جمهوريـة العراق
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جـامعة كـربلاء
كلية الإدارة والاقتصـاد
قســم الإحصاء
الدراسات العليا

تقدير التوزيع الثلاثي الضبابي المستند على الدالة الكمية

رسالة

مقدمه الى مجلس كلية الإداره والاقتصاد في جامعة كربلاء

وهي جزء من متطلبات الحصول على درجة الماجستير في علوم الإحصاء

تقدمت بها

شمس ناجي عليوي

إشـــراف

أ. د. مهدي وهاب نعمة نصر الله

1446هـ 2024 م

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُوٓاْ إِذَا قِيلَ لَكُمۡ تَفَسَّحُواْ فِي ٱلۡمَجَٰلِسِ فَٱفۡسَحُواْ
يَفۡسَحِ ٱللَّهُ لَكُمۡۖ وَإِذَا قِيلَ ٱنشُزُواْ فَٱنشُزُواْ يَرۡفَعِ ٱللَّهُ ٱلَّذِينَ
ءَامَنُواْ مِنكُمۡ وَٱلَّذِينَ أُوتُواْ ٱلۡعِلۡمَ دَرَجَٰتٖۚ وَٱللَّهُ بِمَا
تَعۡمَلُونَ خَبِيرٞ ١١

صدق الله العلي العظيم

﴿ المجادلة: الآية ١١ ﴾

إقرار المشرف

أشهد بأن إعداد هذه الرسالة الموسومة (تقدير التوزيع الثلاثي الضبابي المستند على الدالة الكمية) والتي تقدمت بها الطالبة " شمس ناجي عليوي " قد جرى بإشرافي في قسم الاحصاء - كلية الادارة والاقتصاد - جامعة كربلاء ، وهي جزء من متطلبات نيل درجة الماجستير في علوم الاحصاء.

أ. د. مهدي وهاب نعمة نصر الله

التاريخ: / / 2024

توصية رئيس قسم الاحصاء

بناءً على توصية الاستاذ المشرف، أرشح الرسالة للمناقشة.

أ. م.د. ايناس عبد الحافظ محمد

رئيس قسم الاحصاء

التاريخ: / / 2024

إقرار الخبير اللغوي

أشهد بأن الرسالة الموسومة (تقديرُ التوزيع الثلاثي الضبابي المستند على الدالة الكمية) جرى مراجعتها من الناحية اللغوية تحت اشرافي اذ أصبحت خالية من الاخطاء اللغوية ولأجله وقعت.

الخبير اللغوي

م. د. صلاح مهدي جابر

إقرار لجنة المناقشة

نشهد نحن رئيس وأعضاء لجنة المناقشة بأننا قد اطلعنا على الرسالة الموسومة (تقدير التوزيع الثلاثي الضبابي المستند على الدالة الكمية) والمقدمة من قبل الطالبة "شمس ناجي عليوي" وناقشنا الطالبة في محتوياتها وفيما له علاقة بها ، ووجدنا بأنها جديرة بنيل درجة الماجستير في علوم الإحصاء بتقدير (   ) .

أ. د. شروق عبد الرضا سعيد السباح	ا.م.د مشتاق كريم عبد الرحيم
رئيساً	عضواً
/ / 2024	/ / 2024
أ. م .د بهاء عبد الرزاق قاسم	أ. د. مهدي وهاب نعمة نصر الله
عضواً	عضواً ومشرفاً
/ / 2024	/ / 2024

إقرار رئيس لجنة الدراسات العليا

بناء على اقرار الخبيرين العلميين والخبير اللغوي على رسالة الماجستير للطالبة " شمس ناجي عليوي " الموسومة بـ (تقدير التوزيع الثلاثي الضبابي المستند على الدالة الكمية) ارشح هذه الرسالة للمناقشة.

أ. د. علي احمد فارس
رئيس لجنة الدراسات العليا
معاون العميد للشؤون العلمية والدراسات العليا
/ /2024

مصادقة مجلس الكلية

صادق مجلس كلية الادارة والاقتصاد/ جامعة كربلاء على قرار لجنة المناقشة.

أ.م. د.هاشم جبار الحسيني

عميد كلية الادارة والاقتصاد- جامعة كربلاء

/ / 2024

الإهداء

قربة لله تعالى ، من بيده كل شيء، الحمد والشكر أولاً وآخراً، فهو الموفق والمعين في كل خطوة وفي كل علم.

إلى رسولنا الكريم ﷴ ﷺ، خير من حمل الرسالة وهدى البشرية بنور الإسلام، وإلى آل بيته الطاهرين الذين حفظوا الاسلام وأضاءوا دروب الهداية.

إلى أبي العزيز، الذي كان لي السند والدعم الدائم، بمحبته ورعايته وصبره.

إلى أمي الحبيبة، التي كانت لي النور ، ودعاؤها الصادق ظلَّ يرافقني في كل مسيرتي.

إلى إخي وأختي، الذين كانوا لي العون في الأوقات الصعبة، وشاركوني الفرحة في الأوقات السعيدة.

إلى زوجي العزيز، شريكي في الحياة، والذي لم يبخل عليّ بدعمه ومساندته في كل خطوة.

إلى كل من قدّم لي نصيحة أو مشورة، ولكل من ساعدني ولو بكلمة، أقدّم لهم خالص الشكر والتقدير.

شمس...

شكر وامتنان

بسم الله الرحمن الرحيم

(وَمَن يَشْكُرْ فَإِنَّمَا يَشْكُرُ لِنَفْسِهِ)

صدق الله العلي العظيم ((سورة لقمان : الآية ١٢))

الحمد الله تعالى حمداً كثيراً طيباً مباركاً ملئ السموات والأرض على ما اكرمني به من إتمام هذه الرسالة .يطيب لي ويشرفني أن أتقدم بجزيل شكري وعظيم امتناني الى الأستاذ الدكتور مهدي وهاب نصر الله لتحمله عناء الاشراف على هذه الرسالة ومتابعته المستمرة لي بالنصح والإرشاد والتوجيه

، كما أتقدم بالشكر والتقدير الى اعظاء لجنة المناقشة لما سيبدوه من ملاحظات قيمة تغني الرسالة.

كما أتقدم بالشكر والامتنان لرئيس القسم الدكتورة ايناس عبد الحافظ البصري .

كما أتقدم بجزيل الشكر والثناء الى السبب الرئيس في كل ما فيه لعائلتي وأهلي واصدقائي فهم من ساندوني ودعموني في ان أكون كما انا عليه الآن فشكراً لكم من صميم قلبي يامن كنتم شموعاً تضيء لي دربي .

كما أتقدم بالشكر والتقدير الى عمادة الكلية ورئاسة القسم والأساتذة كافة الذين مدوا يد العون وكانوا النور الذي اضاء دربي .

الباحثة...

قائمة المحتويات

قائمة الجداول

قائمة الاشكال

(3-23)	منحنى دالة البقاء للتوزيع المقترح والمقدر بطريقة اعظم مسافة متباعدة	102

المستخلص

في نظرية التوزيعات الاحتماليه، يستعمل مصطلح المشاهدات المتناقصة برتابة للإشارة إلى دالة توزيع احتمالي أو دالة كثافة احتمالية تكون غير متزايدة. بمعنى آخر، تكون هذه الدالة إما في حالة تناقص مستمر أو تبقى ثابتة عند الانتقال بين النقاط في المجال الذي تُعرّف فيه.

هدفت الرسالة الى تعميم توزيع معكوس ليندلي بمعلمة واحدة (One Parameter Inverse Lindley Distribution) ليتناسب مع المشاهدات المتنازلة برتابة من خلال مبدأ الدالة الكمية (Quantile function) بالاعتماد على صنف التوزيع T-R{Y} لغرض وايجاد صنف التوزيع T-IR{Y} وكذلك ايجاد توزيع جديد من هذا الصنف باعتبار ان توزيع المتغير الأول T يتبع التوزيع الاسي بمعلمة واحدة (Exponential Distribution) والمتغير R له توزيع معكوس ليندلي بمعلمة واحدة والمتغير Y له التوزيع الأسي المعكوس بمعملة واحدة فيكون التوزيع الموسع الناتج Exponential- Inverse Lindley- Inverse Exponential في ظل نظرية المجوعات الضبابية بتحويل التوزيع الناتج الى ضبابي اذ يكون التوزيع الناتج توزيع ثلاثي ضبابي مستند على الدالة الكمية والذي يرمز له اختصاراً (FEILIE). وتقدير معلمات التوزيعت باستعمال طريقة الامكان الأعظم وطريقة اعظم مسافة متباعدة (Maximum Prduct Spaceing) يمكن استعمال تجارب محاكاة مونت-كارلو، إلى جانب تطبيق التوزيع الجديد على بيانات حقيقية، لتوضيح مدى قابلية وفعالية هذا التوزيع وقد وجد تفوق طريقة (MPS) على طريقة الامكان الاعظم . كذلك تم تطبيق التوزيع المقترح على مجموعة تمثل اوقات البقاء للنساء المصابات بسرطان الثدي اذ ان تقديرات طريقة (MPS) كانت متسقة والقيم الحقيقيه لكل من دوال (الكثافة الاحتماليه - الكثافة التجميعيه - المعوليه) اذ ان القيم المقدرة بموجب هذه الطريقه اقرب ماتكون للقيم الحقيقية للتوزيع معكوس الاسي- معكوس ليندلي - الاسي الضبابي المقترح . ونلاحظ انه عندما يكون وقت البقاء ستة اشهر وثمانية

ايام فان احتمال انخفاض الورم يكون (96 %). وعندما تكون مدة بقاء المريضة شهر وعشرة ايام فان

احتمال انخفاض الورم بلغ (1.3%).

الفصل الأول

منهجية الرسالة

والإستعراض المرجعي

1.1 مقدمة (Introduction):

تعد دراسة اوقات الحياة (**Lifetimes**) للكائنات الحية والأجهزة والهياكل والمواد وما إلى ذلك ذات أهمية كبيرة في العديد العلوم كالطب والهندسه والماليه والبيولوجيه والهندسيه. والتي تنمذج على اساس توزيع توزع احتمالي معين. وان كل توزيع له خصائصه الخاصة ويرجع ذلك تحديدًا إلى شكل دالة معدل الفشل التي قد تكون متناقصة أو متزايدة أو ثابتة في سلوكها، فقد تكون ملتوية نحو اليسار (**Left Skewed**) ، نحو اليمين (**Right Skewed**)، متماثلة (**Symmetric**) ، غير متماثلة (**Asymmetric**)، متينة الذيل (**Heavy tail**)، او قد تكون متزايدة برتابة (**Monotonic Increasing**) او متنازلة برتابة (**Monotonic Decreasing**) بحيث يتطلب الامر في كثير من الاحيان تعميم التوزيعات الاساسية لجعلها اكثر قدرة ومرونة للتعامل مع هكذا بيانات.

يعتمد تعميم التوزيعات بشكل أساسي على إضافة المزيد من المرونة للتوزيعات المعروفة والتي تنتج عن زرع توزيع أساسي في بنية أكثر قدرة ، وإن أدبيات نظرية التوزيعات مليئة بالتقنيات المختلفة لتعميم التوزيعات لتعزيز قدراتها في نمذجة بيانات العالم الحقيقي.

أولى العديد من الباحثين توزيع ليندلي اهتمامًا خاصًا لأهميته في ملائمة المشاهدات الاكثر تعقيد. وقد ذهب بعض الباحثين في مسار دراسة توزيع ليندلي وخصائصه بمزيد من التفاصيل وقاموا بتوسيع هذا التوزيع ليلائم مختلف انواع بيانات اوقات الحياة. اذ توفر التوزيعات الموسعة، والمعروفة أيضًا بالتوزيعات العموميه او ذات المرونة العاليه، مزايا وأهميه في النمذجه الإحصائيه وتحليل المشاهدات نظرًا لقدرتها على استيعاب مجموعة واسعة من الأشكال والخصائص اذ صممت التوزيعات الموسعة لتناسب الأنماط المتنوعة التي تمت ملاحظتها في مجموعات القياسات الواقعيه.وتسمح بملاءمه أفضل للقياسات المشاهدة، مما يؤدي إلى نماذج إحصائية أكثر دقة.

في الإحصاء التقليدي، تُستخدم التوزيعات لوصف عدم اليقين بشكل دقيق، عندما يكون لدينا مجموعة محددة من الاحتمالات لكل قيمة ممكنة**.** ولكن نظرية المجموعات الضبابية بدلاً من من تعيين احتمالات محددة لكل قيمة، تستعمل دوال انتماء لتحديد درجة الانتماء لكل عنصر إلى مجموعة معينة، وهذه الدرجات تتراوح بين 0 و1 . في كثير من الحالات، يمكن استعمال المفاهيم من نظرية الاحتمالات ونظرية المجموعات الضبابية معًا لإنشاء نماذج أكثر دقة ودقة لمعالجة مشكلات عدم اليقين**.**وعلى ذلك يمكن اعتبار نظرية المجموعات الضبابية كامتداد لنظرية الاحتمالات لتشمل أنواعًا

أوسع من عدم اليقين والغموض، مما يوفر أدوات أكثر تنوعًا ومرونة للتعامل مع المشاكل التي تنطوي على عدم اليقين.

لذلك جاءت هذه الرسالة مقسمة الى اربعة فصول :

الاول، منهجية الرسالة وبعض الدراسات السابقة المتعلقة بالرساله.

الثاني ، في الجانب النظري، سيتم تناول المبادئ الأساسية في نظرية التوزيعات، مع تعريف الدالة الكمية **Quantile function**، بالإضافة إلى استعراض توزيع ليندلي **Lindley distribution** وخصائصه، وكذلك توزيع معكوس ليندلي **Inverse Lindley distribution** وخصائصه. سيتم أيضاً التطرق إلى تصنيف التوزيع **T−R{Y}**، فضلاً عن تقديم التوزيع الموسع الجديد المقترح، مع التركيز على خصائصه. أخيراً، سيتم توضيح الطرائق المستخدمة لتقدير معلمات التوزيع المقترح.

الثالث تألف من مبحثين، المبحث الاول الجانب التجريبي تضمن تجارب محاكاة مونت-كارلو لغرض بيان قابلية التوزيع المقترح ومقارنته مع توزيعاته الاساسية.

المبحث الثاني شمل الجانب التطبيقي والذي تم فيه تطبيق التوزيع المقترح الجديد على عينه عشوائية حقيقية تمثل اوقات البقاء لـ حجم عينه (100) مريضة مصابة بسرطان الثدي واللاتي تلقين علاج من مركز كربلاء لمعالجة الاورام.

الفصل الرابع شمل الاستنتاجات وكذلك التوصيات .

1.2 مشكلة الرسالة (Thesis Problem)

كثيرًا ما نلاحظ اختلاف بعض القيم في العينة عن بقية المشاهدات، أو قد تنقسم العينة إلى أجزاء**(Quantiles)** ، يمثل كل جزء منها اتجاهًا معينًا. فقد تكون المشاهدات ملتوية نحو اليمين **(Right Skewed)** أو نحو اليسار **(Left Skewed)** ، أو قد تكون متماثلة **(Symmetric)** ، أو تتميز بأطراف كثيفة **(Heavy tail)** ، أو تظهر نمطًا متزايدًا برتابة **(Monotonic Increasing)** أو

متناقصًا برتابة (Monotonic Decreasing) على سبيل المثال، في علم الأورام، قد ينخفض حجم الأورام بعد العلاج الكيميائي أو الإشعاعي، حيث يمكن للمشاهدات التي تمثل أوقات انحسار حجم الورم أن تظهر اتجاهًا تنازليًا برتابة. وفي بعض الحالات، قد يزداد حجم الورم حتى مع العلاج. لذلك، من الضروري وجود توزيع احتمالي دقيق لهذه الظاهرة لتحليلها وقياس احتمالية حدوثها بشكل موثوق.

1.3 هدف الرسالة (Thesis Aim)

تهدف الرسالة إلى استعمال مبدأ الدالة الكمية **(Quantile function)** بناءً على صنف التوزيع **T-R{Y}** الذي اقترحه **Alzaatreh et al. (2014)** لتوسيع التوزيعات، وذلك بهدف تعميم توزيع معكوس ليندلي بمعلمة واحدة **(One Parameter Inverse Lindley Distribution)** بهدف تحسين خصائصه الأساسية لتناسب للمشاهدات المتنازلة برتابة، وتطوير صنف جديد من التوزيعات وهو **T-IR{Y}.** ، يتم توليد توزيع جديد بحيث يتبع المتغير **T** توزيع الأسّي بمعلمة واحدة **(Exponential Distribution)**، والمتغير **R** توزيع معكوس ليندلي بمعلمة واحدة، والمتغير **Y** توزيع الأسّي المعكوس بمعلمة واحدة، لينتج عن ذلك التوزيع الموسّع **Exponential-Inverse Lindley-Inverse Exponential.** تعتمد هذه الدراسة على نظرية المجموعات الضبابية، اذ تم تحويل التوزيع الناتج إلى توزيعات ضبابية ما يؤدي إلى توليد توزيع ضبابي ثلاثي مستند إلى الدالة الكمية، ويرمز له اختصارًا بـ **FEILIE** يتم تقدير معلمات التوزيع باستعمال طريقة الإمكان الأعظم **(Maximum Likelihood Estimation)** وطريقة أعظم مسافة متباعدة **(Maximum Product Spacing)** من خلال تجارب محاكاة مونت كارلو، كما يتم اختبار فعالية التوزيع الجديد عبر تطبيقه على بيانات حقيقية.

1.4 الإستعراض المرجعي (Litreture Review)

قدم الباحث ليندلي **(Lindley, 1958)** توزيع سمي بإسمه ودرس خصائصه وعلاقته بتوزيعات أوقات الحياة الأخرى ، الذي لعب دوراً مهما في نمذجة بيانات أوقات الإنتظار كبديل للتوزيع الأسي وتوزيع كاما. تلته بعد ذلك العديد من الدراسات والبحوث المتعلقة بنظرية التوزيعات تناولت العديد من الأساليب المختلفة لتعميم توزيع ليندلي من أجل تحسين قدراته في نمذجة المشاهدات الحقيقية واعطاءه مرونة اكثر . وفيما يلي بعضاً من تلك الدراسات والبحوث :

- **اقترح (M.E. Ghitany & et. al, 2011)** توزيع ليندلي الموسع بمعلمتين ودرسوا الخصائص الرياضية للتوزيع مثل دالة البقاء (**Survaival Function**) ودالة المخاطرة (**Hazard Function**) وقارنوا التوزيع المقترح مع توزيع ليندلي بمعلمتين وتوزيع وايبل وتوزيع القوة الأسي (**Power-Exponential**) ، وتم استعمال طريقة الامكان الاعظم في تقدير معلمات التوزيع الموسع، وباستعمال تجارب محاكاة مونت- كارلو وعن طريق المعايير الاحصائية (معيار **LnL** ، معيار كولكروف سميرنوف **k-s** والقيمة الاحتماليه **p-value**) . وكذلك تم استعمال بيانات حقيقية تمثل خنازير غينيا المصابة بعصيات درنة خبيثة . وتوصلوا بان توزيع ليندلي الموسع الجديد الأفضل من بقية التوزيعات المدروسة واكثر مرونة من توزيع ليندلي بمعلمتين.
- **قدم (Shanker & A.Mishra, 2013b)** توزيع ليندلي بمعلمتين (**Two Parameter Lindley distribution**)، لنمذجة بيانات زمن البقاء والانتظار وتم ايجاد خصائص هذا التوزيع مثل الدالة المولدة للعزوم والانحرافات المتوسطة والاحصاءات المرتبة ومنحنيات لورنز وبونفيروني (**Lorenze & Bonferroni**) ودالة ريني انتروبي (**Renyi Entropy**) ومعولية الاجهاد-المتانة. وقدرا معلمات الانموذج باستعمال طريقة الامكان الاعظم . وقارنا بين توزيع ليندلي بمعلمتين وتوزيع ليندلي بمعلمة واحدة باستعمال احصاءة (**Chi-square**) . وتم ملائمة مجموعات مختلفة من بيانات تمثل أوقات الانتظار (بالدقائق) لـ 100 عميل بنك وفترات البقاء على قيد الحياة (بالأيام) لـ (72) خنزير غينيا مصابًا بعصيات درنة خبيثة و بيانات وفيات لأنواع طيور الشحرور ، واثبتا ان توزيع ليندلي بمعلمتين الجديد اكثر ملائمة من توزيع ليندلي بمعلمة واحدة لمجموعات المشاهدات كافة.
- قدم (**Shanker et al., 2013**) توزيع شبه ليندلي الجديد بمعلمتين (**New Quasi LD**) لنمذجة بيانات زمن البقاء والانتظار وتم ايجاد خصائص هذا التوزيع مثل الدالة المولدة للعزوم والانحرافات المتوسطة و الاحصاءات المرتبة و منحنيات لورنز وبونفيروني (**Lorenze & Bonferroni**) ودالة ريني انتروبي (**Renyi Entropy**) ومعولية الاجهاد- المتانة. وقدرا معلمات الانموذج باستعمال طريقة الامكان الاعظم وطريقة العزوم. وقارنا بين توزيع ليندلي بمعلمتين وتوزيع شبه ليندلي وتوزيع ليندلي بمعلمة واحدة باستعمال احصاءة كاي سكوير (**Chi-square**) .. وتم ملائمة مجموعات مختلفة من مشاهدات تمثل أوقات الانتظار (بالدقائق)

لـ 100 عميل بنك وفترات اوقات الحياه (بالأيام) لـ (72) خنزير غينيا مصابًا بعصيات درنة خبيثة و بيانات وفيات لأنواع الطيور الشحرور ، واثبتا ان توزيع شبه ليندلي الجديد بمعلمتين الجديد اكثر ملائمة من باقي التوزيعات لمجموعات المشاهدات كافة.

- **في نفس العام قدم (Alzaatreh & Lee, C., 2013)** طريقة جديدة لتوليد عائلات التوزيعات المستمرة بحيث تستعمل المتغير العشوائي **X** المحِول لتحويل متغير عشوائي آخر **T**يسمى المُتحول بحيث تكون العائلة الناتجة عائلة توزيعات **T-X** ، لها علاقة بدوال المخاطرة وكل توزيع يتم توليده يعتبر دالة مخاطرة موزونة للمتغير العشوائي **X** واستعملا الباحثان العديد من التوزيعات مع هذه العائلة وهي الأسي (**Exponential**) وبيتا –الأسي (**Beta-exponential**) والاسي –الموزون (**Exponentiated-exponential**) وكاما (**Gamma**) و النصف طبيعي(**Half normal**) وليفي (**Levy**) واللوغاريتمي اللوجستي (**Log logistic**) ورايلي (**Rayleigh**) وكامبل نوع الثاني (**Type-2 Gumbel**) ولوماكس (**Lomax**) وبيتا المحول **(Inverted beta)** والكاوسي المعكوس (**Inverse Gaussian**) وتوزيع وايبل(**Weibull**) وتوصلا بان عائلة **T-X** تكون مرنة للغاية وتناسب أنواعًا معينة من توزيعات المشاهدات مثل التوزيع ذات الذيل الأيسر ، الذيل الأيمن ، خفيفة الذيل أو متينة الذيل. بالإضافة إلى التوزيعات ثنائة النمط (**bimodal**).
- **وفي نفس العام قدم (Alzaatreh & Lee, C., 2013)** عائلة جديدة من التوزيعات تسمى توزيع **T-X** الأسية. وطبق توزيع الاسي- وايبل (**Weibullex**) ثلاثي المعلمات وكذلك واستعملا الباحثان العديد من التوزيعات مع هذه العائلة وهي الأسي (**Exponential**) وبيتا – الأسي (**Beta-exponential**) والاسي –الموزون (**Exponentiated-exponential**) وكاما (**Gamma**) و النصف طبيعي(**Half normal**) وليفي (**Levy**) واللوغاريتمي اللوجستي (**Log logistic**) ورايلي (**Rayleigh**) وكامبل نوع الثاني (**Type-2 Gumbel**) ولوماكس (**Lomax**) وبيتا المحول **(Inverted beta)** وبر (**Burr**) ووايبل (**Weibull**) ودرسا بعض خصائصه بما في ذلك شكل التوزيع، والسلوك الحدي (**limit behavior**)، ودالة المخاطرة (**Hazard Function**)، وإنتروبي شانون (**Shannon's Entropy**) ، والعزوم، والالتواء (**Skewness**)، والتفرطح (**kurtosis**). وتم تطبيقه على ثلاث مجموعات بيانات حقيقية ومقارنتها بتوزيعات أخرى. وتوصلا الى ان توزيع **Weibull** الأسي يتناسب بشكل

مناسب مع مجموعات المشاهدات المنحرفة إلى اليسار والمنحرفة إلى اليمين. ويعطي مرونة اكثر من التوزيعات الأساسية.

- **وفي نفس العام قدم (Elbatal et al., 2013)** صنفًا جديدًا من التوزيعات يُسمى "توزيع ليندلي المعمم الجديد **(NGLD).** " يضم هذا الصنف العديد من التوزيعات المعروفة كحالات خاصة، بما في ذلك توزيعات كاما (**Gamma**) ، والأسي (**Exponenrial**)، وليندلي (**Lindley**). تم استخراج واشتقاق دالة المخاطرة (**Hazard function**)، ودالة المخاطرة العكسية (**Reverse Hazard function**)، والعزوم (**Moments**) ، والدالة المولدة للعزوم (**Moment Generating function**)، ومقاييس التفاوت وهي منحنيات بونفروني ولورنز (**Bonferroni and Lorenz curves**). قدرا معلمات التوزيع الجديد باستعمال طريقة الامكان الأعظم (**Maximum Likelihood Method**) وطريقة المربعات الصغرى (**Least Squares Method**) وطريقة المربعات الصغرى الموزونة (**Weighed Least Squares Method**) . وتم استعمال مجموعتين من المشاهدات الحقيقية الاولى مجموعة بيانات غير خاضعة للرقابة تتوافق مع أوقات البقاء (بالشهور) لعينة عشوائية مكونة من 128 مريضًا بسرطان المثانة والثانية أوقات البقاء (بالأيام) لـ 72 خنازير غينيا المصابة بعصيات السل الخبيثة. وتوصلوا بأن يقدم التوزيع المقترح اكثر مرونة ويعد انموذجًا بديلًا عن النماذج الأخرى المتوفرة في الأدبيات لنمذجة المشاهدات الحقيقية في العديد من المجالات.
- **اقترح (Alzaatreh et al., 2014)** أربعة عائلات من التوزيعات الطبيعية المعممة باستعمال عائلة فئة **T- X.** تُسمى هذه العائلات الأربعة من التوزيعات بعائلات **T-normal** الناتجة عن الدوال الكمية لـ الأسي القياسية (**exponential standard**) ، والتوزيع اللوغ- لوجيستي القياسي (**standard log-logistic**) ، والتوزيع اللوجستي القياسي (**standard logistic**)، وتوزيع القيمة المتطرفة القياسي **standard extreme value distributions**) وتمت دراسة بعض الخصائص العامة بما في ذلك العزوم والانحرافات المتوسطة وانتروبي شانون (**Shannon's Entropy**) وتوصلوا يمكن أن تكون أشكال توزيعات **T-normal** المقترحة متماثلة أو مائلة إلى اليمين أو مائلة إلى اليسار أو ثنائية النسق. يتم تركيب مجموعتين من المشاهدات ، أحدهما أحادي النسق والآخر ثنائي النسق ، وتعطي هذه العائلات بعض المرونة في مطابقة المشاهدات الواقعية. نظرًا لأن توزيعات **GN** تشمل التوزيع

الطبيعي كحالة خاصة، فإن استعمال توزيعات **GN** لمطابقة المشاهدات الذي يتيح التحقق مما إذا كانت المعلمات الإضافية تميز الانحراف عن التوزيع الطبيعي.

- اقترح **(Alzaghal, A. & Hamed, D, 2019)** عائلة توزيعات جديدة سميت **T-Lomax{Y}** باستعمال منهجية التحويل - المحول، المعروفة باسم صيغة **T-X** ، تنشأ عائلات **T-Lomax** من خلال الدالة الكمية للتوزيعات: الأسي (**Exponential**)، وايبل (**Weibull**) ، اللوغاريتمي اللوجستي (**Log-Logistic**)، اللوجستي (**Logistic**)، **,** توزيع كوشي (**Cauchy**) وتوزيع القيمة المتطرفة (**Extreme Value**). واشتقا الخصائص الاساسية للتوزيعات الجديدة مثل العزوم، الوضعيات وانتروبي شانون (**Shannon's Entropy**). واستعملا طريقة الامكان الأعظم لتقدير معلمات التوزيعات الجديدة من خلال تجارب محاكاة لتقييم أدائها. تم استعمال أربعة تطبيقات لمجموعات بيانات حقيقية هي أوقات هدأة مرضى سرطان المثانة وزراعة حشرة (**Tribolium Castaneum**) عند جة حرارة 24˚ ، كسر الإجهاد 50 مم من ألياف الكربون واقوات الوفة للمرضى النفسيين وتوصلا الى ان أشكال هذه التوزيعات **T-Lomax{Y}** مرنة للغاية ويمكن أن تكون متماثلة، مائلة إلى اليمين، مائلة إلى اليسار، أو ثنائية النمط.

- قدم **(Dey et al., 2019)** تعميمًا جديدًا لتوزيع ليندلي سُمي توزيع ليندلي العكسي المحول بألفا (**(Alpha PowerTransformed Inverse Lindley (APTIL)**). يتضمن النموذج الجديد توزيع ليندلي العكسي كحالة خاصة. تم اشتقاق خصائص مختلفة للتوزيع المقترح، بما في ذلك المنوال ، العزوم، العزوم الشرطية، ومتوسط وقت البقاء ، ومنحنيات بونفروني ولورنز (**Bonferroni and Lorenz curves**) ، ودالة الانتروبي، والترتيب التصادفي، ومعولية الاجهاد-المتنة ، وإلاحصاءات المترتبة. وبينا بانه شكل التوزيع الجديد يكون له دالة معدل الفشل على شكل حوض الاستحمام المقلوب اعتمادًا على معلماته. واستعملوا طريقة الامكان الاعظم لغرض تقدير معلمات النموذج. كما تم الحصول على فترات الثقة التقريبية لمعلمات النموذج عن طريق إجراء دراسة محاكاة لفحص أداء الانموذج الجديد. أخيرًا، تم تحليل مجموعتي بيانات الاولى تمثل أوقات البقاء لمجموعات من المرضى الذين يعانون من مرض سرطان الرأس والرقبة والثانية تمثل أوقات البقاء (بالأيام) لـ 72 خنازير غينيا المصابة بعصيات السل الخبيثة لإظهار كيفية عمل النموذج المقترح في الواقع. وتوصلا بان التوزيع الجديد يوفر ملاءمة أفضل من توزيع ليندلي العكسي وبعض تعميماته المعروفة.

