762	0.00227	0.00000	0.00227
75	2	1		0.53068	0.00094	0.00000	0.00094
100	2	1		0.52701	0.00073	0.00000	0.00073
Average of method					0.03403	0.00003	0.03407
10	2	1	ρ_{Bayes}	0.52412	0.00058	0.00000	0.00058
30	2	1		0.50984	0.00010	0.00000	0.00010
50	2	1		0.51107	0.00012	0.00000	0.00012
75	2	1		0.87234	0.13864	0.00014	0.13878

100	2	1		0.81338	0.09821	0.00010	0.09831
Average of method					0.04753	0.00005	0.04758
10	2	1	ρ_{GVM}	0.83921	0.11506	0.00012	0.11518
30	2	1		0.76014	0.06767	0.00007	0.06774
50	2	1		0.55761	0.00332	0.00000	0.00332
75	2	1		0.52045	0.00042	0.00000	0.00042
100	2	1		0.51712	0.00029	0.00000	0.00029
Average of method					0.03735	0.00004	0.03739
Best					ML		
10	2	1	μ_{ml}	0.58453	0.03405	0.00001	0.03406
30	2	1		0.52543	0.01573	0.00000	0.01573
50	2	1		0.47342	0.00539	0.00000	0.00539
75	2	1		0.45542	0.00307	0.00000	0.00307
100	2	1		0.41236	0.00015	0.00001	0.00016
Average of method					0.01168	0.00000	0.01168
10	2	1	μ_{Bayes}	0.35262	0.00224	0.00002	0.00227
30	2	1		0.37343	0.00071	0.00002	0.00072
50	2	1		0.42153	0.00046	0.00001	0.00047
75	2	1		0.52663	0.01604	0.00000	0.01604
100	2	1		0.56121	0.02599	0.00000	0.02599
Average of method					0.00909	0.00001	0.00910
10	2	1	μ_{GVM}	0.48694	0.00756	0.00000	0.00756
30	2	1		0.47442	0.00554	0.00000	0.00554
50	2	1		0.43033	0.00092	0.00000	0.00092
75	2	1		0.41252	0.00016	0.00001	0.00016

100	2	1		0.41017	0.00010	0.00001	0.00011
Average of method					0.00286	0.00000	0.00286
Best					GVM		
n	r%	s%	Parameter	Estimation	Bias ²	Var.	MSE
10	2	2	ρ_{ml}	0.82689	0.10686	0.00011	0.10696
30	2	2		0.73848	0.05687	0.00006	0.05693
50	2	2		0.54542	0.00206	0.00000	0.00207
75	2	2		0.52848	0.00081	0.00000	0.00081
100	2	2		0.52481	0.00062	0.00000	0.00062
Average of method					0.03344	0.00003	0.03348
10	2	2	ρ_{Bayes}	0.52192	0.00048	0.00000	0.00048
30	2	2		0.50764	0.00006	0.00000	0.00006
50	2	2		0.50887	0.00008	0.00000	0.00008
75	2	2		0.87014	0.13700	0.00014	0.13714
100	2	2		0.81118	0.09683	0.00010	0.09693
Average of method					0.04689	0.00005	0.04694
10	2	2	ρ_{GVM}	0.83701	0.11358	0.00011	0.11369
30	2	2		0.75794	0.06653	0.00007	0.06660
50	2	2		0.55541	0.00307	0.00000	0.00307
75	2	2		0.51825	0.00033	0.00000	0.00033
100	2	2		0.51492	0.00022	0.00000	0.00022
Average of method					0.03675	0.00004	0.03678
Best					ML		
10	2	2	μ_{ml}	0.83678	0.19078	0.00011	0.19089
30	2	2		0.75771	0.12796	0.00007	0.12802

50	2	2		0.55518	0.02408	0.00000	0.02408
75	2	2		0.51802	0.01393	0.00000	0.01393
100	2	2		0.51469	0.01315	0.00000	0.01315
Average of method					0.07398	0.00004	0.07402
10	2	2	μ Bayes	0.3525	0.00226	0.00002	0.00228
30	2	2		0.37331	0.00071	0.00002	0.00073
50	2	2		0.42141	0.00046	0.00001	0.00046
75	2	2		0.52651	0.01600	0.00000	0.01601
100	2	2		0.56109	0.02595	0.00000	0.02595
Average of method					0.00908	0.00001	0.00909
10	2	2	μ GVM	0.48682	0.00754	0.00000	0.00754
30	2	2		0.4743	0.00552	0.00000	0.00552
50	2	2		0.43021	0.00091	0.00000	0.00092
75	2	2		0.4124	0.00015	0.00001	0.00016
100	2	2		0.41005	0.00010	0.00001	0.00011
Average of method					0.00285	0.00000	0.00285
Best					GVM		

نلاحظ من جدول (3-7) ما يأتي:

عندما $r=1, s=1$:

1. تقدير المعلمة (ρ) هو الافضل عند طريقة الإمكان الأعظم بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.07444) و اقل تحيز و اقل تباين يليه طريقة كرامر فون مايسس بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.07855) , واخيراً طريقة بيز بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.07970) .
2. تقدير المعلمة (μ) هو الافضل عند طريقة كرامر فون مايسس بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.03859) و اقل تحيز و اقل تباين يليه طريقة الإمكان الأعظم بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.06321) , واخيراً طريقة بيز بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.06353).

3. عند حجم عينة (n=10, 30) فان طريقة بيز هي الافضل في تقدير معلمات التوزيع القلبي , وعند حجم عينة (n=50, 75, 100) فان طريقة الإمكان الأعظم هي الافضل تليها طريقة كرامر فون مايسس.

