



جمهورية العراق
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة كربلاء
كلية الإدارة والاقتصاد

استعمال
نظرية النقطة الثابتة في الانحدار المضرب
مع تطبيق عملي

رسالة مقدمة إلى
مجلس كلية الإدارة والاقتصاد - جامعة كربلاء
وهي جزء من متطلبات نيل درجة الماجستير علوم في الاحصاء

تقدم بها الطالب
نعيم مالك جاسم

بإشراف
أ.د. مشتاق كريم عبد الرحيم

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

﴿ وَعِنْدَهُ مَفَاتِحُ الْغَيْبِ لَا يَعْلَمُهَا إِلَّا هُوَ

وَيَعْلَمُ مَا فِي الْبَرِّ وَالْبَحْرِ وَمَا تَسْقُطُ

مِنْ سَّمَاءٍ أَمْزَاجٍ إِلَّا يَعْلَمُهَا وَلَا حَبَّةٌ مِنْ

ذُرَّةٍ إِلَّا فِي كِتَابٍ مُّبِينٍ ﴿۵۹﴾

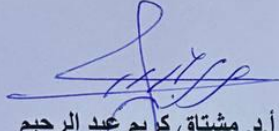
﴿۵۹﴾

صدق الله العلي العظيم

(سورة الأنعام، الآية 59)

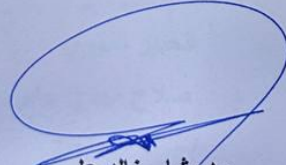
إقرار المشرف

أشهد أن إعداد هذه الرسالة الموسومة (استعمال نظرية النقطة الثابتة في الانحدار المضرب مع تطبيق عملي) والتي تقدم بها الطالب " نعيم مالك جاسم " قد جرت بإشرافي في قسم الاحصاء / كلية الادارة والاقتصاد / جامعة كربلاء ، وهي جزء من متطلبات نيل درجة ماجستير علوم في الاحصاء.


أ.د. مشتاق كريم عبد الرحيم
التاريخ: 2025 /

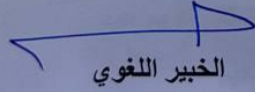
توصية رئيس قسم الاحصاء

بناءً على توصية الاستاذ المشرف، أرشح الرسالة للمناقشة.


م.د. بشار خالد علي
رئيس قسم الاحصاء
التاريخ: 2025 / /

إقرار الخبير اللغوي

أشهد أن الرسالة الموسومة بـ (استعمال نظرية النقطة الثابتة في الانحدار
المضرب مع تطبيق عملي) للطالب نعيم مالك جاسم - قسم الاحصاء قد جرى
مراجعتها من الناحية اللغوية حتى أصبحت خالية من الاخطاء اللغوية والاسلوبية ولأجله
وقعت.


الخبير اللغوي

م. د. صلاح مهدي جابر

2025 / /

إقرار لجنة
المناقشة

نشهد نحن أعضاء لجنة المناقشة بأننا قد اطلعنا على الرسالة الموسومة (استعمال نظرية
النقطة الثابتة في الانحدار المضرب مع تطبيق عملي) والمقدمة من قبل الطالب " نعيم مالك جاسم
" وناقشنا الطالب في محتوياتها وفيما له علاقة بها، ووجدنا بأنها جديرة بنيل درجة ماجستير علوم
في الإحصاء بتقدير () .



أم.د. صدى فايز
محمد

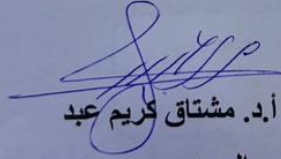
عضواً

2025 / /



أم.د. شروق عبدالرضا سعيد
رئيساً

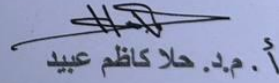
2025 / /



أم.د. مشتاق كريم عبد
الرحيم

عضواً ومشرفاً

2025 / /



أم.د. حلا كاظم عبيد

عضواً

2025 / /

إقرار رئيس لجنة
الدراسات العليا

بناءً على إقرار المشرف العلمي والخبير اللغوي على رسالة الماجستير للطلاب
" نعيم مالك جاسم " الموسومة بـ (استعمال نظرية النقطة الثابتة في الانحدار
المضرب مع تطبيق عملي) ارشح هذه الرسالة للمناقشة.



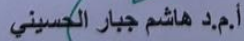
أ.م.د حيدر عباس الجبّابي

رئيس لجنة الدراسات العليا

معاون العميد للشؤون العلمية والدراسات العليا

مصادقة مجلس
الكلية

صادق مجلس كلية الإدارة والاقتصاد/ جامعة كربلاء على قرار لجنة المناقشة.



أ.م.د هاشم جبار الحسيني

عميد كلية الإدارة والاقتصاد- جامعة كربلاء

2025 / /

الإهداء



إلى من تربيته في أحضانهِ وارتويتُ من أنهارهِ ... وطني

إلى مَنْ علّمني السّمو والشّموخ والدي العزيز

إلى مَنْ أغمرتني بالمحبة والحنان والدتي العزيزة

إلى رفاق مسيرتي الآمي وافراحي ... أخواتي العزيزات

إلى سندي ونور عيني ... اخواني واصدقائي الاعزاء

إلى القناديل المضيئة في سماء العلم والمعرفة... أساتذتي الأفاضل

أهدي ثمرة جهدي المتواضع هذا

الباحث

شكر وامتنان



الحمد لله حق حمده والصلاة والسلام على خير خلقه محمد (صلى الله عليه وآله وسلم)
وعلى آله الطيبين الطاهرين أفضل الصلاة والسلام، اول الشكر وآخره لله (سبحانه
وتعالى)

على ما وفقني واعانني به لإنجاز هذه الرسالة وتحمل صعابها.
يطيب لي وقد انتهيت من اعداد هذه الرسالة ان أتقدم بخالص شكري وعظيم
احترامي الى مشرفي الأستاذ الدكتور (مشتاق كريم عبد الرحيم) على تفضله بالأشراف
على رسالتي وعلى جهوده التي بذلها معي عبر توجيهاته وارشاداته السديدة التي كان
لها الأثر الكبير في انجاز هذه الرسالة.

واتوجه بالشكر الجزيل إلى السادة رئيس لجنة المناقشة وأعضائه لتفضلهم بقبول
مناقشة هذه الرسالة متمنياً أن تنال استحسانهم ورضاهم.

كما أتقدم بالشكر والعرفان والامتنان الى جميع أساتذتي في قسم الإحصاء - كلية
الإدارة والاقتصاد - جامعة كربلاء لما أفاضوا عليّ من علمهم الغزير وكرمهم الواسع
طوال مدة الدراسة.

وأقدم الشكر والتقدير الى جميع العاملين في كلية الإدارة والاقتصاد متمثلة بالسيد
العميد المحترم وجميع ملاك الكلية المحترمين، ومكتبة كلية الإدارة والاقتصاد في
جامعة كربلاء، لما أبدوه من مساعدة وطيب المعاملة.

ويطيب لي أن اشكر الأستاذ الدكتور (باسم شليبه مسلم القيسي الدلفي) في قسم
الإحصاء لما ابداه من مساعدة كبيرة في اكمال هذه الرسالة وعلى احسن وجه فله
مني جزيل الشكر والعرفان.

وأخيراً أتوجه بالشكر الخاص لجميع أفراد عائلتي وخص بالذكر والدتي العزيزة
ووالدي الحبيب اللذين لم ينفكا من دعائهم لي وإخوتي وأخواتي الذين كانوا لي السند
والمعين طوال مدة الدراسة.

وختاماً أتقدم بالشكر والتقدير إلى كل الذين أبدوا المساعدة والعون واعتذر لمن فاتني
ذكره بالشكر، أسأل الله أن لا يضيع لهم أجراً.

والله ولي التوفيق

الباحث

قائمة

الصفحة	الموضوع
أ	الآية القرآنية
ب	الاهداء
ج-د	الشكر والامتنان
هـ-و	المحتويات
ز	المصطلحات واختصاراتها
ز-ح	الجداول
ح-ط	الاشكال
ي-ك	ملخص الرسالة
16-1	الفصل الأول: المقدمة وهدف الرسالة والاستعراض المرجعي
1	المقدمة 1-1
3	مشكلة الرسالة 2-1
3	هدف الرسالة 3-1
3	الاستعراض المرجعي 4-1
45-17	الفصل الثاني: الجانب النظري
17	تمهيد 1-2
17	مفاهيم اساسية في المنطق الضبابي 2-2
17	المجموعة المحددة (التقليدية) Crisp set والمجموعة الضبابية Fuzzy set 1-2-2
18	نظرية المجموعات الضبابية : Fuzzy sets theory 2-2-2
19	دوال الانتماء: Membership functions 3-2-2
22	العدد الضبابي Fuzzy number 4-2-2
22	حول إنموذج الانحدار الضبابي ((Fuzzy Linear Regression Model) 3-2
23	مفهوم نموذج الانحدار الضبابي (Fuzzy Regression Model) 1-3-2
25	تقدير معلمات انموذج الانحدار الضبابي (طريقة المربعات الصغرى الضبابية) 2-3-2
27	نظرية النقطة الثابتة (الصامدة) (مفهومها ، بعض انواعها وفكرة التقدير باستعمالها) 4-2
27	المفهوم نظرية النقطة الثابتة (الصامدة) Fixed Point theorem 1-4-2
28	بعض نظريات النقطة الثابتة (الصامدة) Some Fixed Point theorems 2-4-2
30	فكرة التقدير باستعمال النقطة الثابتة (The idea of estimation by Fixed Point) 3-4-2
31	توظيف نظرية النقطة الثابتة في عملية التقدير لانموذج الانحدار الضبابي 5-2
32	خوارزمية نيوتن- رافسون Newton-Raphson 1-5-2

37	Expectation-Maximization	خوارزمية تعظيم- التوقع	2-5-2
44		مقاييس المفاضلة	6-2
71-46	الفصل الثالث: الجانب التجريبي		
46		تمهيد (Preface)	1-3
46		مفهوم المحاكاة (Simulation Concept)	2-3
47		مراحل وخطوات المحاكاة (Simulation stages and steps)	3-3
48		تحليل نتائج تجارب المحاكاة	4-3
87-72	الفصل الرابع: الجانب التطبيقي		
72		تمهيد: (Preface)	1-4
72		فيروس المتلازمة التنفسية الحادة الشديدة – كورونا 2 (SARS-CoV-2)	2-4
73		وصف البيانات (Data Description)	3-4
76		اختبار البيانات (Data Fitting)	4-4
79		تحليل البيانات (Data Analysis)	5-4
90-88	الفصل الخامس: الاستنتاجات والتوصيات		
88		الاستنتاجات	1-5
89		التوصيات	2-5
98-91	مصادر الرسالة		
91		المصادر العربية	
92		المصادر الانكليزية	
	ملاحق الرسالة		
A		ملحق وصف المتغيرات وتوليدها بحسب إنموذج الانحدار المضرب (الضبابي) المفترض	
B		ملحق نتائج التجربتين الثانية والثالثة للرسالة بحسب معاملي القطع α (0.8 , 0.5)	
C		ملحق البيانات الحقيقية للرسالة	
		Abstract	