- **اقترح (Rama & Rahman, 2020)** توزيع ليندلي بمعلمتين جديد ، وتم استخراج الاحصاءات الوصفية للتوزيع ، والاحصاءات المرتبة، ومصفوفة معلومات فيشر، وحدود الثقة للتوزيع ، وتم تقدير معلمات التوزيع المقترح باستعمال طريقة الامكان الأعظم ، وقارنا توزيع ليندلي بمعلمتين مع توزيعات (ويبل-توزيع ليندلي بمعلمتين بكل صيغه - توزيع شبه ليندلي-توزيع شبه ليندلي الجديد-توزيع ليندلي بمعلمة واحدة- التوزيع الاسي بمعلمة واحدة) عن طريق استعمال المعايير (**AIC- -2lnL- AICc-BIC**) لمجموعة من المشاهدات الحقيقية ، وتوصلا الى ان توزيع ليندلي بمعلمتين الجديد يعطي ملائمة افضل من بقية التوزيعات في نمذجة اوقات الحياة.
- **قدم (A.Ganaie et al., 2020)** توزيع شبه ليندلي الجديد الموزون بثلاث معلمات (**Weighed NQLD**)، وتم استخراج خصائص التوزيع الجديد وتمت مقارنته مع توزيع شبه ليندلي بمعلمتين عن طريق استعمال المعايير (**AIC- -2lnL- AICc-BIC**) لمجموعتين من المشاهدات الحقيقية ، وتوصلوا الى ان توزيع شبه ليندلي بمعلمتين الجديد الموزون يعطي ملائمة افضل من بقية التوزيعات في نمذجة اوقات الحياة.
- **قدم (Bantan et al., 2020)** تعميم لتوزيع ليندلي المعكوس يعتمد على عائلة توزيعات مارشال أولكين (**Marshall Olkin**) وأسموه توزيع ليندلي المعكوس مارشال أولكين المعمم (**Generalized Marshall Olkin Inverse Lindley Distribution**)، وان توزيع ليندلي المعكوس وتوزيع ليندلي المعكوس مارشال أولكين حالات خاصة من التوزيع الجديد. واستخرجوا الخصائص الأساسية للتوزيع الجديد، بما في ذلك الدالة الكمية والعزوم والعزوم غير الكاملة وعزوم البواقي والرتب التصادفية (**Stochastic Ordering**). وتم استعمال طريقة الامكان الأعظم في تقدير معلمات التوزيع الجديد في حلة المشاهدات التامة والرقابة من النوع الأول والرقابة من النوع الثاني واستخراج فترات الثقة لمعلمات التوزيع الجديد وذلك من خلال دراسة محاكاة شاملة لتقييم أداء التقديرات بناءً على التحيز (**Bias**) ومتوسط مربعات الخطأ (**MSE**) وطبقوا توزيع ليندلي المعكوس مارشال أولكين المعمم على مجموعتين من المشاهدات الحقيقية الاولى هي اوقات فشل نظام تكييف الهواء في الطائرة والثانية هي أوقات فشل الأجهزة. أظهرت النتائج أن نموذج ليندلي المعكوس مارشال أولكين المعمم يوفر مرونة أكبر في نمذجة بيانات اوقات الحياة يعطي ملائمة أفضل من توزيعات القوة ليندلي (**Power Lindley**) وليندلي الموسع (**Extended Lindley**) وتوزيع ليندلي المحول القوة الفا (**Alpha Power**

(Transmuted Lindley والتوزيع الأسي – ليندلي الموسع (**extended Exponential -Lindley**).

❖ قدم **(Hamed & Alzaghal, 2021)** فئة جديدة معممة من توزيع **(Lindley)** اطلقا عليها اسم فئة **T-Lindley{Y}** بالاعتماد على دمج الدوال الكمية **(Quantile Functions)** لتوزيعات أساسية معروفة مثل المنتظم (**Unifrom**)، الأسي (**Exponential**)، وايبل (**Weibull**) ، اللوغاريتمي اللوجستي (**Log-Logistic**)، اللوجستي (**Logistic**)، **,** وتوزيع كوشي (**Cauchy**). واستخرجا الخصائص الإحصائية لهذه الفئة الجديدة، بما في ذلك المنوال (**Modes**)، العزوم (**Moments**) ، ودالة انتروبي شانون (**Shannon's Entropy**) واستعملا الباحثين طريقة الامكان الاعظم(**Maximum Likelihood Estimation**) لتقدير معلمات الفئات الجديدة من التوزيعات باستعمال تجارب محاكاة مونت –كارلو وتوصلا الى ان فئة **T-Lindley{Y}** قوية في نمذجة مجموعات المشاهدات أحادية النمط (**unimodal**) وثنائية النمط (**bimodal**). وطبقا الفئة الجديدة على اربعة مجموعات بيانات حقيقية هي الاستهلاك الفصلي للغاز في المملكة المتحدة بين الأعوام 1960-1986 ودرجات الحرارة العظمى السنوية في مدن انكلترا ووقت الاصابة بمرض الايدز واخيراً وقت اوقات الوفاة للمرضى النفسيين وقد تفوق فئة **T-Lindley{Y}** من التوزيعات على التوزيعات المعروفة الأخرى في نمذجة مجموعات بيانات العمر أحادية النمط وثنائية النمط.

❖ إقترح **(C. S. Rajitha, 2022)** توزيعًا جديدًا سمي توزيع القوة ليندلي الأسي **(Power Lindley Exponentiated (PEL))** من خلال تعميم توزيع ليندلي باستعمال عائلة التوزيعات الأسية، والتي يمكن أن تناسب بيانات اوقات الحياة. ثم استخرج الخصائص الإحصائية الرئيسية مثل دالة البقاء، دالة المخاطرة، دالة الخطر العكسية، العزوم، الدالة الكمية،الرتب التصادفية ،الاحصاء المرتب . وقدر معلمات التوزيع باستعمال طريقة الامكان الاعظم ، ثم استعمل دراسة محاكاة مونت كارلو للتحقق من اتساق معلمات توزيع **PEL** من حيث **MSE** و **RMSE**والتحيز. وطبق التوزيع الجديد بيانات الوفيات الناجمة عن حالات كوفيد-19 (بالنسبة المئوية) في الصين والهند، والحالات الجديدة لكوفيد-19 المبلغ عنها في دلهي. ثم نتحقق مما إذا كان التوزيع الجديد يناسب مجموعات المشاهدات بشكل أفضل من يتم باستعمال مقاييس إحصائية مختلفة مثل لوغاريتم دالة الامكان (**log-likelihood function**)، وإحصاءة كولكروف سمنيرنوف **K-S**، و**AIC**، و**BIC**، و**HQIC**، والقيمة الاحتماليه **p** لتقييم دقة النموذج.

وتوصل الى ان الانموذج المقترح يتفوق على نموذجه الأساسي وغيره من النماذج المعروفة وذات الصلة عند تطبيقه على مجموعة بيانات كوفيد-19.

- قدم **(Eissa et al.,2023)** تعميم جديد لتوزيع ليندلي القوة الموسع اسموه توزيع ليندلي للقوة الموسع المحوة للقوة ألفا **(Alpha Power Transformed Extended power Lindley APTEPL)** . واشتقوا خصائص مختلفة للتوزيع الجديد مثل العزوم والدالة المولدة للعزوم والدالة المميزة والدالة الكمية والدالة المولدة التراكمية. واستعملوا طريقة الامكان الاعظم للحصول على تقديرات معلمات التوزيع الجديد ومن خلال دراسة محاكاة تم فحص أداء المقدرات. وكذلك تم استعمال مجموعتين من المشاهدات لإظهار كيفية عمل توزيع **APTEPL** عمليًا الاولى هي زمن الانتظار (بالدقائق) لـ 100 عميل من عملاء البنك. والثانية مؤلفة من 128 مريضاً بسرطان المثانة وباستعمال معايير المقارنة معيار معلومات اكايكي (**Akaike Information Criterion (AIC)**) ومعيار بيز اكايكي (**Bayesian Information Criterion (BIC)**) ومعيار حنان كوين (**HQIC (Hannan-Quinn informa tion criterion)**) توصلوا بان التوزيع الجديد يوفر ملاءمة أفضل من توزيع القوة ألفا المحول ليندلي (**Alpha Power TransformedLindley**)، قوة ألفا المحول ليندلي الموسع (**Alpha Power Transformed Extended Lindley**)، قوة ألفا المحول ليندلي (**Alpha Power Transformed Lindley**)، القوة ليندلي الموسع (**Power Extended Lindley**)، ليندلي الموسع (**Extended Lindley**) .

- قدر **(Eraikhuemen et al., 2023)** معلمات توزيع جومبرتز-ليندلي (**Gompertz-Lindley distribution**) هو امتداد لتوزيع ليندلي بثلاثة معلمات وهما معلمتين للشكل ومعلمة مقياس. استعمل الباحثين طريقة بيز بتوزيعين سابقين غير معلوماتيين منتظم (**Uniform**) وجفري (**Jeffrey**) وتوزيع سابق معلوماتي كاما (**Gamma**) لتقدير معلمة الشكل لتوزيع جومبيرتز-ليندلي في ظل دالة خسارة تربيعية (**Squared Error Loss Function**)، دالة الخسارة التربيعية (**Quadratic Loss Function**) ودالة خسارة احترازية (**Precautionary Loss Function**) وقارن طرائق بيز مع طريقة الامكان الأعظم باستعمال محاكاة مونت - كارلو من خلال معيار متوسط مربعات الخطأ (**MSE**)

وتوصلوا بان طريقة الامكان الاعظم في حالة زيادة حجم العينة وطريقة بيز هي الافضل في حالة الحجوم الصغيرة.

نلحظ من الدراسات السابقة بان الباحثين قاموا بتوسيع توزيع ليندلي ليلائم المشاهدات المتزايدة برتابة او الغير متماثلة او الملتوية نحو اليمين او اليسار او متينة الذيل ولكن في حالة المشاهدات المتناقصة برتابة لم يتطرق الباحثين الى توسيع توزيع ليندلي ليلائم هكذا بيانات . لذلك قمنا بتوسيع توزيع معكوس ليندلي ليلائم المشاهدات المتناقصة برتابة باستعمال صنف التوزيع **T-R{y}** المعتمد على الدالة الكمية (**Quantile Function**) وكذلك اقتراح توزيع جديد من هذا الصنف باعتبار ان توزيع المتغير **T** يتبع التوزيع الاسي المعكوس (**Inverse Exponential Distribution**) بمعلمة واحدة والمتغير **R** له توزيع معكوس ليندلي بمعلمة واحدة والمتغير **Y** له توزيع اسي بمعملة واحدة فيكون التوزيع الموسع الناتج **Inverse Exponential- Inverse Lindley- Exponential** في ظل بيئة ضبابية بتحويل التوزيع الناتج الى ضبابي والذي يرمز له اختصاراً (**FEILIE**) وتقدير معلمات التوزيع الجديد باستعمال طريقة الامكان الاعظم وطريقة اعظم مسافة متباعدة (**MPS**).

الفصل الثاني

الجانب النظري

2.1 تمهيد:

تلعب نظرية التوزيعات (**Distributions Theory**) دورًا مهماً في فهم الظواهر العشوائية واتخاذ القرارات المستندة إلى الاحتمالات في مجموعة واسعة منالمجالات.فهي تتيح تحليل المشاهدات الإحصائية بشكل فعال. استعملت التوزيعات لوصف كيفية توزيع المشاهدات وتحديد المؤشرات الإحصائية الرئيسة مثل المعدل الحسابي والانحراف المعياري وكذلك التنبؤ بالأحداث المستقبلية. وكذك تم استعملت التوزيعات الاحتماليه لتقدير المخاطر المحتملة واتخاذ القرارات الاستراتيجية. وكذلك في طب الأوبئة ، يمكن استعمال توزيعات الاحتمال لفهم انتشار الأمراض وتحديد الاحتمالات المتعلقة بظهور حالات جديدة أو إصابة المزيد من الاشخاص. كذلك يستعمل مهندسون البرمجيات وعلماء المشاهدات نظرية التوزيعات في تحليل المشاهدات وتحسين الأداء والأمان في تطبيقات البرمجيات وأنظمة المعلومات.

وعلى الرغم من أن التوزيعات الاحتماليه ونظريه المجموعات الضبابيه تهتمان بمعالجة عدم اليقين بطرائق مختلفه، إلا أنهما يمكن أن تتكاملا بشكل فعال في العديد من التطبيقات لتحسين دقة وفعالية النماذج والتحليلات. فكلاهما يوفران إطاراً للتعامل مع عدم اليقين. التوزيعات الاحتماليه تقدم احتمالاً رقمياً لكل حدث، بينما المجموعات الضبابية تستخدم درجات الانتماء لتمثيل الضبابية في المشاهدات.

لذا عرض هذا الفصل المبادئ الاساسية في نظرية المجموعات الضبابيه وكذلك المبادئ الاساسية في نظرية التوزيعات كدالة الكثافة الاحتماليه ودالة الكثافة التراكمية والدالة الكمية وتوزيع ليندلي ومعكوسه وخصائصهما وصنف التحويل **T-R{Y}**. وصنف التوزيع ليندلي المقترح.

2.2 دالة الكثافة الاحتماليه (Probability Density Function)

إذا كان $\mathbf{T}$ يمثل متغير عشوائي موجب يمثل وقت حدوث الفشل (**Failure time**) فإن له دالة تقيس إحتمال فشل أو توقف المركبة عن العمل خلال الفترة $(\mathbf{t} < \mathbf{T} < \mathbf{t}+\Delta\mathbf{t})$ مهما كانت قيمة التغير في الوقت $(\Delta\mathbf{t})$ ويمكن التعبير عنها رياضياً كالآتي:

[Kapir , H.C. Saxena, 2008, 218]

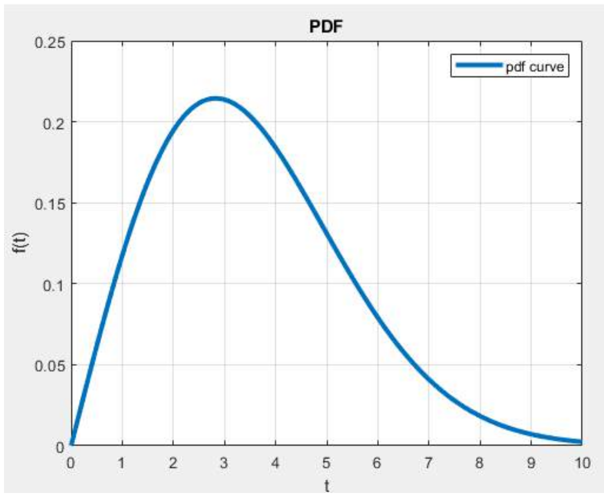
$$\mathbf{f_T(t)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{p_r(t < T < t+\Delta t)}}{\Delta \mathbf{t}} \quad ; \; \mathbf{t} \geq 0 \qquad \dots(2-1)$$

ولهذه الدالة الخصائص الآتية:

1- $\int_0^{\infty} f_T(t)dt = 1$

2- $f_T(t) \geq 0$

3- دالة وحيدة القيمة لكل وقت فشل.



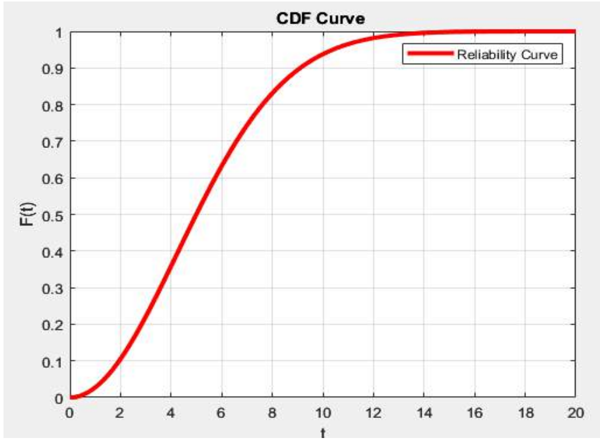
شكل (2-1) منحنى دالة الكثافة الاحتماليه للفشل

2.3 دالة الكثافة التجميعية (Cumulative Distribution Function (CDF))

وهي احتمال فشل أو توقف المركبة عن العمل لوقت الفشل (t) ويعبر عنها رياضياً كما يأتي:

$$F_T(t) = p_r(T < t) = \int_0^t f(u)du;\ t \geq 0 \qquad \dots(2-2)$$

يطلق عليها دالة الاحتمال التجميعي (CDF) للفشل لحين الوقت **t**. وهي دالة غير متناقصة عن اي وقت من اوقات الفشل. **[Kapir , H.C. Saxena, 2008, 218]**



شكل (2-2) منحنى دالة الكثافة التجميعية للفشل

2.4 الدالة الكمية (QF) (Quantile Function)

تعرف بدالة التوزيع التراكمي العكسية (**Invesre CDF**)، هي مفهوم إحصائي يستعمل في الاحتمالات ونظرية التوزيعات وهي تعطي القيمة التي تساوي عندها دالة التوزيع التراكمي (**CDF**) احتمالًا محددًا أو تتجاوزه. تعتبر الدالة الكمية مفيدة بشكل خاص لفهم توزيع المشاهدات وتقدير النسب المئوية وإنشاء فترات الثقة. وان العديد من التوزيعات الإحصائية مثل التوزيع الطبيعي والتوزيع الأسي وتوزيع وايبل ... لها دوال كمية محددة. **[Bensid & H.Zeghdoudi, 2017, 2]**

يمكن استعمال الدالة الكمية لايجاد متغير عشوائي بحيث تكون دللة التوزيع التراكمية بمثابة دالة التوزيع الخاصة به. تستعمل هذه الحقيقة كأساس لطريقة محاكاة مونت- كارلو من توزيع عشوائي باستعمال مولد أرقام عشوائي.

وليس هنالك تقييد بحالة المتغير العشوائي المستمر فللتوزيع المتقطع ايضاً توجد دالة كمية والتالي التعريف العام لها وكالآتي:

اذا كان **X** متغير عشوائي له توزيع إحتمالي له دالة احتمالية تراكمية **F(x)** فان الدالة الكمية تعرف كالآتي:**[P. Feiffer, 2023, 270]**

$$\mathbf{Q(p) = inf\{x: F(x) \geq p\} \quad \forall\, 0 < p < 1 \qquad \dots (2-3)}$$

اذ أن **inf** المقصود بها "**infimum**" وتختصر إلى"**inf**" وتعني "القيمة الدنيا" أو "الحد الأدنى ,هو أكبر قيمة دنيا يمكن أن تكون أقل من أو تساوي جميع القيم في مجموعة معينة، بمعنى أنه ليس

بالضرورة أن يكون عنصراً في المجموعة، لكنه أصغر قيمة حقيقية لا تزال أكبر من أو تساوي جميع عناصر المجموعة. فاذا كان الحد الأدنى لمجموعة **S** من الأعداد الحقيقية هو أكبر عدد حقيقي **m** بحيث أن كل عنصر في **S** يكون أكبر من أو يساوي **m** ويُرمز إلى الحد الأدنى بالرمز **inf(S)** فاذا افترضنا أن لدينا المجموعة الآتية: **[Rudin, 1976, 57]**

$$S=\{x \in R \mid x>1\}$$

لا تحتوي المجموعة **S** على الحد الأدنى (حيث لا يوجد عدد معين هو أصغر عدد في المجموعة)، ولكن الحد الأدنى لهذه المجموعة هو **1**، لأن **1** هو أكبر عدد يكون أقل من أو يساوي كل عنصر في المجموعة **S** **[Zakon, 2004, 123]**

وهنا لابد من التمييز بين القيمة الدنيا **(Minimum)** والتي هي أصغر عنصر في المجموعة. إذا كان الحد الأدنى هو عنصر في المجموعة، فيُسمى بالقيمة الدنيا. واذا لم يكن الحد الأدنى عنصرًا في المجموعة، فإنه لا يُسمى بالقيمة الدنيا بل يظل حدًا أدنى فقط. **[Rockafellar et al., 2009, 191]**

والمعادلة (2-3) تطابق الآتي :

$$F_X(x) = P(X \le x) = p$$

$$Q(p) = F_X^{-1}(x) \qquad \dots (2-4)$$

ونلاحظ من معادلة (2-3) انه:

$$\text{If } F(x^*) \ge p^* \text{, then } x^* \ge \inf\{x^*: F(x^*) \ge p^*\} = Q(p^*)$$

$$\text{If } F(x^*) < p^* \text{, then } x^* < \inf\{x^*: F(x^*) \ge p^*\} = Q(p^*)$$

اذ أن:

x^* اي قيمة من قيم المتغير العشوائي x

p^* اي رقم عشوائي تم توليده يقع بين الصفر والواحد الصحيح.

وعليه سيكون لدينا الخاصيه الآتيه:

$$Q(p) \le p^* \text{ iff } p \le F(x) \qquad \forall p \in (0,1) \qquad \dots (2-5)$$

ومن الخاصية في معادلة (2-5) نحصل على الخاصية الآتية:

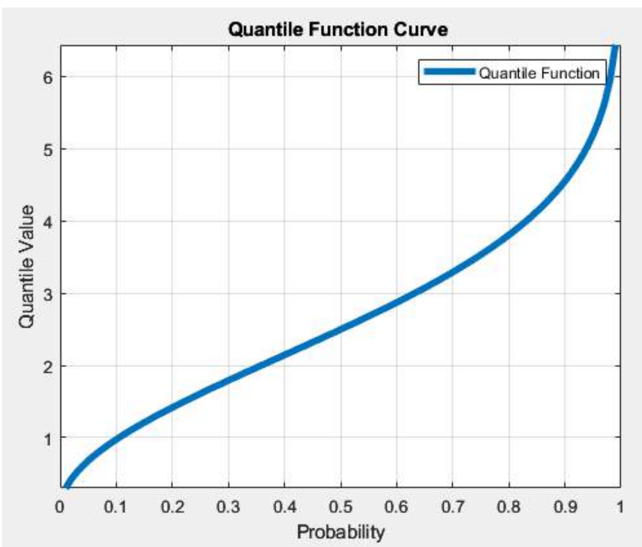
$$Q(p) \leq p* \text{ iff } p \leq F(x)\ \forall p \in (0,1) \qquad \dots(2-6)$$

اي أنه إذا كان **P=U** له توزيع منتظم بالفترة (0 ،1)، وكانت $F_X = F$ هي أي دالة توزيع، مع دالة كمية **Q**، فإن المتغير العشوائي **X=Q(U)** ، له دالة توزيع $F_X(x)$ فانه :

$$F_X(x) = p(Q(U) \leq x) = p(U \leq F_X(x)) = F(x) \qquad \dots(2-7)$$

بعبارة أخرى، ترجع الدالة الكمية الحد الأدنى لقيمة **x** التي يكون فيها احتمال أن تكون **X** أقل من أو يساوي **x** أكبر من أو يساوي احتمالًا محددًا **p**.

ان الوسيط هو عندما تكون الدالة الكمية تساوي 0.5 **Q(0.5)**، وهو القيمة التي تفصل النصف الأعلى عن النصف السفلي للتوزيع، والربيعات (**Q(0.25)**، **Q(0.75)**)، التي تقسم التوزيع إلى أربعة أجزاء متساوية. **[Ehm, W et al., 2016, 555]**



شكل (2-3) منحنى الدالة الكمية

2.5 التوزيع الأسي (LD) (Exponential Distribution)

توزيع احتمالي مستمر أشتق اسمه من الدالة الأسية ويستعمل هذا التوزيع في تخمين الفترات الزمنية بين وقوع الأحداث . عادة ما يستعمل التوزيع الأسي في مسائل متعلقة بقياس الزمن. من ذلك مدة خدمة شباك البريد، مدة المكالمة هاتفية، مدة تفريغ باخرة الشحن، مدة تصليح آلة، مدة انتظار زبون

قبل الحصول على الخدمة وكذلك في العلوم الدقيقة يستعمل التوزيع الأسي لتمثيل مدة حياة الذرات المشعة قبل أن تتفكك.

وهو حالة خاصة من توزيع ويبل عندما تكون $\alpha = 1$ فتكون دالة الكثافة الاحتماليه للتوزيع الأسي بالشكل الآتي : **(Ross,2009:P176:180)**

$$f(y, \lambda) = \lambda e^{-\lambda y} \quad ; \qquad y > 0 \qquad \ldots(2-8)$$

اذا كان $y \sim \exp(\lambda)$ ، فان دالة التوزيع التراكمية **Cumulative Distribution Function** له هي :

$$F(y, \lambda) = P(Y \leq y) = \int_0^y f(u)du = 1 - e^{-\lambda y} \; ; \quad y \geq 0 \qquad \ldots(2-9)$$

إذ أن :

$$EY = \frac{1}{\lambda} \qquad \ldots(2-10)$$

$$EY^2 = \frac{2}{\lambda^2} \qquad \ldots(2-11)$$

$$Var(Y) = \frac{1}{\lambda^2} \qquad \ldots(2-12)$$

يعد التوزيع الأسي من التوزيعات المنحرفة لليمين ، والمعروف أيضًا باسم التوزيع المنحرف بشكل إيجابي، يكون الذيل الموجود على الجانب الأيمن من التوزيع أطول أو أكثر بدانة من الجانب الأيسر والذي ينشأ الانحراف لأن معظم نقاط المشاهدات تتجمع نحو اليسار (بالقرب من الصفر) ثم تتضاءل نحو اليمين، وتتناقص تدريجيًا. وهذا يعكس طبيعة التوزيع، حيث تكون الأوقات الأقصر بين الأحداث أكثر احتمالاً بكثير من الأوقات الأطول.

ان التوزيع الاسي المعكوس يشير الى مقلوب التوزيع الاسي ، فاذا كان **Y** له توزيع اسي فان $T = \frac{1}{Y}$ لع توزيع اسي معكوس بدالة الكثافة الاحتماليه الآتية

$$f(t, \lambda) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{t}{\lambda}} \quad ; \qquad x > 0 \qquad \ldots(2-13)$$

اذا كان $t \sim Iexp(\frac{1}{\lambda})$ ، فان دالة التوزيع التراكمية **Cumulative Distribution Function** له هي :

$$F(t,\lambda) = P(T \le t) = \int_0^t f(u)du = 1 - e^{-\frac{t}{\lambda}};\ t \ge 0 \qquad \dots(2-14)$$

إذ أن :

$$ET = \lambda \qquad \dots(2-15)$$

$$ET^2 = 2\lambda^2 \qquad \dots(2-16)$$

$$Var(T) = \lambda^2 \qquad \dots(2-17)$$

2.6 توزيع ليندلي (LD) (Lindley Distribution)

يعد توزيع ليندلي **(Lindley Distribution (LD))** من التوزيعات المستمرة المهمة في دراسة أوقات الفشل **(Failure data)** واوقات الحياه **(Lifetime data)** التي بواسطتها باماكننا تمثيل الانظمة المختلفة التي تتألف من مجتمعات مركبة وغير متجانسة وكذلك في تحليل نظرية البقاء **[Shanker & Sharma, 2016,2].**

أن توزيع ليندلي بالمعلمة الواحدة أفضل من التوزيع الأسي في نمذجة بيانات أوقات البقاء **[Ghitany et al, 2008, 494]**.

وأن معدل المخاطرة **(Hazard rate)** في توزيع ليندلي يكون متزايداً مما يقلل من متوسط فترة البقاءعكس التوزيع الأسي الذي يكون معدل الخطورة له ثابت بمرور الزمن. **[Shanker et al., 2013b, 364][Shanker et al., 2017, 86] [Shanker & Mishra, 2013a, 46]**.

طبق توزيع ليندلي في مجالات مختلفة. مثل تحليل البقاء على قيد الحياة لنمذجة الوقت حتى وقوع حدث معين مثل حدوث مرض، وكذلك يستعمل لنمذجة معولية الأنظمة أو المركبات ، وكذلك في التأمين وإدارة المخاطر لنمذجة الوقت حتى تقديم مطالبة التأمين، وايضاً يستعمل في صفوف الانتظاراذ يمكنه نمذجة الوقت الذي يقضيه العميل في قائمة الانتظار قبل أن يتم تقديم الخدمة له.وله اتباط وثيق بنظرية بيز في التقدير، اذ تم استعمال كتوزيع سابق **(Prior)** كذلك في سياقات بحثية طبية معينة لنمذجة أوقات الانتظار حتى وقوع أحداث طبية معينة أو ظهور حالات طبية محددة. **[Shebib et al. 2022, 548] [Okagbue et al, 2018, 2]**

يعد توزيع ليندلي بمعلمة واحدة على اسم مقترحه الباحث **(Lindely, 1985)** من التوزيعات الاحتماليه المستمرة الذي يطبق فقط على نمذجة المشاهدات ذات معدل الفشل المتزايد الرتيب **(Monotonic Increasing Failure Rate)** الذي له دالة الكثافة الاحتماليه الآتية:

[Ghitany et al, 2008, 493]

$$\mathbf{f(x;\theta) = \frac{\theta^2}{(\theta+1)}\ (1+x)\ e^{-\theta x} \qquad ; x \geq 0\ ,\ \theta > 0} \qquad \dots (2-18)$$

إذ أن المعلمة $\boldsymbol{\theta}$ تمثل معلمة القياس **(Scale Parameter)** .

ويمكن تعريف دالة التوزيع التراكمية **(CDF)** للتوزيع بالصيغة الآتية :

$$\mathbf{F(x;\theta) = 1 - \left[1 + \frac{\theta x}{(\theta+1)}\right] e^{-\theta x} \qquad ; x \geq 0\ ,\ \theta > 0} \qquad \dots (2-19)$$

كما تعرف دالة المعولية للتوزيع بالصيغة الآتية :

$$\mathbf{R(x) = \left[1 + \frac{\theta x}{(\theta+1)}\right] e^{-\theta x} \qquad ; x \geq 0\ ,\ \theta > 0} \qquad \dots (2-20)$$

وان دالة المخاطرة للتوزيع كما مبين بالصيغة الآتية :

$$\mathbf{h(x) = \frac{\theta^2\ (1+x)}{(\theta+1)+\theta x}} \qquad \dots (2-21)$$

وان العزم من الدرجة **r** حول نقطة الأصل يحسب بالصيغة الآتية :

$$\boldsymbol{\mu'_r} = \mathbf{\frac{r!\ (\theta+r+1)}{\theta^r(\theta+1)}} \qquad \dots (2-22)$$

فعندما **r=1** نحصل على العزم الاول حول نقطة الأصل :

$$\boldsymbol{\mu'_1} = \mathbf{\frac{\theta+2}{\boldsymbol{\theta}(\theta+1)}} \qquad \dots (2-23)$$

وعندما **r=2** نحصل على العزم الثاني حول نقطة الأصل :

$$\mu'_2 = \frac{2(\theta+3)}{\theta^2(\theta+1)} \quad \ldots (2-24)$$

ومن المعادلتين **(2-24)** و **(2-23)** نحصل على التباين لتوزيع ليندلي بمعلمة واحدة وكالآتي:

$$V(x) = \; = \frac{2(\theta+3)}{\theta^2(\theta+1)} - \left(\frac{\theta+2}{\theta(\theta+1)}\right)^2 \quad \ldots (2-25)$$

وان الدالة الكمية **(Quiantile Function)** لتوزيع ليندلي بمعلمة واحدة كالآتي:

$$Q(x) = -1 - \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta} W_{-1}(1+\theta)(u-1)e^{-(1+\theta)} \quad \ldots (2-26)$$

اذ أن W_{-1} هي دالة لامبرت **(Lambart Function)** وهي دالة رياضية تستعمل لحل دالة معقدة لايمكن حلها تحليلياً. **[Okagbue et al, 2018, 2]**

2.7 توزيع معكوس ليندلي (ILD) (Inverse Lindley Distribution)

نظرًا لأن توزيع ليندلي يطبق فقط على نمذجة المشاهدات ذات معدل الفشل المتزايد الرتيب **(Monotonic Increasing data)** ، ولكن في حالة المشاهدات التي تظهر أشكالًا غير رتيبة مثل شكل حوض الاستحمام **(Bathtub)** وحوض الاستحمام المقلوب **(Upside-down bathtub)** اي المشاهدات المتناقصة برتابة **(Monotonic Decreasing data)** تم اقتراح امتدادًا لتوزيع ليندلي بايجاد معكوسه وسمي باسم توزيع ليندلي المعكوس **(Inverse Lindley Distribution IRD)** الذي يُظهر شكل حوض الاستحمام المقلوب لدالة معدل الفشل الخاص به.