عندما r=1, s=2 :

1. تقدير المعلمة (ρ) هو الافضل عند طريقة الإمكان الأعظم بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.03437) و اقل تحيز و اقل تباين يليه طريقة كرامر فون مايسس بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.03770) , واخيراً طريقة بيز بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.04790) .
2. تقدير المعلمة (μ) هو الافضل عند طريقة كرامر فون مايسس بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.00288) و اقل تحيز و اقل تباين يليها طريقة بيز بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.00918) , واخيراً طريقة الإمكان الأعظم بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.01185) .
3. عند حجم عينة (n=10, 30) فان طريقة بيز هي الافضل في تقدير معلمات التوزيع القلبي , وعند حجم عينة (n=50, 75, 100) فان طريقة الامكان الاعظم هي الافضل تليها طريقة كرامر فون مايسس.

عندما r=2, s=1 :

1. تقدير المعلمة (ρ) هو الافضل عند طريقة الإمكان الأعظم الامكان بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.03407) و اقل تحيز و اقل تباين يليه طريقة كرامر فون مايسس بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.03739) , واخيراً طريقة بيز بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.04758) .
2. تقدير المعلمة (μ) هو الافضل عند طريقة كرامر فون مايسس بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.00286) و اقل تحيز و اقل تباين يليها طريقة بيز بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.00910) , واخيراً طريقة الإمكان الأعظم بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.01168) .
3. عند حجم عينة (n=10, 30) فان طريقة بيز هي الافضل في تقدير معلمات التوزيع القلبي , وعند حجم عينة (n=50, 75, 100) فان طريقة الإمكان الأعظم هي الافضل تليها طريقة كرامر فون مايسس.

عندما $r=2, s=2$:

1. تقدير المعلمة (ρ) هو الافضل عند طريقة الإمكان الأعظم بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.03348) و اقل تحيز و اقل تباين يليه طريقة كرامر فون مايسس بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.03678) , واخيراً طريقة بيز بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.04694) .
2. تقدير المعلمة (μ) هو الافضل عند طريقة كرامر فون مايسس بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.00285) و اقل تحيز و اقل تباين يليها طريقة بيز بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.00909) , واخيراً طريقة الإمكان الأعظم بمعدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.07402) .
3. عند حجم عينة ($n=10, 30$) فان طريقة بيز هي الافضل في تقدير معلمات التوزيع القلبي , وعند حجم عينة ($n=50, 75, 100$) فان طريقة الإمكان الأعظم هي الافضل تليها طريقة كرامر فون مايسس.

ومن جميع تجارب المحاكاة يمكن ان نلخص افضلية طرائق التقدير كما في الجدول (3-8)

جدول (3-8) عدد مرات الافضلية ونسبة الافضلية لكل طريقة من طرائق التقدير ولكل معلمة من معلمات التوزيع القلبي

Parameter Method	ρ	μ	عدد مرات الافضلية	N
ML	13	9	22	50, 75, 100
نسبة الافضلية%	32.5	22.5	55	
Bayes	4	2	6	10, 30
نسبة الافضلية%	10	5	15	
GVM	3	9	12	50, 75, 100
نسبة الافضلية%	7.5	22.5	30	

نلاحظ من جدول (3-8) ما ياتي:

- 1) حققت طريقة الإمكان الأعظم اعلى نسبة افضلية بلغت (55%) عن باقي طرائق التقدير , تليها طريقة كرامر فون مايسس بنسبة افضلية (30%) , واخيرات كانت طريقة بيز بنسبة افضلية (15%) .
- 2) حققت طريقة الإمكان الأعظم نسبة افضلية عند احجام العينات الكبيرة (50, 75, 100) وهذا ما يطابق السلوك النظري لهذه الطريقة.

- (3) حققت طريقة بيز نسبة افضلية عند احجام العينات الصغيرة (10, 30) وهذا ما يطابق السلوك النظري لهذه الطريقة.
- (4) حققت طريقة كرامر فون مايسس نسبة افضلية عند احجام العينات الكبيرة (50, 75, 100) وهذا ما يطابق السلوك النظري لهذه الطريقة.
- (5) من جميع جداول المحاكاة نلاحظ انه كلما زادت نسبة المشاهدات المراقبة قلت معايير المقارنة
- (6) من جميع جداول المحاكاة نلاحظ انه كلما زادت قيمة المعلمة (μ) زاد التحيز وقل متوسط مربعات الخطأ.

3.5 الجانب التطبيقي (Applied side)

ان للطرائق الاحصائية الحديثة الاثر الواضح في تحليل بيانات الطقس والظروف الجوية والتي تلعب دور اساسي في نمذجة بيانات الطقس بالوقت الذي يراقب خبراء الطقس والأرصاد الجوية عدة مؤشرات لتحديد الحالة الجوية، مثل درجات الحرارة، والرطوبة، والضغط الجوي، وهطول الامطار، والكتل الهوائية ، والتي بجانب الطرائق الاحصائية يمكن التوصل الى اهم الظروف الجوية .