المصطلحات واختصاراتها

المختصر	English	العربية
FRM	Fuzzy Regression Model	إنموذج الانحدار المضبيب (الضبابي)
FP	Fixed-Point	النقطة الثابتة (الصامدة)
N-R	Newton-Raphson Method	طريقة نيوتن - رافسون
EM	Expectation Maximum Algorithm	خوارزمية تعظيم - التوقع
FS	Fuzzy set	المجموعة المضببية (الضبابية)
US	Universal set	المجموعة الشاملة
FLS	Fuzzy Least Squares Method	طريقة المربعات الصغرى الضبابية
FW	Full width	تشنت العرض الكامل
HW	Half-Width	تشنت نصف العرض
MSE	Mean Squares Error	متوسط مربعات الخطأ
N-R(FP)	Newton-Raphson(Fixed Point) Method	طريقة نيوتن - رافسون وفق مبدأ النقطة الثابتة
E-M(FP)	Expectation- Maximum(Fixed Point) Algorithm	خوارزمية او طريقة تعظيم- التوقع وفق مبدأ النقطة الثابتة

الجدول

الصفحة	العنوان	رقم الجدول
47	قيم المدخلات التجريبية وتوليد المتغيرات لإنموذج الانحدار الضبابي	1-3
47	رموز جداول النتائج ومحتويات كل جدول نتائج في الرسالة	2-3
49	القيمة المتوقعة لمتغير الاستجابة الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير الثلاثة ومتوسط مربعات الخطأ لكل قيمة تقديرية ولكل طريقة ومعامل التحديد ومعنوية كل انموذج للانموذج الاول عند احجام العينات كافة عند مستوى القطع $\alpha=0.1$	3-3
53	المعلمت الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير ومتوسط مربعات الخطأ لكل معلمة ومعنوية احصاء t للانموذج الأول عند احجام العينات كافة عند مستوى القطع $\alpha=0.1$	4-3
69	مقارنة تأثير مستوى القطع في متوسط مربعات الخطأ على وفق لكل حجم العينة لكل طريقة تقدير	5-3
74	عينة من بيانات مرضى فيروس المتلازمة التنفسية الحادة الشديدة كورونا (SARS-CoV-2)2	1-4
76	التحليل الاحصائي لمتغيرات إنموذج الانحدار المضبيب (الضبابي)	2-4

80	القيم المقدرة لمتغير الاستجابة وفق طريقتي التقدير بعد ازالة الضبابية	3-4
86	معلمت معادلة الانحدار الضبابي المقدرة على وفق طريقة نيوتن رافسون التكرارية وفق مبدأ لنقطة الثابتة $N-R(FP)$	4-4
87	جدول تحليل التباين لإنموذج الانحدار الضبابي	5-4

الاشكال

الصفحة	العنوان	رقم الشكل
18	المجموعة التقليدية والمجموعة الضبابية	1-2
20	دالة الانتماء المثلثية	2-2
21	دالة الانتماء شبه المنحرف	3-2
57	قيم الانتماء المثلثية للمتغيرات التوضيحية و متغير الاستجابة للانموذج الاول عند حجم عينة $n=10$ عند مستوى القطع $\alpha=0.1$	1-3
57	قيم الانتماء المثلثية للمتغيرات التوضيحية و متغير الاستجابة للانموذج الاول عند حجم عينة $n=20$ عند مستوى القطع $\alpha=0.1$	2-3
58	قيم الانتماء المثلثية للمتغيرات التوضيحية و متغير الاستجابة للانموذج الاول عند حجم عينة $n=35$ عند مستوى القطع $\alpha=0.1$	3-3
59	قيم الانتماء المثلثية للمتغيرات التوضيحية و متغير الاستجابة للانموذج الاول عند حجم عينة $n=50$ عند مستوى القطع $\alpha=0.1$	4-3
59	قيم الانتماء المثلثية للمتغيرات التوضيحية و متغير الاستجابة للانموذج الاول عند حجم عينة $n=75$ عند مستوى القطع $\alpha=0.1$	5-3
60	قيم الانتماء المثلثية للمتغيرات التوضيحية و متغير الاستجابة للانموذج الاول عند حجم عينة $n=100$ عند مستوى القطع $\alpha=0.1$	6-3
61	منحنى القيمة المتوقعة لمتغير الاستجابة عند التضييب للانموذج الاول عند حجم عينة $n=10$ عند مستوى القطع $\alpha=0.1$	7-3
61	منحنى القيمة المتوقعة لمتغير الاستجابة عند التضييب للانموذج الاول عند حجم عينة $n=20$ عند مستوى القطع $\alpha=0.1$	8-3
62	منحنى القيمة المتوقعة لمتغير الاستجابة عند التضييب للانموذج الاول عند حجم عينة $n=35$ عند مستوى القطع $\alpha=0.1$	9-3
63	منحنى القيمة المتوقعة لمتغير الاستجابة عند التضييب للانموذج الاول عند حجم عينة $n=50$ عند مستوى القطع $\alpha=0.1$	10-3

63	منحنى القيمة المتوقعة لمتغير الاستجابة عند التضبيب للانموذج الاول عند حجم عينة $n=75$ عند مستوى القطع $\alpha=0.1$	11-3
64	منحنى القيمة المتوقعة لمتغير الاستجابة عند التضبيب للانموذج الاول عند حجم عينة $n=100$ عند مستوى القطع $\alpha=0.1$	12-3
65	منحنى القيمة المتوقعة لمتغير الاستجابة بعد التضبيب عند طرائق التقدير للانموذج الاول عند حجم عينة $n=10$ عند مستوى القطع $\alpha=0.1$	13-3
65	منحنى القيمة المتوقعة لمتغير الاستجابة بعد التضبيب عند طرائق التقدير للانموذج الاول عند حجم عينة $n=20$ عند مستوى القطع $\alpha=0.1$	14-3
66	منحنى القيمة المتوقعة لمتغير الاستجابة بعد التضبيب عند طرائق التقدير للانموذج الاول عند حجم عينة $n=35$ عند مستوى القطع $\alpha=0.1$	15-3
67	منحنى القيمة المتوقعة لمتغير الاستجابة بعد التضبيب عند طرائق التقدير للانموذج الاول عند حجم عينة $n=50$ عند مستوى القطع $\alpha=0.1$	16-3
67	منحنى القيمة المتوقعة لمتغير الاستجابة بعد التضبيب عند طرائق التقدير للانموذج الاول عند حجم عينة $n=75$ عند مستوى القطع $\alpha=0.1$	17-3
68	منحنى القيمة المتوقعة لمتغير الاستجابة بعد التضبيب عند طرائق التقدير للانموذج الاول عند حجم عينة $n=100$ عند مستوى القطع $\alpha=0.1$	18-3

ملخص الرسالة

يعد إنموذج الانحدار الضبابي (FRM) Fuzzy Regression Model من نماذج الانحدار المهمة التي تستعمل لتمثيل البيانات التي تتصف بالغموض وعدم الدقة وخصوصاً متغير الاستجابة لغرض التنبؤ بالظاهرة المدروسة وفق دوال الانتماء المختلفة لبياناته ومعلماته او لبعضها واشهرها دالة الانتماء المثلثية Triangular membership function والتي يُعتمد عليها في تمثيل كل مشاهدة بالعدد الضبابي وبحسب نوع دالة الانتماء. لقد تم التركيز على تحسين عملية تقدير معلمات الانموذج من خلال توضيف نظرية النقطة الثابتة اعتمدت الدراسة على ثلاث طرائق رئيسية للتقدير وهي طريقة المربعات الصغرى الضبابية (FLS) وطريقة نيوتن-رافسون وفق مبدأ النقطة الثابتة (N-R(FP)) وخوارزمية التوقع-التعظيم (E-M(FP)) ، وتم إجراء محاكاة لبيانات مختلة الأحجام والمستويات لغرض المقارنة بين الطرائق الثلاث. وأظهرت النتائج أن طريقة نيوتن-رافسون (N-R(FP)) هي الأكثر كفاءة إذ أعطت أقل قيم لمقاييس الخطأ وكانت الأقرب لتمثيل القيم الحقيقية امتغير الاستجابة. وفي هذه الرسالة تم استعمال نظرية النقطة الثابتة Fixed Point Theorem من خلال توظيف خصائصها لتقدير معلمات إنموذج الانحدار الضبابي والتي تشترط ثبات نقطة التقدير (المخرجات) رغم تغير المدخلات للدالة ولتحقيق هذا التحسين لابد من الاعتماد على الطرائق التكرارية وفق مبدأ النقطة الثابتة في التقدير للوصول الى التقارب المطلوب اي تساوي او عدم وجود اختلاف جوهري بين تقديرين لكل من معلمات إنموذج الانحدار الضبابي FRM ، ولذا تم استعمال طريقة المربعات الصغرى الضبابية (FLS) وطريقة نيوتن – رافسون Newton-Raphson(Fixed Point) (N-R(FP)) و خوارزمية تعظيم التوقع Expectation-Maximization(Fixed Point) (E-M(FP)). تم اجراء المحاكاة لغرض المقارنة بين ثلاث طرائق تقدير معلمات إنموذج الانحدار الضبابي FRM لتحديد الافضل منها وهي طريقة نيوتن -رافسون N-R(FP) ، وخوارزمية تعظيم التوقع E-M(FP) وطريقة المربعات الصغرى الضبابية FLS ولاحجام عينات (10,20,35,50,75,100) وبقيم معامل ضبابية (مستوى القطع) مختلفة هي (0.8 , 0.5, 0.1) ، وقد اظهرت نتائج المحاكاة تفوق طريقة نيوتن-رافسون N-R(FP) على باقي الطرائق لامتلاكها اقل قيم لمقاييس المفاضلة ومنها متوسط مربعات الخطأ MSE و AIC و AICc و BIC و HQC و SHWZ. فضلاً عن انها كانت الاقرب تمثيلاً لتقدير قيم متغير الاستجابة مما يدل على كفاءة التقدير بهذه الطريقة. واعتمادا على ذلك تم تحليل بيانات حقيقية عن مرضى المتلازمة التنفسية الحادة الشديدة –

كورونا 2 في احدى مستشفيات محافظة كربلاء. ومن اهم الاستنتاجات التي توصلت اليها الرسالة ان طريقة نيوتن-رافسون (N-R(FP) الافضل في عملية التقدير وتمثيل بيانات إنموذج الانحدار (الضبابي) اذ ان خصائص وتحقق شروط نظرية النقطة الثابتة ادى الى تحسين طريقة المربعات الصغرى الضبابية

FLS ولذا اوصت الرسالة باعتمادها في عملية التقدير وميزات اختبار طريقة النقطة الثابتة هو توفر اطار رياضياً يضمن وجود وتفرد الحلول التقديرية مع الاستقرار والتقارب وتحسين الطرق التقليدية مما يزيد كفاءة التقدير. والذي يجعل النقطة الثابتة مناسبة لتحسين التقديرات هو الأساس الرياضي لان وجود نقطة وحيدة يضمن وجود معلمات مستقرة تحت شروط معينة ويستعمل كوسيلة تحسين تجريبية في التطبيق العملي.