فاذا كان المتغير العشوائي x له توزيع ليندلي ، فان المتغير العشوائي $y = \frac{1}{x}$ له له توزيع ليندلي المعكوس بدالة الكثافة الاحتماليه الآتية:

$$f(x;\theta) = \frac{\theta^2}{(\theta+1)} \left(1+\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{\theta}{x}}$$

، وبالاعتماد على المعادلة الخاصة بتوزيع ليندلي المعكوس :

$$f(x;\theta) = \frac{\theta^2}{(\theta+1)}\left(\frac{1+x}{x^3}\right) e^{-\frac{\theta}{x}} \quad ; \quad x > 0\ ,\ \theta > 0 \qquad \dots (2-27)$$

(El-Monsef, M.M.E.A. and Al-Kzzaz, H.S. (2020)).

إذ أن المعلمة θ تمثل معلمة القياس **(Scale Parameter)** .

وان دالة التوزيع التراكمية **(CDF)** لتوزيع ليندلي المعكوس بالصيغة الآتية :

$$F(x;\theta) = 1 - \left[1 + \frac{\theta}{(\theta+1)}\frac{1}{x}\right] e^{-\frac{\theta}{x}} \quad ; x > 0\ ,\ \theta > 0 \qquad \dots (2-28)$$

كما تعرف دالة المعولية للتوزيع بالصيغة الآتية :

$$R(x) = \left[1 + \frac{\theta}{(\theta+1)}\frac{1}{x}\right] e^{-\frac{\theta}{x}} \quad ; x > 0\ ,\ \theta > 0 \qquad \dots (2-29)$$

وان دالة المخاطرة للتوزيع كما مبين بالصيغة الآتية :

$$h(x) = \frac{\theta^2\ (1+x)}{x^2\left[\theta + x(1-\theta)\left(e^{-\frac{\theta}{x}} - 1\right)\right]} \qquad \dots (2-30)$$

وان العزم من الدرجة **r** حول نقطة الأصل يحسب بالصيغة الآتية :

$$\mu'_r = \frac{\theta^r(\theta+1)}{r!\ (\theta+r+1)} \qquad \dots (2-31)$$

فعندما **r=1** نحصل على العزم الاول حول نقطة الأصل :

$$\mu'_1 = \frac{\theta(\theta+1)}{\theta+2} \qquad \dots (2-32)$$

وعندما **r=2** نحصل على العزم الثاني حول نقطة الأصل :

$$\mu'_2 = \frac{\theta^2(\theta+1)}{2(\theta+3)} \quad \ldots (2-33)$$

ومن المعادلتين **(2-32)** و **(2-33)** نحصل على التباين لتوزيع معكوس ليندلي بمعلمة واحدة وكالآتي:

$$V(x) == \frac{\theta^2(\theta+1)}{2(\theta+3)} - \left(\frac{\theta(\theta+1)}{\theta+2}\right)^2 \quad \ldots (2-34)$$

وان الدالة الكمية **(Quiantile Function)** لتوزيع معكوس ليندلي بمعلمة واحدة يمكن إشتقاقها كالآتي:

$$Q(x) = -\left[1 + \frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta} W_{-1}\left(-u(1+\theta)e^{-(1+\theta)}\right)\right]^{-1} \quad \ldots (2-35)$$

2.8 صنف التوزيع T-R(x) (T-R(x) Class of Distribution)

هنالك العديد من التقنيات المختلفة لتعميم التوزيعات المستمرة لتعزيز قدراتها في نمذجة بيانات العالم الحقيقي والتي تنتج عن اشراك توزيع أساسي في بنية أكثر قدرة واعطاء المزيد من المرونة للتوزيعات المعروفة في التعامل مع مشاكل العالم الواقعية .

ويعد صنف التحويل **T-X** الذي قدم من قبل **(Alzaatreh et al., 2013)** وهو هيكلية لتحويل متغير يدعى المتحول **(Transformer)** بوسطة متغير يدعى المحول **(Transform)** لتعميم توزيع ليندلي بمعلمة واحدة **(One Parameter Lindley Distribution)** والذي اطلق عليه اسم فئة التوزيعات **T-Lindley{Y}** **(Hamed & Alzaghal, 2021, 2)** **(Alzaatreh et al. , 2014)** بحيث يتم تعميم التوزيعات باستعمال صنف **T-R{Y}** إضافة المزيد من المعلمات إلى التوزيع المعمم. ومن ثم هناك مرونة أكبر في نمذجة بيانات اوقات الحياة.

اذا كان لدينا ثلاث متغيرات عشوائية **T, R, Y** لكل منها دالة توزيعية :

$$F_T(x) = P(T \leq x)$$

$$F_R(x) = P(R \leq x)$$

$$F_Y(x) = P(Y \leq x)$$

ودالة كثافة احتمالية لكل متغير هي:

$f_Y(x)$

$f_R(x)$

$f_T(x)$

وان الدالة الكمية للمتغير **Y** هي :

$$Q_Y(p) = \inf\{y: F_Y(x) = P(Y \geq x)\}$$

فإن دالة الكثافة الاحتماليه لصنف التوزيع **T-Lindley{Y}** هي:

$$f_X(x) = f_R(x).\frac{f_T\left(Q_Y\left(F_R(x)\right)\right)}{f_Y\left(Q_Y\left(F_R(x)\right)\right)} \qquad \dots (2-36)$$

والدالة التوزيعية لصنف التوزيع **T-Lindley{Y}** هي:

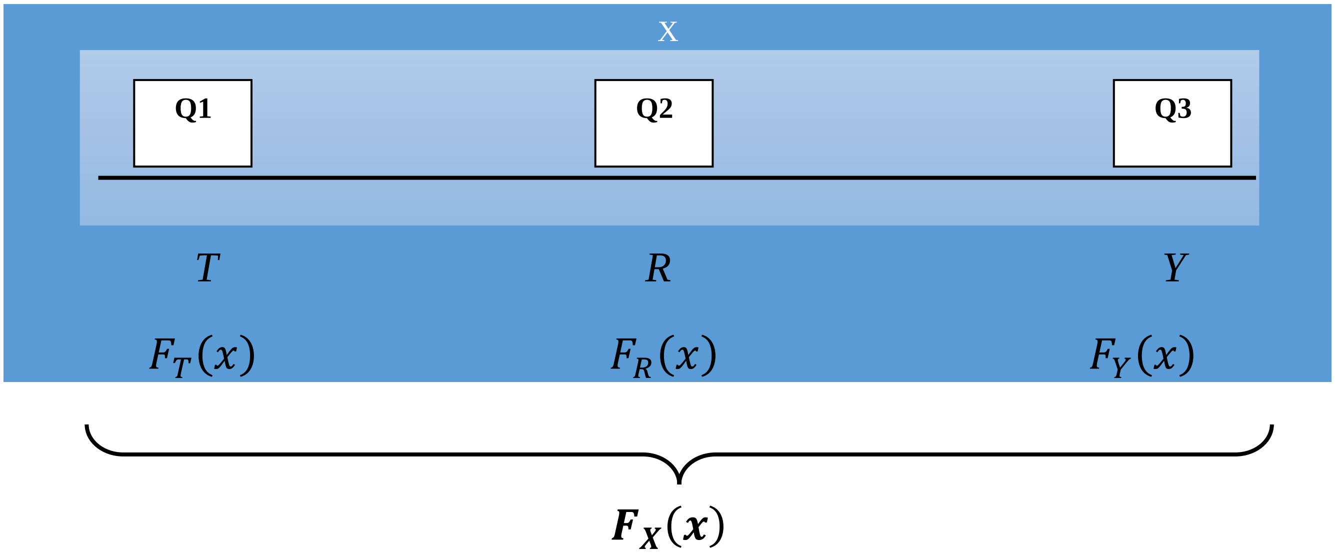
$$F_X(x) = \int_a^{Q_Y(F_R(x))} f_T(t)dt = F_T\left(Q_Y\left(F_R(x)\right)\right) \qquad \dots (2-37)$$

(Hamed & Alzaghal, 2021, 3)

والصيغة (2-37) تعني ان الدالة التوزيعية للمتغير العشوائي الأول $F_T(x)$ ونعوض بها بدل قيمة **x** الدالة الكمية للمتغير الثالث $Q_Y(x)$ معوض بها بدل قيمة **x** الدالة التوزيعية للمتغير الثاني $F_R(x)$

نلحظ من الشكل (2-4) ان مدى المتغير العشوائي **X** (متغير التوزيع الجديد) مقسم الى ثلاث اجزاء كل جزء ممثل بربيع هي **Q1** و **Q2** و **Q3** على التوالي ولكل ربيع ممثل بمتغير عشوائي له دالة كثافة احتمالية تراكمية هي $F_T(x), F_R(x), F_Y(x)$ على التوالي وهي مكونات دالة الكثافة الاحتماليه التراكمية للمتغر **x** وهي $F_X(x)$.

X (متغير التوزيع الجديد) يضم ثلاث متغيرات **(T, R , Y)**



شكل (2-4) مخطط صنف التوزيع T-R(X)

2.9 صنف التوزيع T-ILindley(Y) المقترح

(Proposed T- ILindley(Y) class of distribution)

يعد صنف التوزيع **T-ILindley{Y}** المقترح معكوس صنف التوزيع **T-Lindley{Y}** المقترح من قبل (**Hamed & Alzaghal, 2021**) لغرض نمذجة بيانات اوقات الحياة المتنازلة برتابة (**Monotonic Increasing**) وكالآتي :

اذا كان لدينا ثلاث متغيرات عشوائية وهي:

المتغير العشوائي الأول **T**: يمكن ان يكون اي توزيع احتمالي مستمر

المتغير العشوائي الثاني **R** هو معكوس ليندلي بمعلمة واحدة والذي له دالة كثافة احتمالية معرفة بالمعادلة (2-17) ودالة تجميعية معرفة بالمعادلة (2-18)

المتغير العشوائي الثالث **Y** : يمكن ان يكون اي توزيع احتمالي مستمر

وعليه فان دالة الكثافة الاحتماليه لصنف التوزيع **T-ILindley{Y}** تعرف بتطبيق معادلة (2-36) وكالآتي:

$$f_X(x)=\frac{\theta^2}{(\theta+1)}\left(\frac{1+x}{x^3}\right)e^{-\frac{\theta}{x}}.\frac{f_T\left(Q_Y\left(1-\left[1+\frac{\theta}{(\theta+1)}\frac{1}{x}\right]e^{-\frac{\theta}{x}}\right)\right)}{f_Y\left(Q_Y\left(1-\left[1+\frac{\theta}{(\theta+1)}\frac{1}{x}\right]e^{-\frac{\theta}{x}}\right)\right)}\ldots(2-38)$$

وان دالة الكثافة الاحتماليه التجميعية لصنف التوزيع **T-ILindley{Y}** تعرف بتطبيق معادلـــــة (2-37) وكالآتي:

$$F_X(x)=\int_a^{Q_Y(F_R(x))}f_T(t)dt=F_T\left(Q_Y\left(1-\left[1+\frac{\theta}{(\theta+1)}\frac{1}{x}\right]e^{-\frac{\theta}{x}}\right)\right)\ \ldots\ (2-39)$$

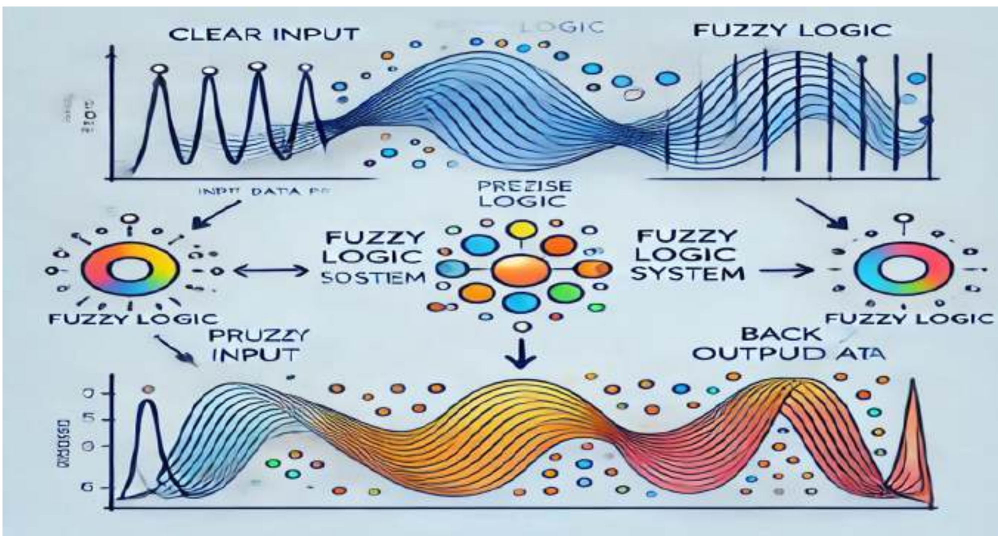
2.10 المنطق الضبابي (Fuzzy logic)

نظام للمنطق الرياضي يتيح التعامل مع المفاهيم الغامضة أو الضبابية، على عكس المنطق التقليدي الذي يتعامل مع القيم الثنائية (صواب أو خطأ). قدم هذا المفهوم بواسطة لطفي زادة في عام 1965 كامتداد لنظرية المجموعات التقليدية ونظرية الاحتمالات، بهدف التعامل مع عدم اليقين والغموض في المشاهدات**.** وهو أسلوب لمعالجة المتغيرات الذي يسمح بمعالجة قيم الحقيقة المتعددة المحتملة من خلال نفس المتغير. يحاول المنطق الضبابي حل المشكلات باسعمال مجموعة مفتوحة وغير دقيقة من المشاهدات والاستدلالات التي تجعل من الممكن الحصول على مجموعة من الاستنتاجات الدقيقة. تم تصميم المنطق الضبابي لحل المشكلات من خلال النظر في جميع المعلومات المتاحة واتخاذ أفضل قرار ممكن في ضوء المدخلات. **(Zadeh, 1973,28)** (**H. B. Yadav, D. K. Yadav, 2015, 33)**

المنطق التقليدي يعمل مع حالات مؤكدة في الحقيقية، مثل "هل هذا الكائن أخضر؟ " اما المنطق الضبابي فانه يتعامل مع المجموعات التي تتضمن معاني نسبية أو ذاتية، مثل "طويل" أو "كبير" أو "جميل". ومن خلال استعمال قيم غامضة أو غير دقيقة بدلاً من الحقيقة المطلقة أو الكذب، يهدف هذا إلى تكرار كيفية تقييم الناس للقضايا والتوصل إلى الأحكام. **(S. N. Sivanandam & et al., 2007, 75)**

ويعد المنطق الضبابي أحد الأدوات والأساليب الرياضية المعاصرة التي أظهرت قدرة قوية على حل المشكلات على نطاق واسع في العديد من قطاعات التطبيق. اذ تم التطرق إلى غالبية الميزات التقنية المعاصرة بهذا الأساس المنطقي. إن الافتراض بأن البشر لا يمثلون فئات من الأشياء (على

سبيل المثال، فئة الرجال البدناء، أو فئة الأعداد التي تزيد عن 100) على أنها منفصلة تمامًا، بل كمجموعات قد تكون فيها درجات متفاوتة من الانتماء، هو أحد أكثر الافتراضات أهمية. وهو من الطرائق المفيدة لمحاكاة التجربة الإنسانية بطريقة واقعية والتي تعتبر حل لمشكلة تمثيل المعلومات التقريبية من خلال التركيز على الاستدلال من خلال التعبيرات جاءت لتسد فجوات كبيرة في المنطق التقليدي (**Crisp**) عند الاستدلال في ظروف غير مؤكدة وغير دقيقة لأن العديد من الظواهر تتعامل مع معلومات غير دقيقة وغير دقيقة من خلال تخصيص درجة من الانتماء (العضوية) لكل عنصر في المجموعة داخل المجال الحقيقي [0،1]. ويتم تحديد عضوية العنصر في المجموعة الضبابية الفرعية حسب درجته. ويوضح الشكل (2-1) نظام المنطق الضبابي. **(علي، 2022، 10)**



شكل (5-2) نظام المنطق الضبابي

2.11 المجموعة التقليدية (Crisp set)

هي مجموعة يتم تصنيف كل عنصر فيها على أنه ينتمي إليها أو لا ينتمي إليها، مع وجود حدود واضحة لا لبس فيها تفصل كل عنصر يشكل جزءًا من المجموعة عن جميع العناصر الأخرى. قد يكون العنصر في نفس الوقت جزءًا من المجموعة ولا يكون كذلك. **[Pak & et al. , 2013, 341] [AL-Sabbah et al., 2021, 1213]** .

لتكن **X** مجموعة شاملة (**Universe of discourse**)، وان A مجموعة جزئية منها ، فان كل عنصر x في A يمكن ان ينتمي أو لا ينتمي للمجموعة A. **(H. Garg et al, 2013, 397)**

ولتكن $\mu_A(x)$ دالة مميزة للمجموعة A تعطي لكل عنصر في المجموعة **X** درجة إنتماء الى المجموعة A وتكون هذه الدالة ثنائية القيم $\{0,1\}$ إذ أن:

(A.Ibrahim & A. Mohammed, 2017, 143)

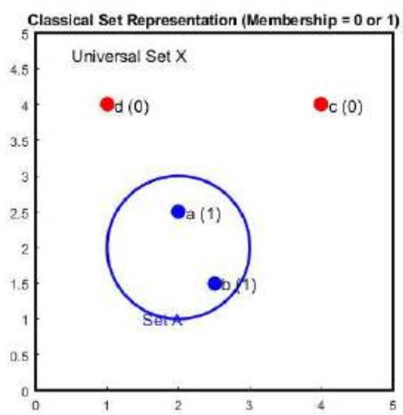
$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & if\ x \in A \\ 0, & if\ x \notin A \end{cases}$$

اذ أن $\mu_A(x)$ تمثل الدالة المميزة للمجموعة التقليدية.

فاذا كانت $\mu_A(x) = 1$ فان العنصر x له انتماء تام للمجموعة A

واذا كانت $\mu_A(x) = 0$ فان العنصر x لاينتمي بتاتاً للمجموعة A

والشكل **(2−6)** يبين المجموعة التقليدية إذ نلحظ فيه المجموعة **A** التي تتضمن العاصر **a, b,** هي بداخل الدائرة الذي يشير الى ان العناصر تنتمي تماماً للمجموعة **A** ودرجة انتماءها تساوي 1 ، بينما العناصر **c, d** لاتنمتني تماماً للمجموعة **A** ودرجة انتماءها تساوي صفر



شكل (2−6) المجموعة التقليدية

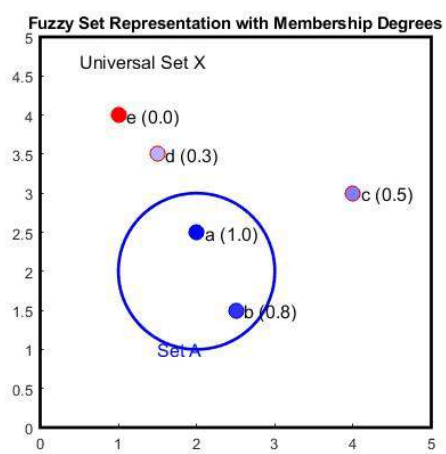
2.12 المجموعة الضبابية (Fuzzy set)

المجموعة الضبابية هي مجموعة ذات حدود غير محددة وضبابية، وهي إحدى الأفكار الأساسية للبحث الرياضي الحديث. يتم تعريف المجموعة الضبابية من خلال دالة الانتماء التي تعطي كل عنصر في المجموعة درجة من الانتماء ضمن الفترة [0، 1]. كل عنصر في المجموعة الضبابيبة له درجة معينة من الانتماء. **(Yager, 2013, 436)** .

لتكن **X** مجموعة فضاء العينة فلتمثيل مجموعة ضبابية ولتكن $\tilde{A}$ من المجموعة **X** نستخرج لها دالة انتماء $\mu_{\tilde{A}}(x)$ بحيث تكون نتائج قيم الانتماءات بين $[0,1]$ لكل قيم **x** في فضاء العينة ورياضياً يمكن ان يعبر عن المجموعة الضبابية كالآتي: **(علي، 2018، 17)**

$$\tilde{A} = \{(x_i, \mu_{\tilde{A}}(x_i)), x \in \Omega, i = 1,2,3,\ldots\ldots n, 0 \le \mu_{\tilde{A}}(x) \le 1\} \qquad \ldots (2\text{-}40)$$

والشكل (2−7) يبين المجموعة الضبابية



شكل (2−7) يوضح المجموعة الضبابية **(Fuzzy set)**

2.13 دوال الإنتماء **(Membership functions)**

وهي الدالة التي تولد قيما ضمن الفترة [0، 1] لتمثل درجة انتماء كل عنصر موجود في المجموعة الشاملة التقليدية ضمن المجموعة الضبابية، وتعد إحدى الدوال الأساسية والهامة في نظرية المجموعات الضبابية **(Abboudi & et al, 2020, 614)**. بمعنى آخر هي الدالة التي تحدد درجة همية العنصر في المجموعة الشاملة الى المجموعة الضبابية ، وهي دالة ذات قيمة موجبة **(Yadav & Yadav, 2019, 120 [نصر الله و علي، 2020. 56]**

تُحدد دوال الإنتماء بثلاث خصائص رئيسة هي:

1- النواة (اللب) (Core)

اذا كانت $\tilde{A}$ مجموعة ضبابية ، فان لبها هو عندما تكون درجة انتماءها كاملة وتساوي 1.

2- الداعم (القاعدة) (Support)

اذا كانت $\tilde{A}$ مجموعة ضبابية ، فان العناصر المتضمنة في المجموعة $\tilde{A}$ والتي درجة إنتماءها اكبر من الصفر تمثل الداعم لتلك المجموعة :

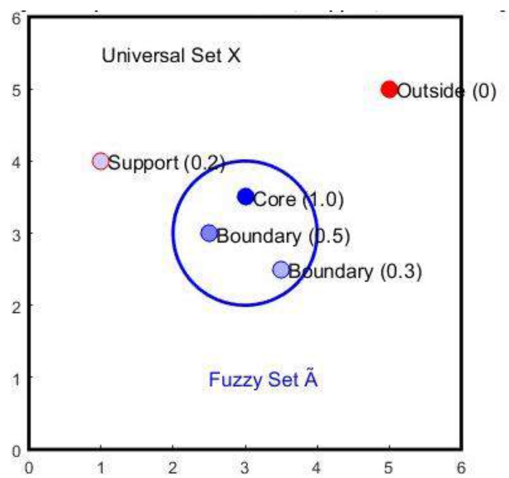
$$\boldsymbol{Support}\ (\tilde{\boldsymbol{A}}) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\Omega}\ /\ \mu_{\tilde{A}}(\boldsymbol{x}) > \boldsymbol{0}\} \quad \dots (2-41)$$

3- الحدود (Boundary)

اذا كانت $\tilde{A}$ مجموعة ضبابية ، فان العناصر المتضمنة في المجموعة $\tilde{A}$ والتي درجة إنتماءها أكبر من الصفر وغير كاملة اي ان :

$$\textbf{Boundary}\ (\tilde{A}) = \{x\, \epsilon\, \Omega\ ;\ 0 < \mu_{\tilde{A}}(x) < 1\} \quad \ldots (2-42)$$

(Tamalika, 2019, 4-5)

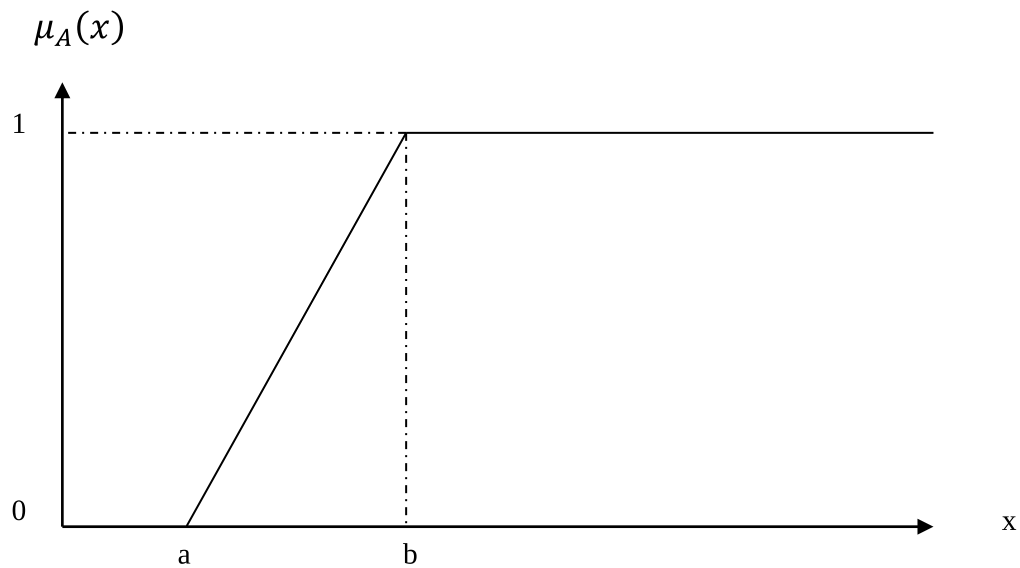


شكل (2−8) مميزات دالة الإنتماء

ويعد شكل دالة الإنتماء من المعايير المهمة التي يجب مراعاتها لغرض الحصول على المجموعة الضبابية، فهنالك العديد من دوال الإنتماء اذ تم في هذه الرسالة استعمال دالة الانتماء شبه المنحرفة وهي من دوال الإنتماء الخطية الذي يكون لديها عنصرين هماي الحد الادنى **(a)** والحد ألاعلى **(b)** وتكون صيغتها كالآتي :

$$\mu_A(t) = \begin{cases} 0 & if\ \ t\ <\ a \\ \frac{t-a}{b-a} & if\ \ a \le t \le b \\ 1 & if\ \ t > b \end{cases} \quad \ldots (3-7)$$

، [de Barros, 2017, 29].



شكل (2−9) دالة الانتماء شبه المنحرف

2.14 معامل القطع− الفا (α-cut)

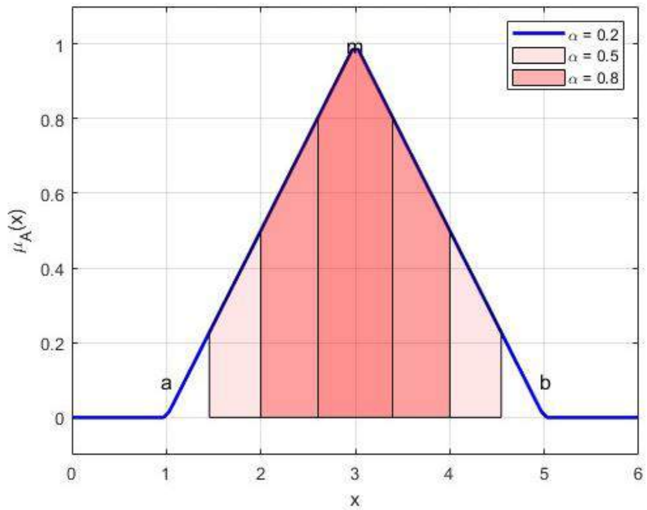
هو اقل درجة انتماء لاي عنصر في المجموعة الضبابية Ã وتقع قيمته ضمن الفترة [0 1] والتي تمثل درجة انتماء العناصر الفعالة في التحليل كون الإنتماء المهم ينحصر بين قيمتين على الخط الداعم للمجموعة الضبابية وماعدا تلك القيم يكون قليلَ الأهمية وخارج نطاق العمل اي انه كل العناصر في المجموعة الشاملة التي لها انتماء اكبر او يساوي القطع الفا **[Neamah & Ali , 2020, 643]**

2.15 مجموعة القطع الفا (α-cut set)

وهي مجموعة من معاملات القطع الفا التي ينتج من خلالها مجموعات ضبابية ، يمكن ان يعبر عنها رياضياً : **[Yia et al., 2016, 1045]**

$$A^{\alpha} = \{\tilde{x} \in X;\ \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$$
$$\dots (2-44)$$

إذ ان $0 < \alpha < 1$ ، X المجموعة الشاملة **(Universe of discourse)**



الشكل (2-*10*) مجموعات ضبابية A^{α} لعدة معاملات قطع α لدالة انتماء مثلثية

نلحظ من الشكل (2-10) ان المنطقة المحددة باللون الوردي المتدرج يمثل مجموعة ضبابية عند ثلاث معاملات قطع الناتجة من اختيار العناصر التي لها درجة انتماء اكبر او تساوي القطع α.

2.16 التوزيع الاحتمالي الضبابي: (Fuzzy probability Distribution)

باستعمال طريقة تحويل اي توزيع احتمالي تقليدي الى توزيع احتمالي ضبابي وكالآتي : **[علي، 2022، 29-30] [Ali & Neamah, 2022, 443]**

بفرض ان اوقات الفشل $t \in T$ غير دقيقية وغير مؤكدة ويعبر عنها بارقام ضبابية $\tilde{t} \in \tilde{T}$ ، بحيث أن:

$$\tilde{t} = \{[0, \infty), \mu_{\tilde{t}}(t)\}$$

فان متجه مشاهدات العينة التقليدي الناتج من المجموعة الضبابية والذي يمثل كل العناصر التي تكون لها درجة انتماء اكبر او تساوي القطع الفا **(α-cut)** والذي يمثل درجة انتماء العناصر التي يكون لها دور كبير في التحليل ويعبر عن تلك العناصر بالمجموعة $A^{(\alpha)}$ بحيث ان :

$$A^{(\alpha)} = \{\tilde{t} = [0, \infty) \in \tilde{T}, \mu_{\tilde{t}}(t) = \alpha\ ;\ \mu_{\tilde{t}}(t) \geq \alpha\} \qquad \dots (2-45)$$

إذ أن:

α معامل القطع، $0 < \alpha < 1$

$\mu_{\tilde{t}}(\boldsymbol{t})$ دالة الإنتماء التي عن طريقها يتم توليد درجة انتماء كل وقت فشل في فضاء العينة ويمكن ان تأخذ اي شكل من أشكال دوال الإنتماء.