تعتبر سرعة الرياح واتجاهها من العوامل المهمة في توقع حالة الطقس. وهناك نوعان من الرياح؛ رياح عمودية لا نشعر بها كثيرا بالقرب من سطح الارض، لكن نرى أثرها في الطقس مثل تكوين السحب وإحداث حالات عدم الاستقرار الجوي. وهناك رياح أفقية، وهي التي نشعر بها حولنا تتغير أنماط الرياح من مكان لآخر على الأرض، وهناك اتجاه سائد تهب فيه الرياح غالباً في مكان ما، وهو ما يسمى بالرياح السائدة (Prevailing Winds)، إلا أن الرياح السائدة تتغير من منطقة لأخرى بحسب موقع المنطقة والموسم في ذلك الوقت. ويعتبر معرفة اتجاه الرياح مهم لعدة قطاعات، منها قطاع الانشاءات والقطاع الزراعي، وهناك عدة فوائد لمعرفة اتجاه الرياح المحلية الخاصة بمنطقة معينة.

في هذا الفصل تم استعمال بيانات عن اتجاه الرياح باستعمال طريقة التقدير الافضل وهي طريقة الامكان الاعظم اذ تم ملائمة البيانات للتوزيع القلبي وتقدير معاملات التوزيع .

3.6 إتجاه الرياح (Wind Direction)

يتم الإبلاغ عن اتجاه الرياح من خلال الاتجاه الذي ينبع منه. على سبيل المثال، تهب رياح شمالية من الشمال إلى الجنوب وعادة ما يتم الإبلاغ عن اتجاه الرياح باستعمال الاتجاهات الأساسية ويتم قياس اتجاه الرياح بالدرجات في اتجاه عقارب الساعة من الشمال. وبالتالي، فإن الرياح التي تهب من الشمال لديها اتجاه رياح 0 درجة (مساوية 360 درجة عند إتمام دورة كاملة)، والرياح التي تهب من الشرق لديها اتجاه رياح 90 درجة، بينما الرياح التي تهب من الجنوب لديها اتجاه رياح 180 درجة، والرياح التي تهب من الغرب لديها اتجاه رياح 270 درجة. ويتم قياس اتجاهات الرياح في الدرجات من 0 درجة إلى 360 درجة ولكن يمكن التعبير عنها بدلاً من ذلك باستعمال الدرجات من - 180 درجة إلى 180 درجة [18].

يمكن استعمال مجموعة متنوعة من الأدوات لقياس اتجاه الرياح، مثل كم الريح و دوارة الرياح كل من هذه الأدوات تعمل عن طريق التحرك للحد من مقاومة الهواء. الطريقة التي تشير بها دوارة الطقس بسبب الرياح السائدة تشير إلى الاتجاه الذي تهب منه الرياح. الفتحة الكبيرة لكم الرياح يواجه الاتجاه الذي تهب الرياح منه، أما ذيلها مع فتحة صغيرة لكم الريح يشير إلى نفس الاتجاه كما تهب الرياح. وتسمى الأدوات الحديثة المستخدمة لقياس سرعة الرياح واتجاهها مقاييس سرعة الرياح وكمات الرياح، على التوالي. وتستخدم صناعة طاقة الرياح هذه الأنواع من الأدوات، سواء لتقييم موارد الرياح أو للتحكم في التوربينات. عندما تكون هناك حاجة إلى تردد قياس عالٍ (كما هو الحال في تطبيقات البحوث)، يمكن قياس الرياح من خلال سرعة انتشار إشارات الموجات فوق الصوتية أو من خلال تأثير التهوية على مقاومة سلك ساخن. هناك نوع آخر لقياس سرعة الرياح حيث يستعمل أنابيب البيوت التي تستفيد من فرق الضغط بين الأنبوب الداخلي والأنبوب الخارجي التي تتعرض للرياح لتحديد الضغط الديناميكي؛ الذي يستعمل لحساب سرعة الرياح وفي الحالات التي لا تتوفر فيها الأدوات الحديثة يمكن استعمال السبابة لمعرفة اتجاه الرياح. ويتم ذلك عن طريق تبلييل الأصبع وتوجيهه إلى الأعلى. جانب الأصبع الذي يشعر بالبرودة هو تقريبًا الاتجاه الذي تهب منه الرياح وينجم الإحساس بالبرودة عن زيادة معدل تبخر الرطوبة على الإصبع بسبب تدفق الهواء عبر الإصبع وبالتالي فإن «تقنية الإصبع» لمعرفة اتجاه الرياح لا تعمل بشكل جيد في ظروف رطوبة جدًا أو ساخنة جدًا. يستعمل نفس المبدأ لقياس نقطة الندى باستعمال جهاز البسكيرومتر المعلق وهو أداة أكثر دقة من الإصبع البشري. هناك تقنية أخرى بدائية لقياس اتجاه الرياح هو أخذ القليل من العشب وإسقاطه؛ اتجاه مكان وقوع العشب هو الاتجاه الذي تهب الرياح منه. وغالبًا ما تُستخدم هذه التقنية من قبل لاعبي الغولف لأنها تسمح لهم بقياس قوة الرياح. [28]