الفصل الأول

المقدمة

وهدف الرسالة

والاستعراض

المرجعي

يعد الانحدار Regression بمختلف انواعه وحالاته احد الاساليب الاحصائية المهمة التي تستعمل من قبل الباحثين لتمثيل وتحليل بيانات عدة متغيرات لظاهرة ما، اذ يكون احدها متاثراً ببقية المتغيرات الاخرى وعلى ضوء ذلك يتم صياغة العلاقة بينها بانموذج رياضي لتمثيلها ، ويكتسب موضوع الانحدار اهميته بوجود اساساً نظرياً للانموذج الرياضي الذي يدعى بانموذج الانحدار بنوعيه الخطي واللاخطي فضلاً عن اهميته التطبيقية بمختلف المجالات الاقتصادية والطبية الخ وتتنوع طرائق التقدير لمعلماته المجهولة وفقاً لطبيعية البيانات والمشكلات التي تتضمنها مثل وجود القيم الشاذة او عدم توزعها توزيعاً طبيعياً الخ يسهم في تبسيط التطبيق العملي لبيانات الظواهر المدروسة. وتعد بيانات data الظاهرة المدروسة المادة الاساس في عملية التحليل الاحصائي للوقوف على طبيعة الظاهرة باي اسلوب احصائي ولاسيما في موضوع تحليل الانحدار الخطي والتي يجب ان تمتلك صفاتاً من اهمها صفة الدقة والموثوقية قبل تحليلها احصائياً ، في ضوءها يمكن اجراء التحليل الاحصائي بشكل دقيق لا يكتنفه الغموض، ولكن هذا الافتراض قد لا يتحقق او ان هذه الصفة تُفقد في الواقع العملي بمعنى ان تكون بيانات هذه الظواهر كلها او جزءاً منها تتصف بعدم الدقة والموثوقية نتيجة عدم دقة تسجيلها او تثبيتها وفقاً للتقدير الشخصي او لاي سبباً اخر يؤدي لعدم دقتها واكتسابها صفة الغموض بحيث تكون هذه البيانات عبارة عن مجموعات ضبابية Fuzzy Sets كونها تتصف بصفات او خواص المجموعات الضبابية التي وضعت من قبل الباحث Zadeh في اول ظهور للمنطق الضبابي عام 1965 م وتفترض هذه المجموعات وجود درجات متباينة لانتماء كل مشاهدة (عنصر) من عناصر العينة تحت الدراسة في المجموعة الشاملة او الكاملة للظاهرة تحت الدراسة وتقع درجات الانتماء ضمن الفترة المغلقة $[0,1]$ فكلما اقتربت درجة الانتماء المشاهدة الى الواحد دل على انتماء المشاهدة (العنصر) الى نطاق الظاهرة والعكس صحيح.

في عام 1982 [67] ظهر أول مقترح لتحليل الانحدار الخطي المضرب (الضبابي) Fuzzy Regression Model (FR) على يد الباحث Tanaka باستعمال طريقة البرمجة الخطية ومن ثم في عام 1988 [28] م اقترح الباحث Dimond طريقة المربعات الصغرى الضبابية وهكذا استمرت البحوث باقتراح طرائق التقدير واغلبها تستند الى طريقة المربعات الصغرى الضبابية ، ولذا اصبحت هذه الطريقة شائعة في عملية التقدير وتضمنتها اغلب البحوث التي نشرت مع مرور

الوقت . وعلى الرغم من جودة تقديرات هذه الطريقة لمعاملات إنموذج الانحدار المضرب (الضبابي) FR ، الا ان محاولات الباحثين لم تتوقف في تطوير هذه الطريقة او اقتراح أساليب اخرى للوصول الى اكفا المقدرات واحدى هذه المحاولات ما سيتم تقديمه في هذه الرسالة وهي توظيف نظرية النقطة الثابتة Fixed Point Theorem في عملية تقدير إنموذج FR .

ولتحقيق هدف الرسالة فقد تم تقسيمها على خمسة فصول وكالاتي:

اولاً-الفصل الأول : وتضمن مقدمة الرسالة عن الموضوع ومشكلتها وهدفها فضلاً عن استعراض الدراسات والبحوث التي تناولت موضوعات نماذج الانحدار المضرب (الضبابي) وطرائق تقدير معالماتها بشكل منفصل وبعض البحوث المتوفرة عن استعمال نظرية النقطة الثابتة FP في عملية تقدير بعض نماذج الانحدار التقليدي Classical Regression models واخيراً الاشارة الى الاستعمال الجديد في هذه الرسالة وهو توظيف واستعمال نظرية النقطة المركزية في تقدير معالم إنموذج الانحدار المضرب (الضبابي) FR.

ثانياً- الفصل الثاني : احتوى الجانب النظري للرسالة على مقدمة للفصل ومفاهيم اساسية في المنطق الضبابي والعدد الضبابي ودوال الانتماء كما وتضمن عرضاً لإنموذج الانحدار المضرب (الضبابي) FR ، وايضاً عرضاً لمفهوم نظرية النقطة الثابتة FP وبعض المفاهيم المرتبطة بها والية توظيفها في عملية تقدير معالم إنموذج الانحدار المضرب (الضبابي) والمعتمدة على على طريقة نيوتن رافسون Newton-Raphson (N-R) وخوارزمية تعظيم التوقع Expectation-Maximization (EM) وبعض مقاييس المفاضلة.

ثالثاً - الفصل الثالث :تضمن الجانب التجريبي من الرسالة وابتدأ بعرض مفهوم المحاكاة Simulation ومراحل وخطوات المحاكاة لموضوع الرسالة واستعمل برنامج الماتلاب MatLab Ver 2023b لتنفيذها ،اذ تم افتراض احجام عينات مختلفة بين صغيرة ومتوسطة فضلاً عن حالات قطع للاعداد الضبابية مختلفة وكذلك مقدرات طريقة نيوتن – رافسون N-R وخوارزمية تعظيم التوقع E-M باستعمال نظرية النقطة الثابتة FP.

ثالثاً - الفصل الرابع :وتضمن الجانب العملي من الرسالة والذي تم فيه تحليل بيانات حقيقية ضبابية عن فيروس المتلازمة التنفسية الحادة الشديدة كورونا 2 (SARS-CoV-2) ، تم جمعها لـ (100) مريض مصاب بعدوى فيروس كورونا SARS-CoV-2 ، باستعمال مبدأ

العينة القصدية والتي اخذت من مدينة الإمام الحسين (ع) الطبية/ ملفات المرضى الراقدين المصابين بكورونا وسجلات الفحوصات المختبرية لتطبيق طريقة التقدير الافضل التي اثبتت في الجانب التجريبي لتقدير متغير الاستجابة مع اجراء الاختبارات اللازمة للبيانات.

رابعاً- **الفصل الخامس:** وتضمن هذا الفصل الاستنتاجات التي توصل اليها الباحث خلال سير الرسالة اعتماداً على التحليل الاحصائي في الجانبين التجريبي والتطبيقي وكذلك التوصيات التي خرجت بها الرسالة التي من شأنها ان تخدم البحث العلمي سواء في المجال التطبيقي او في مجال النشر في بحوث علمية قادمة.

(problem of Thesis)

2-1 مشكلة الرسالة

ان طرائق التقدير الشائعة لمعلومات أنموذج الانحدار الخطي الضبابي (FR) مثل طريقة المربعات الصغرى الضبابية FLS وطريقة البرمجة الخطية LP تظهر محدودية في الكفاءة والدقة عند التعامل مع بيانات مضطربة إذ تتأثر هذه الطرائق بدرجة الضبابية مما يضعف قدرتها على تمثيل الظاهرة والتنبؤ لذلك نبحت عن منهج بديل او محسن يرفع كفاءة هذه التقديرات .

(Objective of Thesis)

3-1 هدف الرسالة

تهدف الرسالة الى توظيف نظرية باناخ للنقطة الثابتة Banach Fixed Point Theorem لتحسين تقديرات معلومات الانحدار الخطي الضبابي عبر طريقتين (نيوتن رافسن N-F , خوارزمية تعظيم التوقع E-M) ومقارنة النتائج مع المربعات الصغرى الضبابية OLS بأستعمال المحاكاة ومن ثم تطبيقها على بيانات صحيحة (كورونا) .

(Literature of Review)

4-1 الاستعراض المرجعي:

في عام 1965 قدم الباحث Zadeh [73] بحثاً تضمن اول محاولة موفقة لعرض المنطق الضبابي نظرياً عن طريق تعريف المجموعات الضبابية Fuzzy set والتي تتكون من صف من درجات الانتماء المتصلة وتتميز بوجود دالة الانتماء بحسب اي صفة او خاصية لكل عنصر

من عناصرها وبدرجة عضوية تتراوح بين الصفر والواحد الصحيح، كما تضمن البحث توسيعاً لمفاهيم او صفات علمية مثل التضمين (الادماج او الشمول) inclusion، الاتحاد union، التقاطع intersection، والمتممة complement، والعلاقة relation، التحدب convexity، الخ، وقد اثبت الباحث خصائص مختلفة لتلك المفاهيم ضمن سياق المجموعات الضبابية. كما اثبت الباحث نظرية فصل او تحديد المجموعات الضبابية المحدبة من دون وجود شرط ان تكون هذه المجموعة غير مشتركة مع بعضها. ولم يتضمن البحث اي تطبيق عملي.

في عام 1975 قدم الباحث Zadeh [74] بحثاً تطرق فيه الى المتغير اللغوي Linguistic Variable وهو متغير تكون قيمه عبارة عن كلمات او عبارات او اجمل ضمن لغة طبيعية او اللغة الاصطناعية التي تظهر في اسلوب المحاكاة وتفاعلات الروبورت (الخ)، وقد تطرق الباحث الى توضيح الحدث الغامض او الضبابي Fuzzy event وفقاً للمتغير اللغوي على سبيل المثال اذا طرح السؤال (ما هو احتمال أن يكون يوماً دافئاً غداً؟) في هذه الحالة، يُعد حدث اليوم الدافئ حدثاً غامضاً بمعنى عدم وجود خط فاصل واضح بين وقوعه وعدم وقوعه. وايضاً تطرق الى ان الحدث الواضح وغير الضبابي قد يكون ضبابياً بشكل غير مباشر مثال ذلك اجابة السؤال عن ارتفاع متوسط اسعار اسهم شركة ما خلال شهر من مدة زمنية محددة، هنا لايمكن الاجابة بشكل قاطع نظراً لتغير الظروف خلال مدة الشهر ولذا قام الباحث بتوسيع نظرية الاحتمالات على المشكلات غير المحددة جيداً (الغامضة او التي تشوبها الضبابية) واقتراح طريقة للتعامل الاحتمالات بهيأة ان تكون متغيراً لغوياً واستكشاف النتائج الاولية بهذا الخصوص باستعمال المجموعة الضبابية.

في عام 1980 قدم الباحثان Tanaka & Asai [66] بحثاً تضمن صياغة مسائل البرمجة الخطية الضبابية Fuzzy linear programming عن طريق اعادة صياغة معلماتها ضبابياً بالاعتماد على الدوال الضبابية Fuzzy functions ومن ثم ايجاد الحلول المناسبة والمعقولة للمعلمات الضبابية في مسألة البرمجة الخطية الضبابية. وعلى ضوء ما تقدم ذكر الباحث ان هذه المسائل الضبابية تعد إنموذجاً لمشكلات اتخاذ القرار عندما يكون التقدير البشري مؤثراً وفعالاً.

في عام 1982 قدم الباحث Tanaka [67] واخرون بحثاً تضمن توسيعاً لعمله السابق [66] بحثاً تضمن صياغة ضبابية لانموذج الانحدار عن طريق صياغة معلماته بواسطة الدوال الخطية الضبابية على وفق مبدأ الباحث لطفي زاده Zadeh الذي اعتبر ان الدالة الخطية

الضبابية إنموذجاً للنظام system كما هو الحال في إنموذج الانحدار الخطي الضبابي ،وقد تمت صياغته بالاعتماد على الانحرافات بين القيم المشاهدة الحقيقية والقيم التقديرية والتي تمثل القيم التقديرية لاختفاء الانموذج ، وقد ذكر الباحث ان هذه الانحرافات لاتاتي من تحديد بنية النظام وانما هي الانحرافات الضبابية لمعلمات النظام او الانموذج وبذلك تنعكس هذه الانحرافات في دالة خطية ذات معاملات ضبابية وهو هنا أنموذج انحدار خطي ضبابي Fuzzy linear regression ويتم تحصيل القيم المقدره بشكل مجموعات ضبابية تمثل ضبابية النظام وبذلك هذا الانموذج الضبابي اكثر تقييماً من الانموذج الخطي التقليدي.