فان دالة التوزيع التجميعية الضبابية **(Fuzzy Cumulative Distribution Function)($\widetilde{\mathbf{CDF}}$)** عند اي قيمة من قيم فضاء العينة الضبابي $\boldsymbol{A}^{(\alpha)}$ ولأي توزيع فشل يمكن الحصول عليها كالآتي:

$$\tilde{F}\left(\tilde{t}_{\boldsymbol{A}^{(\alpha)}}\right) = \int_0^{\tilde{t}_{\boldsymbol{A}^{(\alpha)}}} f(u)du$$

$$\ldots (2-46)$$

وباشتقاق الصيغة $(2-32)$ بالنسبة لـ $(\ \tilde{t}_{\boldsymbol{A}^{(\alpha)}}\ )$ نحصل على التوزيع الإحتمالي الضبابي وكما يأتي:

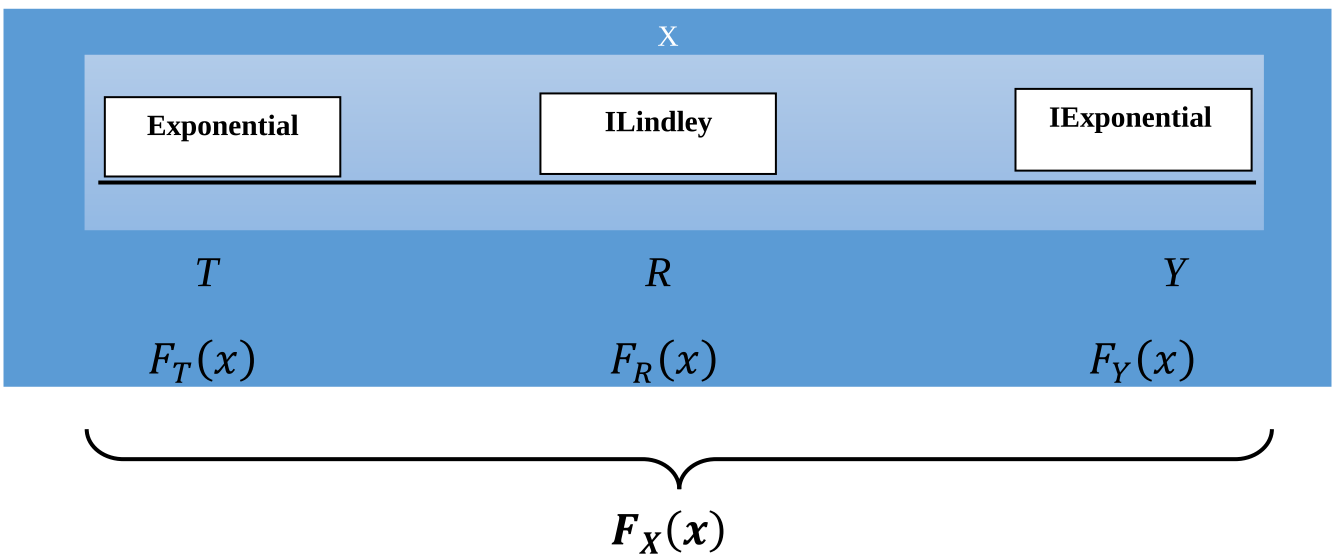
$$\tilde{f}(\tilde{\boldsymbol{t}}) = \frac{\partial \tilde{F}\left(\tilde{t}_{\boldsymbol{A}^{(\alpha)}}\right)}{\partial \tilde{t}_{\boldsymbol{A}^{(\alpha)}}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{t}_{\boldsymbol{A}^{(\alpha)}}}\left[\int_0^{\tilde{t}_{\boldsymbol{A}^{(\alpha)}}} f(u)du\right] \quad ; \quad 0 < \tilde{t}_{\boldsymbol{A}^{(\alpha)}} < \infty \qquad \ldots (2-47)$$

2.17 التوزيع الثلاثي الضبابي المستند على الدالة الكمية الاسي– معكوس ليندلي– الأسي المعكوس (EILIE)

(Fuzzy Triple distribution based on Quantile function the Exponential – ILindley- Inverse Exponential)

ان دالة الكثافة الاحتماليه للتوزيع EILIE تستخرج بتطبيق المعادلة (2-29) كالآتي:

$$f_X(x)=\frac{\theta^2}{(\theta+1)}\left(\frac{1+x}{x^3}\right)e^{-\frac{\theta}{x}}.\frac{f_T\left(Q_Y\left(1-\left[1+\frac{\theta}{(\theta+1)}\frac{1}{x}\right]e^{-\frac{\theta}{x}}\right)\right)}{f_Y\left(Q_Y\left(1-\left[1+\frac{\theta}{(\theta+1)}\frac{1}{x}\right]e^{-\frac{\theta}{x}}\right)\right)}\quad \dots (2-48)$$



شكل (2-11) مخطط التوزيع المقترح الجديد **FILIE**

توزيع المتغير العشوائي الثاني **R** هو توزيع معكوس ليندلي بدالة الكثافة التجميعية الآتية:

$$F_R(x;\theta)=1-\left[1+\frac{\theta}{(\theta+1)}\frac{1}{x}\right]e^{-\frac{\theta}{x}}\quad ;x>0\,,\theta>0\qquad \dots (2-49)$$

توزيع المتغير العشوائي الثالث **Y** هو التوزيع الأسي بالمعلمة (λ) بدالة الكثافة الاحتماليه الآتية:

$$f_Y(x) = \frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}} \quad ; x > 0 , \lambda > 0 \qquad \dots (2-50)$$

بالدالة الكمية :

$$Q_Y(x) = -\lambda ln(1-u) \qquad \dots (2-51)$$

نعوض بدل x في معادلة (2-50) بالدالة الكمية في المعادلة (2-51) في المعادلة (32) وكالآتي:

$$f_Y\left(Q_Y(x)\right) = \frac{1}{\lambda}e^{-\frac{-\lambda ln(1-u)}{\lambda}}$$

$$f_Y\left(Q_Y(x)\right) = \frac{1}{\lambda}(1-u) \qquad \dots (2-52)$$

نعوض بدل u في معادلة (2-52) بالدالة التوزيعية للمتغير العشوائي الثاني R وكالآتي:

$$f_Y\left(Q_Y\left(\mathrm{F}_R(x;\theta)\right)\right) = \frac{1}{\lambda}\left(1-\left(1-\left[1+\frac{\theta}{(\theta+1)}\frac{1}{x}\right]\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{x}}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left[1+\frac{\theta}{(\theta+1)}\frac{1}{x}\right]\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{x}} \qquad \dots (2-53)$$

وعليه فان الدالة الاحتماليه لصنف التوزيع **(EIILIE)** تكون كالآتي:

$$f_X(\mathrm{x}) = \frac{\theta^2}{(\theta+1)} \left(\frac{1+x}{x^3}\right) \mathrm{e}^{-\frac{\theta}{x}}. \frac{f_T\left(Q_Y\left(1-\left[1+\frac{\theta}{(\theta+1)}\frac{1}{x}\right]\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{x}}\right)\right)}{\frac{1}{\lambda}\left[1+\frac{\theta}{(\theta+1)}\frac{1}{x}\right]\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{x}}} \qquad \dots (2-54)$$

1- توزيع المتغير العشوائي الاول **T** هو التوزيع معكوس الاسي بدالة الكثافة الاحتماليه الآتية:

$$f_Y(x,\alpha,\beta) = \beta e^{-\beta x} \qquad \dots (2-55)$$

وعليه:

$$f_T\left(Q_Y\left(1-\left[1+\frac{\theta}{(\theta+1)}\frac{1}{x}\right]\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{x}}\right)\right) = \beta e^{-\beta\frac{1}{\lambda}\left[1+\frac{\theta}{(\theta+1)}\frac{1}{x}\right]\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{x}}} \qquad \dots (2-56)$$

وعليه فان الدالة الاحتماليه لصنف التوزيع (IEILE) بصيغتها النهائية تكون كالآتي:

$$f_X(x) = \frac{\theta^2}{(\theta+1)}\left(\frac{1+x}{x^3}\right) e^{-\frac{\theta}{x}}.\frac{\beta e^{-\beta\frac{1}{\lambda}\left[1+\frac{\theta}{(\theta+1)}\frac{1}{x}\right]e^{-\frac{\theta}{x}}}}{\frac{1}{\lambda}\left[1+\frac{\theta}{(\theta+1)}\frac{1}{x}\right]e^{-\frac{\theta}{x}}}$$

$$= \frac{\lambda\beta\theta^2}{(\theta+1)}\left(\frac{1+x}{x^3}\right)\frac{e^{-\frac{\beta}{\lambda}\left[1+\frac{\theta}{(\theta+1)}\frac{1}{x}\right]e^{-\frac{\theta}{x}}}}{\left[1+\frac{\theta}{(\theta+1)}\frac{1}{x}\right]} \qquad \dots(2-57)$$

اذ أن :

$\lambda, \beta, \theta > 0$ معلمات القياس **Scale Parameteres**

فعندما : $\beta = 1, \lambda = 1$ نحصل على توزيع معكوس ليندلي بمعلمة واحدة

وعندما $\lambda = 1$ نحصل على التوزيع الأسي- ليندلي بمعلمتين λ, θ

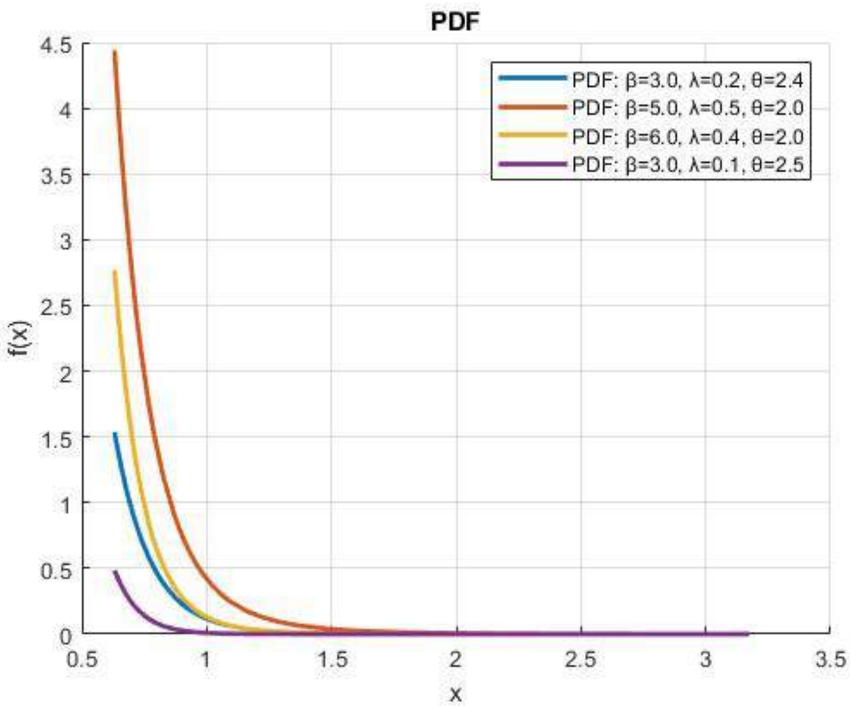
وعندما $\lambda = 1$ نحصل على التوزيع الأسي المعكوس - ليندلي بمعلمتين . β, θ

وهذا يثبت بان التوزيع المقترح هو توزيع احتمالي لانه تركيبة من توزيعات احتمالية.

وبالاعتماد على المعادلة () لتحويل التوزيع المقترح الى ضبابي يكون التوزيع الناتج كالآتي:

$$\tilde{f}_{\tilde{X}}\left(\tilde{x}_{A(\alpha)}\right) = \frac{\lambda\beta\theta^2}{(\theta+1)}\left(\frac{1+\tilde{x}_{A(\alpha)}}{\tilde{x}_{A(\alpha)}{}^3}\right)\frac{e^{-\frac{\beta}{\lambda}\left[1+\frac{\theta}{(\theta+1)}\frac{1}{\tilde{x}_{A(\alpha)}}\right]e^{-\frac{\theta}{\tilde{x}_{A(\alpha)}}}}}{\left[1+\frac{\theta}{(\theta+1)}\frac{1}{\tilde{x}_{A(\alpha)}}\right]} ; 0 < \tilde{x}_{A(\alpha)} < \infty \qquad \dots(2-58)$$

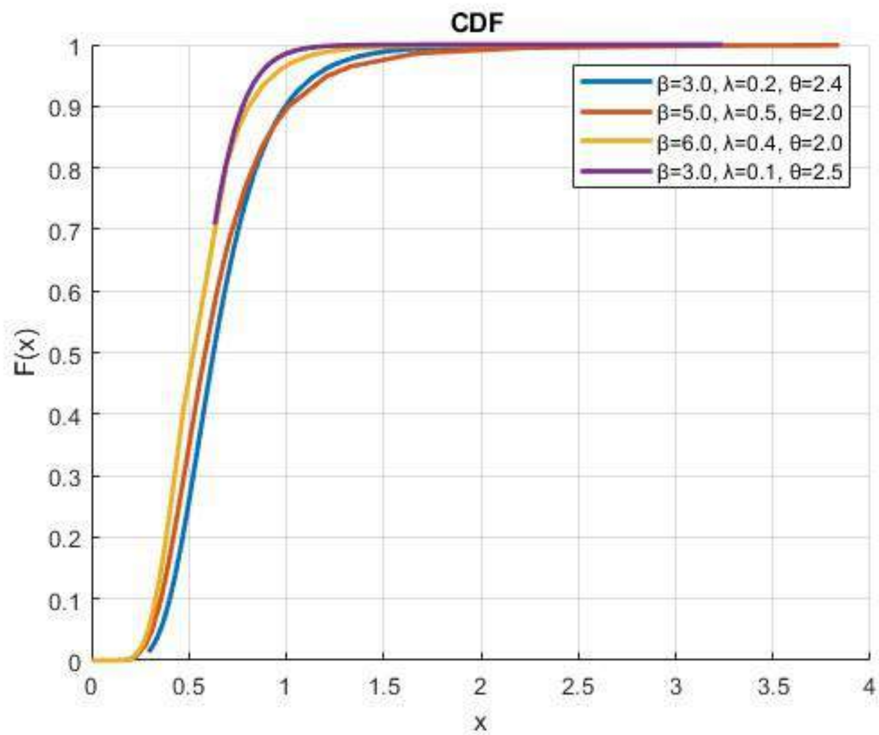
اذ ان $\tilde{x}_{A(\alpha)}$ هو اي عنصر في المجموعة الضبابية $\tilde{\mathbf{X}}$ بعد القطع α



شكل (2-12) منحنى دالة الكثافة الاحتماليه للتوزيع الجديد FIEILI عند قيم مختلفة لمعلماته

ان الدالة التوزيعية للتوزيع الجديد (FEILIE) الجديد يمكن ان تستخرج بتطبيق المعادلة (2-49) كالآتي:

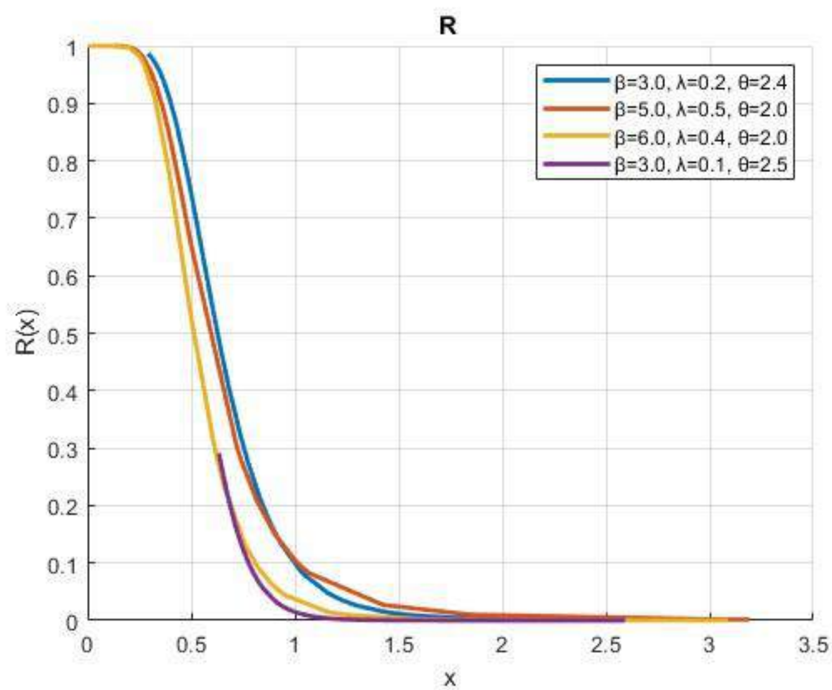
$$\tilde{F}_{\tilde{X}}\left(\tilde{x}_{A(\alpha)}\right) = 1 - e^{-\left(\frac{\beta}{\lambda}\left[1+\frac{\theta}{(\theta+1)}\frac{1}{\tilde{x}_{A(\alpha)}}\right]e^{-\frac{\theta}{\tilde{x}_{A(\alpha)}}}\right)} \quad ; 0 < \tilde{x}_{A(\alpha)} < \infty \qquad \ldots (2-59)$$



شكل (2-13) منحنى دالة الكثافة الاحتماليه التجميعية للتوزيع FEILIE **عند قيم مختلفة لمعلماته**

وان دالة المعولية **(Rliability Function)** للتوزيع المقترح **(FEILIE)** كالآتي:

$$\widetilde{R}_{\tilde{X}}\left(\tilde{x}_{A(\alpha)}\right) = e^{-\left(\frac{\beta}{\lambda}\left[1+\frac{\theta}{(\theta+1)}\frac{1}{\tilde{x}_{A(\alpha)}}\right]e^{-\frac{\theta}{\tilde{x}_{A(\alpha)}}}\right)} \quad \ldots (2-60)$$



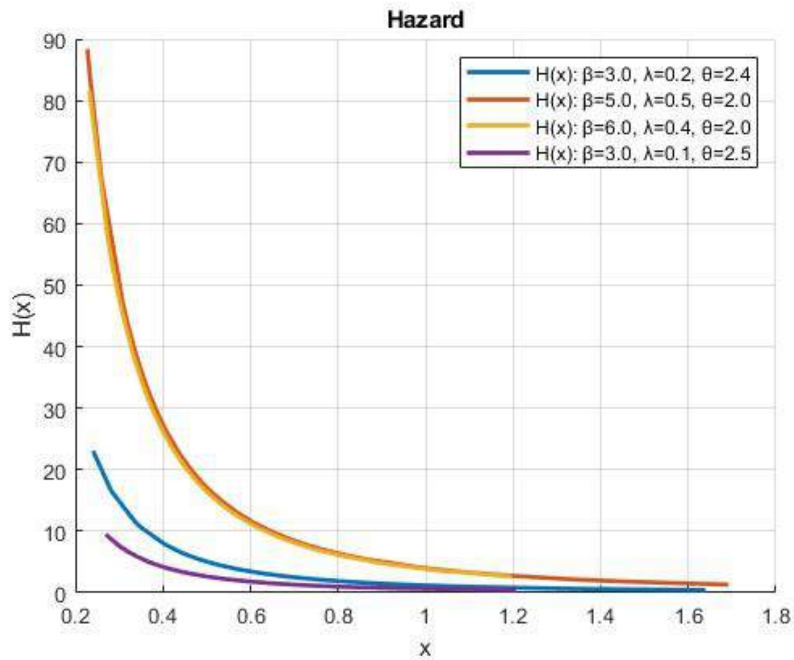
شكل (2-14) منحنى دالة المعولية للتوزيع المقترح FEILIE عند قيم مختلفة لمعلماته

وان دالة المخاطرة **(Hazard Function)** للتوزيع المقترح **(FEILIE)** كالآتي:

$$\tilde{H}_{\tilde{X}}\left(\tilde{x}_{A(\alpha)}\right) = \frac{\tilde{f}_{\tilde{X}}\left(\tilde{x}_{A(\alpha)}\right)}{\tilde{R}_{\tilde{X}}\left(\tilde{x}_{A(\alpha)}\right)}$$

$$= \frac{\frac{\lambda\beta\theta^2}{(\theta+1)}\left(\frac{1+\tilde{x}_{A(\alpha)}}{\tilde{x}_{A(\alpha)}{}^{3}}\right)\frac{e^{-\frac{\beta}{\lambda}\left[1+\frac{\theta}{(\theta+1)}\frac{1}{\tilde{x}_{A(\alpha)}}\right]e^{-\frac{\theta}{\tilde{x}_{A(\alpha)}}}}}{\left[1+\frac{\theta}{(\theta+1)}\frac{1}{\tilde{x}_{A(\alpha)}}\right]}}{e^{-\left(\frac{\beta}{\lambda}\left[1+\frac{\theta}{(\theta+1)}\frac{1}{\tilde{x}_{A(\alpha)}}\right]e^{-\frac{\theta}{\tilde{x}_{A(\alpha)}}}\right)}}$$

$$= \frac{\lambda\beta\theta^2}{(\theta+1)}\left(\frac{1+\tilde{x}_{A(\alpha)}}{\tilde{x}_{A(\alpha)}{}^{3}}\right)\left[1+\frac{\theta}{(\theta+1)}\frac{1}{\tilde{x}_{A(\alpha)}}\right]^{-1} \qquad \ldots(2-61)$$



شكل (2-15) منحنى دالة المخاطرة للتوزيع المقترح FEILIE عند قيم مختلفة لمعلماته

وان الدالة الكمية **(Quiantile Function)** للتوزيع المقترح كالآتي:

$$\mathbf{Q}\left(\tilde{x}_{A^{(\alpha)}}\right) = -\frac{\mathbf{1+\theta}}{\boldsymbol{\theta}} - \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\theta}} W_{-1}\left(-u(\mathbf{1+\theta})\lambda\beta e^{-(1+\theta)}\right) \qquad \dots (2-62)$$

وان العزم اللامركزي ذو الدرجة r :

$$E\left(\tilde{X}^r\right) = \left(\frac{\lambda\beta}{\theta}\right)^r \sum_{j=1}^{r}\sum_{n=0}^{\infty} b_{n.r}\, c_{n.r}[1 - F_Y(T)]^{n-1} \qquad \dots (2-63)$$

اذ ان:

$$b_{n.r} = (na_0)\sum_{l=1}^{n}[r(l+1) - n]a_l\, b_{n-l,r} b_{0,r}$$

$$= a^r{}_0 a_n = \frac{-(n+1)}{n!} e^{-(n+1)(\theta+1)} \qquad \dots (2-64)$$

$$c_{n.r} = \binom{r}{j} - \lambda\beta(\theta+1)^{r-j} \qquad \dots (2-65)$$

2.18 طرائق تقدير معلمات التوزيع المقترح

(Method of parameter of FEILIE Estimation)

2.18.1 مقدر الامكان الأعظم للتوزيع الثلاثي الضبابي FEILIE :

(Maximum Likelihood Estimator of FEILIE distribution)

تعد طريقة الامكان الأعظم والتي قدمت لأول مرة من قبل الباحث **(Ronald Fisher)** عام **1922** من الطرائق المهمة في التقدير لأنها نتنتج تقديرات لها خصائص جيدة اهمها خاصية الثبات **(Invariant Property)** ، الكفاءة والكفاية وفي بعض الاحيان خاصية الاتساق ، وان مبدأ هذه الطريقة هو العثور مقدر المعلمة الذي تجعل دالة الإمكان في نهايتها العظمى.

ان تعد دالة الامكان **(Likelihood function)** دالة احتمالية مشتركة لـ **p** من المتغيرات العشوائية والتي تستعمل في تقدير المعلمات وهي:**[AL-Sabbah et al., 2021, 2]**

$$\boldsymbol{L = L(\theta_1, \theta_2, \dots, .\theta_p)} \qquad \dots (2-66)$$

وان **(P)** من المعادلات الناتجة من المشتقة الجزئية للوغاريتم دالة الامكان ومساواتها بالصفر بالشكل الآتي: **[علي، 2018، 12]**

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial LogL}{\partial \theta_1} &= 0 \\ \frac{\partial LogL}{\partial \theta_2} &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial LogL}{\partial \theta_P} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \dots (2-67)$$

وبحل المعادلات **(2-67)** نحصل على مقدرات الامكان الاعظم **(MLEs)** $\boldsymbol{\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, .\hat{\theta}_p}$

اذا كانت لدينا عينة عشوائية $\boldsymbol{A^{\alpha} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_{\tilde{n}})}$ من توزيع **FIEILI** بدالة كثافة احتمالية كما في معادلة **(2-57)** ، فان دالة الامكان يمكن ان تكتب بالشكل الآتي :

$$\mathrm{L} = \prod_{\mathrm{i}=1}^{\tilde{\mathrm{n}}} f(\tilde{x}_{iA(\alpha)}, \lambda, \beta, \theta)$$

$$L = \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \frac{\lambda\beta\theta^2}{(\theta+1)} \left(\frac{1+\tilde{x}_{iA(\alpha)}}{\tilde{x}_{iA(\alpha)}^{3}}\right) \frac{e^{-\frac{\beta}{\lambda}\left[1+\frac{\theta}{(\theta+1)}\frac{1}{\tilde{x}_{iA(\alpha)}}\right]e^{-\frac{\theta}{\tilde{x}_{iA(\alpha)}}}}}{\left[1+\frac{\theta}{(\theta+1)}\frac{1}{\tilde{x}_{A(\alpha)}}\right]}$$

$$= \left(\frac{\lambda\beta\theta^2}{(\theta+1)}\right)^{\tilde{n}} \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \left(\frac{1+\tilde{x}_{iA(\alpha)}}{\tilde{x}_{iA(\alpha)}^{3}}\right) \left(\frac{1}{\left[1+\frac{\theta}{(\theta+1)}\frac{1}{\tilde{x}_{iA(\alpha)}}\right]}\right) e^{-\frac{\beta}{\lambda}\sum_{i=1}^{\tilde{n}}\left[1+\frac{\theta}{(\theta+1)}\frac{1}{\tilde{x}_{iA(\alpha)}}\right]e^{-\theta\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\tilde{x}_{iA(\alpha)}}}} \quad \ldots (2-68)$$

وبأخذ اللوغاريتم الطبيعي لطرفي المعادلة (2-68) ينتج:

$$\ln L = \tilde{n}\ln(\lambda) + \tilde{n}\ln(\beta) + 2\tilde{n}\ln(\theta) - \tilde{n}\ln(\theta+1) + \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \ln\left(\left(\frac{1+\tilde{x}_{iA(\alpha)}}{\tilde{x}_{iA(\alpha)}^{3}}\right)\right) + \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \ln\left(\frac{1}{\left[1+\frac{\theta}{(\theta+1)}\frac{1}{\tilde{x}_{iA(\alpha)}}\right]}\right) -$$

$$\frac{\beta}{\lambda}\sum_{i=1}^{\tilde{n}}\left[1+\frac{\theta}{(\theta+1)}\frac{1}{\tilde{x}_{iA(\alpha)}}\right] e^{-\theta\sum_{i=1}^{\tilde{n}}\frac{1}{\tilde{x}_{iA(\alpha)}}} \quad \ldots (2-69)$$

وللحصول على مقدر θ و λ و β نأخذ المشتقة الجزئية بالنسبة لكل معلمة ومساواتها الى الصفر نحصل على الآتي:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \frac{2\tilde{n}}{\theta} - \frac{\tilde{n}}{\theta+1} + \sum_{i=1}^{\tilde{n}} - \frac{\frac{1}{(\theta+1)\tilde{x}_{iA(\alpha)}} \frac{\theta}{(\theta+1)^2\tilde{x}_{iA(\alpha)}}}{1+\frac{\theta}{(\theta+1)\tilde{x}_{iA(\alpha)}}}$$

$$- \frac{1}{\lambda}\left(\beta\left(\sum_{i=1}^{\tilde{n}} - \frac{\frac{1}{(\theta+1)\tilde{x}_{iA(\alpha)}} \frac{\theta}{(\theta+1)^2\tilde{x}_{iA(\alpha)}}}{\left(1+\frac{\theta}{(\theta+1)\tilde{x}_{iA(\alpha)}}\right)^2}\right)\right) e^{-\theta\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\tilde{x}_{iA(\alpha)}}}$$

$$- \frac{1}{1+\frac{\theta}{(\theta+1)\tilde{x}_{iA(\alpha)}}}\left(\left(\sum_{i=1}^{\tilde{n}}\frac{1}{\tilde{x}_{iA(\alpha)}}\right) e^{-\theta\sum_{i=1}^{\tilde{n}}\frac{1}{\tilde{x}_{iA(\alpha)}}}\right) \quad \ldots (2-70)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda}=\frac{\tilde{n}}{\lambda}+\frac{\beta\sum_{i=1}^{\tilde{n}}\frac{1}{1+\frac{\theta}{(\theta+1)\tilde{x}_{iA^{(\alpha)}}}}e^{-\theta\sum_{i=1}^{\tilde{n}}\frac{1}{\tilde{x}_{iA^{(\alpha)}}}}}{\lambda^{2}}\quad \dots(2-71)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta}=\frac{\tilde{n}}{\beta}-\frac{\beta\sum_{i=1}^{\tilde{n}}\frac{1}{1+\frac{\theta}{(\theta+1)\tilde{x}_{iA^{(\alpha)}}}}e^{-\theta\sum_{i=1}^{\tilde{n}}\frac{1}{\tilde{x}_{iA^{(\alpha)}}}}}{\lambda}\quad \dots(2-72)$$

المعادلات (2-**70**) و (2-**71**) و (2-**72**) لايمكن ان تحل بالطرائق التحليلية الاعتيادية وانما سيتم الاعتماد على الطرائق العددية التكرارية لحلها في برنامج ماتلاب.

2.18.2 مقدر اعظم مسافة متباعدة

(Maximum Product of Spacings Estimator)

إن مفهوم المسافة المتباعدة مشابه لمفهوم الامكان الاعظم والتي فيها يتم الحصول على معادلة الامكان بكتابة دالة الكثافة المشتركة لمشاهدات العينة. اما في مقدر اعظم مسافة متباعدة، يمكننا الحصول على حاصل ضرب المسافات عن طريق أخذ المتوسط الهندسي للمسافات بين مشاهدات العينات المرتبة. وتعد هذه الطريقة من لطرائق المفيدة للتوزيعات المتينة الذيل. **[Chaturvedi et al., 2023, 11-12]**

اذا كانت لدينا عينة عشوائية ضبابية $A^{\alpha}=(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\dots,\tilde{x}_{\tilde{n}})$ من توزيع **FEILIE** ، ولتكن:

$$(\tilde{x}_{(1)},\tilde{x}_{(2)},\dots,\tilde{x}_{\tilde{n}})$$

عينه التوزيع مرتبة تصادعيا . فان المسافات **(Spaces)** تشير الى الاختلافات بين الاحصاءات المرتبة المتعاقبة (قيم العينة المرتبة) في مجموعة المشاهدات وكالآتي:

$$D_i=\tilde{F}_{\tilde{X}}\left(\tilde{x}_{(i)A^{(\alpha)}}\right)-\tilde{F}_{\tilde{X}}\left(\tilde{x}_{(i-1)A^{(\alpha)}}\right)\quad ;i=1,2,\dots.\tilde{n}+1\qquad \dots(2-73)$$

اذ أن:

$\tilde{F}_{\tilde{X}}\left(\tilde{x}_{(i)A^{(\alpha)}}\right)$ دالة الكثافة الاحتماليه التجميعية الضبابية للتوزيع المقترح .

فان دالة الهدف لطريقة **(MPS)** تكون كالآتي:

$$MPS=\left(\prod_{i=1}^{\tilde{n}+1} D_i\right)^{\frac{1}{\tilde{n}+1}} \qquad \dots(2-74)$$

وباخذ اللوغاريتم الطبيعي للمعادة $(2-74)$ نحصل على :

$$log(MPS)=\frac{1}{\tilde{n}+1}\sum_{i=1}^{\tilde{n}+1} log(D_i)$$

$$=\frac{1}{\tilde{n}+1}\sum_{i=1}^{\tilde{n}+1} \log\left(\tilde{F}_{\tilde{X}}\left(\tilde{x}_{(i)A^{(\alpha)}}\right)-\tilde{F}_{\tilde{X}}\left(\tilde{x}_{(i-1)A^{(\alpha)}}\right)\right) \dots (2-75)$$

وبما ان دالة الكثافة الاحتماليه التجميعية للتوزيع المقترح كما في معادلة (2-59) وبتعويضها في معادلة (2-75) ينتج :

$$\log(MPS)=\frac{1}{\tilde{n}+1}\sum_{i=1}^{\tilde{n}+1}\log\left(e^{-\left(\frac{\beta}{\lambda}\left[1+\frac{\theta}{(\theta+1)}\frac{1}{\tilde{x}_{(i-1)A^{(\alpha)}}}\right]e^{-\frac{\theta}{\tilde{x}_{(i-1)A^{(\alpha)}}}}\right)} - e^{-\left(\frac{\beta}{\lambda}\left[1+\frac{\theta}{(\theta+1)}\frac{1}{\tilde{x}_{(i)A^{(\alpha)}}}\right]e^{-\frac{\theta}{\tilde{x}_{(i)A^{(\alpha)}}}}\right)}\right) \dots (2-76)$$

ولايجاد مقدرات معلمات التوزيع (λ,β,θ) تم استعمال خوارزمية (**Nelder-Mead Simplex Method**) والتي تعد تقنية عددية شائعة الاستعمال لايجاد على الحد الأدنى من دالة هدف في مساحة متعددة الأبعاد. على عكس أساليب الامثلية القائمة على التدرج، فهي لا تتطلب حساب المشتقات، مما يجعلها مفيدة بشكل خاص للدوال غير القابلة للتمييز، وكما يأتي:**[Kumar & Kostina, 2024, 6]**

1- نبدأ الخوارزمية بقيم اولية للمعلمات المراد تقديرها ولتكن $(\lambda_0,\beta_0,\theta_0)$ ، وشكل هندسي بسيط ذو **n+1** رؤوس و بـ **n** بعد وليكم ثلاثي الابعاد بعدد المعلمات المراد تقديرها وليكن S_0 .