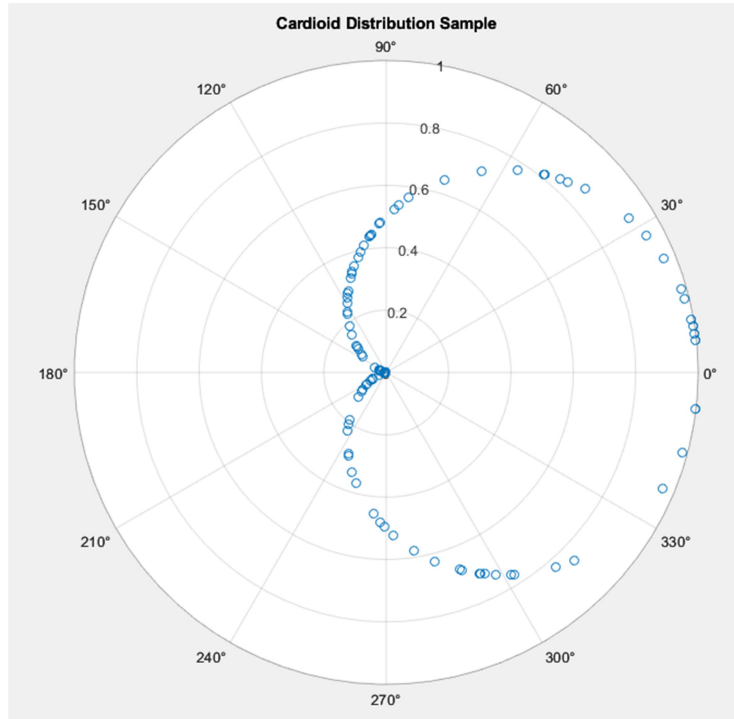
3.7 البيانات التطبيقية (Application data)

تم الحصول على بيانات تمثل زوايا اتجاه الرياح في العراق من الهيئة العامة للأمناء الجوية والرصد الزلزالي العراقية لسنة (2022) إذ ان البيانات التي تم الحصول عليها عبارة عن (100) مشاهدة قيست بالدرجة في الساعة 6 صباحاً وفي الساعة الثانية عشر ليلاً ، وقد رتبنا هذه القياسات t_i في الجدول (3-9)

جدول (3-9) اتجاهات الرياح في العراق بالرادان $t_i rad$ وبالدرجات $t_i deg$

i	$t_i deg$	$t_i rad$	i	$t_i deg$	$t_i rad$	i	$t_i deg$	$t_i rad$	i	$t_i deg$	$t_i rad$
1	4	0.07	31	114	1.99	61	236	4.12	91	336	5.87
2	11	0.20	32	121	2.12	62	244	4.26	92	336	5.87
3	12	0.22	33	123	2.14	63	245	4.27	93	342	5.97
4	13	0.22	34	126	2.20	64	250	4.37	94	345	6.01
5	17	0.29	35	127	2.21	65	252	4.39	95	345	6.02
6	19	0.34	36	137	2.39	66	254	4.44	96	346	6.03
7	27	0.48	37	137	2.40	67	256	4.46	97	346	6.03
8	35	0.61	38	141	2.46	68	268	4.67	98	346	6.03
9	35	0.61	39	152	2.65	69	271	4.72	99	348	6.06
10	43	0.75	40	158	2.76	70	271	4.74	100	350	6.10
11	46	0.80	41	160	2.80	71	272	4.74			
12	47	0.82	42	169	2.95	72	273	4.76			
13	50	0.87	43	170	2.97	73	273	4.76			
14	51	0.89	44	175	3.05	74	276	4.81			

15	54	0.94	45	176	3.08	75	281	4.90			
16	57	0.99	46	180	3.13	76	285	4.98			
17	59	1.02	47	182	3.18	77	286	5.00			
18	62	1.08	48	191	3.34	78	288	5.03			
19	67	1.17	49	197	3.44	79	293	5.12			
20	71	1.24	50	197	3.44	80	293	5.12			
21	81	1.41	51	198	3.45	81	297	5.17			
22	88	1.53	52	205	3.57	82	299	5.22			
23	90	1.58	53	205	3.57	83	303	5.28			
24	92	1.60	54	211	3.68	84	306	5.34			
25	92	1.60	55	211	3.68	85	321	5.60			
26	93	1.62	56	222	3.87	86	326	5.69			
27	99	1.73	57	228	3.97	87	329	5.74			
28	100	1.74	58	233	4.06	88	330	5.75			
29	100	1.75	59	236	4.12	89	330	5.76			
30	103	1.80	60	236	4.12	90	335	5.84			



شكل (3-6) البيانات الحقيقية

والجدول التالي يبين الاحصاءات الوصفية لبيانات زاوية اتجاه الرياح:

جدول (3-10) الاحصاءات الوصفية لبيانات اتجاه الرياح

Index	Value
Mean	3.3180
Std. Error of Mean	.18663
Median	3.4450
Mode	4.12
Std. Deviation	1.86630
Variance	3.483
Skewness	-.126
Std. Error of Skewness	.241
Kurtosis	-1.291
Std. Error of Kurtosis	.478
Range	6.03
Minimum	.07
Maximum	6.10

نلاحظ من جدول (3-10) ان الزاوية الشائعة لاتجاه الرياح هي الزاوية (4.12) واقل زاوية اتجاه هي (0.07)

3.8 اختبار ملائمة البيانات Data Fitting

تم اختبار البيانات باستعمال برنامج Matlab للتأكد من استقلالية البيانات وملائمتها للتوزيع القلبي كالاتي:

3.8.1 اختبار استقلالية البيانات Data Indpendence

لغرض اختبار استقلالية البيانات تم استعمال اختبار Box Price (Ljung-Box) وكانت النتائج كما في الجدول (3-11)

جدول (3-11) نتائج اختبار البيانات الحقيقية

Distribution	Ljung-Box Statistic	P-value
Cardioid	0.67355	0.98955

يتضح من جدول (3-11) بان القيمة الاحتمالية لاحصاءة Ljung-Box البالغة (0.98955) اكبر من مستوى المعنوية (5%) وهذا يدل على ان القياسات مستقلة .