في عام 1985 نشر الباحثان Heshmaty & Kandel [37] بحثاً طبقاً فيه الانحدار الخطي الضبابي FRM للتنبؤ بمبيعات اجهزة الكمبيوتر والاجهزة الطرفية في الولايات المتحدة في بيئة غير موكدة للمدة الزمنية من 1967 ولغاية 1981 اذ تم التنبؤ بالمبيعات من المدة 1982 ولغاية 1988 وقد اعتمد التنبؤ على ثلاث نماذج انحدار ضبابية ببيانات مخرجات ضبابية fuzzy output data وغير ضبابية non fuzzy output data وقد اظهرت نماذج الانحدار الضبابية بالمخرجات الضبابية عند المقارنة أفضلية على غير الضبابية في عملية التنبؤ وقد اعتمد البحث على دالة الانتماء المثلثية وطريقة البرمجة الخطية في عملية التقدير لمعلمات أنموذج الانحدار الضبابي .

وفي عام 1987 قدم الباحث Tanaka [69] بحثاً اقترح فيه النماذج الخطية الاحتمالية لتحليل البيانات الضبابية.وقد ناقش الباحث مقدرات المعلمات الضبابية في الانظمة الخطية الاحتمالية التي تعرف بواسطة مبدا التوسيع ونماذج الخطية الاحتمالية باستعمال مخرجات ضبابية تعرف باعداد ضبابية ومدخلات غير ضبابية . وقد تم التوصل لحل النظام الخطي الاحتمالي بحل مسالة البرمجة الخطية.

في عام 1988 نشر الباحث Diamond [28] بحثاً اقترح فيه طريقة المربعات الصغرى الضبابية Fuzzy Least Squares التي تعتمد على طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية لتقدير إنموذج الانحدار الخطي الضبابي الذي يلاءم البيانات الضبابية اذ وضح المعايير اللازمة لملاءمة هذه النماذج لتلك البيانات وعلى ضوء ما تقدم تم استنباط المعادلات الطبيعية بالقيم الضبابية والتي تناظر المعادلات الطبيعية التقليدية وقد اعتمد البحث مثاليين عددين في الجانب

التطبيقي لايجاد مقدرات طريقة المربعات الصغرى الضبابية FLS لمعلمات إنموذج الانحدار الخطي الضبابي بوجود البيانات الضبابية. Fuzzy data.

في عام 1990 نشر الباحثان Saade & Schwarzlander [60] بحثاً تناولاً فيه صياغة اختبار الفرضيات الثنائية عندما تكون البيانات المتاحة للمتغير موضوع الدراسة عبارة عن مركب من مكونين احدهما عشوائي والاخر ضبابي random and a fuzzy component وقد تم اضافة الضبابية على اختبار نسبة الامكان ratio Likelihood التي تستعمل لاختبار مثل هكذا فرضيات وتم مقارنتها مع فرضيات غير ضبابية. وقد تم تطبيق مبادئ ترتيب المجموعات الضبابية ووصف قواعد اتخاذ القرارات الضبابية عن شكل دالة العضوية التي تمثل الفرضيات الضبابية بوجود البيانات الهجينة (المركبة) hybrid data وقد تم تحديد نقطة العتبة المثلى optimum threshold لاختبار الفرضيات الضبابية وقد تم اجراء تطبيق افتراضي على عينة من البيانات الضبابية المولدة بالاعتماد دالة الانتماء المثلثية .

في عام 1998 نشر الباحثان Kim & Bishu [43] بحثاً اقترحا فيه تعديلاً لتحليل إنموذج الانحدار الخطي الضبابي اعتماداً على معيار تقليل الفرق بين قيم العضوية الضبابية بين الأعداد الضبابية الملاحظة والمقدرة وذلك لأن نماذج الانحدار الخطي الضبابي توفر عدداً ضبابياً مقدراً ضمن مدى دالة العضوية الضبابية . وقد استعمل الباحثان مثالين عدديين لتقييم نماذج الانحدار الضبابي وفقاً لاسلوب Tanaka بالتحليل بطريقة البرمجة الخطية الضبابية FLP والانموذج المقترح بالتحليل بطريقة المربعات الصغرى الضبابية FLS وقد تمت عملية التقييم والمقارنة وفقاً لخواص كل منهما وقد اظهر تحليل إنموذج الانحدار الخطي الضبابي المقترح افضلية بسيطة في بعض الصفات مقارنة بانموذج Tanaka .

في عام 1999 نشر الباحث Chen [19] بحثاً تضمن ثلاث طرائق مختلفة لعملية التصنيف الضبابي بوجود الانحدار الضبابي التريبيعي تشمل مؤشر تصنيف الوجود الكلي overall (OERI) existence ranking index واسلوب المربعات الصغرى الضبابية المقترح من الباحث Diamond وطريقة جديدة من خطوتين مبنية على OERI، لتقدير المسافة بين رقمين ضبابيين يتم استعمال مسافة المعلمة في معادلات الانحدار التريبيعي وكذلك تُستعمل البرمجة غير الخطية لحل معادلات الانحدار التريبيعي الناتجة مع وجود القيود، وباستعمال المحاكاة تم

مقارنة الطرائق لتقييم الطريقة الافضل بالاعتماد على معيار متوسط الفرق المطلق بين القيم المقدره والقيم المشاهده وقد ابرزت المقارنة والنتائج افضلية مؤشر OERI ذي الخطوتين على باقي الطرائق لاسيما في حالة صغر حجم العينة، في حين يتحسن اداء طريقة المربعات الصغرى الضبابية مع زيادة حجم العينة.

في عام 2000 نشر الباحثان Buckleya & Feuring [15] بحثاً اقترحا خوارزمية او استراتيجية تطويرية لنماذج الانحدار الضبابي الخطية وغير الخطية للبحث عن دالة ضبابية تعطي افضل النتائج للبيانات في مكتبة الدوال الضبابية التي تشمل (الدوال الخطية، ومتعددة الحدود، والأسية، اللوغاريتمية). وقد تم اجراء اختبارات لحزمة الانحدار الضبابية FR package لكل حالة من حالات الدوال المعرفة في اعلاه وبوجود إنموذج انحدار متعدد ولجميع الحالات تم توليد البيانات من دون ضوضاء وقد تم اثبات ان الانحدار متعدد الحدود ممكن توسيعه ليشمل الدوال المستمرة ذات القيم الحقيقية .

في عام 2001 نشر الباحث Chang [18] بحثاً طور فيه طريقة تحليل الانحدار الضبابي الهجين Hybrid fuzzy regression analysis باستعمال طريقة المربعات الصغرى عن طريق وضع تعريف جديد للحساب الضبابي ومعيار المربعات الصغرى المقبول، و إنموذج الانحدار الثنائي المتغيرات بمتغيرات ضبابية مثلثية غير متماثلة. وقد صيغت ثلاث مجموعات من المعادلات الطبيعية normal equations لايجاد حل لثلاثة أجزاء من معاملات الانحدار الهجين التي تمثل (المركز الضبابي، العرض الضبابي الأيسر والعرض الضبابي الأيمن). وتم توسيع مجال تطبيق الطريقة لتشمل الانحدار المتعدد . لقد تم استعمال ثلاثة امثلة عددية لتوضيح الطريقة المقترحة تقسمت كالاتي: مثالان للانحدار ثنائي المتغير، أحدهما للأعداد الضبابية المثلثية المتماثلة والآخر للأعداد الضبابية المثلثية غير المتماثلة، ومثال واحد للانحدار المتعدد للأعداد الضبابية المثلثية المتماثلة. وقد تمت المقارنة بين نتائج مقدرات الانحدار الضبابي الهجين مع نتائج مقدرات الانحدار العادي والانحدار الضبابي في كل مثال، وذكر الباحث انه يمكن توسيع تطبيق الطريقة المقترحة على إنموذج الانحدار غير الخطي ايضاً فضلاً عن مناقشة مزايا وعيوب الطريقة المقترحة

في عام 2002 قدم الباحثان Yang & Lin [71] بحثاً درساً فيه إنموذج الانحدار الخطي الضبابي لتقييم العلاقة الوظيفية بين المتغيرات المعتمدة والتوضيحية في بيئة ضبابية ، وقد اقترحا طريقتين للتقدير ، إلى جانب طريقة المربعات الصغرى الضبابية واحدهما صياغة البرمجة متعددة الاهداف و يمكن استعمال هذه الطرائق المقترحة بفعالية لتقدير لمعاملات الانموذج وقد اجريت مقارنة بينها وتفوقت طريقة البرمجة المتعددة الاهداف على باقي الطرائق .

وفي عام 2003 نشر الباحث D'Urso [30] بحثاً طور فيه خطوات تقدير لمعاملات إنموذج الانحدار الخطي الضبابي بمدخلات ومخرجات عادية ومدخلات ومخرجات ضبابية باستعمال طريقة المربعات الصغرى المقيدة (بوجود قيود مساواة) وغير المقيدة وقد اعتمد البحث على امثلة توضيحية لخطوات التقدير لمعاملات الانموذج.

في عام 2004 نشر الباحث Nasrabadi [51] بحثاً تضمن مقترح الطريقة تقدير لمعاملات إنموذج الانحدار الخطي الضبابي بمخرجات ضبابية وتقليدية ومدخلات ضبابية وتقليدية اعتماداً على خطوات طريقة البرمجة الخطية وتميزت ببساطة البرمجة والاحتساب الرياضي فضلاً عن تحقق الفروق الصغرى للاستجابات بين القيم المشاهدة والتقديرية وبذلك تتغلب الطريقة المقترحة على السمة الشائعة لمعظم الدراسات السابقة في تزايد فروق الاستجابات الضبابية المقدره مع زيادة قيمة المتغير التوضيحي.

وفي عام 2005 نشر الباحث Hojati وآخرون [39] بحثاً اقترحوا طريقة جديدة لحساب الانحدار الخطي الضبابي تتصف ببساطتها والحصول على حلول جيدة . وقد تم افتراض حالتين من الانموذج احدها ان يكون المتغير المعتمد ضبابياً والمتغير التوضيحي تقليدياً اما الحالة الاخرى يكون كلا المتغيرين المعتمد والتوضيحي ضبابيين وقد تم مقارنة الطريقة المقترحة مع الطرائق الاخرى الشائعة باستعمال بيانات مثال عددي واثبت كفاءتها علماً بانها اعتمدت على مبدا طريقة البرمجة الخطية .

في عام 2006 نشر الباحث Kahraman وآخرون [41] بحثاً تضمن استعراضاً نظرياً لتحليل نوعين من نماذج الانحدار الخطي الضبابي FLR على وفق اسلوب Tanaka باستعمال البرمجة الخطية وايضاً اسلوب المربعات الصغرى الضبابية ونماذج ذات مدخلات ضبابية ومخرجات غير ضبابية وايضاً بمدخلات ومخرجات غير ضبابية وكذلك لانموذج الانحدار الاحتمالي كما تم شرح اختبار الفرضيات الضبابية لمعاملات نمذج الانحدار الخطي بالاعتماد

على مثالين عددين وقد توصل الباحثين افضلية تحليل إنموذج الانحدار الضبابي بالاسلوبين افضليته على إنموذج الانحدار التقليدي .