2- اختبار دالة الهدف عند كل رأس من رؤوس الشكل الهندسي.

3- اجراء العملي التكرارية الاتية:

- ترتيب الرؤوس: نفرز القمم حسب قيم دوالها.
- حساب نقطة الانعكاس (**Reflex**) عبر النقطه الوسطى للأفضل **n** القمم. إذا كانت هذه النقطة تعطي قيمة دالة أفضل من ثاني أسوأ نقطة ولكنها ليست أفضل من الأفضل، فاستبدل أسوأ نقطة بنقطة الانعكاس وكالآتي:

$$X_r = c + \alpha(c - X_h) \quad \dots (2-77)$$

اذ ان :

X_r نقطة الانعكاس

c النقطة التي تتوسط اقل القيم **n**

X_h النقطة ألأسوأ

α معامل الانعكلس وغالباً قيمته تكون مساوية الى 1

- إذا كانت نقطة الانعكاس أفضل من أفضل نقطة، قم بالتوسيع (**Expand**) . إذا كانت هذه النقطة الموسعة أفضل، فاستخدمها؛ خلاف ذلك، استخدم نقطة الانعكاس وكالآتي:

$$X_e = c + \gamma(c - X_h) \quad \dots (2-78)$$

اذ ان :

X_e نقطة التوسيع

γ معامل التوسيع وغالباً قيمته تكون مساوية الى 2

- إذا لم تكن نقطة الانعكاس أفضل من ثاني أسوأ نقطة، اجري تقليص (**Shrinkage**). إذا كانت النقطة التعاقدية أفضل فاستخدمها؛ خلاف ذلك، قم بتقليص الشكل البسيط بأكمله نحو أفضل نقطة وكالآتي:

$$X_i = c + \sigma(c - X_l) \quad \dots (2-79)$$

اذ ان :

i توقع افضل نقطة

σ معامل التقليص وغالباً قيمته تكون مساوية الى 0.5

X_l افضل نقطة

- إذا لم يؤدي أي من الانعكاس أو الانكماش إلى تحسين أسوأ نقطة، فقم بتقليص الصورة البسيطة حول أفضل نقطة.
- تتوقف الخوارزمية عندما يكون حجم الإرسال البسيط صغيرًا بدرجة كافية أو عندما تكون قيم الدالة عند القمم قريبة بدرجة كافية، مما يشير إلى التقارب مع الحد الأدنى المحلي.

2.19 معايير المقارنة (Comparison Criterian)

تم الاعتماد على المعايير الآتية في المقارنة وهي :

1- متوسط مربعات الخطأ لغرض المقارنة بين طرائق التقدير وحسب الصيغة الآتية:

$$\boldsymbol{MSE}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\mathbf{1}}{\tilde{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{r}} \sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\tilde{\boldsymbol{n}}} (\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{i}} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{i}})^{\mathbf{2}} \dots (\mathbf{2}-\mathbf{80})$$

اذ ان **r** يمثل عدد مرات تكرار التجربة

2- معدل متوسط مربعات الخطأ لغرض المقارنة بين طرائق التقدير وحسب الصيغة الآتية:

$$\boldsymbol{MSE}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\boldsymbol{MSE}(\boldsymbol{\theta})}{\tilde{\boldsymbol{n}}} \qquad \dots (\mathbf{2}-\mathbf{81})$$

2-اختبار $-2\mathrm{LnL}(\hat{\boldsymbol{\theta}}|\boldsymbol{t})$

$$\mathrm{AA} = -2\ln\mathrm{L}(\hat{\boldsymbol{\theta}}|\boldsymbol{t}) \qquad \dots (2\text{-}82)$$

$\mathrm{L}(\hat{\boldsymbol{\theta}}|\boldsymbol{t})$: تمثل لوغاريتم دالة الترجيح (Log Likelihood Function) لمشاهدات بيانات العينة.

3-اختبار اكيكي (AIC) Akaike's Test

اقترح اختبار اكيكي (AIC) من لدن الباحث (Akaike's 1977)

$$AIC = -2L(\widehat{\theta}|t) + 2p \qquad \dots (2\text{-}83)$$

$L(\widehat{\theta}|t)$: تمثـــل لوغـــاريتم دالـــة التـــرجيح (Log Likelihood Function) لمشـــاهدات بيانات العينة.

P : عدد المعلمات

$\widehat{\theta}$: المعلمات المقدرة .

4 - اختبار اكيكي المتسق (CAIC)

ان الصيغة لاختبار حسن المطابقة اكيــكي المتسق (**CAIC**) هي كما يأتي:

$$\mathbf{CAIC = -2L(\widehat{\theta}|t) + \frac{2np}{n-p-1}} \qquad \dots (2\text{-}149)$$

و ان **n** تمثل حجم العينة.

5-اختبار بيز اكيكي Bayes Akaike's Test

معيــار يســتعمل كاختبــار لحســن المطابقــة (GOF) ويرمــز لــه اختصــارا ب (BIC) ان الصــيغة لهذا الاختبار هي :

$$BIC = -2L(\widehat{\theta}|t) + \mathbf{p}\log(n) \qquad \dots (2\text{-}84)$$

وان :

$L(\widehat{\theta}|t)$ تمثـل لوغــاريتم دالــة التــرجيح (Log Likelihood Function) لمشــاهدات بيانــات العينة.

p: تمثل عدد المعلمات في دالة التوزيع الاحتمالية النظرية. n تمثل حجم العينة.

6- اختبار اكيكي المتسق (CAIC)

ان الصيغة لاختبار حســن المطابقة اكيــــكي المتسق (CAIC) هي كما يأتي:

$$CAIC = -2L(\widehat{\theta}|t) + \frac{2np}{n-p-1} \qquad \dots (2\text{-}85)$$

وأن n تمثل حجم العينة.

7- اختبار Hannan-Quinn information Criterion

يرمز له اختصاراً (HQIC) وتكون الصيغة لهذا الاختبار هي كما يأتي:

$$\mathrm{HQIC} = 2\ln\left(\ln(n)\left(p - 2L(\hat{\boldsymbol{\theta}}|\boldsymbol{t})\right)\right) \quad \ldots (2\text{-}86)$$

الفصل الثالث

المبحث الأول

الجانب التجريبي

تمهيد (Preface)

تم في هذا الفصل اجراء تجارب محاكاة مونت-كارول لغرض دراسة سلوك التوزيع المقتح عند طرائق التقدير المدروسة في الجانب النظري من هذه الرسالة اذ تم تطبيق طريقتين في التقدير وها طريقة الامكان الاعظم وطريقة اعظم مسافة متباعدة وتمت المقارنة بين الطريقتين باستعمال معيار متوسط مربعات الخطأ ومعدل متوسط مربعات الخطأ للمعلمات ولدالة الكثافة الاحتماليه للتوزيع المقدرات .

2.1.3 مفهوم المحاكاة (Simulation Concept)

في الإحصاء، تشير المحاكاة إلى استعمال التقنيات الحسابية لتقليد أو تكرار سلوك انموذج أو عملية إحصائية. يتضمن إنشاء مجموعات بيانات مولدة بناءً على توزيعات ومعلمات وافتراضات إحصائية محددة لفهم خصائص الإجراء الإحصائي أو لتقدير معلمات او تقدير دالة معولية او دالة مخاطرة .... الخ . تعتمد المحاكاة غالبًا على توليد أرقام عشوائية لمحاكاة عدم اليقين أو التباين في المشاهدات. تستعمل مولدات الأرقام العشوائية لإنتاج تسلسلات من الأرقام التي تتبع توزيعات احتمالية محددة، مثل التوزيعات المنتظمة أو التوزيع الطبيعي او الأسي .... الخ. باستعمال محاكاة مونت كارلووالتي تعد هي تقنية تستعمل على نطاق واسع في الإحصاء لتقدير خصائصا نموذج أو عملية إحصائية من خلال أخذ العينات العشوائية المتكررة والتي فيها يتم سحب عينات عشوائية من التوزيع المدروس، ويتم تطبيق الإجراء الإحصائي المعني على كل عينة لتقدير خصائصها. تتضمن دراسات المحاكاة إجراء تجارب حسابية لتقييم أداء الأساليب الإحصائية أو الخوارزميات في ظل سيناريوهات مختلفة. يمكن لدراسات المحاكاة تقييم قوة وكفاءة ودقة الإجراءات الإحصائية ومساعدة الباحثين على فهم خصائصها وقيودها.يمكن استعمال المحاكاة لإجراء تحليل القدرة، والذي يتضمن تقدير القوة الإحصائية لاختبار الفرضية أو حجم العينة المطلوبة لتحقيق المستوى المطلوب من القوة. ومن خلال محاكاة مجموعات المشاهدات في ظل ظروف مختلفة، يمكن للباحثين تقييم حساسية الاختبارات الإحصائية للكشف عن التأثيرات أو الاختلافات الحقيقية. يمكن أيضًا استعمال المحاكاة للتحقق من صحة النموذج وتحليل الحساسية في النمذجة الإحصائية. ومن خلال محاكاة المشاهدات من النماذج البديلة أو معلمات النموذج المزعجة، يمكن للباحثين تقييم مدى كفاية النماذج الإحصائية وتقييم حساسيتها لافتراضات النمذجة.**[P. Morris et al., 2018, 1-2]**

3.1.3 مراحل تطبيق تجارب المحاكاة (Simulation steps)

تتضمن تجارب المحاكاة الخطوات الآتية:

1. **إختيار القيم الافتراضية لمعلمات التوزيع المقترح:**

تم الحصول على القيم الإفتراضية تجريبياً من إجراء تجارب عدة واختيار القيم إستقرت عندها منحنيات دالة الكثافة الاحتماليه ودالة الكثافة الاحتماليه التجميعية وأعطت افضل النتائج .

وكما يأتي:

(1-3) القيم الافتراضية لمعلمات توزيع EILIE

Parameter	1	2	3	4	5
λ	4	5	3.5	1.5	2
β	0.8	0.9	0.8	0.1	1
θ	4	3	42	1.5	4

2. **توليد المشاهدات (Data generation) :**

تم في هذه الخطوة توليد بيانات تقليدية **(Traditional data)** تتبع التوزيع المقترح متمثلة بالمتجه x وفقاً للخطوات الآتية:

- توليد متغير يتبع توزيعاً منتظماً $\mathbf{u \sim U(0,1)}$
- توليد بيانات تتبع التوزيع **EILIE** بتطبيق الدالة الكمية وباستعمال دالة **Lambert** وحسب الصيغة الآتية:

$$\mathbf{Q(x)} = -\left[\frac{\left(\mathbf{1}+\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\boldsymbol{\theta}-\mathbf{1}} \boldsymbol{W}_{-\mathbf{1}}\left(-\boldsymbol{u}(\mathbf{1}+\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\beta}\mathbf{e}^{-(\mathbf{1}+\boldsymbol{\theta})}\right)\right]^{-\mathbf{1}} \qquad \ldots (\mathbf{3}-\mathbf{1})$$

اذ ان $\boldsymbol{W}_{-\mathbf{1}}$ هي دالة لامبرت وهي دالة رياضية وتُعرف أيضًا باسم "دالة المنتج اللوغاريتمي وهي دالة متعددة القيم، أي أنها يمكن أن تأخذ أكثر من قيمة لكل مدخل. الدالة تُعرّف على أنها الحل لـ **W(z)**

$$\boldsymbol{W}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{W}(\boldsymbol{z})} \qquad \ldots (\mathbf{3}-\mathbf{2})$$

3.تضبيب المشاهدات (Data Fuzziness) :

يتم تحويل متجه العينة التقليدي $\underline{\mathrm{X}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'$ للتوزيع المقترح الى الضـــبابية وذلك بايجاد درجة الانتماء المقابلة لكل مشاهدة من مشاهدات متجه العينة التقليدي باستعمال دالة إنتماء شبه منحرف وكما يأتي: **(علي، 2022)**

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & if \quad x \quad < \quad a \\ \frac{x-a}{b-a} & if \quad a \leq \ x \ \leq b \\ 1 & if \quad x \ > b \end{cases} \qquad \ldots (3-3)$$

إذ أن **a** تمثل اقل قيمة من قيم مشاهدات العينة التقليدي و **b** تمثل اكبر قيمة من قيم مشاهدات متجه العينة التقليدي والذي ينتج لدينا متجه عينة ضبابي $\underline{\widetilde{\boldsymbol{X}}} = \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n$ يتضمن كل مشاهدة ودرجة انتماءها المقابلة أي : **[**علي، 2022، 43**]**

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{i}} = \{(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}},\ \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x}_{\mathbf{1}})), (\boldsymbol{x}_{\mathbf{2}},\ \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x}_{\mathbf{2}})), \ldots.., (\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}},\ \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}}))\} \ \ldots (3-4)$$

بعد ذلك يتم الحصول على المجوعــة الضــبابية عند القطع α $\widetilde{\mathbf{A}}_{\boldsymbol{\alpha}} = \{\tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}}, \tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{2}}, \ldots, \tilde{\mathbf{x}}_{\tilde{\mathbf{n}}}\}$ للتوزيع بإختيار العناصر في المجموعة الضبابية التي لها درجة انتماء اكبر او تساوي القطع α ، أي أن:

$\tilde{A}_{\alpha} = \{\tilde{x} \in \boldsymbol{T};\ \mu_{\tilde{A}}(\boldsymbol{x}) \geq \boldsymbol{\alpha}\} \ldots (3-5)$

5.إختيار قيم معاملات القطع: (α-cut)

لغرض اختبار الطريقة المقترحة تم اختيار عدة معاملات للقطع وكالآتي:

$$\boldsymbol{\alpha - \mathrm{cut} = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7}$$

والسبب في اختيار معاملات القطع هذه لاختبار تأثير احجام العينات الضبابية الى دقة التقدير بالحصول على مختلف انواع العينات الضبابية عند كل مستوى قطع.

وستكون خطوات خوارزمية تضبيب المشاهدات كالآتي: [علي ، 2022، 22]

1. ايجاد المجموعة التقليدية **x** والذي يتولد من دالة التوزيع التراكمية للتوزيع المدروس اذ تم توليد عينة عشوائية بحجم (100) مفردة من التوزيع التقليدي وبالتالي يكون تحديد احجام العينات الضبابية بموجب حجم القطع لكل مجموعة فقد يمكن ان تكون المجموعة الضبابية بحجم 100 مفردة او 90 مفردة او 80 مفردة ...الخ وبحسب حجم القطع ودرجات الانتماء.
2. تحديد اكبر قيمة واعلى قيمة في المتجه **x** باستعمال الدالتين **max, min**
3. ايجاد متجه قيم الانتماء لكل عنصر في **x** باستعمال احدى دوال الانتماء ونسميه **ME**
4. ايجاد المجموعة الضبابية و باستعمال الايعاز :

```
FS =sort([x ME']);
```

اذ ان **FS** هي عبارة عن مصفوفة مؤلفة من عمودين و **n** من الصفوف العمود الاول يمثل المشاهدة والعمود الثاني يمثل درجة انتماء ها.

5. تحديد قيمة القطع $\boldsymbol{\alpha}$
6. تحديد العناصر التي لها درجة انتماء اكبر او تساوي القطع المحدد باستعمال الايعاز :

```
FUZZY SET=FS(:,1) & FS(:,2)>=alpfacut;
```

7. ايجاد مجموعة القطع باستعمال الايعاز :

```
A=FS(FUZZY SET);
```

8. ايجاد حجم مجموعة القطع $(\tilde{\mathbf{n}})$ باستعمال الايعاز :

```
FUZZY_n =numel(A);
```

اذ ان :

A هي المجموعة الضبابية بعد القطع الفا

FUZZY_n حجم العينة الضبابية بعد القطع

6. **مقارنة طرائق التقدير:** تم مقارنة طرائق التقدير باستعمال معيار متوسط مربعات الخطأ $(\boldsymbol{MSE})$ كما في الفقرة $(2\text{–}\mathbf{80})$ ومعدل متوسط مربعات الخطأ $((\boldsymbol{AMSE}))$ كما في الفقرة $(2\text{–}\mathbf{81})$ وقد تم الحصول على نتائج المحاكاة باستعمال برنامج **(Matlab 2023)** وعرضت جميع النتائج في جداول خاصة سنبينها لاحقاً.

4.1.3 تحليل نتائج المحاكاة: (Analysis of Simulation Result)

لغرض اختبار التوزيع المقترح عند طرائق التقدير تم اعتماد إسلوب المحاكاة مونت– كارلو **(Monte-Carlo Simulation)** لغرض مقارنة طريقتي الامكان الاعظم واعظم مسافة متباعدة وكانت نتائج تجارب المحاكاة كما يأتي:

التجربة الأولى :

المعلمات الافتراضية $\lambda = 4, \beta = 0.8, \theta = 4$

جدول (3-2) قيم دالة الكثافة الاحتماليه الحقيقية والمقدرة بطرائق التقدير ومتوسط مربعات الخطأ لكل طريقة والقيم المقدرة لمعلمات التوزيع المقترح للتجربة الأولى

Alfa-cut	Real	MIE	MSE_MLE	MPS	MSE_MPS
0.1	0.96144	0.91331	0.00232	0.9104	0.00261
	0.93731	0.89773	0.00157	0.89147	0.00210
	0.90832	0.87859	0.00088	0.86852	0.00158
	0.89348	0.86863	0.00062	0.85669	0.00135
	0.88597	0.86354	0.00050	0.85068	0.00125
	0.87797	0.85808	0.00040	0.84427	0.00114
	0.83335	0.82699	0.00004	0.80815	0.00064
	0.82659	0.82218	0.00002	0.80262	0.00057
	0.80011	0.80309	0.00001	0.78088	0.00037
	0.79055	0.78787	0.00001	0.77444	0.00026
p.d.f. AMSE		0.00048		0.00496	
Estimates	$\hat{\lambda}$	4.13146	0.01728	3.55678	0.19644
	$\hat{\beta}$	0.92374	0.01531	0.85382	0.00290
	$\hat{\theta}$	3.87533	0.01554	3.61603	0.14743
Parameters AMSE		0.01605		0.11559	
Best		**MLE**			

Alfa-cut	Real	MlE	MSE_MLE	MPS	MSE_MPS
0.3	0.87326	0.93464	0.00377	0.87590	0.00001
	0.84635	0.90363	0.00328	0.84545	0.00000
	0.83331	0.88862	0.00306	0.83078	0.00001
	0.81110	0.86305	0.00270	0.8059	0.00003
	0.79388	0.84325	0.00244	0.78672	0.00005
	0.77272	0.81893	0.00214	0.76328	0.00009
	0.75771	0.80170	0.00194	0.74673	0.00012
	0.75346	0.79682	0.00188	0.74206	0.00013
	0.74315	0.78499	0.00175	0.73074	0.00015
	0.67899	0.77856	0.00991	0.69546	0.00027
p.d.f. AMSE		0.00329		0.00009	
AMSE					
Estimates	$\hat{\lambda}$	4.27049	0.07316	3.98933	0.00011
	$\hat{\beta}$	0.84521	0.00204	0.78041	0.00038
	$\hat{\theta}$	4.39225	0.15386	4.00787	0.00006
Parameters AMSE		0.07636		0.00019	
Best		MPS			
Alfa-cut	Real	MlE	MSE_MLE	MPS	MSE_MPS

0.5		0.98834	0.96590	0.00050	0.97059	0.00032
		0.92835	0.90545	0.00052	0.92911	0.00000
		0.92450	0.89978	0.00061	0.89507	0.00087
		0.88848	0.89591	0.00006	0.87842	0.00010
		0.86846	0.87672	0.00007	0.86714	0.00000
		0.84252	0.85328	0.00012	0.84198	0.00000
		0.83151	0.84673	0.00023	0.83091	0.00000
		0.75426	0.76206	0.00006	0.74382	0.00011
		0.73577	0.75074	0.00022	0.72552	0.00011
		0.72868	0.74546	0.00028	0.71835	0.00011
p.d.f. AMSE			0.00385		0.00008	
Estimates		$\hat{\lambda}$	3.65063	0.12206	3.99037	0.00009
		$\hat{\beta}$	0.78866	0.00013	0.77954	0.00042
		$\hat{\theta}$	3.44735	0.30542	4.00746	0.00006
Parameters AMSE			0.14254		0.00019	
Best				**MPS**		
Alfa-cut		**Real**	**MlE**	**MSE_MLE**	**MPS**	**MSE_MPS**
0.7		0.97334	0.97447	0.00000	0.97372	0.00000
		0.96137	0.96414	0.00001	0.96219	0.00000

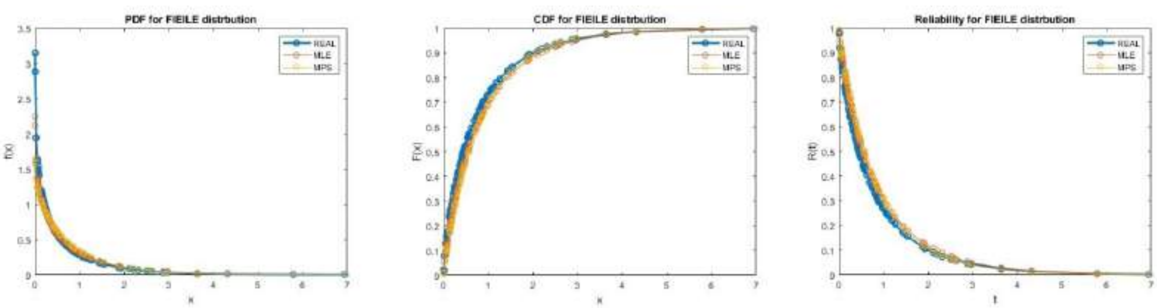
	0.90200	0.91889	0.00029	0.90585	0.00001
	0.89917	0.89864	0.00000	0.89615	0.00001
	0.89828	0.89952	0.00000	0.897231	0.00000
	0.84704	0.85374	0.00004	0.84618	0.00000
	0.82977	0.83617	0.00004	0.83851	0.00008
	0.82562	0.84193	0.00027	0.83651	0.00012
	0.7557	0.78952	0.00114	0.75452	0.00000
	0.74544	0.77239	0.00073	0.74577	0.00000
p.d.f. AMSE		0.00185		0.00023	
Estimates	$\hat{\lambda}$	4.20657	0.04267	4.01467	0.00022
	$\hat{\beta}$	0.83222	0.00104	0.81432	0.00021
	$\hat{\theta}$	4.11047	0.01220	4.00672	0.00005
Parameters AMSE		0.01864		0.00016	
Best		**MPS**			

نلحظ من جدول (3-2) والاشكال (3-1) و (3-2) و (3-3) ما يأتي:

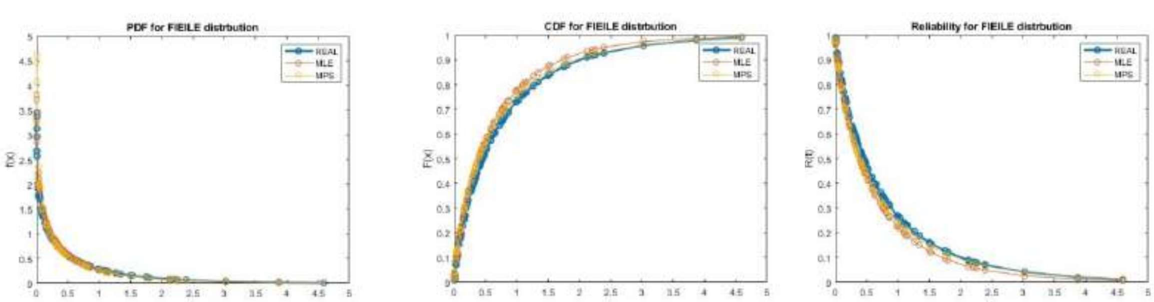
1- عند القطع $\alpha = 0.1$ طريقة طريقة الامكان الاعظم (MLE) افضل من اعظم مسافة متباعدة (MPS) كون ان دالة الكثافة الاحتماليه المقدرة بهذه الطريقة حققت اقل معدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.00048) مقارنة بمعدل متوسط مربعات الخطأ لطريقة (MPS) الذي بلغ (0.00496) . وكذلك معدل متوسط مربعات الخطأ للمعلمات المقدرة بهذه الطريقة والبالغ

(0.01605) اقل من معدل متوسط مربعات الخطأ للمعلمات المقدرة بطريقة (MPS) والبالغ (0.11559).

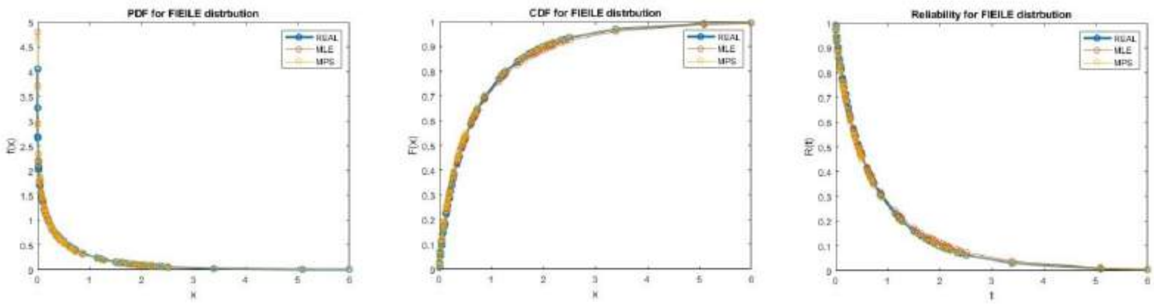
2- عند معاملات القطع $\alpha = 0.3, 0.5, 0.7$ كانت طريقة اعظم مسافة متباعدة (MPS) افضل من طريقة الامكان الاعظم (MLE) كونها ان دالة الكثافة الاحتماليه المقدرة بهذه الطريقة حققت اقل معدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.00009, 0.00008, 0.00023) على التوالي مقارنة بمعدل متوسط مربعات الخطأ لطريقة (MLE) الذي بلغ (0.09538, 0.18785, 0.00552) على التوالي. وكذلك معدل متوسط مربعات الخطأ للمعلمات المقدرة بهذه الطريقة والبالغ (0.00019, 0.00019, 0.00016) اقل من معدل متوسط مربعات الخطأ للمعلمات المقدرة بطريقة (MPS) والبالغ (0.07636, 0.14254, 0.01864) على التوالي.



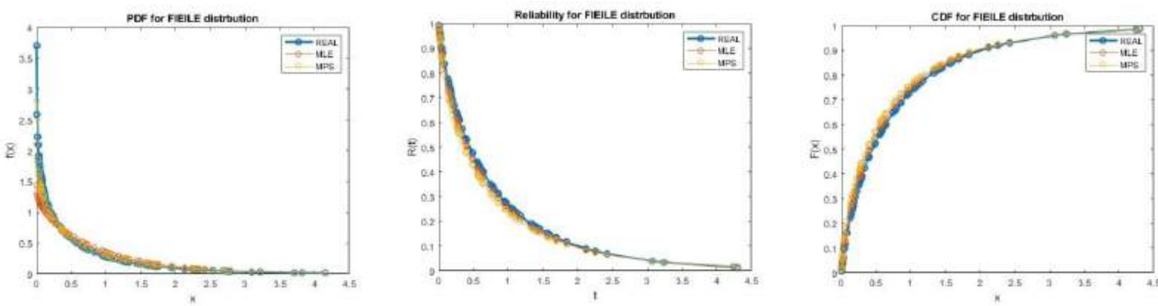
شكل (3-1) (a) منحنى دالة الكثافة الاحتماليه (b) منحنى دالة الكثافة التجميعية (c) منحنى دالة المعولية عند القطع 0.1



شكل (3-2) (a) منحنى دالة الكثافة الاحتماليه (b) منحنى دالة الكثافة التجميعية (c) منحنى دالة المعولية عند القطع 0.3



شكل (3-3) (a) منحنى دالة الكثافة الاحتماليه (b) منحنى دالة الكثافة التجميعية (c) منحنى دالة المعولية عند القطع 0.5



شكل (3-4) (a) منحنى دالة الكثافة الاحتماليه (b) منحنى دالة الكثافة التجميعية (c) منحنى دالة المعولية عند القطع 0.7

التجربة الثانية :

المعلمات الافتراضية $\lambda = 5, \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0.9}, \boldsymbol{\theta} = \mathbf{3}$

جدول (3-3) قيم دالة الكثافة الاحتماليه الحقيقية والمقدرة بطرائق التقدير ومتوسط مربعات الخطأ لكل طريقة والقيم المقدرة لمعلمات التوزيع المقترح للتجربة الثانية

Alfa-cut	Real	MlE	MSE_MLE	MPS	MSE_MPS
0.1	0.97640	0.96974	0.00004	0.92825	0.00232
	0.91623	0.90917	0.00005	0.96606	0.00248
	0.89570	0.88854	0.00005	0.94470	0.00240
	0.88959	0.8824	0.00005	0.93833	0.00238

	0.88463	0.87742	0.00005	0.93315	0.00235
	0.87888	0.87165	0.00005	0.92714	0.00233
	0.87692	0.86968	0.00005	0.92510	0.00232
	0.86155	0.85425	0.00005	0.90901	0.00225
	0.84231	0.83497	0.00005	0.88882	0.00216
	0.75442	0.79587	0.00172	0.74702	0.00005
p.d.f. AMSE		0.00005		0.00031	
Estimates	$\hat{\lambda}$	5.19269	0.84438	4.98403	0.00026
	$\hat{\beta}$	0.94776	0.00228	0.89029	0.00009
	$\hat{\theta}$	3.23693	1.90771	3.02361	0.00056
Parameters AMSE		0.00030		0.03185	
Best		**MLE**			
Alfa-cut	**Real**	**MlE**	**MSE_MLE**	**MPS**	**MSE_MPS**
0.3	0.98091	0.99044	0.00009	0.95234	0.00082
	0.97128	0.98275	0.00013	0.94346	0.00077
	0.90664	0.93014	0.00055	0.88384	0.00052
	0.90036	0.92493	0.00060	0.87804	0.00050
	0.89869	0.92355	0.00062	0.8765	0.00049
	0.85906	0.89035	0.00098	0.83987	0.00037

	0.84703	0.88014	0.00110	0.82874	0.00033
	0.81585	0.85343	0.00141	0.79987	0.00026
	0.8127	0.85071	0.00144	0.79696	0.00025
	0.80709	0.84584	0.00150	0.79175	0.00024
p.d.f. AMSE		0.09538		0.04168	
Estimates	$\hat{\lambda}$	5.39313	0.15455	4.97751	0.00051
	$\hat{\beta}$	0.98496	0.00722	0.89505	0.00002
	$\hat{\theta}$	3.33848	0.11457	3.17759	0.03154
Parameters AMSE		0.09211		0.01069	
Best		**MPS**			
Alfa-cut	**Real**	**MlE**	**MSE_MLE**	**MPS**	**MSE_MPS**
0.5	0.87779	0.93146	0.00288	0.89271	0.00022
	0.87257	0.92597	0.00285	0.88757	0.00023
	0.80715	0.85671	0.00246	0.82289	0.00025
	0.66293	0.70166	0.00150	0.67891	0.00026
	0.6497	0.68729	0.00141	0.66561	0.00025
	0.64061	0.67741	0.00135	0.65646	0.00025
	0.60282	0.63623	0.00112	0.61835	0.00024
	0.60057	0.63377	0.00110	0.61608	0.00024

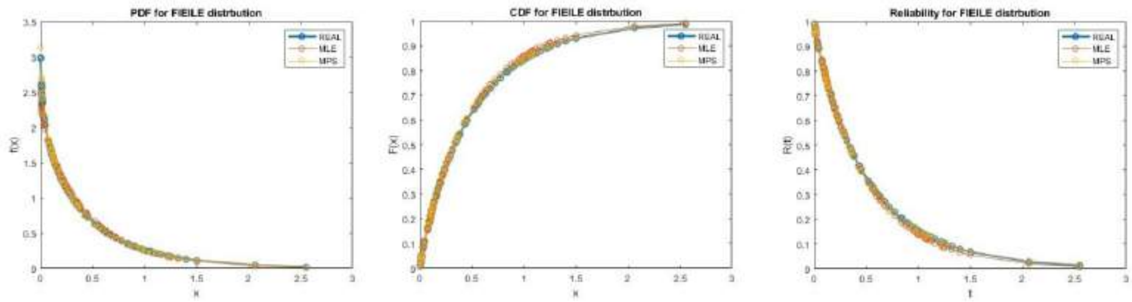
	0.57919	0.6104	0.00097	0.59446	0.00023
	0.57814	0.60925	0.00097	0.59339	0.00023
p.d.f. AMSE		0.18785		0.06843	
Estimates	$\hat{\lambda}$	5.36604	0.13398	5.22777	0.05188
	$\hat{\beta}$	0.95280	0.00279	0.94196	0.00176
	$\hat{\theta}$	3.63860	0.40782	3.35703	0.12747
Parameters AMSE		0.08312		0.02130	
Best		**MPS**			
Alfa-cut	**Real**	**MlE**	**MSE_MLE**	**MPS**	**MSE_MPS**
0.7	0.96836	0.9304	0.00144	0.96772	0.00000
	0.96123	0.92329	0.00144	0.96015	0.00000
	0.95629	0.91839	0.00144	0.95492	0.00000
	0.83143	0.79544	0.00130	0.83459	0.00001
	0.8211	0.78535	0.00128	0.82396	0.00001
	0.81263	0.77711	0.00126	0.80528	0.00005
	0.78285	0.74818	0.00120	0.78485	0.00000
	0.76555	0.73142	0.00116	0.76727	0.00000
	0.73893	0.70571	0.00110	0.73034	0.00007
	0.71262	0.68038	0.00104	0.71387	0.00000

p.d.f. AMSE		0.00552		0.00008	
Estimates	$\hat{\lambda}$	5.24224	0.05868	5.12777	0.01633
	$\hat{\beta}$	0.94355	0.00190	0.92196	0.00048
	$\hat{\theta}$	3.4345	0.18879	3.21703	0.04710
Parameters AMSE		0.05473		0.00685	
Best		**MPS**			

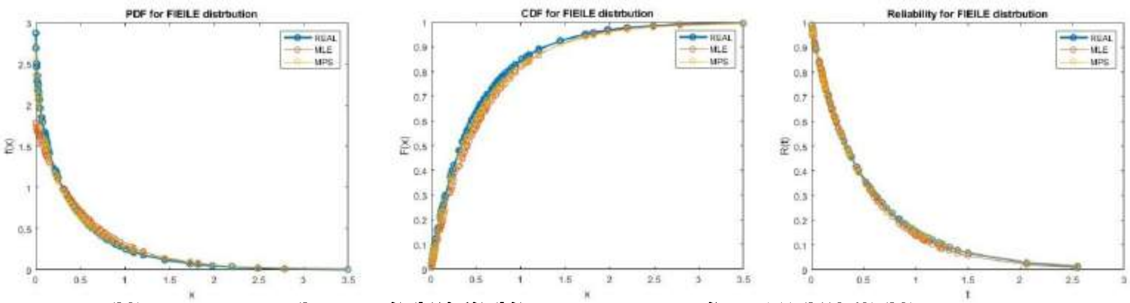
نلحظ من جدول (3-3) والاشكال (3-5) و (3-6) و (3-7) ما يأتي:

1- عند القطع $\alpha = 0.1$ طريقة طريقة الامكان الاعظم (MLE) افضل من اعظم مسافة متباعدة (MPS) كون ان دالة الكثافة الاحتماليه المقدرة بهذه الطريقة حققت اقل معدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.00005) مقارنة بمعدل متوسط مربعات الخطأ لطريقة (MPS) الذي بلغ (0.00031) . وكذلك معدل متوسط مربعات الخطأ للمعلمات المقدرة بهذه الطريقة والبالغ (0.00030) اقل من معدل متوسط مربعات الخطأ للمعلمات المقدرة بطريقة (MPS) والبالغ (0.03185).