3.8.2 اختبار ملائمة البيانات (Data Fitting)

تم اختبار القياسات التي تم الحصول عليها باستعمال احصاءة Kuiper (K) واحصاءة Watson(W) كما في المعادلات (2-44) و (2-45) لغرض ملائمة البيانات الحقيقية عند المعلمات الافتراضية ($\rho=0.5, \mu=\pi/2$) وباستعمال طريقة الامكان الاعظم وكالاتي:

وكانت نتائج الاختبار كما في الجدول (3-12) الآتي:

جدول (3-12) نتائج اختبار البيانات الحقيقية

Distribution	\hat{p}	$\hat{\mu}$	K	W
Cardioid	0.55658	1.55418	0.05689	0.01611
SE	(0.13257)	(0.66781)		
Von-Misses	0.67811	1.74220	0.09674	0.08242
SE	(0.14118)	(0.68678)		

اذ يتضح من جدول (3-11) ان التوزيع القلبي كان اكثر ملائمة للبيانات الحقيقية من توزيع Von-mises لانه حقق اقل معايير المقارنة (K, W).

3.9 تحليل البيانات (Data analysis)

بينت نتائج تجارب المحاكاة ان افضل طريقة لتقدير معالم التوزيع القلبي هي طريقة الامكان الاعظم , لذلك سيتم تطبيق هذه الطريقة على البيانات الحقيقية لاستخراج قيم دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع لغرض ايجاد احتمالات زوايا اتجاهات الرياح وكانت النتائج كالآتي :

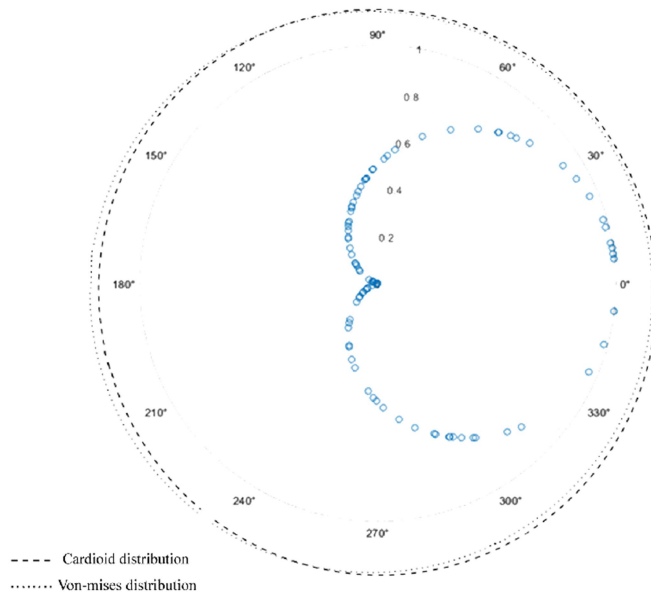
جدول (3-13) البيانات الحقيقية وقيم دالة الكثافة الاحتمالية المقدره بطريقة الامكان الاعظم

$t_i rad$	$f(t_i)$	$\hat{f}(t_i)$
0.07	0.24919	0.17175
0.20	0.24920	0.17181
0.22	0.24969	0.17258
0.22	0.25048	0.17278
0.29	0.25091	0.17310
0.34	0.25165	0.17322
0.48	0.25215	0.17336
0.61	0.25259	0.17350
0.61	0.25359	0.17368
0.75	0.25412	0.17391

0.80	0.25523	0.17519
0.82	0.25779	0.17562
0.87	0.25933	0.17671
0.89	0.26251	0.27999
0.94	0.26314	0.28020
0.99	0.26587	0.28102
1.02	0.26593	0.28119
1.08	0.26776	0.28144
1.17	0.26903	0.28162
1.24	0.26915	0.28433
1.41	0.27044	0.28521
1.53	0.27056	0.28628
1.58	0.27151	0.29385
1.60	0.27154	0.29436
1.60	0.27323	0.29752
1.62	0.27409	0.29846
1.73	0.27581	0.30036
1.74	0.28064	0.30881
1.75	0.28079	0.31046
1.80	0.28226	0.31207
1.99	0.28231	0.31259
2.12	0.28354	0.31291
2.14	0.28375	0.31326
2.20	0.28440	0.31626
2.21	0.28575	0.31686
2.39	0.28611	0.31705
2.40	0.28643	0.31801
2.46	0.28645	0.31803
2.65	0.28648	0.31798
2.76	0.28645	0.31787
2.80	0.28631	0.31780
2.95	0.28593	0.31574
2.97	0.28591	0.31574
3.05	0.28509	0.31568
3.08	0.28494	0.31564
3.13	0.28481	0.31528
3.18	0.28449	0.31498

3.34	0.28419	0.31482
3.44	0.28408	0.31467
3.44	0.28360	0.31467
3.45	0.28360	0.31490
3.57	0.28368	0.31582
3.57	0.28379	0.31629
3.68	0.28388	0.31667
3.68	0.28502	0.31679
3.87	0.28575	0.31709
3.97	0.28580	0.31719
4.06	0.28612	0.31784
4.12	0.28616	0.31796
4.12	0.28640	0.31826
4.12	0.28648	0.31831
4.26	0.28560	0.31815
4.27	0.28464	0.31796
4.37	0.28455	0.31768
4.39	0.28194	0.31553
4.44	0.27665	0.31374
4.46	0.27564	0.31313
4.67	0.27479	0.31250
4.72	0.27403	0.31207
4.74	0.27310	0.31082
4.74	0.27284	0.31050
4.76	0.26478	0.30807
4.76	0.26406	0.30670
4.81	0.26388	0.30596
4.90	0.26090	0.30587
4.98	0.26027	0.30332
5.00	0.25903	0.30273
5.03	0.25838	0.30158
5.12	0.25764	0.29912
5.12	0.25711	0.29352
5.17	0.25675	0.28945
5.22	0.25572	0.28788
5.28	0.25560	0.28513
5.34	0.25555	0.28513