في عام 2007 قدم الباحث Pasha وآخرون [54] بحثاً اقترحوا طريقة جديدة لحساب الانحدار الضبابي والتي تعتمد على تقليل الانتروبي الضبابي للقيم المتوقعة لبيانات داخلية وخارجية ضبابية، وقد تم معالجة بعض المشكلات التي واجهت الباحثين في بحوثهم بالاعتماد على طرائق الحساب الاخرى مثل طريقة Tanka وقد تم مقارنتهما بالاعتماد على مثال عددي وقد اظهرت الطريقة الجديدة افضليتها على طريقة Tanka .

في عام 2009 نشر الباحثان Lu & Wang [47] بحثاً تضمن مقترحاً لانموذج انحدار خطي ضبابي مُحسَّن لكي تكون الفروق بين قيم المتغير المعتمد المشاهدة والتقديرية متناقصة وهو احد الحلول لمعالجة مشكلة تزايد الفروق في إنموذج الانحدار الخطي الضبابي، وقد ركز الباحثان على موضوع ارتفاع او انخفاض حجم العينة عند عملية التقدير لمعلمت إنموذج الانحدار الخطي الضبابي .وقد استخدمت أربعة أمثلة عددية لإثبات فعالية الانموذج المقترح علماً ان البحث اعتمد على طريقي البرمجة الخطية والمربعات الصغرى الضبابية.

في عام 2010 نشر الباحثان Choi & Yoon [21] بحثاً قدما فيه إنموذج انحدار ضبابي عام فيه متغير الاستجابة دالة بمقاييس المنوال لمجموعة من الاعداد الضبابية المشاهدة ذات مستوى α والغاية من تقديمه لتقدير العلاقة الضبابية بين متغيرين عشوائين ضبابيين وقد تم استعمال طريقة المربعات الصغرى لتقدير معلمت إنموذج الانحدار الضبابي وايضا تقدير دوال الاستجابة على المنوال الاعداد الضبابية المشاهدة ذات مستوى α عندما يكون متغير الاستجابة عدداً ضبابياً من النوع الخطي LR والذي يعني تكوينه علاقة ضبابية خطية والمتغيرات التوضيحية اعداداً دقيقة (تقليدية)، وقد تم اعتمد البحث على خمسة امثلة لغرض اجراء المقارنة مع نماذج انحدار ضبابية اخرى مقترحة من قبل اخرين لتحديد دقة الانموذج المقترح.

وفي عام 2011 قدم الباحث Chutia واخرون [23] بحثاً اظهروا فيه توزيع مصداقية المتغير الضبابي المثلثي على وفق نظرية المصداقية credibility theory لغرض ايجاد طريقة بديلة

تتصف بالبساطة للحصول على دالة الانتماء لدوال الضبابية المثلثية اي طريقة بديلة لحساب العمليات الحسابية الاساسية للمتغيرات الضبابية المثلية وايضاًدالة الانتماء العامة وقد تم توضيح الطريقة باستعمال بعض الامثلة ولم يتضمن البحث اي اشارة الى إنموذج الانحدار الضبابي .

في عام 2012 قدم الباحثان Poleshchuk & Komarov [55] بحثاً تضمن نموذج انحدار للمجموعات الضبابية ذات الفترات من النوع الثاني التي تمتلك فواصل زمنية وتعتمد على تقدير طريقة المربعات الصغرى اذ تم افتراض ان معلماته المجهولة اعداد ضبابية مثلثية. ويتم تحديد فترات التجميع (الفواصل الموزونة) للمجموعات الضبابية من النوع الاول والتي تكون من دوال انتماء منخفضة وعليا لتكون من النوع الثاني بتحديد الفواصل الزمنية لكل من المدخلات والمخرجات بحيث تكون دوال خطية متقطعة ولم يتضمن البحث اي جانب تجريبي او تطبيقي .

في عام 2013 قدم الباحثان Nowakov´a & Pokorn´y [53] ورقة في مؤتمر تضمنت تعريفاً للبيانات الضبابية والارقام الضبابية ووصف إنموذج الانحدار الخطي الضبابي كدالة ضبابية ذات أرقام ضبابية ومعلمات ضبابية فضلاً عن مناقشة تقنيات الانحدار الفترتي والضبابي، وقد اقترحا خوارزمية جينية لتقدير معلمات الانحدار الخطي الضبابي وقد اعتمد البحث على دالة الانتماء المثلثية لتحديد الارقام الضبابية و تضمنت الورقة مثلاً عددياً لتطبيق هذه الخوارزمية .

في عام 2014 نشر الباحث Rattanalertnusorn وآخرون [56] بحثاً اقترحوا فيه طريقة جديدة لتقدير معلمات إنموذج الانحدار الخطي الضبابي تعتمد على منطقة المسافة distance criterion وهي تطوير لطريقة الباحثين Chen and Hsueh method التي قدمت في 2009 فقد تم تقدير معلمات الانموذج بواسطة تقليل خطأ التقدير الكلي أي أن تقليل مجموع متوسط المربعات للمسافة بين القيم المشاهدة والتقديرية للمتغير المعتمد (متغير الاستجابة) باستعمال بعض α -cuts والتي تمثل بعض القطوعات وقد تم اشتقاق صيغ تقدير لثلاث حالات لمعلمات لانموذج الانحدار الخطي الضبابي بمتغيرات توضيحية ومتغير معتمد باعداد ضبابية

بدالة انتماء شبه المنحرف Trapezoidal وهي كل المعلمات اقيامها موجبة ،كل المعلمات اقيامها سالبة وخليط من المعلمات الموجبة والسالبة. وقد تم تطبيق الطريقة المقترحة على بيانات مثالين عددين وقد تم توضيح الفوائد والصفات الناتجة عن عملية التوسيع بعد مقارنتها مع الطريقة السابقة. Chen and Hsueh method.

في عام 2015 قدم الباحثان Chachi, & Roozbeh [17] بحثاً تضمن مقترحاً لمقدر حصين لمعلمات الانحدار الخطي الضبابي بوجود القيم الشاذة وقد تم اعتماد بيناتبيانات المدخلات والمخرجات الضبابية ومعلمات ضبابية بطريقة المربعات الصغرى المشذبة وطريقة المربعات الصغرى الضبابية وقد عقدت المقارنة لانموذج الانحدار الضبابي الحصين مع نماذج ضبابية اخرى.

في عام 2016 قدم الباحثان Maturo & Hošková-Mayerová [48] بحثاً تناول فيه عرضاً حديثاً للمنطق الضبابي والانحدار الضبابي بعد مراجعة مجموعة من البحوث الاقتصادية والاجتماعية الحديثة التي استعملت الانحدار الضبابي عند تحليلها البيانات الضبابية ويجاد الحلول لبعض المشكلات التي واجهتها في اثناء سير البحث وتم التركيز على آليات حل مسائل الجمع والضرب بين الاعداد في نماذج الانحدار الضبابي .

في عام 2017 قدم الباحث Bhavyashree وآخرون [14] بحثاً سعوا فيه الى تحديد إنموذج الانحدار الافضل لقياس غلة أوراق التوت من بين إنموذجي الانحدار الخطي التقليدي والانحدار الخطي الضبابي باستعمال متوسط العرض average width وجذر متوسط مربع الخطأ root mean squares error وقد اظهرت نتائج المقارنة عند تحليل البيانات من قسم تربية دودة القز، جامعة العلوم الزراعية، جامعة بنغالور أن التنبؤ بالفترة المحسوبة باستعمال إنموذج FLR يكون أقصر بكثير مقارنة بالفترة التي تم الحصول عليها باستعمال طريقة المربعات الصغرى ما يدل على افضلية الانحدار الخطي الضبابي.

في عام 2018 قدم الباحثان Deng, J. & Lu [25] بحثاً اقترحا فيه إنموذج الانحدار الضبابي من اليسار واليمين fuzzy regression left-right الذي يمكن تطبيقه على اشكال مختلفة من

القيم المشاهدة. وقد تم تقديم المسافة الضبابية والترتيب الجزئي بين رقمين من اليسار واليمين لكل الأرقام الضبابية. واقترحا متوسط الخطأ الضبابي عن طريق إيجاد متوسط المسافة الضبابية بين القيم المشاهدة والمقدرة ومن ثم جعله في نهايته الصغرى للحصول على معلمات الانحدار. وقد تم إجراء تطبيق الانموذج على اربعة امثلة عددية ومقارنته مع نماذج ضبابية اخرى واظهرت نتائج المقارنة التي اعتمدت معيارين هما متوسط الخطأ الضبابي المقارن القائم على الترتيب الجزئي و SSE افضلية الانموذج المقترح علما انه تم اعتماد دالة الانتماء المثالية.

في عام 2019 نشر الباحث Jung وآخرون [40] بحثاً اقترحوا طريقة جديدة لتقدير معلمات إنموذج الانحدار الضبابي عندما يختلف نمط المركز والانتشار. وقد تم الجمع بين تقدير الانحرافات المطلقة للمركز والتحليل التمييزي للانتشار وعلى ضوء ذلك استعملوا التقسيم الضبابي لتصنيف انتشارات المتغير المعتمد الى عدة فئات.تضمن البحث دراسة عددية لاثبات افضلية الطريقة المقترحة على باقي طرائق التقدير الشائعة.

في عام 2020 نشر الباحثان Hassan & Al-Sabri [36] بحثاً تضمن دراسة لانموذج الانحدار الضبابي (إنموذج Tanaka لعادي والمطور (المعدل) باستعمال بيانات ضبابية وغير ضبابية وقد تم بناء إنموذج تنبؤي يعتمد تطبيق افكار الباحثين (سانلي وابايدين) المعتمدين اصلا على اقتراح (شابيير) والقائم على المسافات المربعة التي قدمها دايموند. وقد تم مقارنته مع إنموذج الانحدار التقليدي وتوصلا الى افضلية الانحدار الضبابي على الانحدار التقليدي في حالة وجود البيانات الضبابية.

في عام 2021 قدم الباحث Škrabánek وآخرون [63] بحثاً قدموا فيه طريقة مقترحة لتقدير معلمات إنموذج الانحدار الخطي الضبابي صفتها انها تقرب العلاقات الضبابية بين المتغيرين التوضيحي والمتغير المعتمد وبهذا تعد هذه الفكرة طريقة تقدير تقريبية. وقد اعتمد البحث على بيانات حقيقية وضبابية بالنسبة للمتغير المعتمد بارقام ضبابية مثلثية عن طريق توظيف فكرة الباحث Boscovich الذي اقترح إنموذج خطي ضبابي تكون متغيراته الوسط الحسابي الضبابي للمتغير المعتمد و الوسط الحسابي بيانات المتغير التوضيحي التقليدي فضلاً عن ضبابية معلمات الانموذج واستعملت طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية بارقام ضبابية. وقد تم التعامل مع عشرين مجموعة ضبابية للتحقق من كفاءة الطريقة واثبات عدم حساسيتها للقيم

الشاذة مقارنة مع طرائق الانحدار الضبابي الشائعة الأخرى. وقد اثبتت النتائج بساطة تطبيق الطريقة المقترحة مع وجود تعقيد زمني خطي كما ان الطريقة تمتلك فروقاً للمعاملات تتصف بعدم السالبية.