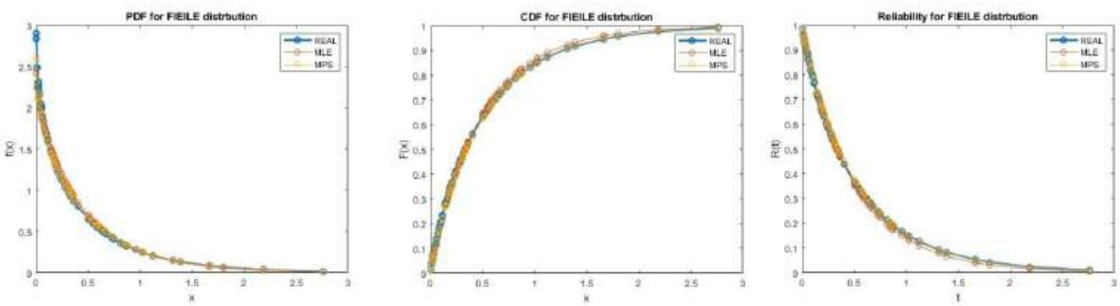
2- عند معاملات القطع $\alpha = 0.3, 0.5, 0.7$ كانت طريقة اعظم مسافة متباعدة (MPS) افضل من طريقة الامكان الاعظم (MLE) كونها ان دالة الكثافة الاحتماليه المقدرة بهذه الطريقة حققت اقل معدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.04168, 0.02130, 0.00685) على التوالي مقارنة بمعدل متوسط مربعات الخطأ لطريقة (MLE) الذي بلغ (0.09538, 0.18785, 0.00552) على التوالي. وكذلك معدل متوسط مربعات الخطأ للمعلمات المقدرة بهذه الطريقة والبالغ (0.01069, 0.02130, 0.00685) اقل من معدل متوسط مربعات الخطأ للمعلمات المقدرة بطريقة (MPS) والبالغ (0.09538, 0.08312, 0.05473) على التوالي.



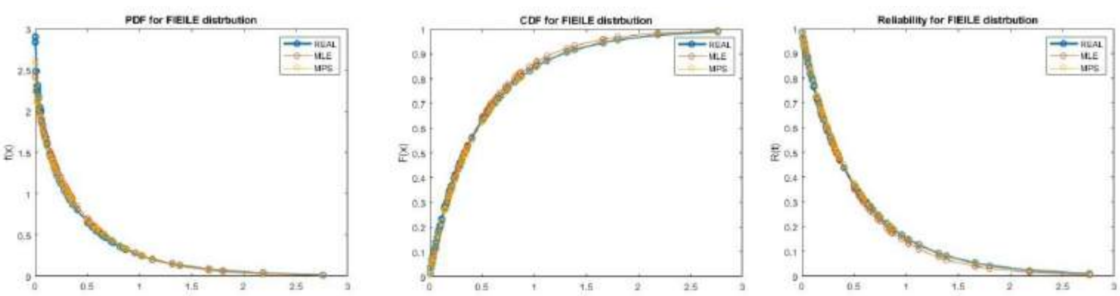
شكل (3-5) (a) منحنى دالة الكثافة الاحتماليه (b) منحنى دالة الكثافة التجميعية (c) منحنى دالة المعولية عند القطع 0.1



شكل (3-6) (a) منحنى دالة الكثافة الاحتماليه (b) منحنى دالة الكثافة التجميعية (c) منحنى دالة المعولية عند القطع 0.3



شكل (3-7) (a) منحنى دالة الكثافة الاحتماليه (b) منحنى دالة الكثافة التجميعية (c) منحنى دالة المعولية عند القطع 0.5



شكل (3-8) (a) منحنى دالة الكثافة الاحتماليه (b) منحنى دالة الكثافة التجميعية (c) منحنى دالة المعولية عند القطع 0.7

التجربة الثالثة :

المعلمات الافتراضية $\lambda = 3.5, \beta = 0.8, \theta = 2$

جدول (3-4)قيم دالة الكثافة الاحتماليه الحقيقية والمقدرة بطرائق التقدير ومتوسط مربعات الخطأ لكل طريقة والقيم المقدرة لمعلمات التوزيع المقترح للتجربة الثالثة

Alfa-cut	Real	MlE	MSE_MLE	MPS	MSE_MPS
0.1	0.98989	0.97516	0.00022	0.95802	0.00102
	0.92008	0.95153	0.00099	0.98720	0.00450
	0.84175	0.86814	0.00070	0.90656	0.00420
	0.83712	0.82319	0.00019	0.90176	0.00418
	0.79564	0.81869	0.00053	0.85853	0.00395
	0.77581	0.78734	0.00013	0.83774	0.00384
	0.75846	0.76862	0.00010	0.81948	0.00372
	0.73936	0.75798	0.00035	0.79933	0.00360
	0.72384	0.74117	0.00030	0.78290	0.00349
	0.67547	0.69863	0.00054	0.73140	0.00313
p.d.f. AMSE		0.00078		0.00589	
Estimates	$\hat{\lambda}$	3.57657	0.00586	3.58440	0.00712
	$\hat{\beta}$	0.86222	0.00387	0.91587	0.01343
	$\hat{\theta}$	2.31047	0.09639	2.46686	0.21795
Parameters AMSE		0.03538		0.07950	

Best		MLE			
Alfa-cut	**Real**	**MlE**	**MSE_MLE**	**MPS**	**MSE_MPS**
0.3	0.98989	0.97516	0.00022	0.00457	0.00457
	0.92008	0.95153	0.00099	0.00016	0.00016
	0.84175	0.86814	0.00070	0.00132	0.00132
	0.83712	0.82319	0.00019	0.00114	0.00114
	0.79564	0.81869	0.00053	0.00083	0.00474
	0.77581	0.78734	0.00013	0.00127	0.00733
	0.75846	0.76862	0.00010	0.00116	0.00884
	0.73936	0.75798	0.00035	0.00059	0.00887
	0.72384	0.74117	0.00030	0.00108	0.01057
	0.67547	0.69863	0.00054	0.00068	0.01850
p.d.f. AMSE		0.00067		0.00218	
Estimates	$\hat{\lambda}$	3.52819	0.00079	3.54118	0.00170
	$\hat{\beta}$	0.82220	0.00049	0.83107	0.00097
	$\hat{\theta}$	2.33614	0.11299	2.47771	0.22821
Parameters AMSE		0.03809		0.07696	
Best		**MLE**			
Alfa-cut	**Real**	**MlE**	**MSE_MLE**	**MPS**	**MSE_MPS**

0.5	0.94417	0.94992	0.00003	0.92209	0.00049
	0.94287	0.94902	0.00004	0.92088	0.00048
	0.88235	0.90628	0.00057	0.86477	0.00031
	0.88022	0.90474	0.00060	0.86279	0.00030
	0.87619	0.90181	0.00066	0.85905	0.00029
	0.79512	0.84068	0.00208	0.78347	0.00014
	0.78886	0.83579	0.00220	0.77761	0.00013
	0.67724	0.74403	0.00446	0.67271	0.00002
	0.64760	0.71820	0.00498	0.64469	0.00001
	0.64357	0.71464	0.00505	0.64088	0.00001
p.d.f. AMSE		0.08622		0.04315	
Estimates	$\hat{\lambda}$	3.53133	0.00098	3.51231	0.00015
	$\hat{\beta}$	0.82132	0.00045	0.81267	0.00016
	$\hat{\theta}$	2.37556	0.14105	2.21645	0.04685
Parameters AMSE		0.04749		0.01572	
Best		**MPS**			
Alfa-cut	**Real**	**MlE**	**MSE_MLE**	**MPS**	**MSE_MPS**
0.7	0.99806	0.98440	0.00019	0.99008	0.00006
	0.98470	0.97360	0.00012	0.98847	0.00001

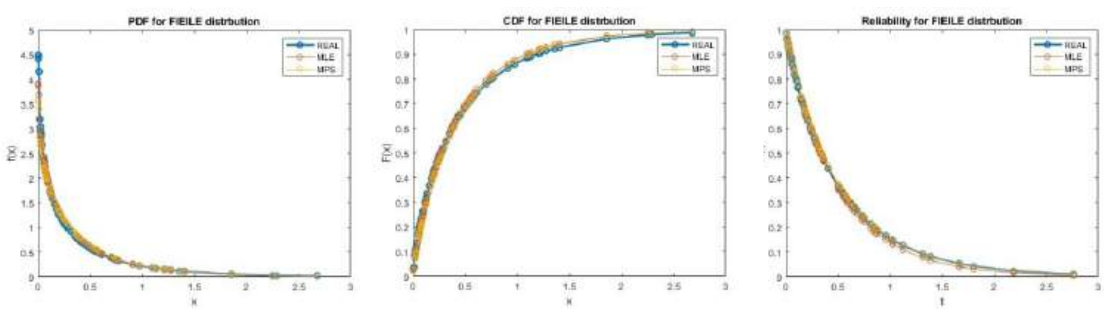
	0.92871	0.92768	0.00000	0.97440	0.00209
	0.92677	0.92607	0.00000	0.94492	0.00033
	0.90989	0.91201	0.00000	0.91145	0.00000
	0.87516	0.88280	0.00006	0.87478	0.00000
	0.83671	0.85000	0.00018	0.81110	0.00066
	0.79574	0.81448	0.00035	0.80350	0.00006
	0.72716	0.75371	0.00071	0.71110	0.00026
	0.71918	0.74654	0.00075	0.70350	0.00025
p.d.f. AMSE		0.00566		0.02353	
Estimates	$\hat{\lambda}$	3.50295	1.19454	3.50013	0.00000
	$\hat{\beta}$	0.81263	0.00528	0.80132	0.00000
	$\hat{\theta}$	2.02257	1.04566	2.00556	0.00003
Parameters AMSE		0.74849		0.00001	
Best		**MPS**			

نلحظ من جدول (3-4) والاشكال (3-9) و (3-10) و (3-11) ما يأتي:

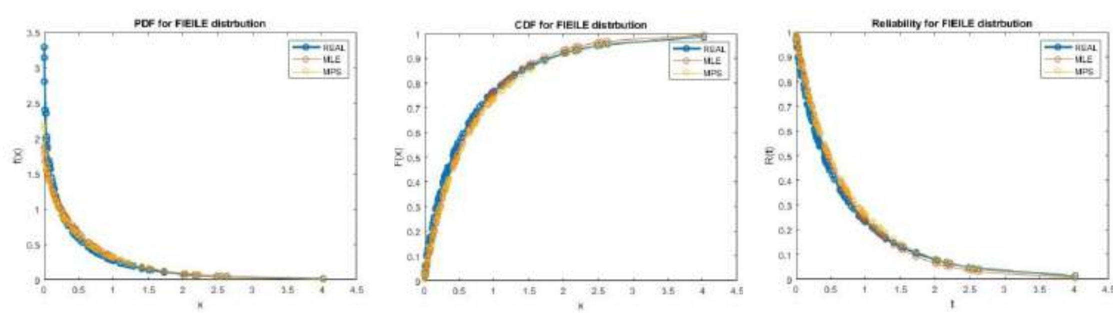
1- عند القطع $\alpha = 0.1, 0.3$ طريقة طريقة الامكان الاعظم (MLE) افضل من اعظم مسافة متباعدة (MPS) كون ان دالة الكثافة الاحتماليه المقدرة بهذه الطريقة حققت اقل معدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.00078, 0.00067) مقارنة بمعدل متوسط مربعات الخطأ لطريقة (MPS) الذي بلغ (0.00589, 0.00218) . وكذلك معدل متوسط مربعات الخطأ للمعلمات

المقدرة بهذه الطريقة والبالغ (0.03538, 0.03809) اقل من معدل متوسـط مربعات الخطأ للمعلمات المقدرة بطريقة (MPS) والبالغئ(0.07950, 0.04749).

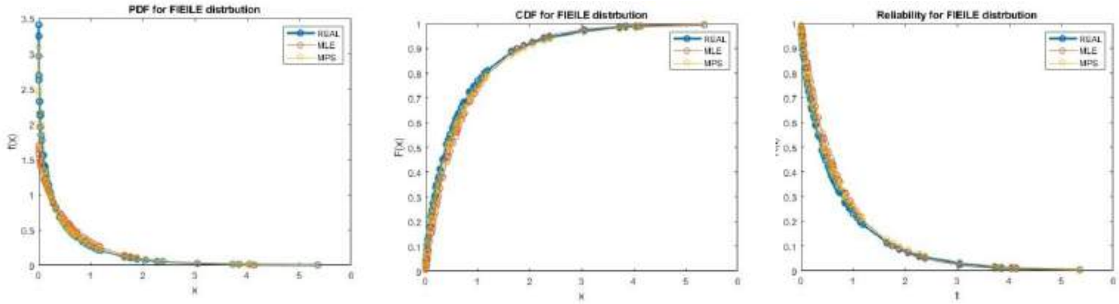
2- عند معاملات القطع $\alpha = 0.5, 0.7$ كانت طريقة اعظم مسافة متباعدة (MPS) افضل من طريقة الامكان الاعظم (MLE) كونها ان دالة الكثافة الاحتماليه المقدرة بهذه الطريقة حققت اقل معدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.04315, 0.02353) على التوالي مقارنة بمعدل متوسط مربعات الخطأ لطريقة (MLE) الذي بلغ (0.08622, 0.00566) على التوالي. وكذلك معدل متوسط مربعات الخطأ للمعلمات المقدرة بهذه الطريقة والبالغ (0.01572, 0.00001) اقل من معدل متوسط مربعات الخطأ للمعلمات المقدرة بطريقة (MPS) والبالغ (0.04749, 0.74849) على التوالي.



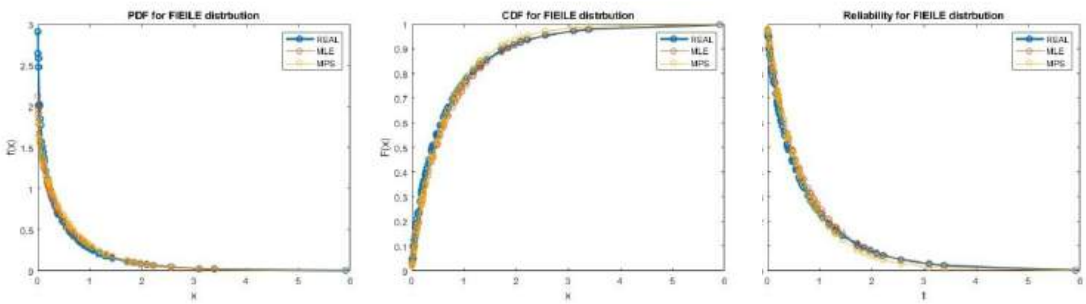
شكل (3-9) (a) منحنى دالة الكثافة الاحتماليه (b) منحنى دالة الكثافة التجميعية (c) منحنى دالة المعولية عند القطع 0.1



شكل (3-10) (a) منحنى دالة الكثافة الاحتماليه (b) منحنى دالة الكثافة التجميعية (c) منحنى دالة المعولية عند القطع 0.3



شكل (3-11) (a) منحنى دالة الكثافة الاحتماليه (b) منحنى دالة الكثافة التجميعية (c) منحنى دالة المعولية عند القطع 0.5



شكل (3-12) (a) منحنى دالة الكثافة الاحتماليه (b) منحنى دالة الكثافة التجميعية (c) منحنى دالة المعولية عند القطع 0.7

التجربة الرابعة :

المعلمات الافتراضية $\lambda = 1.5, \beta = 0.1, \theta = 1.5$

جدول (3-5) قيم دالة الكثافة الاحتماليه الحقيقية والمقدرة بطرائق التقدير ومتوسط مربعات الخطأ لكل طريقة والقيم المقدرة لمعلمات التوزيع المقترح للتجربة الرابعة

Alfa-cut	Real	MlE	MSE_MLE	MPS	MSE_MPS
0.1	0.98849	0.94834	0.00161	0.92982	0.00344
	0.93696	0.91022	0.00071	0.89433	0.00182
	0.92284	0.89955	0.00054	0.88437	0.00148
	0.91418	0.89296	0.00045	0.87820	0.00129
	0.88997	0.87434	0.00024	0.86076	0.00085

	0.87098	0.85953	0.00013	0.84687	0.00058
	0.86593	0.85557	0.00011	0.84315	0.00052
	0.85335	0.84564	0.00006	0.83382	0.00038
	0.83539	0.83133	0.00002	0.82034	0.00023
	0.81767	0.81706	0.00000	0.80689	0.00012
p.d.f. AMSE		0.00009		0.00892	
Estimates	$\hat{\lambda}$	1.54258	0.00181	1.55912	0.00349
	$\hat{\beta}$	0.15162	0.00266	0.17371	0.00543
	$\hat{\theta}$	1.55637	0.00318	1.42873	0.00508
Parameters AMSE		0.00255		0.00467	
Best		**MLE**			
Alfa-cut	**Real**	**MlE**	**MSE_MLE**	**MPS**	**MSE_MPS**
	0.97959	0.97975	0.00010	0.99892	0.00037
	0.91551	0.96905	0.00287	0.92523	0.00009
	0.84602	0.89208	0.00212	0.84684	0.00000
0.3	0.81261	0.85501	0.00180	0.80971	0.00001
	0.78367	0.82285	0.00154	0.77780	0.00003
	0.77681	0.81523	0.00148	0.77028	0.00004
	0.77271	0.81068	0.00144	0.76579	0.00005

	0.77105	0.80884	0.00143	0.76398	0.00005
	0.75815	0.79449	0.00132	0.74988	0.00007
	0.75776	0.79406	0.00132	0.74946	0.00007
p.d.f. AMSE		0.00034		0.01855	
Estimates	$\hat{\lambda}$	1.52456	0.00060	1.54137	0.00171
	$\hat{\beta}$	0.14457	0.00199	0.15663	0.00321
	$\hat{\theta}$	1.53244	0.00105	1.52333	0.00054
Parameters AMSE		0.00121		0.00182	
Best		**MLE**			
Alfa-cut	**Real**	**MlE**	**MSE_MLE**	**MPS**	**MSE_MPS**
0.5	0.90613	0.97358	0.00455	0.91975	0.00019
	0.89496	0.96145	0.00442	0.90901	0.00020
	0.86121	0.92462	0.00402	0.87642	0.00023
	0.85539	0.91825	0.00395	0.87078	0.00024
	0.84405	0.90581	0.00381	0.85976	0.00025
	0.82572	0.88565	0.00359	0.84192	0.00026
	0.82306	0.88272	0.00356	0.83932	0.00026
	0.81550	0.87438	0.00347	0.83194	0.00027
	0.80578	0.86365	0.00335	0.82243	0.00028

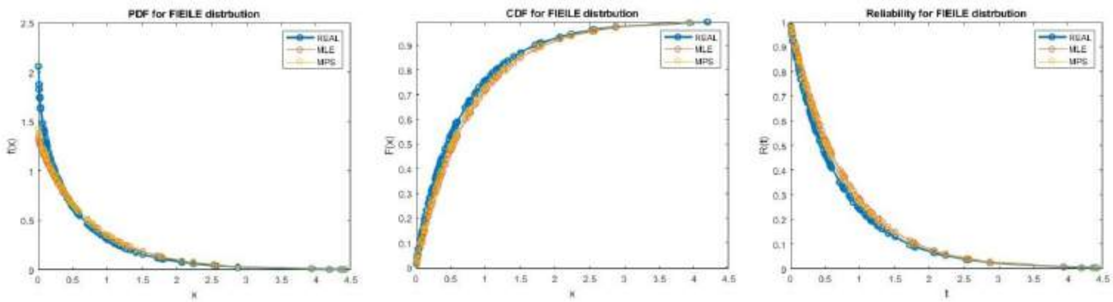
	0.80204	0.85952	0.00330	0.81877	0.00028
p.d.f. AMSE		0.00448		0.02867	
Estimates	$\hat{\lambda}$	1.52935	0.00086	1.50371	0.00001
	$\hat{\beta}$	0.81874	0.00035	0.00001	0.49487
	$\hat{\theta}$	1.51993	0.00040	1.51007	0.00010
Parameters AMSE		0.00441		0.00006	
Best		**MPS**			
Alfa-cut	**Real**	**MlE**	**MSE_MLE**	**MPS**	**MSE_MPS**
0.7	0.97970	0.92938	0.00253	0.97189	0.00006
	0.96779	0.92100	0.00219	0.96214	0.00003
	0.96201	0.91690	0.00203	0.96740	0.00003
	0.96176	0.91673	0.00203	0.96720	0.00003
	0.89543	0.86852	0.00072	0.88234	0.00017
	0.89440	0.86775	0.00071	0.87148	0.00053
	0.88945	0.86407	0.00064	0.87736	0.00015
	0.86074	0.84244	0.00033	0.86333	0.00001
	0.84544	0.83075	0.00022	0.81048	0.00122
	0.83015	0.81896	0.00013	0.82758	0.00001
p.d.f. AMSE		0.05593		0.00566	

Estimates	$\hat{\lambda}$	1.51178	0.00014	1.50262	0.00001
	$\hat{\beta}$	0.11831	0.00034	0.11262	0.00016
	$\hat{\theta}$	1.51017	0.00010	1.51262	0.00016
Parameters AMSE		0.00019		0.00011	
Best		**MPS**			

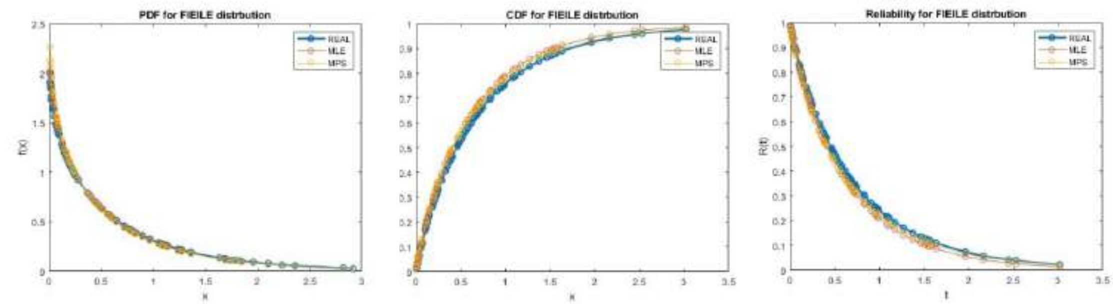
نلحظ من جدول (3-5) والاشكال (3-13) و (3-14) و (3-15) ما يأتي:

1- عند القطع $\alpha = 0.1,0.3$ طريقة طريقة الامكان الاعظم (MLE) افضل من اعظم مسافة متباعدة (MPS) كون ان دالة الكثافة الاحتماليه المقدرة بهذه الطريقة حققت اقل معدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.00009, 0.00034) مقارنة بمعدل متوسط مربعات الخطأ لطريقة (MPS) الذي بلغ (0.00892, 0.01855) على التوالي ، وكذلك معدل متوسط مربعات الخطأ للمعلمات المقدرة بهذه الطريقة والبالغ (0.00255, 0.00121) اقل من معدل متوسط مربعات الخطأ للمعلمات المقدرة بطريقة (MPS) والبالغ (0.0046, 0.008127).

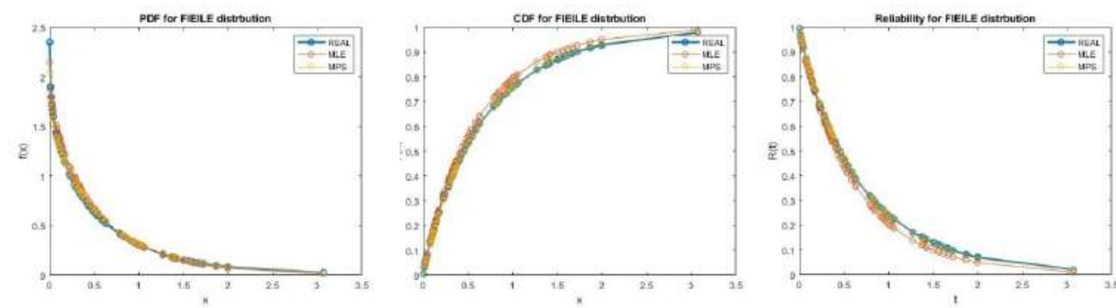
2- عند معاملات القطع $\alpha = 0.5, 0.7$ كانت طريقة اعظم مسافة متباعدة (MPS) افضل من طريقة الامكان الاعظم (MLE) كونها ان دالة الكثافة الاحتماليه المقدرة بهذه الطريقة حققت اقل معدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.02867, 0.00566) على التوالي مقارنة بمعدل متوسط مربعات الخطأ لطريقة (MLE) الذي بلغ (0.00448, 0.05593) على التوالي. وكذلك معدل متوسط مربعات الخطأ للمعلمات المقدرة بهذه الطريقة والبالغ (0.00006, 0.00566) اقل من معدل متوسط مربعات الخطأ للمعلمات المقدرة بطريقة (MPS) والبالغ (0.00441, 0.00019) على التوالي.