5.60	0.25553	0.28501
5.69	0.25515	0.27965
5.74	0.25413	0.27949
5.75	0.25162	0.27724
5.76	0.25080	0.27600
5.84	0.25059	0.27574
5.87	0.25033	0.27488
5.87	0.25031	0.27375
5.97	0.25023	0.27328
6.01	0.25010	0.27323
6.02	0.24992	0.27295
6.03	0.24972	0.27194
6.03	0.24958	0.27187
6.03	0.24919	0.27171
6.06	0.24919	0.27171
6.10	0.24920	0.27169



شكل (3-7) منحنى التوزيع القلبي وتوزيع Von-mises والبيانات الحقيقية بالاحداثي القطبي

يتضح من جدول (3-13) والاشكال (3-7) و (3-8) ما يأتي:

الفصل الثالث _____ الجانب التجريبي والتطبيقي

- 1) قيم دالة الكثافة الاحتمالية المقدره بطريقة الامكان الاعظم ملائمة لقيم دالة الكثافة الاحتمالية الحقيقية .
- 2) منحى دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع القلي المقدر بطريقة الامكان الاعظم اكثر ملائمة للبيانات الحقيقية .
- 3) عندما تكون زاوية اتجاه الرياح (6.10) درجة فهناك احتمال ان تكون زيادة في شدة الرياح بنسبة 27%. وعندما تكون زاوية اتجاه الرياح (0.07) درجة فهناك احتمال ان تكون زيادة في شدة الرياح بنسبة 17%.

الفصل الرابع

الاستنتاجات

والتوصيات

4.1 الأستنتاجات (Conclusions)

من خلال ماتم التوصل إليه البحث من نتائج في الجانبين التجريبي والتطبيقي تم التوصل إلى الأستنتاجات الآتية:

- (1) التوزيع القلبي أكثر ملاءمة ومرونة للبيانات الدائرية من توزيع فون مايسس.
- (2) تفوق طريقة الإمكان الأعظم على باقي طرائق التقدير , تليها طريقة كرامر فون ومن ثم كانت طريقة بيز.
- (3) تفوق طريقة الإمكان الأعظم و كرامر فون مايسس عند احجام العينات الكبيرة (50, 75, 100) بينما حققت طريقة بيز نسبة افضلية عند أحجام العينات الصغيرة (30, 10) .
- (4) كلما زادت نسبة المشاهدات المراقبة قلت معايير المقارنة وزادت دقة طرائق التقدير
- (5) كلما زادت قيمة المعلمة (μ) زاد التحيز وقل متوسط مربعات الخطأ.
- (6) كلما زادت قيمة المعلمة (ρ) زاد التحيز وقل متوسط مربعات الخطأ.
- (7) قيم دالة الكثافة الاحتمالية المقدره بطريقة الإمكان الأعظم ملائمة لقيم دالة الكثافة الاحتمالية الحقيقية للبيانات الحقيقية.
- (8) منحى دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع القلبي المقدر بطريقة الإمكان الأعظم أكثر ملاءمة للبيانات الحقيقية .
- (9) كلما زادت زاوية اتجاه الرياح زادت احتمالية هبوب رياح قوية.
- (9) ان الزاوية الاكثر شيوعا هي الاعلى احتمالية وهي(4.12)والزاوية الاقل شيوعا هي الاقل احتمالية وهي (0.07).

4.2 التوصيات (Recommendations)

من خلال ماتم التوصل اليه من استنتاجات نوصي بالآتي:

- 1) مقارنة التوزيع القلبي مع توزيعات دائرية أخرى مثل توزيع كاما الدائري وتوزيع ديريشليه الدائري.
- 2) التخطيط لإنشاء مصدات الرياح لتفادي خطر الرياح القوية أو التقليل من الأتربة والأوساخ التي تحملها وتجنب الروائح غير المرغوب فيها أو الدخان أو الهواء الملوث.
- 3) معرفة زوايا اتجاه الرياح من قبل المزارعين لتجنب انتقال المواد إلى محاصيل أخرى، وكذلك يفيد اتجاه الرياح عند ري المزروعات، أو بذر البذور، أو حراثة وتقليب التربة.
- 4) معرفة زوايا اتجاه الرياح من قبل الهيئة العامة للأنواء الجوية والرصد الزلزالي العراقية لمعرفة خصائص الرياح ، كما يساعد اتجاه الرياح في تحديد أنماط الطقس وتتبعها والتنبؤ بها، مثل تحديد اتجاه حركة المنخفضات الجوية، وانتقال هطول الأمطار من منطقة لأخرى