في عام 2022 نشر Mustafa وآخرون [50] بحثاً تم فيه مقارنة إنموجي الانحدار الخطي التقليدي والانحدار الخطي الضبابي من حيث صيغ الكتابة لهما فضلاً عن شرح الية التعامل مع الانحدار الخطي الضبابي وقد افترضت ثلاث حالات ضبابية للانموج وتطبيقها على مثال عددي وباستعمال طريقة المربعات الصغرى في عملية التقدير لمعاملات الانموج الضبابي.

في عام 2023 قدم الباحث Gkountakou وآخرون [34] بحثاً تضمن طريقة جديدة لتقدير معاملات الانحدار الخطي الضبابي (FLR) مع أرقام ضبابية مثلثية. وقد تم تطبيقها عملياً على بيانات هندسية تتعلق بموضوع الخرسانة لتقييم العلاقة بين المعاملات المؤثرة في الخرسانة وقوة ضغط خرسانة ، وهي تقنية لنمذجة العلاقات بين المدخلات والمخرجات في بيئة ضبابية، لتحديد مخرج ضبابي بقيمة حقيقة محددة. تُمثل هذه القيمة درجة صدق التضمين الضبابي بأكمله. وقد اظهرت النتائج أن الطريقة الجديدة كفاءتها لتقدير معاملات إنموج الانحدار الضبابي.

في عام 2024 نشر الباحثان Behdani & Darehmira [13] بحثاً تضمن محاولة لتطوير إنموج انحدار ضبابي يعتمد على فكر النجاح الممكن إذ تنماز احتمالاتها بعبارات لغوية متعددة وبمستويات منخفضة ومتوسطة وعالية. وقد استعمل مجموعة من المتغيرات التوضيحية الدقيقة لنمذجة التحويل اللور غاريتي للاحتمالات الممكنة فضلاً عن افتراض ان المعاملات إنموج الانحدار اللوجستي الضبابي ارقام ضبابية مثلثية وقد تم استعمال طريقة المربعات الصغرى في عملية التقدير. وللمقارنة تم احتساب ثلاثة معايير جودة الملاءمة لتقييم الانموج. في النهاية، وبالاعتماد على بيانات حقيقة عن مرض الذئبة الحمامية الجهازية بناءً على عوامل خطر مهمة لتحديد تطبيق الانموج.

في عام 2025 نشر الباحثان Yoon & Choi [72] بحثاً حُد فيه الخصائص الجيدة لتقديرات معاملات الانحدار الضبابي الذي يمثل بيانات مدخلا ومخرجات ضبابية واطفاء عشوائية بطريقة المربعات الصغرى الضبابية ومنها الاتساق، التقارب للتوزيع الطبيعي وقد تم اشتقاق نظائر ضبابية للمعادلات الطبيعية التقليدية ومقدرات المربعات الصغرى الضبابية بالاعتماد على مقياس

ضبابي فضلاً عن القيام بعملية الاستدلال النظري لغرض التحقق من الصفات الجيدة للمقدرات واطهار كفاءة الطريقة المقترحة مقارنة بطريقة المربعات الصغرى التقليدية من دون استعمال تطبيق عملي .

اما البحوث على المستوى العربي والمحلي فهي كثيرة يمكن عرض بعضها وكالاتي :

في عام 2006 قدم الباحثان (الياس والصباغ) [3] بحثاً تضمن تحليلاً احصائياً لبيانات مضببة بدالة انتماء مثلثية وغير مضببة باستعمال إنموذجي الانحدار الخطي الضبابي والمعدل له فالاول تم توظيف مسالة البرمجة الخطية لتقدير معلماته كما هو الحال بانموذج Tanaka وآخرون في 1982 وفي الثاني المقترح من الباحثين Savic & Pedrycz في 1991 تم توظيف طريقة المربعات الصغرى على إنموذج الانحدار الخطي الضبابي الذي يتم بمرحلتين تتضمن المرحلة الاولى تقدير إنموذج الانحدار الخطي المضبب بطريقة المربعات الصغرى التقليدية بمدخلات غير مضببة (تقليدية) وفي المرحلة الثانية استعمال طريقة مسالة البرمجة الخطية عن طريق تحديد معيار اقل مجموع كلي للغموض مع حدود متباينات الشرطية لحد الانتماء . وقد اعتمد البحث على بيانات حقيقية عن هشاشة العظام وقد اظهرت النتائج افضلية إنموذج Tanaka المعدل في عملية التقدير.

في عام 2009 قدم الباحثان (الغنام والصباغ) [2] بحثاً تضمن تعريفاً للمجاميع المضببة والمتغيرات المضببة وايضا المتغيرات العشوائية المضببة واخيراً الانحدار المتعدد المضبب. وقد تم اجراء تطبيق عملي على بيانات تجربة احيائية عن مكونات الانسان وتم تقدير معلمات الانموذج باستعمال طريقة المربعات الصغرى الضبابية.

في عام 2010 قدم الباحث طاقية وآخرون [4] بحثاً اقترحوا فيه إنموذج انحدار خطي (ضبابي) بدلا عن إنموذج الانحدار الخطي التقليدي باستعمال المنطق (الضبابي) وقد طبق على بيانات حقيقة فئة من الحرفين بمحافظة دمياط لتحديد العوامل المؤثرة على خصوبة ذلك المجتمع الحرفي (حرفة صناعة الاثاث)، واطهرت نتائج المقارنة كفاءة الانموذج المقترح.

في عام 2014 نشر الباحثان (عبد الرزاق و فرحان) [6] بحثاً تضمن تقديراً مقترحاً للمعلمات الضبابية في إنموذج الانحدار الخطي المتعدد على وفق اسلوب مقترح للتضبيب للمخرجات اذ تم استعمال النظرية الضبابية في معالجة الغموض على وفق مقترح الباحث Tanaka بطريقة حل مسالة البرمجة الخطية وقد تم اجراء تطبيق عملي على بيانات حقيقة لاسعار النفط العالمية

وانتاج النفط خلال سلسلة زمنية 30 سنة وقد تم عقد مقارنة مع اساليب تضبيب أخرى تحديد الافضل في عملية التقدير وقد اظهرت النتائج افضلية التقدير للاسلوب المقترح للتضبيب .

وفي عام 2017 قدم الباحثان (محمد و عباس) [9] بحثاً تضمن تطوير إنموذجاً للانحدار الخطي الضبابي المكيف والمقترح من الباحثين Coppi & et al والذي تم استعمال دالة انتماء جديدة هي دالة الانتروبي وقد اظهرت النتائج كفاءة التقديرات التي اعتمدت دالة الانتماء المقترحة بدلا من الدوال الاخرى .

وفي عام 2021 قدم الباحثان (عباس و المتولي) [5] بحثاً تضمن تقديرا لمعاملات إنموذج الانحدار الخطي الضبابي لقياس اثر العلاقة سعر الصرف الدولار على الناتج المحلي الاجمالي في العراق بالاعتماد على دالة انتماء مثلثية وبطريقة المربعات الصغرى الضبابية بمدخلات ومخرجات ضبابية .وقد اجريا تطبيقا عمليا لبيانات حقيقية عن الظاهرة في العراق في المدة 1974-2020 .

وفي عام 2024 قدمت كل من (كاظم و مهدي) [8] بحثاً تم فيه تقدير معاملات إنموذج الانحدار الخطي الضبابي باستعمال طريقة الباحثين A.R.Arabpour and M.Tata للحصول على اعداد ضبابية مثلثية بالنسبة للمخرجات و متغيرات تقليدية قطعية فضلاً عن معاملات ضبابية وقد تم استعمال تطبيقاً عملياً لبيانات حقيقة لظاهرة طيبة وقد اعتمد البحث على طريقة المربعات الصغرى الضبابية عند تقدير معاملات الانموذج.

وفي عام 2024 قدم الباحث السكمانى [1] اطروحته التي تضمنت تقديراً للانحدار الرتيب متعدد المتغيرات بالاعتماد على الضبابية وقد اثبت الباحث كفاء التقدير بالطرائق الضبابية .

اما البحوث التي تناولت توظيف النقطة الثابتة في عملية التقدير ومنها تقدير معاملات إنموذج الانحدار التقليدي فهي قليلة نذكر منها :

في عام 1998 قدم الباحثان Aguirre & Souza [10] بحثاً تضمن خوارزمية لتقدير النقاط الثابتة fixed points للأنظمة الديناميكية من السلاسل الزمنية. اذ يمكن لهذه الخوارزمية الجديدة من تقدير النقاط الثابتة بدقة حتى وان لم توجد معلومات اولية في البيانات وايضاً تتميز الخوارزمية الجديدة انها تسمح للباحث استعمال اي معلومات اولية عن النظام وان كانت لا

تفترض ذلك على سبيل المثال التماثل ووجود نقطة ثابتة بسيطة. وقد اختبرت الخوارزمية الجديدة على نظامي لورينز وروسر، وطبقت على بيانات حقيقية.

في عام 1999 قدم الباحث D'Epifanio [27] بحثاً تضمن الاستدلال عن بعض الخواص والمميزات لطريقة النقطة الثابتة لبيز الزائفة العامة ومنها التقارب Asymptotic والكفاية Sufficiency والاتساق Consistency وتقارب الكفاية النسبية Asymptotic Efficiency لمعلمات النماذج الاحصائية المراد تقديرها ، وقد تم الاعتماد على مجموعة من الدوال المعلمة الاولية وقد تضمن البحث مجموعة من الامثلة والملاحظات عن الانحدار للمعلمات الفوقية Regression of hyper- parameters مع امثلة تجريبية استعمال في خوارزمية تعظيم التوقع (EM) Expectation Maximization .

في عام 2002 قدم الباحث Hennig [38] بحثاً تضمن دراسة انحدار لمجموعة (عنفود) من بيانات النقاط الثابتة regression fixed point cluster كعنفود من مجموعة البيانات الكلية. و طورت خوارزمية للتقدير للتعامل مع القيم الشاذة outliers وقد اثبت افضليتها بعد مقارنتها مع طرائق اخرى للتقدير منها ML ، كما تضمن البحث تطبيقاً على بيانات حقيقية.

في عام 2025 قدم الباحث Farnsworth [32] بحثاً تضمن اسلوباً جديداً لنمذجة تأثير النقاط الثابتة في إنموذج الانحدار الخطي البسيط التقليدي بالاعتماد على نقاط محورية او نقاط ثابتة لتكوين خط الانحدار البسيط بطريقة المربعات الصغرى الاعتيادية عن طريق مطابقة كل قيم المتغير التوضيحي مع احدى النقاط الثابتة وقدم البحث اشتقاقاً للاسلوب الجديد فضلاً عن تطبيقاً عملياً بمثال تطبيقي .

تقدم هذه الرسالة توظيفاً لنظرية النقطة الثابتة (FP) Fixed Point Theory كاحد موضوعات علم الرياضيات المهمة الممكن استعمالها في عملية التقدير لمعلمات انموذج الانحدار الضبابي (FRM) Fuzzy Regression Model عن طريق توضيح العلاقة بينها بتوضيح الية التوظيف والاستعمال في التقدير وعلاقة النظرية بطرائق التقدير التكرارية (IEM) Iterative Estimation Methods ومنها طريقة او خوارزمية نيوتن-رافسون التكرارية (N-R) Newton Raphson وطريقة او خوارزمية تعظيم التوقع (E-M) Expectation – Maximization التي ستسهم في الوصول الى المقدرات الجيدة لهذا الانموذج عن طريق التقارب بين المقدرات التكرارية لغاية تحقق شرط نظرية النقطة الثابتة (FP) كما سيتوضح ذلك في ثنايا الرسالة.