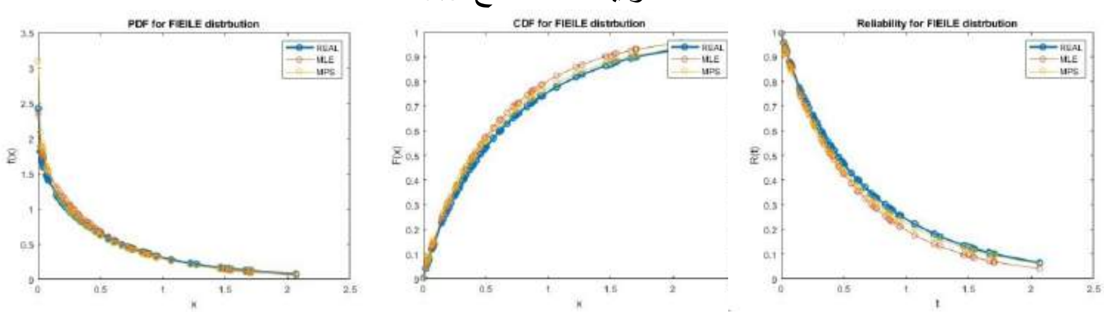
شكل (3-13) (a) منحنى دالة الكثافة الاحتماليه (b) منحنى دالة الكثافة التجميعية (c) منحنى دالة المعولية عند القطع 0.1



شكل (3-14) (a) منحنى دالة الكثافة الاحتماليه (b) منحنى دالة الكثافة التجميعية (c) منحنى دالة المعولية عند القطع 0.3



شكل (3-15) (a) منحنى دالة الكثافة الاحتماليه (b) منحنى دالة الكثافة التجميعية (c) منحنى دالة المعولية عند القطع 0.5



شكل (3-16) (a) منحنى دالة الكثافة الاحتماليه (b) منحنى دالة الكثافة التجميعية (c) منحنى دالة المعولية عند القطع 0.7

التجربة الخامسة :

المعلمات الافتراضية $\lambda = 2, \beta = 1, \theta = 4$

جدول (3-6) قيم دالة الكثافة الاحتماليه الحقيقية والمقدرة بطرائق التقدير ومتوسط مربعات الخطأ لكل طريقة والقيم المقدرة لمعلمات التوزيع المقترح للتجربة الخامسة

Alfa-cut	Real	MlE	MSE_MLE	MPS	MSE_MPS
0.1	0.48857	0.45669	0.00102	0.32982	0.02520
	0.48684	0.45545	0.00099	0.33721	0.02239
	0.46813	0.44066	0.00075	0.38260	0.00732
	0.46462	0.43775	0.00072	0.38744	0.00596
	0.45755	0.43183	0.00066	0.39524	0.00388
	0.44775	0.42352	0.00059	0.40282	0.00202
	0.44404	0.42035	0.00056	0.40492	0.00153
	0.44051	0.41732	0.00054	0.40658	0.00115
	0.43254	0.41044	0.00049	0.40929	0.00054
	0.42407	0.40308	0.00044	0.41080	0.00018
p.d.f. AMSE		0.02455		0.11568	
Estimates	$\hat{\lambda}$	2.22567	0.05093	2.34532	0.11925
	$\hat{\beta}$	0.98976	0.00010	1.59742	0.35691
	$\hat{\theta}$	4.22687	0.05147	4.3978	0.15824
Parameters AMSE		0.03417		0.21147	

Best		MPS			
Alfa-cut	**Real**	**MlE**	**MSE_MLE**	**MPS**	**MSE_MPS**
0.3	0.49695	0.65004	0.02344	0.60366	0.01139
	0.48879	0.60388	0.01325	0.57462	0.00737
	0.48637	0.59543	0.01189	0.56872	0.00678
	0.48368	0.58704	0.01068	0.56270	0.00624
	0.48100	0.57944	0.00969	0.55710	0.00579
	0.47608	0.56687	0.00824	0.54755	0.00511
	0.47309	0.55986	0.00753	0.54209	0.00476
	0.47308	0.55985	0.00753	0.54208	0.00476
	0.46611	0.54477	0.00619	0.53001	0.00408
	0.46308	0.53865	0.00571	0.52500	0.00383
p.d.f. AMSE		0.09978		0.01678	
Estimates	$\hat{\lambda}$	2.22673	0.05141	2.14534	0.02112
	$\hat{\beta}$	0.95976	0.00162	0.97742	0.00051
	$\hat{\theta}$	4.02914	0.00085	3.99690	0.00001
Parameters AMSE		0.01667		0.00721	
Best		**MPS**			
Alfa-cut	**Real**	**MlE**	**MSE_MLE**	**MPS**	**MSE_MPS**

0.5	0.47507	0.31886	0.02440	0.34676	0.01646
	0.47376	0.32126	0.02325	0.34798	0.01582
	0.47320	0.32225	0.02279	0.34847	0.01556
	0.46768	0.33085	0.01872	0.35253	0.01326
	0.46126	0.33879	0.01500	0.35584	0.01111
	0.45779	0.34236	0.01332	0.35714	0.01013
	0.45750	0.34264	0.01319	0.35723	0.01005
	0.45452	0.34534	0.01192	0.35810	0.00930
	0.45422	0.34559	0.01180	0.35818	0.00922
	0.44057	0.35471	0.00737	0.36001	0.00649
p.d.f. AMSE		0.23661		0.02655	
Estimates	$\hat{\lambda}$	2.13741	0.01888	2.09880	0.00976
	$\hat{\beta}$	1.10439	0.01090	1.17759	0.03154
	$\hat{\theta}$	4.50909	0.25917	3.93923	0.00369
Parameters AMSE		0.33785		0.03795	
Best		**MPS**			
Alfa-cut	**Real**	**MlE**	**MSE_MLE**	**MPS**	**MSE_MPS**
0.7	0.49362	0.43258	0.00373	0.55301	0.00353
	0.48693	0.43086	0.00314	0.52668	0.00158

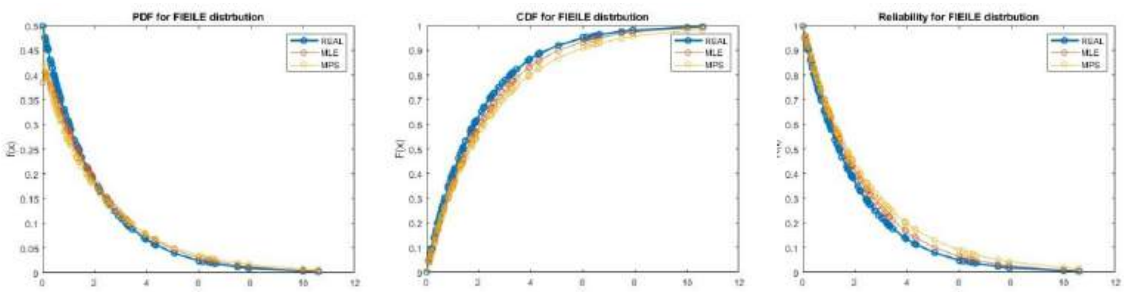
	0.48383	0.42947	0.00296	0.51784	0.00116
	0.48037	0.42768	0.00278	0.50916	0.00083
	0.48020	0.42759	0.00277	0.50877	0.00082
	0.47350	0.42369	0.00248	0.49436	0.00043
	0.46603	0.41892	0.00222	0.48045	0.00021
	0.45986	0.41477	0.00203	0.47007	0.00010
	0.45609	0.41216	0.00193	0.46409	0.00006
	0.44917	0.40725	0.00176	0.45364	0.00002
p.d.f. AMSE		0.36766		0.03896	
Estimates	$\hat{\lambda}$	2.07022	0.00493	2.00857	0.00007
	$\hat{\beta}$	1.01109	0.00012	1.09944	0.00989
	$\hat{\theta}$	4.07603	0.00578	4.0234004	0.00055
Parameters AMSE		0.00361		0.00350	
Best		**MPS**			

نلحظ من جدول (3-6) والاشكال (3-17) و (3-18) و (3-19) ما يأتي:

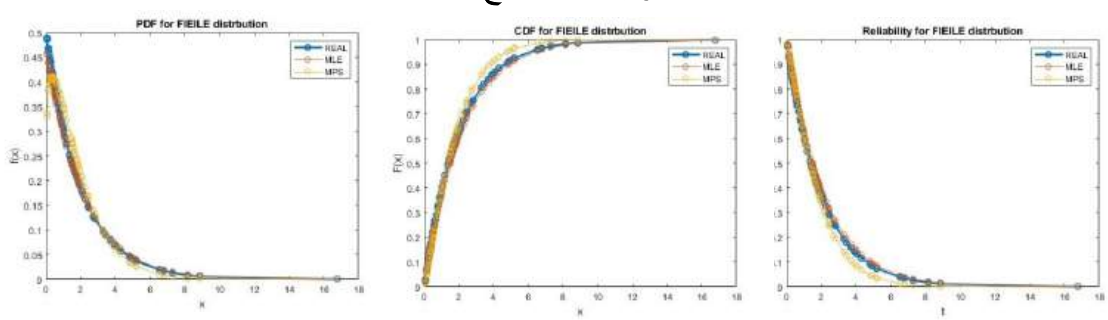
1- عند القطع $\alpha = 0.1$ طريقة طريقة الامكان الاعظم (MLE) افضل من اعظم مسافة متباعدة (MPS) كون ان دالة الكثافة الاحتماليه المقدرة بهذه الطريقة حققت اقل معدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.02455) مقارنة بمعدل متوسط مربعات الخطأ لطريقة (MPS) الذي بلغ (0.11568) . وكذلك معدل متوسط مربعات الخطأ للمعلمات المقدرة بهذه الطريقة والبالغ

(0.03417) اقل من معدل متوسط مربعات الخطأ للمعلمات المقدرة بطريقة (MPS) والبالغ (0.21147).

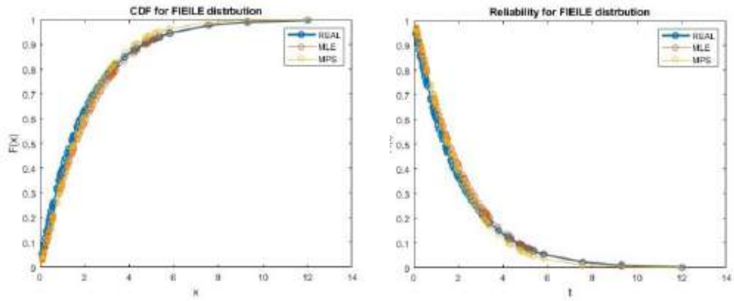
2- عند معاملات القطع $\alpha = 0.3, 0.5, 0.7$ كانت طريقة اعظم مسافة متباعدة (MPS) افضل من طريقة الامكان الاعظم (MLE) كونها ان دالة الكثافة الاحتماليه المقدرة بهذه الطريقة حققت اقل معدل متوسط مربعات خطأ بلغ (0.01678, 0.02655, 0.03896) على التوالي مقارنة بمعدل متوسط مربعات الخطأ لطريقة (MLE) الذي بلغ (0.09538, 0.23661, 0.36766) على التوالي. وكذلك معدل متوسط مربعات الخطأ للمعلمات المقدرة بهذه الطريقة والبالغ (0.00721, 0.03795, 0.00350) اقل من معدل متوسط مربعات الخطأ للمعلمات المقدرة بطريقة (MPS) والبالغ (0.09978, 0.33785, 0.00361) على التوالي.



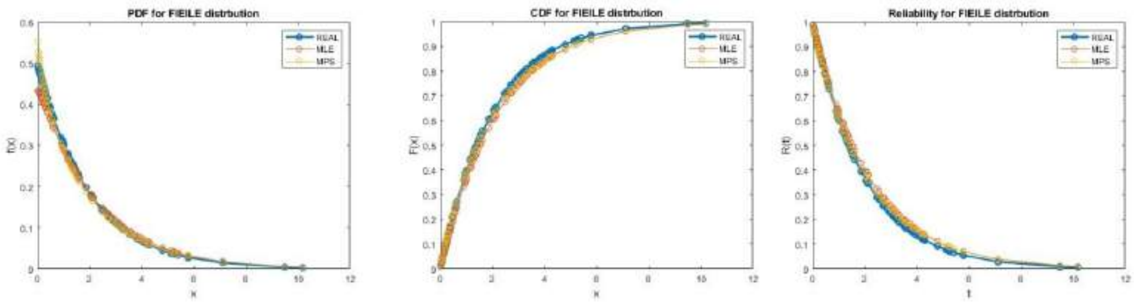
شكل (3-17) (a) منحنى دالة الكثافة الاحتماليه (b) منحنى دالة الكثافة التجميعية (c) منحنى دالة المعولية عند القطع 0.1



شكل (3-18) (a) منحنى دالة الكثافة الاحتماليه (b) منحنى دالة الكثافة التجميعية (c) منحنى دالة المعولية عند القطع 0.3



شكل (3-19) (a) منحنى دالة الكثافة الاحتماليه (b) منحنى دالة الكثافة التجميعية (c) منحنى دالة المعولية عند القطع 0.5



شكل (3-20) (a) منحنى دالة الكثافة الاحتماليه (b) منحنى دالة الكثافة التجميعية (c) منحنى دالة المعولية عند القطع 0.7

والجدول التالي يبين عدد مرات ظهور كل طريقة عند كل قطع وعند كل انموذج من نماذج تجارب المحاكاة

α / Para.	0.1	0.3	0.5	0.7
λ=4 β=0.8 θ=4	MLE	MPS	MPS	MPS
λ=5 β=0.9 θ=3	MLE	MPS	MPS	MPS
λ=3.5 β=0.8 θ=2	MLE	MLE	MPS	MPS
λ=1.5 β=0.1 θ=1.5	MLE	MLE	MPS	MPS
λ=2 β=1	MPS	MPS	MPS	MPS

$\theta=4$				
Rtio	MLE =0.30		MPS =0.70	

الجدول يعرض تكرار استعمال طريقة الامكان الاعظم وطريقة اعظم مسافة متباعدة وتبين انه في تجارب محاكاة لعدة قيم للمعاملات λ و β وθ ، حيث تختلف القيم بناءً على كل نموذج. في معظم الحالات، يهيمن MPS على استخدامه مقارنة بـ MLE ، باستثناء بعض الحالات مثل عندما $\lambda=3.5$ و $\theta=2$، حيث يتم استخدام MLE بشكل أكبر. النسبة الإجمالية بين MLE و MPS هي 0.30 لـ MLE و 0.70 لـMPS ، مما يشير إلى أن MPS هي الطريقة الأكثر تكراراً في هذه التجارب.

الفصل الثالث

المبحث الثاني

الجانب التطبيقي

1.2.3تمهيد

تم في هذا الفصل استعمال بيانات تمثل أوقات البقاء للمصابات بسرطان الثدي من مركز كربلاء لمعالجة الاورام لغرض اختبار التوزيع المقترح اذ تم اولا اختبار ملائمة المشاهدات الحقيقية للتوزيع ، ومن ثم المقارنة بين التوزيع المقترح والتوزيعات الاصلية باستعمال معايير مقارنة متعددة ومن ثم تضبيب المشاهدات الحقيقية باستعمال دالة انتماء شبه منحرفة ، واخيراً تحليل المشاهدات الحقيقية .

2.2.3 سرطان الثدي (Breast Cancer)

سرطان الثدي هو واحد من أكثر أنواع السرطان شيوعًا بين النساء في جميع أنحاء العالم، ويحدث عندما تبدأ خلايا الثدي في النمو بشكل غير طبيعي وغير منضبط، مما يؤدي إلى تشكيل كتلة أو ورم قد يكون حميدًا (غير سرطاني) أو خبيثًا (سرطاني). يمكن أن ينشأ سرطان الثدي في مختلف أجزاء الثدي، بما في ذلك القنوات التي تحمل الحليب (السرطان القنوي)، أو الغدد التي تنتج الحليب (السرطان الفصيصي)، ويمكن أن يكون موضعيًا أو غازيًا حيث ينتشر إلى الأنسجة المحيطة أو إلى أجزاء أخرى من الجسم. هناك عوامل خطر تزيد من احتمالية الإصابة بسرطان الثدي، مثل التقدم في العمر، التاريخ العائلي للإصابة بالمرض، الطفرات الجينية الموروثة مثل BRCA1 وBRCA2، والتعرض الطويل لهرمون الإستروجين، سواء من خلال العوامل البيولوجية أو نتيجة استعمال العلاج الهرموني بعد انقطاع الطمث. يُشخص سرطان الثدي باستعمال عدة أدوات مثل الفحص الذاتي، التصوير الشعاعي للثدي (ماموجرام)، الموجات فوق الصوتية، والخزعة التي تؤكد طبيعة الورم. تتعدد طرق العلاج بناءً على مرحلة ونوع السرطان، وتشمل الجراحة لإزالة الورم أو الثدي بأكمله، والعلاج

الإشعاعي لتدمير الخلايا السرطانية المتبقية، والعلاج الكيميائي الذي يستهدف الخلايا السرطانية في الجسم كله، بالإضافة إلى العلاجات الهرمونية والموجهة التي تعزز فعالية العلاج وتمنع عودة المرض. على الرغم من أن الوقاية الكاملة من سرطان الثدي قد لا تكون ممكنة، إلا أن الحفاظ على وزن صحي، ممارسة التمارين الرياضية بانتظام، والقيام بالفحوصات الدورية يمكن أن يساعد في تقليل المخاطر واكتشاف المرض في مراحله المبكرة حيث يكون العلاج أكثر فعالية.

3.2.3اسباب سرطان الثدي

تتنوع أسباب الإصابة بسرطان الثدي وتعتبر نتيجة لتفاعل معقد بين عوامل وراثية، هرمونية، وبيئية. من أبرز هذه الأسباب:

العوامل الوراثية :الطفرات الجينية الموروثة مثل BRCA1 و BRCA2تزيد بشكل كبير من خطر الإصابة بسرطان الثدي. النساء اللواتي يحملن هذه الطفرات لديهن احتمال أعلى لتطوير سرطان الثدي وسرطانات أخرى.

العمر :يزداد خطر الإصابة بسرطان الثدي مع التقدم في العمر، حيث تُعتبر النساء فوق سن الخمسين أكثر عرضة للإصابة.

التاريخ العائلي :وجود أقارب من الدرجة الأولى (الأم، الأخت، الابنة) مصابات بسرطان الثدي يزيد من خطر الإصابة، خاصة إذا تم تشخيصهن في سن مبكرة.

التعرض لهرمون الإستروجين :التعرض المطول لهرمون الإستروجين بسبب بدء الطمث في سن مبكرة، أو التأخر في انقطاع الطمث، أو استعمال العلاج الهرموني بعد انقطاع الطمث، يمكن أن يزيد من خطر الإصابة بسرطان الثدي.

نمط الحياة :السمنة وزيادة الوزن، خاصة بعد انقطاع الطمث، قلة النشاط البدني، تناول الكحول بكميات كبيرة، والتدخين، كلها عوامل تزيد من خطر الإصابة.

العوامل الإنجابية :الحمل الأول في سن متأخرة أو عدم الحمل مطلقًا يمكن أن يزيد من خطر الإصابة، كما أن الرضاعة الطبيعية تقلل من خطر الإصابة.

التعرض للإشعاع :التعرض للإشعاع في منطقة الصدر في سن مبكرة، مثل ما يحدث في علاج بعض أنواع السرطان الأخرى، يزيد من خطر الإصابة بسرطان الثدي في وقت لاحق.

العوامل البيئية :هناك بعض العوامل البيئية التي قد تسهم في زيادة خطر الإصابة بسرطان الثدي، مثل التعرض لبعض المواد الكيميائية الصناعية.

4.2.3 طرق الوقاية من سرطان الثدي

الوقاية من سرطان الثدي تتضمن اتخاذ خطوات لتقليل عوامل الخطر المرتبطة بالمرض، على الرغم من أنه لا يمكن الوقاية منه بشكل كامل. إليك بعض الطرق التي يمكن أن تساعد في تقليل خطر الإصابة:

الحفاظ على وزن صحي :السمنة وزيادة الوزن بعد انقطاع الطمث تزيد من خطر الإصابة بسرطان الثدي. لذا، الحفاظ على وزن صحي من خلال النظام الغذائي المتوازن والنشاط البدني المنتظم يمكن أن يقلل من المخاطر.

ممارسة الرياضة بانتظام: النشاط البدني المنتظم يساعد في الحفاظ على وزن صحي وتقليل مستويات الهرمونات المرتبطة بسرطان الثدي. ينصح بممارسة التمارين الرياضية المعتدلة لمدة 150 دقيقة على الأقل في الأسبوع.

الحد من تناول الكحول: تناول الكحول بكميات كبيرة يزيد من خطر الإصابة بسرطان الثدي. لذلك، يُفضل الحد من تناول الكحول أو الامتناع عنه تمامًا.

الرضاعة الطبيعية: الرضاعة الطبيعية، وخاصة لفترات طويلة، يمكن أن تقلل من خطر الإصابة بسرطان الثدي.

تجنب العلاج الهرموني طويل الأمد: إذا كنت تستخدمين العلاج الهرموني بعد انقطاع الطمث، من الأفضل مناقشة المخاطر والفوائد مع الطبيب، حيث أن الاستعمال طويل الأمد يمكن أن يزيد من خطر الإصابة بسرطان الثدي.

إجراء الفحوصات الدورية: إجراء الفحوصات المنتظمة مثل الماموجرام والفحص الذاتي للثدي يساعد في الكشف المبكر عن سرطان الثدي، مما يزيد من فرص العلاج الناجح.

اتباع نظام غذائي صحي: تناول الأطعمة الغنية بالفواكه، والخضروات، والحبوب الكاملة، والبروتينات الخالية من الدهون يمكن أن يدعم الصحة العامة ويقلل من خطر الإصابة.

التقليل من التعرض للإشعاع: تجنب التعرض غير الضروري للإشعاع يمكن أن يقلل من خطر الإصابة بسرطان الثدي.

الجينات والفحص الجيني :إذا كنتِ تعانين من تاريخ عائلي قوي للإصابة بسرطان الثدي، قد ترغبين في استشارة طبيبك حول الفحص الجيني للطفرات الوراثية مثل BRCA1 و BRCA2.في بعض الحالات، يمكن أن تُتخذ خطوات وقائية مثل الجراحة الوقائية.

التوعية والاطلاع :الوعي بعوامل الخطر وأعراض سرطان الثدي يمكن أن يساعد في اتخاذ قرارات صحية مبكرة.

5.2.3 المشاهدات الحقيقية (Real Data)

تم أخذ بيانات عن النساء المصابات بسرطان الثدي بوقع (100) مريضة للسنوات 2022-2023 والتي تمثل المدة الزمنية (بالشهر) التي ترقد فيها المريضة من بداية اخذ العلاج الكيمياوي ولغاية انخفاض حجم الورم السرطاني والجدول(3-7) يبين المشاهدات الحقيقية.

جدول (3-7) اوقات البقاء للنساء المصابات بسرطان الثدي من بداية اخذ العلاج الكيمياوي ولغاية انخفاض حجم الورم السرطاني

I	Xi
1	6.86376
2	6.53498
3	6.25326
4	5.79312
5	5.69637

6	5.30105
7	4.89146
8	4.83033
9	4.66024
10	4.60625
11	4.06958
12	4.06046
13	3.83507
14	3.49530
15	3.44291
16	3.40341
17	3.39985
18	3.21956
19	3.16785
20	3.16252
21	3.03055
22	3.03032
23	2.98965

2.98251	24
2.75786	25
2.73058	26
2.63147	27
2.33730	28
2.32167	29
2.12309	30
2.09460	31
2.08681	32
1.96496	33
1.94601	34
1.84252	35
1.73359	36
1.71231	37
1.59639	38
1.58377	39
1.54586	40
1.50381	41

42	1.44001
43	1.42985
44	1.42062
45	1.35008
46	1.34376
47	1.33415
48	1.19904
49	1.19764
50	1.18401
51	1.16923
52	1.14490
53	1.12920
54	1.08005
55	1.03473
56	1.02769
57	1.02093
58	0.98774
59	0.92168

60	0.91927
61	0.87131
62	0.86450
63	0.82413
64	0.74565
65	0.73157
66	0.70287
67	0.61251
68	0.61026
69	0.60186
70	0.55333
71	0.54875
72	0.54865
73	0.53518
74	0.52007
75	0.41886
76	0.40646
77	0.40548

0.40141	78
0.37023	79
0.36220	80
0.33064	81
0.31457	82
0.31320	83
0.29252	84
0.28307	85
0.26322	86
0.23577	87
0.22556	88
0.20286	89
0.17643	90
0.17509	91
0.16921	92
0.16280	93
0.15801	94
0.12328	95

96	0.11157
97	0.10186
98	0.08795
99	0.03105
100	0.00929

6.2.3اختبار ملائمة المشاهدات Data Fitting

للتأكد من ان المشاهدات في جدول (4.1) تتبع التووزيع المقترح الجديد **(IEILE)** تم استعمال اختبار Chi–square لحسن المطابقة وبموجب الفرضية الآتية:

$H_0: \boldsymbol{The\ data}$ **EILIE**

$H_1: \boldsymbol{The\ data\ \ dont\ have}$ **EILIE**

ولاختبار هذه الفرضية الاحصائية سيتم احتساب قيمة احصاءة χ^2 وحسب الصيغة الآتية:

$$\chi_c^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

… (3–6)

حيث تم احتساب احصاءة حسن المطابقة χ_c^2 وذلك باستعمال الدالة (chi2gof) في برنامج (MatLab) ، وكانت نتائج الاختبار كما في جدول (4.2) :

جدول (3.8) نتائج اختبار ملائمة المشاهدات

Distribution	χ_c^2	χ_t^2	Sig.	Decision
EILIE	0.8955	7.82	0.369	Accept H_0
Real Parameters	**1.5**	**0.1**	**1.5**	

Estimated Parameters	1.6	0.2	1.7	

نلحظ من جدول (4.3) ان قيمة χ_c^2 المحسوبة والبالغة (0.8955) اقل من قيمة χ_t^2 الجدولية والبالغة (7.82) وكانت قيمة Sig=0.369 اكبر من مستوى المعنوية (0.05) وهذا يعني عدم رفض فرضية العدم اي ان المشاهدات الحقيقية تتوزع وفقاً لتوزيع ليندلي ذو المعلمتين الجديد . علماً ان المعلمات المقدرة اقرب ماتكون للمعلمات لافتراضية في تجربة المحاكاة الرابعة.

7.2.3المفاضلة بين التوزيع المقترح وتوزيعاته الاصلية:

تم استعمال معايير المقارنة بين التوزيعات وهي (−2LnL, AIC , AICc, BIC, HQIC) للمقارنة بين التوزيعات المستعملة وهي التوزيع الاسي (EXP) ، والتوزيع معكوس الاسي (IEXPO) ، والتوزيع معكوس ليندلي (ILD) والتوزيع المعكوس الاسي− معكوس ليندلي – الاسي المقترح (IEILE) وكانت النتائج في جدول (4.3) .

جدول (3.9) نتائج اختبارات المقارنة ودقة التوزيعات

Distribution	-2LnL	AIC	AIC c	BIC	HQIC
EXP	126.446	126.555	126.611	126.675	110.799
IEXPO	122.456	123.566	123.597	123.678	17.732
ILD	115.467	115.444	115.675	115.785	100.678
EILIE	88.6531	88.690	88.841	88.749	88.890

نلحظ من جدول(3.9) بان معايير الاختبارات الخاصة كانت اقل عند التوزيع (FEILIE) المقترح مما يدل على ان هذا التوزيع اكثر ملائمة للبيانات الحقيقية. ونلاحظ ايضاً ان التوزيع المعكوس الاسي اكثر ملائمة للبيانات الحقيقية من التوزيع الاسي.

8.2.3 تضبيب المشاهدات:

تم تحويل المشاهدات الاصلية $\underline{\mathrm{X}} = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$ الى الضبابية من خلال ايجاد درجة الانتماء المقابلة لكل مشاهدة من مشاهدات متجه العينة التقليدي الحقيقي باستعمال دالة إنتماء شبه منحرفة وكما يأتي:

$$\mu_A(t) = \begin{cases} 0 & if \quad t < a \\ \frac{t-a}{b-a} & if \quad a \le t \le b \\ 1 & if \quad t > b \end{cases} \quad \dots (3\text{-}7)$$

إذ أن a=0.000929 تمثل أقل قيمة من قيم مشاهدات العينة التقليدي و b=6.8 تمثل اكبر قيمة من قيم مشاهدات متجه العينة التقليدي والذي ينتج لدينا متجه عينة ضبابي $\underline{\tilde{\boldsymbol{t}}} = \tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \dots, \tilde{t}_n$ يتضمن كل مشاهدة ودرجة انتماءها المقابلة وكالآتي:

جدول (3.10) المشاهدات الحقيقية ودرجة انتماء كل مشاهدة

I	xi	Membership Degree
1	6.86376	1.00000
2	6.53498	0.95204
3	6.25326	0.91093

4	5.79312	0.84380
5	5.69637	0.82969
6	5.30105	0.77202
7	4.89146	0.71226
8	4.83033	0.70334
9	4.66024	0.67853
10	4.60625	0.67065
11	4.06958	0.59236
12	4.06046	0.59103
13	3.83507	0.55814
14	3.49530	0.50857
15	3.44291	0.50093
16	3.40341	0.49517
17	3.39985	0.49465
18	3.21956	0.46835
19	3.16785	0.46080
20	3.16252	0.46003
21	3.03055	0.44077

22	3.03032	0.44074
23	2.98965	0.43481
24	2.98251	0.43376
25	2.75786	0.40099
26	2.73058	0.39701
27	2.63147	0.38255
28	2.33730	0.33963
29	2.32167	0.33735
30	2.12309	0.30838
31	2.09460	0.30423
32	2.08681	0.30309
33	1.96496	0.28531
34	1.94601	0.28255
35	1.84252	0.26745
36	1.73359	0.25156
37	1.71231	0.24845
38	1.59639	0.23154
39	1.58377	0.22970

40	1.54586	0.22417
41	1.50381	0.21804
42	1.44001	0.20873
43	1.42985	0.20725
44	1.42062	0.20590
45	1.35008	0.19561
46	1.34376	0.19469
47	1.33415	0.19328
48	1.19904	0.17357
49	1.19764	0.17337
50	1.18401	0.17138
51	1.16923	0.16922
52	1.14490	0.16567
53	1.12920	0.16338
54	1.08005	0.15621
55	1.03473	0.14960
56	1.02769	0.14857
57	1.02093	0.14759

58	0.98774	0.14275
59	0.92168	0.13311
60	0.91927	0.13276
61	0.87131	0.12576
62	0.86450	0.12477
63	0.82413	0.11888
64	0.74565	0.10743
65	0.73157	0.10537
66	0.70287	0.10119
67	0.61251	0.08800
68	0.61026	0.08768
69	0.60186	0.08645
70	0.55333	0.07937
71	0.54875	0.07870
72	0.54865	0.07869
73	0.53518	0.07672
74	0.52007	0.07452
75	0.41886	0.05975

76	0.40646	0.05794
77	0.40548	0.05780
78	0.40141	0.05721
79	0.37023	0.05266
80	0.36220	0.05149
81	0.33064	0.04688
82	0.31457	0.04454
83	0.31320	0.04434
84	0.29252	0.04132
85	0.28307	0.03994
86	0.26322	0.03705
87	0.23577	0.03304
88	0.22556	0.03155
89	0.20286	0.02824
90	0.17643	0.02438
91	0.17509	0.02419
92	0.16921	0.02333
93	0.16280	0.02240

94	0.15801	0.02170
95	0.12328	0.01663
96	0.11157	0.01492
97	0.10186	0.01350
98	0.08795	0.01148
99	0.03105	0.00317
100	0.00929	0.00000

بعد ذلك يتم الحصول على المجوعـــــــة الضـــــــبابية عند معاملات القطع $\tilde{\mathbf{A}}_{\alpha} = \alpha = 0.1$ $\{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_{\tilde{n}}\}$ بإختيار العناصر في المجموعة الضبابية التي لها درجة إنتماء اكبر او تساوي القطع ، α أي أن:

جدول (3−11) مجموعة القطع

i	$\tilde{\mathbf{A}}_{\alpha}$
1	6.8
2	6.5
3	6.3
4	5.8
5	5.7
6	5.3
7	4.9
8	4.8

9	4.7
10	4.6
11	4.1
12	4.1
13	3.8
14	3.5
15	3.4
16	3.4
17	3.4
18	3.2
19	3.2
20	3.2
21	3.0
22	3.0
23	3.0
24	3.0
25	2.8
26	2.7
27	2.6
28	2.3
29	2.3
30	2.1
31	2.1
32	2.1
33	2.0
34	1.9
35	1.8
36	1.7
37	1.7

38	1.6
39	1.6
40	1.5
41	1.5
42	1.4
43	1.4
44	1.4
45	1.4
46	1.3
47	1.3
48	1.2
49	1.2
50	1.2
51	1.2
52	1.1
53	1.1
54	1.1

9.2.3 تحليل المشاهدات (Data analyzing)

لتحليل عينة المشاهدات الحقيقية في تقدير معلمات التوزيع المقترح وتطبيقها على المشاهدات الحقيقية، والجدول (3.12) يوضح تقديرات دالة الكثافة الاحتماليه ودالة الكثافة الاحتماليه التجميعية ودالة المعولية للتوزيع المقترح بطريقة اعظم مسافة متعبادة والتي اظهرت تفوقها على طريقة الامكان الاعظم في تجارب المحاكاة.