المصادر

- 1) Abe, Toshihiro, Pewsey, Arthur, Shimizu, Kunio , (2009), " On Papakonstantinou's extension of the cardioid distribution", Statistics and Probability Letters 79 (2009) 2138_2147.
- 2) Afsharinejad, A., Nikooienejad, A., & Soltani, A. R. (2020). Circular data classification using angular regression: Application to wind direction modeling. Journal of Applied Statistics, 47(6), 1121-1139. doi: 10.1080/02664763.2019.1661157
- 3) Aggarwal, C. C. (2019). Data Mining: The Textbook. Springe.
- 4) Ahsanullah , Mohammed , (2018), " Sine-Skewed Cardioid Distribution ", cSpas Editions, Saint-Louis - Calgary 2018 H. Seydi et al (Eds.) A Collection of Papers in Mathematics and Related Sciences, a festschrift in honour of the late Galaye Dia. Doi : 10.16929/sbs.
- 5) Andersen, P. K., & Gill, R. D. (2020). Cox's regression model for counting processes: A large sample study. The Annals of Statistics, 48(1), 186-205. doi: 10.1214/19-AOS1792
- 6) Dattatreya Rao AV ; Girija SVS ; Phani Y , (2011), " Differential Approach to Cardioid Distribution ", Computer Engineering and Intelligent Systems www.iiste.org ISSN 2222-1719 (Paper) ISSN 2222-2863 (Online) Vol 2, No.8, 2011.
- 7) Dattatreya Rao AV, (2011), " Differential Approach to Cardioid Distribution ", Computer Engineering and Intelligent Systems www.iiste.org ISSN 2222-1719 (Paper) ISSN 2222-2863 (Online) Vol 2, No.8.
- 8) Fisher, N. I. (2021). Descriptive and inferential circular statistics: An annotated bibliography. Circular Statistics in R, 189-201. doi: 10.1201/9780429453490-9.
- 9) Gelman, A., Carlin, J. B., Stern, H. S., Dunson, D. B., Vehtari, A., & Rubin, D. B. (2021). Bayesian Data Analysis (3rd ed.). CRC Press.
- 10) Gelman, A., Carlin, J. B., Stern, H. S., Dunson, D. B., Vehtari, A., & Rubin, D. B. (2021). Bayesian Data Analysis (3rd ed.). CRC Press.
- 11) Ghosh, S., & Mukhopadhyay, S. (2021). Analysis of Right-Censored Data: A Review. In Advances in Statistical Modeling and Inference (pp. 199-230). Springer. doi: 10.1007/978-981-15-6574-5_7
- 12) Gu, M.G., Pan, W., Wang, X., Kim, M.Y. (2012). Analysis of doubly censored survival data with application to an AIDS clinical study. Computational Statistics & Data Analysis, 56(6), 1719-1727. This paper

discusses the analysis of doubly censored survival data and provides an application in the context of an AIDS clinical study.

- 13) Helske, J., & Helske, S. (2020). Introduction to Survival Analysis with Censored Data. arXiv preprint arXiv:2002.08508.
- 14) Howson, C. and Urbach, P. (2005). Scientific Reasoning: the Bayesian Approach .3rd edition, Open Court Publishing Company. ISBN 978-0-8126-9578-6
- 15) Ibrahim, J.G., Chen, M.H., Sinha, D. (2001). Bayesian Survival Analysis. Springer Science & Business Media. This book discusses Bayesian approaches for analyzing censored data, including interval-censored data.
- 16) Jammalamadaka, S. R. and SenGupta, A. (2001). Topics in Circular Statistics. Singapore: World Scientific. '
- 17) Klein, J. P., & Moeschberger, M. L. (2003). Survival Analysis: Techniques for Censored and Truncated Data (2nd ed.). Springer Science & Business Media.
- 18) Kruschke, J. K. and Vanpaemel, W. (2015). Bayesian estimation in hierarchical models. In: J. R. Busemeyer, Z. Wang, J. T. Townsend, and A. Eidels (Eds.), The Oxford Handbook of Computational and Mathematical Psychology, pp. 279-299. Oxford, UK: Oxford University Press.
- 19) Kutz , Myer (2015). Handbook of Measurement in Science and Engineering. John Wiley & Sons. .p: 737-. ISBN:978-1-118-44697-3.
- 20) Lawless, J. F. (2003). Statistical Models and Methods for Lifetime Data (2nd ed.). John Wiley & Sons.
- 21) Li, G., Li, Q., & Yin, G. (2021). Analysis of Doubly Interval-Censored Data. Journal of the American Statistical Association, 116(535), 1-14.
- 22) Mamadou , Cherif; Traor'e, Moctar; Diallo , Moumouni; Samb Lo, Gane, Ahsanullah , Mouhamad, Okereke Lois Chinwendu, (2018), "ON SOME PROPERTIES OF THE NEW SINE-SKEWED CARDIOID DISTRIBUTION" , arXiv:1811.10603v1 [stat.OT] 25 Nov 2.
- 23) Mardia, K. V., & Jupp, P. E. (2009). Directional Statistics (2nd ed.). Wiley
- 24) Mardia, K. V., & Jupp, P. E. (2021). Directional Statistics. John Wiley & Sons.
- 25) Matematica , Colegiado de, (2017), "A new extended Cardioid model: an application to wind data: arXiv:1712.01824v1 [stat.ME]
- 26) Pawar, P. M., Thakare, V. M., & Singh, R. (2019). Statistical Methods for Circular Data: A Review. Journal of Statistics and Management Systems, 22(3), 413-446. doi: 10.1080/09720510.2019.1604626