الفصل الثاني

الجانب النظري

1-2 تمهيد (Preface)

تم في هذا الفصل توضيح مفهوم الضبابية ودوال الانتماء المرتبطة بها وانموذج الانحدار الضبابي (FRM) Fuzzy Regression Model مع الاخذ بنظر الاعتبار ضبابية البيانات والمعلومات وكذلك توضيح نظرية النقطة الثابتة (الصامدة) Fixed point theorem وطريقة توظيفها في تقدير معاملات انموذج الانحدار الضبابي ، فضلاً عن توضيح بعض طرائق التقدير التكرارية وهي طريقة نيوتن رافسون (N-R) Newton-Raphson Method وخوارزمية تعظيم التوقع (EM) Expectation Maximum Algorithm في عملية تقدير معاملات الانموذج على وفق نظرية النقطة الثابتة (FP).

2-2 مفاهيم اساسية في المنطق الضبابي

1- 2-2 المجموعة المحددة (التقليدية) Crisp set والمجموعة الضبابية Fuzzy set

تُعرف المجموعة المحددة (التقليدية) Crisp set بانها مجموعة البيانات والمعلومات المحددة بدقة عن طريق الارقام والقيم الكمية وتقوم على مبدأ الانتماء المطلق الذي لا يحتمل الغموض بحيث يكون العنصر او العدد اما ينتمي الى المجموعة ام لا ينتمي مميز بدالة تسمى الدالة المميزة Characteristic function التي تكون ثنائية القيم بحيث تعطي قيمة الواحد الصحيح للعنصر الذي يكون انتمائه للمجموعة تام وقيمة الصفر لعدم الانتماء التام وتعرف رياضياً كالآتي [2][4][3] :

افرض ان $\vartheta_A(x)$ تمثل الدالة المميزة للمجموعة التقليدية بحيث ان :

$$\vartheta_A(x) = \mu = \begin{cases} 1 & , \text{if } x \in (A = X_A) \\ 0 & , \text{if } x \notin (A = X_A) \end{cases} \quad \dots (2-1)$$

اما المجموعة الضبابية Fuzzy set التي قدمت في عام 1965 من الباحث الازبيجاني الامريكي لطفي زاده Lotfi A. Zadeh , فيمكن تعريفها بانها مجموعة البيانات غير الدقيقة بسبب عدم امتلاكها حدوداً واضحة ما يجعل عناصرها تتصف بالغموض اذ يكون لكل عنصر منها درجة انتماء (Membership degree) معينة تعرف على الفترة [0 , 1] والتي تمثل درجة مساهمة العنصر في هذه المجموعة .

ولتعريفها رياضياً نفترض ان W فضاء العينة (Universal set) للمجموعة A ، فان المجموعة الضبابية \tilde{A} يمكن تعريفها بعدة تعريفات او صيغ ولكن سيتم الاقتصار هنا على تعريف واحدٍ للاختصار وكالاتي: [73] [40] [1]:

$$\dots (2-\tilde{A} = [x_i, (\vartheta_{\tilde{A}}(x_i)), x \in W, i 1,2, \dots, n, 0 \leq \vartheta_{\tilde{A}}(x_i) \leq 1,]$$

2)

اذ أن :

W: المجموعة الشاملة او الكاملة Universal set.

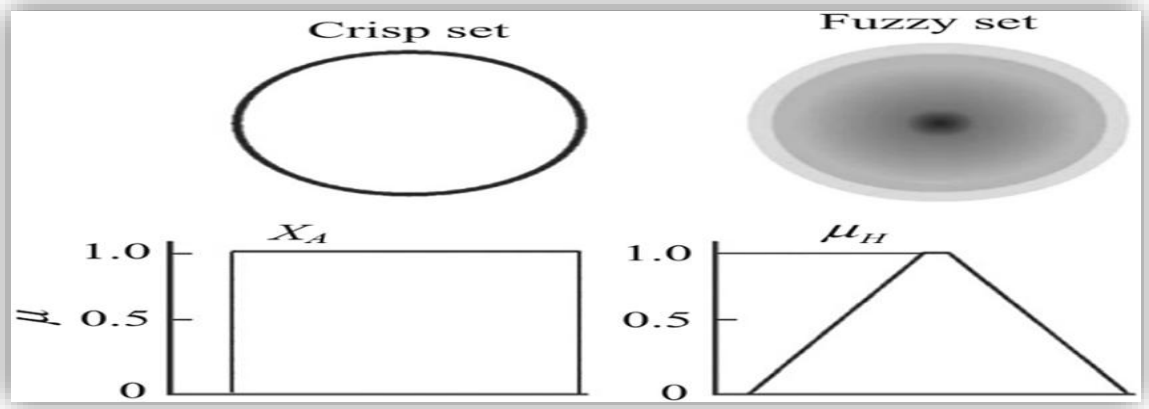
\tilde{A} : مجموعة جزئية من المجموعة الشاملة (المجموعة الضبابية) Fuzzy set.

x : عنصر او مشاهدة في فضاء المجموعة الشاملة مطلوب وصف انتماءه في المجموعة الجزئية \tilde{A} .

: هي دالة الانتماء التي تحدد درجة انتماء العنصر في المجموعة الضبابية. $(\vartheta_{\tilde{A}}(x_i))$

ويمكن توضيح ما تقدم بالشكل (1-2)

شكل (1-2) المجموعة التقليدية والمجموعة الضبابية



وتجدر الإشارة الى انه توجد صيغ لتعريف المجموعة الضبابية وذلك لأن المجموعة الشاملة مجموعة شاملة متقطعة Discrete Universal Set والتي تتكون من عناصر منفصلة ومميزة). او مجموعة شاملة مستمرة Continuous Universal Set وهي تتضمن كل العناصر الممكنة في سياق معين، وتتميز باستمراريتها، أي لا توجد فجوات بين العناصر [61][74] [7].

2-2-2 نظرية المجموعات الضبابية Fuzzy sets theory:

فيما سبق تم تعريف المجموعة الضبابية FS وهي المجموعة التي تدرس العناصر التي يحوم على بياناتها الغموض وعدم الدقة عند عملية التصنيف او الانتماء للمجموعة , فبافتراض ان هناك W تمثل المجموعة الشاملة US وهناك مجموعة ضبابية جزئية \tilde{A} منها والعنصر x مختار من المجموعة الشاملة او الكاملة ويراد وصف او قياس انتمائه الى هذه المجموعة الضبابية بالاعتماد

على دالة الانتماء $\vartheta_{\tilde{A}}(x)$ كما عرف في المعادلة (2-2) ، وعليه فان المجموعة الضبابية يمكن توضيحها بصورة اخرى كالآتي [5] [73]:

$$\dots (2-\tilde{A} = [(\vartheta_{\tilde{A}}(x_1), x_1), \dots, (\vartheta_{\tilde{A}}(x_n), x_n)] = (x, (\vartheta_{\tilde{A}}(x)|x \in W)] \quad (3)$$

$$\dots (2-\tilde{A} = \left[\left(\frac{\vartheta_{\tilde{A}}(x_1)}{x_1} \right) + \left(\frac{\vartheta_{\tilde{A}}(x_i)}{x_i} \right) + \dots + \left(\frac{\vartheta_{\tilde{A}}(x_n)}{x_n} \right) \right] = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\vartheta_{\tilde{A}}(x_i)}{x_i} \right) \quad (4)$$

والمعادلة (2-4) تستعمل للإشارة إلى المجموعة الضبابية المتقطعة عندما تكون المجموعة الشاملة او الكاملة W مجموعة متقطعة Discrete Universal Set ، علما بان رمز القسمة لايعني وجود عملية القسمة وانما يوضح ارتباط كل عنصر بدرجة انتمائه بالمجموعة الضبابية والحال ينطبق على رمز الجمع الذي يوضح ارتباط العناصر مع بعضها في المجموعة الضبابية الواحدة. وفي حالة ان تكون المجموعة الشاملة او الكاملة W مجموعة مستمرة Continuous Universal Set فانه يمكن كتابة المجموعة الضبابية \tilde{A} تبعاً لها كالآتي [5] [73] :

$$\dots (2-\tilde{A} = \left[\int \frac{\vartheta_{\tilde{A}}(x)}{x} \right] \quad (5)$$

وتجدر الاشارة الى ان المجموعة الضبابية التي تكتسب صفة المعيارية تتضمن او ينتمي لها على الاقل عنصراً بدرجة انتماء او (عضوية) مساوية للواحد الصحيح بمعنى انتماء تام تسمى بالمجموعة الضبابية المعيارية Standard Fuzzy Set ، اما المجموعة الضبابية غير المعيارية Non-Standard Fuzzy Set فتكون عناصرها بدرجات انتماء او عضوية اقل من الواحد الصحيح. وايضاً هناك المجموعة الضبابية المحدبة Convex Fuzzy Set والتي تعرف بان اي عنصر على الخط الواصل بين عنصرين في المجموعة تكون درجة انتمائه اكبر او مساوية لدرجة الانتماء الاقل بين العنصرين المكونين للخط وهذا يعني ان درجة الانتماء لاي عنصر على الخط لا تقل اطلاقاً وبالعكس ما تقدم وعدم تحققه تكون المجموعة ضبابية غير محدبة Non-Convex Fuzzy Set ، وايضاً لمجموعة الضبابية الكاوسية Gaussian Fuzzy Set والتي تكون دالة العضوية فيها تأخذ الشكل الطبيعي وتعبّر عن درجة انتماء عنصر بتحديد قيمة مركزية (وسط حسابي) وانحراف معياري.

3-2-2 دوال الانتماء Membership functions:

تعد دوال الانتماء من اهم الموضوعات المرتبطة بالمجموعة الضبابية لأنها توضح مقدار الانتماء او العضوية لكل مشاهدة (عنصر) او حجم المساهمة في المجموعة ، فاذا كانت درجة

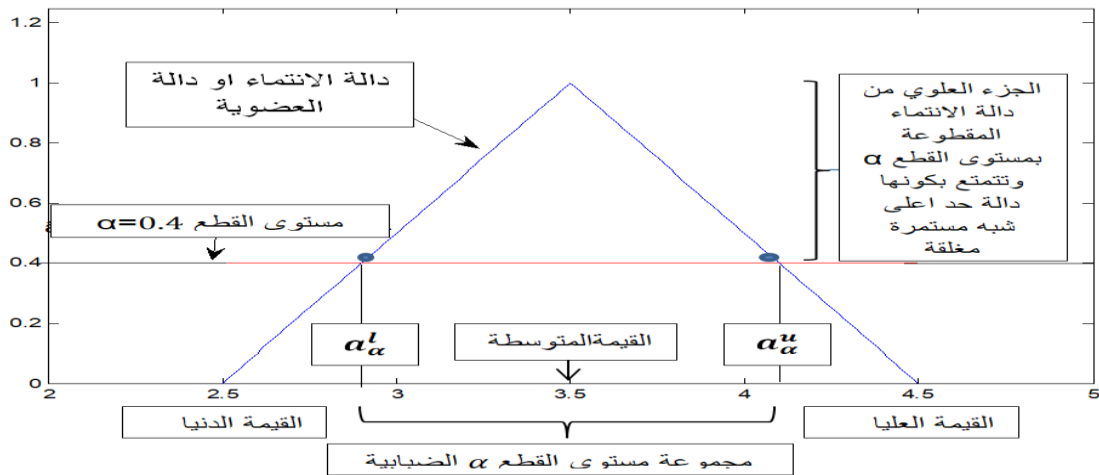
الانتماء تساوي الى الواحد الصحيح فان هذا يعني انتماء موكد للعنصر في تلك المجموعة واما اذا كان يساوي صفرأ هذا يعني ان الانتماء معدوم في حين تبقى مستويات الانتماء الاخرى واقعة بين الواحد والصفر ويتم الانتماء على وفق صفة او معيار معين غير محدد الشكل وعليه توجد انواع من دوال الانتماء بحسب طبيعة البيانات منها دالة الانتماء المثلثية Triangular membership function ودالة الانتماء شبه المنحرف Trapezoidal Membership Function, والمثلثية هي الدالة الاكثر استعمالاً في تحليل الانحدار الخطي الضبابي وتأخذ شكل المثلث وتمتلك ثلاث حدود (معلمات) اساسية وتعرف كالآتي [57][43][36][39]:

$$\dots (2-\theta_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a_1}{a_2-a_1} & , \text{if } a_1 \leq x \leq a_2 \\ \frac{a_3-x}{a_3-a_2} & , \text{if } a_1 \leq x \leq a_2 \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

6)

اذ ان :

: تمثل معلمة الحد الايسر ، معلمة الحد الاوسط ومعلمة الحد الايمن على الترتيب a_1, a_2, a_3 .