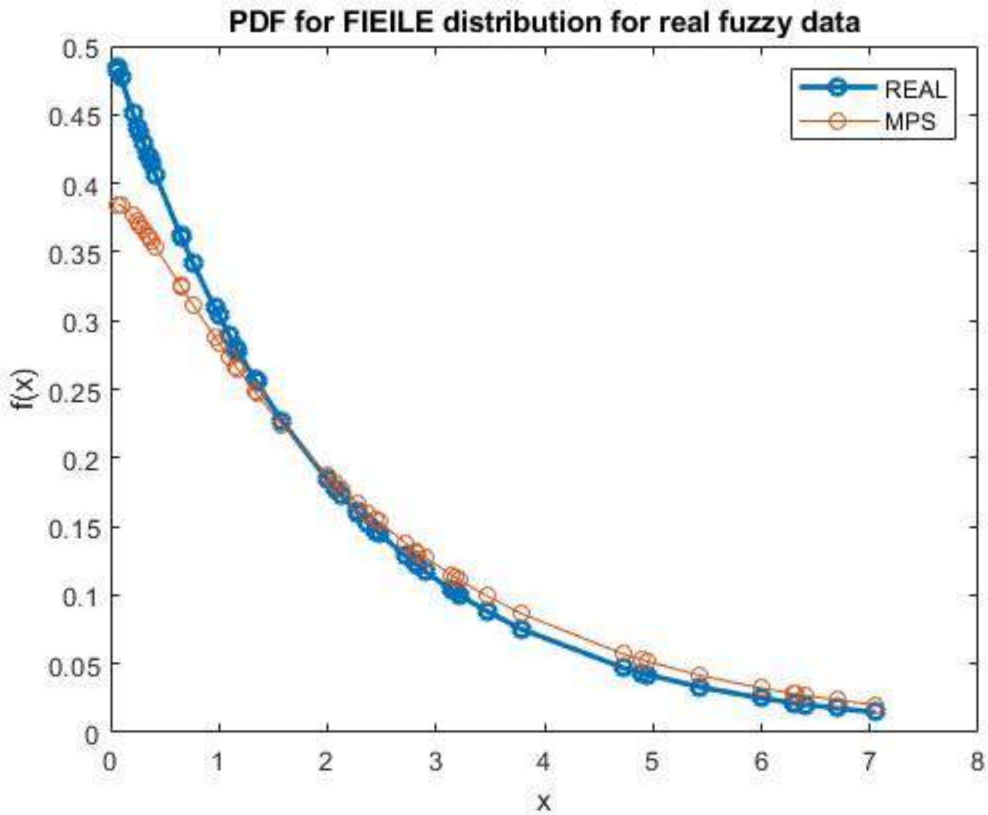
جدول (3.12) يبين نتائج تحليل المشاهدات الحقيقية عند طريقة اعظم مسافة متباعدة

f_real	f_MPS	F_real	F_MPS	R_real	R_MPS
0.469697	0.337359	0.060606	0.039263	0.939394	0.960737
0.469486	0.337485	0.061029	0.039566	0.938971	0.960434
0.455667	0.342905	0.088666	0.059919	0.911334	0.940081
0.455001	0.343055	0.089999	0.060923	0.910001	0.939077
0.454827	0.343093	0.090347	0.061185	0.909653	0.938815
0.445129	0.344404	0.109742	0.076008	0.890258	0.923992
0.445069	0.344407	0.109862	0.0761	0.890138	0.9239
0.413698	0.341318	0.172605	0.126328	0.827395	0.873672
0.389367	0.334117	0.221266	0.167296	0.778734	0.832704
0.385057	0.332529	0.229886	0.174717	0.770114	0.825283
0.381535	0.331172	0.23693	0.180816	0.76307	0.819184
0.372369	0.327398	0.255262	0.196832	0.744738	0.803168
0.372315	0.327375	0.25537	0.196927	0.74463	0.803073
0.365058	0.324156	0.269884	0.209751	0.730116	0.790249
0.360562	0.322066	0.278876	0.217759	0.721124	0.782241
0.354271	0.319025	0.291457	0.229044	0.708543	0.770956
0.34407	0.313821	0.31186	0.247535	0.68814	0.752465
0.341083	0.312237	0.317833	0.252993	0.682167	0.747007
0.339529	0.311402	0.320941	0.255841	0.679059	0.744159
0.298078	0.28669	0.403843	0.333743	0.596157	0.666257

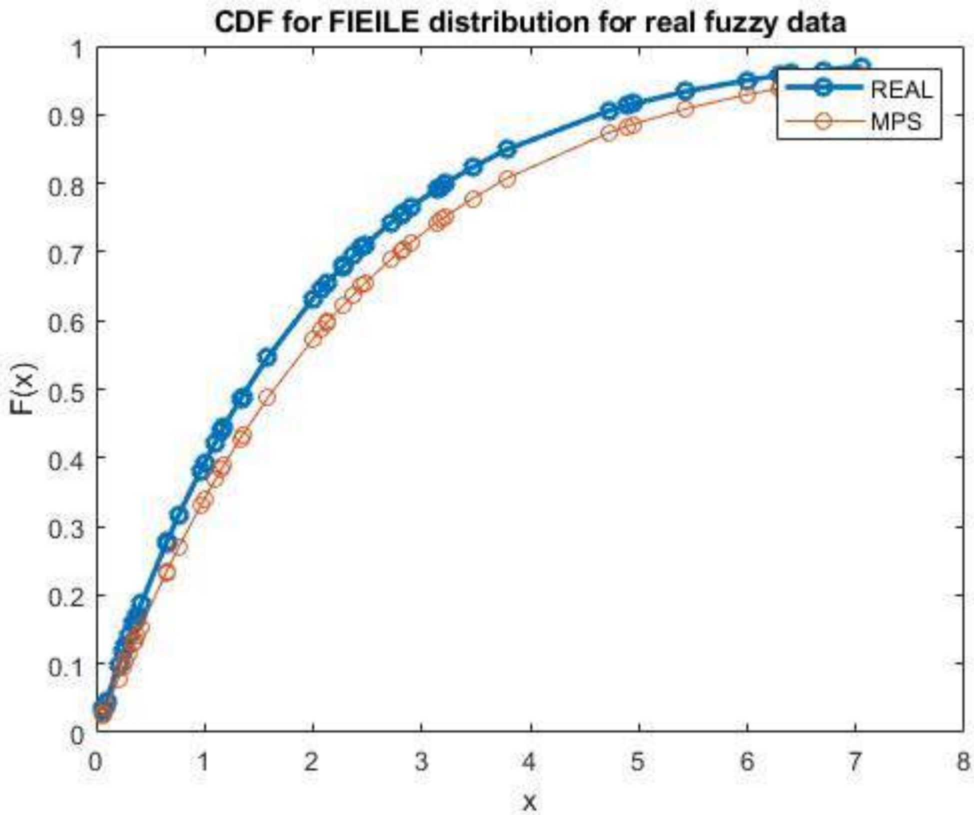
0.273896	0.270323	0.452207	0.38087	0.547793	0.61913
0.247	0.250609	0.505999	0.434704	0.494001	0.565296
0.244296	0.248543	0.511409	0.4402	0.488591	0.5598
0.237681	0.243427	0.524637	0.453704	0.475363	0.546296
0.23532	0.241579	0.52936	0.458546	0.47064	0.541454
0.221722	0.230719	0.556556	0.486655	0.443444	0.513345
0.211973	0.222706	0.576053	0.507042	0.423947	0.492958
0.207679	0.219117	0.584641	0.516084	0.415359	0.483916
0.207641	0.219085	0.584719	0.516165	0.415281	0.483835
0.199869	0.212497	0.600262	0.532628	0.399738	0.467372
0.18987	0.203848	0.62026	0.553994	0.37974	0.446006
0.180362	0.195443	0.639276	0.574505	0.360724	0.425495
0.150183	0.167597	0.699634	0.64088	0.300366	0.35912
0.144796	0.162437	0.710409	0.652936	0.289591	0.347064
0.137409	0.155269	0.725182	0.66957	0.274818	0.33043
0.137156	0.155022	0.725688	0.670141	0.274312	0.329859
0.126691	0.144674	0.746617	0.693919	0.253383	0.306081
0.123886	0.141862	0.752228	0.700335	0.247772	0.299665
0.105486	0.123014	0.789029	0.742861	0.210971	0.257139
0.094686	0.111617	0.810628	0.768186	0.189372	0.231814
0.085009	0.101187	0.829982	0.791112	0.170018	0.208888

0.081472	0.097323	0.837056	0.799547	0.162944	0.200453
0.080872	0.096665	0.838256	0.80098	0.161744	0.19902
0.076814	0.09219	0.846373	0.810703	0.153627	0.189297
0.074821	0.089979	0.850357	0.815489	0.149643	0.184511
0.070715	0.085393	0.858571	0.825387	0.141429	0.174613
0.07062	0.085287	0.858759	0.825614	0.141241	0.174386
0.044466	0.0551	0.911067	0.889614	0.088933	0.110386
0.044176	0.054755	0.911647	0.890333	0.088353	0.109667
0.025946	0.032631	0.948109	0.93588	0.051891	0.06412
0.021327	0.026878	0.957345	0.94751	0.042655	0.05249
0.014462	0.018218	0.971075	0.964818	0.028925	0.035182
0.013674	0.017216	0.972651	0.966802	0.027349	0.033198
0.00578	0.007126	0.988439	0.986539	0.011561	0.013461

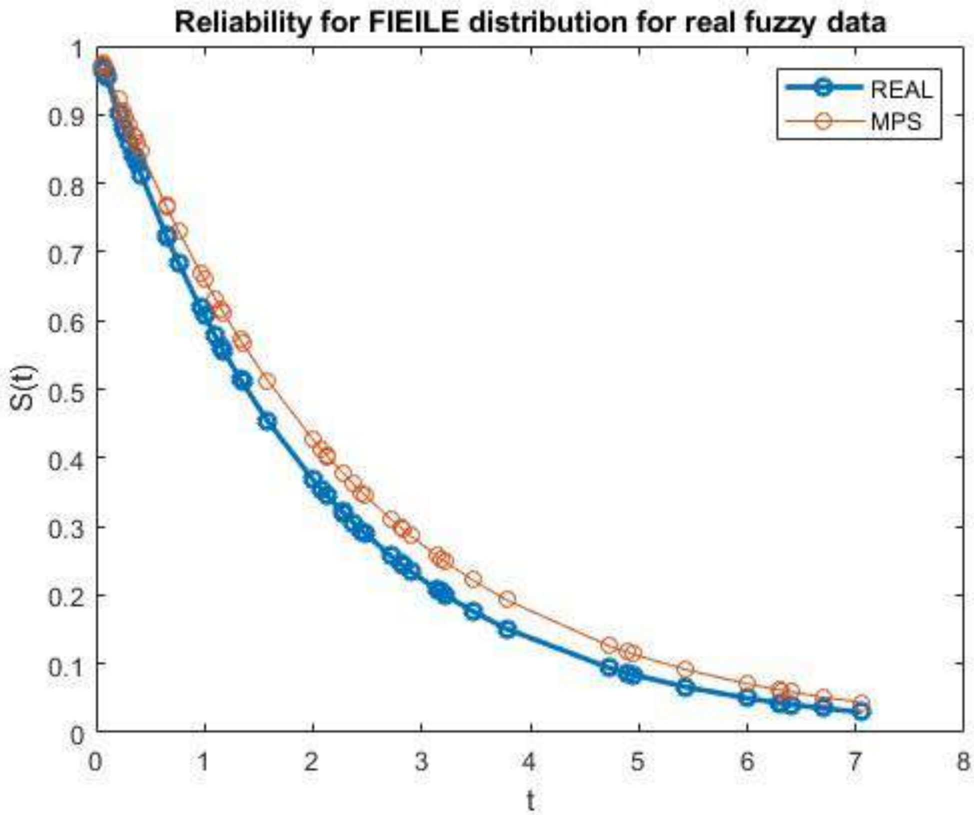
يظهر الجدول (3-12) النتائج التي تم الحصول عليها من المشاهدات الحقيقية اذ ان تقديرات طريقة اعظم مسافة متباعدة كانت متناقسة مع القيم الحقيقية لكل من دوال (الكثافة الاحتماليه – الكثافة التجميعية – المعولية) اذ ان القيم المقدرة بموجب هذه الطريقة اقرب ماتكون للقيم الحقيقية للتوزيع معكوس الاسي– معكوس ليندلي – الاسي الضبابي المقترح . ونلاحظ انه عندما يكون وقت البقاء ستة اشهر وثمانية ايام فان احتمال انخفاض الورم يكون (96 %). وعندما تكون مدة بقاء المريضة شهر وعشرة ايام فن احتمال انخفاض الورم بلغ (1.3%).



شكل (3−21) منحنى دالة الكثافة الاحتماليه للتوزيع المقترح والمقدر بطريقة اعظم مسافة متباعدة



شكل (3−22) منحنى دالة الكثافة الاحتماليه التجميعية للتوزيع المقترح والمقدر بطريقة اعظم مسافة متباعدة



شكل (23–3) منحنى دالة البقاء للتوزيع المقترح والمقدر بطريقة اعظم مسافة متباعدة

الفصل الرابع

الاستنتاجات والتوصيات

4.1 الإستنتاجات (Conclusions)

من خلال ما تم التوصل اليه في الجانبين التجريبي والتطبيقي تم التوصل الى الاستنتاجات الآتية:

1- التوزيع المقترح اكثر ملائمة للبيانات المتناقصة برتابة وهذا ما اظهرته منحنيات التوزيع في تجارب المحاكاة .

2- كلما زاد القطاع في المجوعة الضبابية قلت العناصر التي لها درجة انتماء اقل او تساوي القطع وزادة دقة التقدير .

3- كلما زاد القطع كانت طريقة اعظم مسافة متباعدة هي الافضل من طريقة الامكان الاعظم كون ان القطع يؤدي الى تقليل حجم العينة.

4- حققت طريقة الامكان الاعظم فضلية عند القطع 0.1 باقل معدل متوسط مربعات خطأ .

5- حققت طريقة اعظم مسافة متباعدة افضلية عند معاملات القطع $= 0.3, 0.5, 0.7$

6- حققت طريقة اعظم مسافة متباعدة افضلية على طريقة الامكان الاعظم بنسبة (70%) بعدد مرات افضلية (14) مرة بينما حققت طريقة الامكان الاعظم نسبة (30%) بعدد مرات افضلية (6) مرات.

7- للبيانات الحقيقية كانت تقديرات طريقة (MPS) متناقسة مع القيم الحقيقية لكل من دوال (الكثافة الاحتماليه – الكثافة التجميعية – المعولية) اذ ان القيم المقدرة بموجب هذه الطريقة اقرب ماتكون للقيم الحقيقية للتوزيع معكوس الاسي- معكوس ليندلي – الاسي الضبابي المقترح . ونلاحظ انه عندما يكون وقت البقاء ستة اشهر وثمانية ايام فان احتمال انخفاض الورم يكون (96 %). وعندما تكون مدة بقاء المريضة شهر وعشرة ايام فن احتمال انخفاض الورم بلغ (1.3%

4.2 التوصيات (Recommendations)

بناءاً على ما تم التوصل اليه من استنتاجات نوصي بالآتي:

1- إجراء دراسات محاكاة إضافية باستعمال مجموعات بيانات متنوعة لاختبار فعالية التوزيع المقترح والطرق المستخدمة. هذا قد يشمل بيانات من مجالات مختلفة مثل الهندسة، الطب، أو الاقتصاد.

2- دراسة تأثير التغيير في معايير الضبابية وقيم القطع على دقة التقدير وتحديد الحدود المثلى لاستعمال كل منها.

2- نوصي بتطبيق التوزيع المقترح وطرق التقدير المرافقة له في مجالات جديدة مثل التنبؤ بالمخاطر المالية، وتحليل الموثوقية في الهندسة، وتحليل بقاء المرضى في الطب، لرؤية كيف يمكن الاستفادة من هذه الطرق في هذه السياقات.

3- إجراء دراسات موسعة على المشاهدات السريرية لتطبيق النتائج التي تم التوصل إليها، بما في ذلك تحليل تأثير الزمن على توقعات بقاء المريض واستعمال هذه التقديرات في تحسين استراتيجيات العلاج.

4- متابعة التطورات التكنولوجية في مجال التحليل الضبابي وتعلم الآلة، واستكشاف كيفية دمج هذه التقنيات مع التوزيعات المقترحة لتعزيز دقة التقدير وتقديم توصيات دقيقة في الوقت الحقيقي.

5- استعمال طرائق الذكاء الاصطناعي لتقدير معلمات التوزيع المقترح كالشبكات العصبية الاصطناعية .

المصادر

* القرآن الكريم

اولاً: المصادر العربية :

1. آوجي ، زينة ياوز عبد القادر ، (2009) ، " مقدرات بيز لدالة المعولية الضبابية للتوزيع الأسي باستعمال المحاكاة مع تطبيقها على الشركة العامة للصناعات الكهربائية " ، اطروحة دكتوراه ، قسم الاحصاء ، كلية الإدارة والاقتصاد ، جامعة بغداد.
2. علي ، بشار خالد ، (2022) ، " طريقة بيزية ضبابية حصينة عامة للتوزيعات الاحتماليه" ، اطروحة دكتوراه، جامعة كربلاء- كلية الادارة والاقتصاد .
3. علي ، بشار خالد، (2018)، "اختيار افضل تقدير للمعولية الضبابية لتوزيع فريچت " ، رسالة ماجستير، جامعة كربلاء ، كلية الادارة والاقتصاد.
4. نصر الله ، نعمة وهاب، علي ، بشار خالد ، "طريقة بيز لتقدير المعولية الضبابية لتوزيع فريجت باستعمال المحاكاة"، المجلة العراقية للعلوم الادارية، المجلد (14) ، العدد (58).

ثانياً: المصادر الأجنبية :

5. A.Ganaie , Rashid; A. Rather, V.Aafaq , : Weighted new quasi Lindley distribution with Properties and Applications", Journal of Xi'an University of Architecture & Technology Volume XII, Issue II, Issn No : 1006-7930. (2020)
6. A.Ibrahim, Nathier & A. Mohammed, Hussein, (2017), "Parameters and Reliability Estimation for the Fuzzy Exponential Distribution", American Journal of Mathematics and Statistics, 7(4): 143-151
7. Ali , Bashar Khalid; Neamah , Mahdi Wahhab, (2022), " New Robust Fuzzy Informative Standard Bayes Estimator for Exponential Distribution",
8. AL-Sabbah, Shrook.A.S.; Qasim , Bahaa Abdul Razaq; Shareef, Ashraf Mohammed, (2021), " Useing the Hierarchical Cluster Analysis and Fuzzy Cluster Analysis Methods for Classification of Some

Hospitals in Basra ", Open AccessBaghdad Science JournalP-ISSN: 2078-8665Published Online First: April 20212021, 18(4): 1212-1217E-ISSN: 2411-7986

9. Alzaatreh, A., Lee, C., Famoye, F.: A new method for generating families of continuous distributions. METRON. 71(1), 63–79 (2013)
10. Alzaatreh, A., Lee, C., Famoye, F.: T-normal family of distributions: A new approach to generalize the normal distribution. J. Stat. Distrib. Appl. 1(16), 1–18 (2014)
11. Alzaghal, A., Famoye, F., Lee, C.: Exponentiated T-X family of distributions with some applications. Int. J. Stat. Probab. 2(3), 31–49 (2013)
12. Alzaghal, A., Hamed, D.: New families of generalized Lomax distributions: Properties and applications. Int. J. Stat. Probab. 8(6), 51–68 (2019).
13. Bantan, Rashad, S. Hassan, Amal & Elsehetry,Mahmoud : Generalized Marshall Olkin Inverse Lindley Distribution with Applications, CMC. doi:10.32604/cmc.2020.010887 .
14. Bensid & H.Zeghdoudi: On the Lindley family distribution: quantile function, limiting distributions of sample minima and maxima and entropies, BSG_ Proceedings, c Balkan Society of Geometers, Geometry Balkan Press, pp. 1-18. Vol. 24, (2017)
15. C. S. Rajitha, ·A Akhilnath, : Generalization of the Lindley distribution with application to COVID-19 data, International Journal of Data Science .https://doi.org/10.1007/s41060-022-00369-2,(2022)
16. Chaturvedi, A., Singh, D. S. K., & Singh, D. U. (2023). Maximum Product Spacings Estimator for Fuzzy Data Using Inverse Lindley

Distribution. Austrian Journal of Statistics, 52(2), 86–103. https://doi.org/10.17713/ajs.v52i2.1395.

17. De Barros, Laécio Carvalho, Bassanezi, Rodney Carlos, Lodwick , Weldon Alexander, (2017), "A First Course in Fuzzy Logic, Fuzzy Dynamical Systems, and Biomathematics-Theory and Applications",© Springer-Verlag Berlin Heidelberg, ISSN 1434-9922 ISSN 1860-0808 (electronic), Studies in Fuzziness and Soft Computing , ISBN 978-3-662-53322-2 ISBN 978-3-662-53324-6 (eBook), DOI 10.1007/978-3-662-53324-6
18. Dey, S., Nassar, M., Kumar, D.: Alpha power transformed inverse Lindley distribution: A distribution with an upside-down bathtub-shaped hazard function. J. Comput. Appl. Math. 384, 130–145 (2019)
19. E. Ghitany, F. Alqallaf, D.K. Al-Mutairi, H.A. Husain : A two-parameter weighted Lindley distribution and its applications to survival data, Mathematics and Computers in Simulation 1190–1201, 81 (2011)
20. Ehm , Werner , Tilmann Gneiting, Alexander Jordan, Fabian Krüger, (2016), " Of Quantiles and Expectiles: Consistent Scoring Functions, Choquet Representations, and Forecast Rankings", Submitted on 27 Mar 2015 (v1), last revised 17 Apr 2015 (this version, v2)]
21. Eissa, Fatehi Yahya, Sonar , Chhaya Dhanraj : Alpha Power Transformed Extended power Lindley Distribution, Journal of Statistical Theory and Applications 22:1–18 https://doi.org/10.1007/s44199-022-00051-3, (2023)
22. Elbatal, I., Merovci, F., Elgarhy, M.: A New Generalized Lindley Distribution. J. Math. Theory Model. 3(13), 30–47 (2013)
23. Eraikhuemen, Innocent Boyle, Asongo, Abraham Iorkaa , Umar , Adamu Abubakar, & Ibrahim , Isa Abubakar : Estimation of a Shape Parameter of a Gompertz-lindley Distribution Using Bayesian and Maximum Likelihood Methods, Journal of Scientific Research and

Reports Volume 29, Issue 10, Page 85-98, Article no.JSRR.72156 ISSN: 2320-0227, (2023)

24. Garg , Harish , Sharma, S.P. & Rani ,Monica, (2013)," Weibull fuzzy probability distribution for analyzing the behavior of pulping unit in a paper industry" . Int. J. Industrial and Systems Engineering, Vol. 14, No. 4 , pp 395-413
25. Guptha , Rajitha Chammalakkalam Sankarankutty , Maruthan, Sakthivel Kandasamy: A New Generalization of Power Lindley Distribution and Its Applications, Thailand Statistician; 21(1): 196-208, http://statassoc.or.(2023)
26. H. B. Yadav, D. K. Yadav, A Fuzzy Logic Approach for Multistage Defects Density Analysis of Software, Advances in intelligent system and computing, 336:123–136, 2015
27. H. Torabi , M. Falahati-Naeini & N.H. Montazeri: An Extended Generalized Lindley Distribution and Its Applications to Lifetime Data, Statistical Research and Training Center, J. Statist. Res. Iran 11: 203–222(2014)
28. JOURNAL OF ALGEBRAIC STATISTICS Volume 13, No. 1, 2022, p. 431-442 https://publishoa.com ISSN: 1309-3452
29. Kitani, M., Murakami, H., & Hashiguchi, H. (2023). The distribution of the sum of independent and non identically generalized Lindley random variables. Communications in Statistics - Theory and Methods, 52(8), 2597-2609. https://doi.org/10.1080/03610926.2021.1955387
30. Kumar , C. Satheesh ; Jose, Rosmi :On Double Lindley Distribution and Some of its Properties , American Journal of Mathematical and Management Sciences, 1-21. , (2019)

31. Md. Farooq Hasan, Md. Abdus Sobhan,(2020), " Describing Fuzzy Membership Function and Detecting the Outlier by Using Five Number Summary of Data ", American Journal of Computational Mathematics, 2020, 10, 410-424 https://www.scirp.org/journal/ajcm ISSN Online: 2161-1211 ISSN Print: 2161-1203
32. Neamah, Mahdi Wahhab, Ali , Bashar Khalid, (2020), " Fuzzy reliability estimation for Frechet distribution by using simulation", Periodicals of Engineering and Natural Sciences ISSN 2303-4521 Vol. 8, No. 2, June 2020, pp.632-646
33. Okagbue, Hilary I., Member, IAENG, Pelumi E. Oguntunde, Abiodun A. Opanuga and Sheila A. Bishop: One and Two-parameters Lindley Distributions: Ordinary Differential Equations, Proceedings of the World Congress on Engineering and Computer Science 2018 Vol I WCECS 2018, October 23-25, San Francisco, USA, (2018)
34. Oluyede, B., Yang, T.: A new class of generalized Lindley distributions with applications. J. Stat. Comput. Simul. 85(10), 2072–2100 (2015)
35. P. Feiffer, Paul : APPLIED PROBABILITY , (OER) LibreTexts Project (https://LibreTexts.org), Rice University, (2023)
36. Pak, Abbas; Ali, Gholam & Saraj, Mansour, (2013), "Inference for the Weibull Distribution Based on Fuzzy Data", Int J Syst Assur Eng Manag, vol.: 36, no. 2, pp. 339 – 358
37. Pedro Huidobro1,3 · Pedro Alonso2 · Vladimír Janiš3,4 · Susana Montes , (2022), " Convexity and level sets for interval-valued fuzzy sets ", Fuzzy Optimization and Decision Making (2022) 21:553–580 https://doi.org/10.1007/s10700-021-09376-7

38.Rama, Shanker , Rahman, Umme Habibah, :A New Two - Parameter Lindley Distribution", Nepal Journal of Mathematical Sciences (NJMS), Vol.1 , (October): 33-42.(2020)

39.Ranjbar, Vahid, Eftekharian,Abbas, Kharazmi,Omid, Alizadeh, Morad : Odd log-logistic generalised Lindley distribution with properties and applications, STATISTICS IN TRANSITION new series, Vol. 24, No. 4, pp. 71–92, https://doi.org/10.59170/stattrans-2023-052 Received – 08.11.2020; accepted – 17.01.(2023)

40.Rockafellar, R. Tyrrell; Wets, Roger J.-B. (26 June 2009). Variational Analysis. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Vol. 317. Berlin New York: Springer Science & Business Media. ISBN 9783642024313. OCLC 883392544.

41.Ross, Sheldon M. (2009). *Introduction to probability and statistics for engineers and scientists* (4th ed.). Associated Press. p. 267. ISBN 978-0-12-370483-2.

42. Rudin, Walter (1976). ""Chapter 1 The Real and Complex Number Systems"". Principles of Mathematical Analysis (print) (3rd ed.). McGraw-Hill. p. 4. ISBN 0-07-054235-X.

43.S. N. Sivanandam, S. Sumathi & S. N. Deepa, (2007), "Introduction to Fuzzy Logic using MATLAB", "With 304 Figures and 37 Tables", © Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

44.Shanker R. and Mishra A. : A two-parameter Lindley distribution, Statistics in Transition New Series, 14(1): 45-56. (2013a)

45.Shanker R., Sharma S. and Shanker R., :A two -parameter Lindley distribution for Modeling Waiting and Survival Times Data, Applied Mathematics, 4 (2): 363–368. (2013b)

46.Shanker, R & Sharma, S, :On two parameter Lindley distribution and Its Applications to model Lifetime data, Biometrics & Biostatistics International Journal,Vol. 3, No.1, pp.1-8, (2016).

47.Shanker, R., Kamlesh, K. K., & Fesshaye, H., :A two parameter lindley distribution: Its properties and applications. Biostatistics and Biometrics Open Access Journal,Vol. 1, No.4, pp.85-90, (2017).

48.Shanker, Rama; Ghebretsadik, Amanuel Habte :A new quasi Lindley distribution, International Journal of Statistics and Systems, 8 (2): 143 – 156. (2013)

49.Shebib , Hanaa S. Mohammed ; K. Jaafar, Zahraa; Ali , Bashar K., (2022), " Choose Best Formula for Lindley Distribution for Modeling of Rainfall Data in Iraq in 2020 ", Journal of AL-Rafidain University College for Sciences (2023); Issue 54; 547 - 556 .

50.Tamalika , Chaira , (2019), "Fuzzy Set and Its Extension -The Intuitionistic Fuzzy Set", John Wiley & Sons, Inc.

51.Udoudo, Unyime Patrick & Etuk , Ette Harrison:A New Extension of Quasi Lindley Distribution: Properties and Applications , International Journal of Advanced Statistics and Probability, 7 (2) (2018) 28-41 . (2018)

52.Yadav, Dilip Kumar ; Yadav, Harikesh Bahadur, (2019), " Developing Membership Functions and Fuzzy Rules from Numerical Data for Decision Making ", 16th World Congress of the International Fuzzy Systems Association (IFSA) 9th Conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology (EUSFLAT)

53.Yager, Ronald R (2013). "Pythagorean membership grades in multicriteria decision making". IEEE Transactions on Fuzzy

Systems. 22 (4): 958–965. doi:10.1109/TFUZZ.2013.2278989. S2CID 37195356.

54. Yia , Yang; Lib, X. Rong; Deqiang Han, (2016), "An improved a-cut approach to transforming fuzzy membership function into basic belief assignment", Chinese Journal of Aeronautics, Volume 29, Issue 4, August, Pages 1042-1051.

55. Zadeh, L., A., (1973), "Outline of a New Approach to the Analysis of Complex Systems and Decision Processes", IEEE TRANSACTIONS ON SYSTEMS, MAN, AND CYBERNETICS, VOL. SMC-3, NO. 1, JANUARY ,pp:28-44.

56. Zakon, Elias (2004). Mathematical Analysis I. Trillia Group. pp. 39–42.

57. El-Monsef, M.M.E.A. and Al-Kzzaz, H.S. (2020) Properties, Inference and Applications of Inverse Power Two-Parameter Weighted Lindley Distribution. Open Journal of Statistics, 10, 889-904

In probability distribution theory, the term "monotonically decreasing" (or monotonically decreasing) data usually refers to a probability distribution function or probability density function that is non-increasing, meaning that it either decreases or remains constant as you move from one point to another in the domain it is defined as. The thesis aimed to generalize the One Parameter Inverse Lindley Distribution for the purpose of expanding the basic distribution properties to fit monotonically descending data using the quantile function principle based on the T-R{Y} distribution class proposed by (Alzaatreh et al., 2014) to generalize the distributions for the purpose of finding the T-IR{Y} distribution class as well as finding a new distribution from this class considering that the distribution of the first variable T follows the inverse exponential distribution with one parameter (Inverse Exponential Distribution) and the variable R has an inverse Lindley distribution with one parameter and the variable Y has an exponential distribution with one parameter, so the resulting expanded distribution is Inverse Exponential- Inverse Lindley- Exponential under the theory of fuzzy sets by converting the resulting distribution to fuzzy based on a formula proposed by (Ali and Nima, 2022) as the resulting distribution is a fuzzy triangular distribution based on the quantile function, which is abbreviated as (FEILIE). The distribution parameters were estimated using the Maximum Likelihood and Maximum Prduct Spaces methods using Monte-Carlo simulation experiments, as well as applying it to real data to demonstrate the feasibility of the new distribution. The superiority of the (MPS) method over the Maximum Likelihood method was found. The proposed distribution was also applied to a group representing the survival times of women with breast cancer, as the estimates of the (MPS) method were inconsistent with the real values of each of the functions (probability density - clustering density - reliability), as the values estimated by this method are closest to the real values of the proposed inverse exponential - inverse Lindley - fuzzy exponential distribution. We note that when the survival time is six months and eight days, the probability of tumor reduction is (96%). When the patient's survival time is one month and ten days, the probability of tumor reduction is (1.3%).

Republic of Iraq
Ministry of Higher Education
And Scientific Research
University of Karbala
Faculty of Management
And Economics
Department of Statistics
Graduate Studies

Estimating the Triple fuzzy distribution based on the Quantile Function

A thesis

Submitted to the council of the college of Administration &Economics\ University of Karbala as partial fulfillment of the requirements for the Master degree in Statistics Sciences

By

Shams Najy Elaiwy

Supervision

Prof. Dr. Mahdi Wahab Nea'ama

A.H. 1446 **A.D. 2024**