- 27) Pawar, P. M., Thakare, V. M., & Singh, R. (2020). Statistical methods for circular data: A review. *Journal of Statistics and Management Systems*, 23(3), 401-434. doi: 10.1080/09720510.2020.1754925
- 28) Pewsey, A., Neuhäuser, M., & Ruxton, G. D. (2013). *Circular Statistics in R*. Oxford University Press.
- 29) Pewsey, A., Neuhäuser, M., & Ruxton, G. D. (2020). *Circular Statistics in R*. Oxford University Press.
- 30) Raymond A. Serway؛ John W. Jewett (2018). *Physics for Scientists and Engineers*. Cengage Learning.533 .-. ISBN:978-1-337-67171-2.
- 31) Salavati , Erfan , (2019), " An Extension of the Cardioid Distributions on Circle", *AUT Journal of Mathematics and Computing AUT J. Math. Com.*, 2(1) (2021) 45-52 , DOI: 10.22060/ajmc.2020.18285.1029.
- 32) Senanayake; Ransalu and Ramo, Fabio ,(2018), " Directional grid maps: modeling multimodal angular uncertainty in dynamic environments", arXiv:1809.00498v1 [cs.RO]
- 33) SHAKERI, NEZHAT & GROVER , GURPRIT , (2014), " Estimation of Survivorship Function Based on Doubly Censored Data with Application to HIV/AIDS", *Communications in Statistics—Theory and Methods*, 39: 777–790, 2010 Copyright © Taylor & Francis Group, LLC ISSN: 0361-0926 print/1532-415X online DOI: 10.1080/03610920902796049.
- 34) Silva, Pedro Sa ; Trigo, António, Varajão, João ; Pinto, Tiago , (2010) , " Simulation – Concepts and Applications" , M.D. Lytras et al. (Eds.): WSKS 2010, Part II, CCIS 112, pp. 429–434. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2010.
- 35) Sindhu , Tabassum, (2011), " Doubly Censored Data from Two-Component Mixture of Inverse Weibull Distributions: Theory and Applications " , *Journal of Modern Applied Statistical Methods*, Volume 15 | Issue 2 Article 21 .
- 36) Tan, X., Zhang, W., & Shen, W. (2021). Bayesian Estimation of Left-Censored Data: A Review. *Bayesian Analysis*, 16(1), 227-253. doi: 10.1214/20-BA1192
- 37) V. Paula Fernanda; C. Nascimento, Abraão D.; . A. Amaral Getúlio J ; & M. Cordeiro Gauss , (2021), " Generalized Cardioid Distributions for

-
-
- Circular Data Analysis", *Stats* 2021, 4, 634–649.
<https://doi.org/10.3390/stats4030038>.
- 38) V. Paula, Fernanda, Abraão D. C. Nascimento 2 & Getúlio J. A. Amaral. , (2017), "A new extended Cardioid model: an application to wind data", arXiv:1712.01824v1 [stat.ME] .
- 39) V.J.DEVARAAJ ; S.V.S.GIRIJA; A.V. DATTATREYA RAO, (2022), " Estimation of Parameters in Cardioid Distribution From Censored Samples ", (*IJIRSE*) *International Journal of Innovative Research in Science & Engineering ISSN (Online) 2347-3207*.
- 40) Wang , Min-zhen; Shimizu , Kunio , (2012), " On applying Mobius transformation to cardioid random variables", *Statistical Methodology* 9 (2012) 604–614 .
- 41) Wang, X., & Liu, Y. (2021). Analysis of Interval-Censored Data: A Review. *Statistical Methods in Medical Research*, 30(9), 2806-2822. doi: 10.1177/0962280221998820
- 42) Zhang, M., Cui, L., & Li, G. (2021). Semiparametric Estimation for Interval-Censored and Doubly Censored Data. *Journal of the American Statistical Association*, 116(533), 739-752. doi: 10.1080/01621459.2019.1707337.

Cardioid distribution is a special case of von Mises distribution and has many important applications in different fields. It is one of the important distributions in modeling circular data, as the values are restricted to a circular range, such as angles or directions, such as wind directions, compass bearings, and animal movement directions. Cardioid distribution provides a simple and flexible framework to capture the circular nature of these data. It is a valuable tool for modeling data with circular characteristics. It provides a convenient way to describe these data and draw conclusions about them. It can help to reveal meaningful patterns and relationships in circular data sets.

This thesis aims to estimate the parameters of cardioid distribution under doubly censored data by using three estimation methods: maximum likelihood method, Bayesian method, and Cramer-von Mises method. The comparison between these methods is carried out using Monte Carlo simulation experiments to reach the best estimation method. It has been found that maximum likelihood method is the best among the other estimation methods, especially for large sample sizes ($n=50, 75, 100$), followed by Cramer-von Mises method, and finally Bayesian method for small sample sizes ($n=10, 30$).

The second objective is to use real data representing wind direction in Iraq, which were obtained from the General Authority of Meteorology and Seismic Monitoring of Iraq for the year (2022). These data consist of (100) observations measured in degrees at 6:00 AM and 12:00 AM to estimate the parameters of cardioid distribution using maximum likelihood method. It has been found that the estimated probability density function values are suitable for the true probability density function values. The probability density function curve of cardioid distribution estimated by maximum likelihood method is more suitable for real data. When the wind direction angle is (6.10) degrees, there is a 27% probability of an increase in wind intensity. When the wind direction angle is (0.07) degrees, there is a 17% probability of an increase in wind intensity.

The most common angle is the most probable, which is (4.12), and the least common angle is the least probable, which is (0.07).



Republic of Iraq
Ministry of Higher Education
And Scientific Research
University of Karbala
Faculty of Management
And Economics
Department of Statistics
Graduate Studies



Estimation of Cardioid Distribution Parameters for Doubly Censored Samples with an Application

A thesis

Submitted to the council of the college of Administration
& Economics\ University of Karbala as partial fulfillment of the
requirements for the Master degree in Statistics Sciences

By

Hossam Jabbar Jawad Al-Sarifi

Supervision

Prof. Dr. Shorouq Abdul-Reda Saeed Al-Sabbah

2023 A.D.

1445 A.H.