والشكل (2-2) يوضح دالة الانتماء المثلثية وكالاتي:

شكل (2-2) دالة الانتماء المثلثية [5]

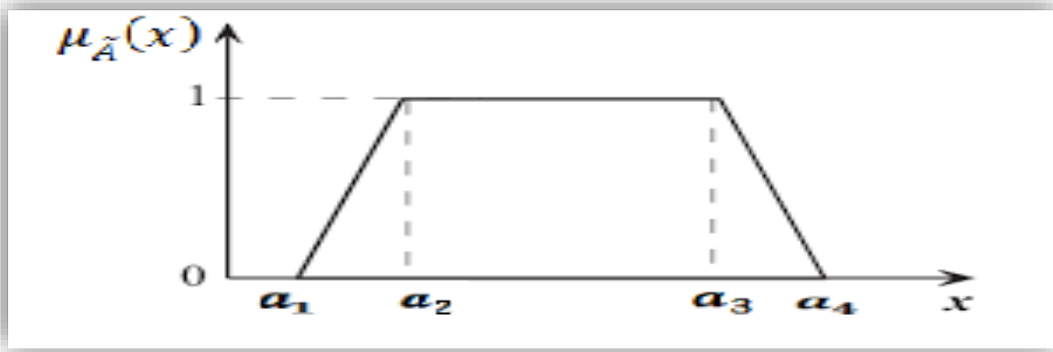
اما دالة الانتماء الثانية وهي دالة شبه المنحرف trapezoidal membership فهي تأخذ شكل المنحرف وتمتلك اربع معلمات اساسية وتعرف كالآتي :

$$\dots (2-\theta_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a_1}{a_2-a_1} & , \text{if } a_1 \leq x \leq a_2 \\ \frac{a_4-x}{a_4-a_3} & , \text{if } a_3 \leq x \leq a_4 \\ 1 & , \text{if } a_2 \leq x \leq a_3 \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

7)

اذ ان :

a_1, a_2, a_3, a_4 : تمثل معلمة الحد الايسر ، المعلمة الوسطى المحاذية للجانب الايسر، المعلمة



الوسطى المحاذية للجانب الايمن ومعلمة الحد الايمن على التوالي.ويمكن توضيحها بالشكل

الاتي شكل رقم (2-3) دالة الانتماء شبه المنحرف [5]

وانه على الرغم من الاستعمال الشائع لهاتين الدالتين في موضوع الانحدار الضبابي Fuzzy Regression الا ان بعض الباحثين يقترح دوال انتماء جديدة ومنها دالة الانتماء المقترحة من قبل الباحثين عبد الرزاق وفرحان [6] والتي استعملت لتضبيب بيانات المتغير المعتمد المقدرة لكل سلسلة بعد ايجاد معاملات الانحدار بطريقة المربعات الصغرى OLS، ويتم مقارنتها مع قيم المتغير المعتمد الحقيقي وتقران مع القيم الحقيقية الاكبر فتصبح الحد الاعلى وايضاً مع القيم الحقيقية الاصغر فتصبح الحد الادنى ومن ثم نحصل على قيمة المركز علماً أن التضبيب تم على بيانات المتغير المعتمد فقط على وفق دالة الانتماء الاتية :

$$\dots (2-\theta_{Y_i}(y_i) = \begin{cases} 1 - \frac{|\frac{\max(y_i, \hat{y}_i) + \min(y_i, \hat{y}_i)}{2} - y_i|}{\max(y_i, \hat{y}_i) - \frac{\max(y_i, \hat{y}_i) + \min(y_i, \hat{y}_i)}{2}} & , \min(y_i, \hat{y}_i) \leq y_i \leq \max(y_i, \hat{y}_i) \\ 0 & , \text{other wise} \end{cases}$$

8)

وفي هذه الرسالة تم استعمال دالة الانتماء المثلثية triangular membership function كونها تتوافق كثيراً مع موضوع الانحدار الضبابي فضلاً عن سهولة التعامل معها عند تقدير معالمته بما يحقق هدف الرسالة .

2-2-4 العدد الضبابي Fuzzy number

هو رقم يستعمل لوصف حالة عدم التأكد والتي تمتاز او تتصف بكونها معيارية ومحدبة ووظيفته هي الوصف والتعامل مع الاعداد بشكل اكثر سهولة فضلاً عن امكانية اجراء العمليات الحسابية (الجمع ، الضرب ، الطرح والقسمة الخ) مع هذه الاعداد ولذا يمكن وضع شروطاً يجب تحققها ليقال للعدد انه عدد ضبابي وهي [7][16][65]:

1. ان تكون المجموعة الضبابية معيارية (normalized) اي تكون قيمة انتماء احدى عناصرها مساوية للواحد الصحيح.
2. ان تكون المجموعة الضبابية محدبة (convex) اي ان قيمة انتماء كل نقطة تقع على الخط بين النقطتين لهما قيمتي انتماء (كبرى وصغرى) تكون مساوية او اكبر من قيمة الانتماء الصغرى وعليه يعرف شرط التحدب رياضياً كالآتي :
$$\vartheta_{\bar{A}}(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \geq \min (\vartheta_{\bar{A}}(x_1), \vartheta_{\bar{A}}(x_2)) \quad (2-9)$$
3. ان تكون دالة الانتماء للمجموعة الضبابية $\vartheta_{\bar{A}}$ مستمرة اي ان تكون حدود المجموعة الضبابية ذات فترة مغلقة وليست مفتوحة.
4. ان تكون مجموعة القطع مجموعة محددة اي تكون لها حدود مغلقة.

2-3 حول إنموذج الانحدار الخطي الضبابي (Fuzzy Linear Regression Model)

يمكن تحديد الفرق بين إنموذج الانحدار التقليدي (Traditional Regression) وإنموذج الانحدار الضبابي (Fuzzy Regression) بان الاول ينتج من العشوائية (Randomness) التي يمتلكها الخطأ العشوائي في الانموذج وعند ذلك يمكن استعمال النظرية الاحتمالية (Probability theorem) ، في حين ان الثاني ينتج من الضبابية او الغموض (Ambiguity) وهي حالة عدم اليقين (uncertainty) للبيانات وعند ذلك تستعمل نظرية المجموعات الضبابية (Fuzzy or Fuzzy sets theory).

وعلى ضوء ماتقدم فان الانحدار الخطي الضبابي يعد تقنية احصائية لتحليل مختلف الظواهر التي تتصف بياناتها بالضبابية والغموض وعدم الدقة كونه يعد علاقة خطية ضبابية بين متغيراً معتمداً ومتغيرات توضيحية وهدفها اجراء التنبؤ بالظاهرة على المدى البعيد [28][8].

تهدف دراسة الانحدار الضبابي الى تقدير المعلمات (مضببة ام غير مضببة) وايجاد المعادلة التقديرية التي تطابق كل البيانات المشاهدة والتي تكون بشكل مدخلات تمثلها (المتغيرات التوضيحية مضببة وغير مضببة Explanatory variables وبمخرجات مضببة يمثلها المتغير المعتمد Dependent variable عن طريق مقياس مطابق لها. وتجدر الاشارة الى ان نموذج الانحدار الضبابي يتفادى الكثير من المشاكل التي تواجه الباحث عند دراسته للانحدار التقليدي ومنها حجم العينة الصغير وكذلك عدم تحقق التوزيع الاحتمالي للاخطاء العشوائي.

2-3-1 مفهوم إنموذج الانحدار الضبابي (Fuzzy Regression Model)

يعرف انموذج الانحدار الضبابي بانه دراسة العلاقة الدالية بين المتغير المعتمد (الاستجابة) والمتغيرات التوضيحية ضمن بيئة ضبابية ، وهناك ثلاثة انواع من نماذج الانحدار الضبابي FRM وهي [5][11][2][8]:

1. انموذج الانحدار الخطي الضبابي بمتغير معتمد (استجابة) مضبب ومعلمات مضببة ومتغيرات توضيحية قطعية غير مضببة.
2. انموذج الانحدار الخطي الضبابي بمتغير معتمد (استجابة) مضبب ومعلمات قطعية غير مضببة ومتغيرات توضيحية مضببة.
3. انموذج الانحدار الخطي الضبابي بمتغير معتمد (استجابة) مضبب ومعلمات مضببة ومتغيرات توضيحية مضببة.

والانموذج الثالث الاكثر استعمالاً عند دراسة الانحدار الخطي الضبابي ولذا سيتم الاقتصار عليه في هذه الرسالة .

يعرف انموذج الانحدار الخطي الضبابي بمتغير معتمد (استجابة) مضبب ومعلمات مضببة ومتغيرات توضيحية مضببة كالآتي :

$$2\tilde{Y}_i = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1\tilde{X}_{i1} + \dots + \tilde{\beta}_j\tilde{X}_{ij} + \dots + \tilde{\beta}_k\tilde{X}_{ik} + \tilde{u}_i , i = 1, 2, \dots, n ; j = 0, 1, \dots, k \quad (10)$$

اذ ان \tilde{Y}_i يمثل المتغير المعتمد (متغير الاستجابة) الضبابي ، \tilde{X}_{ij} يمثل المتغير التوضيحي j الضبابي ، $\tilde{\beta}_j$ تمثل المعلمة j الضبابية ، \tilde{u}_i يمثل عدم اليقين الضبابي وان \tilde{X}_{i0} يمثل المتغير التوضيحي المرتبط بمعلمة الحد الثابت الضبابي والتي يكون عناصره جميعهم مساوية للواحد الصحيح.

ووفقاً لدالة الانتماء المثلثية [70] triangular membership function يعرف :

$$1. \text{ المتغير المعتمد الضبابي } \tilde{Y}_i = (Y_i^l, Y_i^m, Y_i^u) \text{ ، حيث ان: } Y_i^l \text{ يمثل الحد الأدنى ، } Y_i^m \text{ يمثل الحد المركزي ، } Y_i^u \text{ يمثل الحد الأعلى .}$$

$$2. \text{ المتغير التوضيحي } z \text{ الضبابي } \tilde{X}_{ij} = (X_{ij}^l, X_{ij}^m, X_{ij}^u) \text{ ، حيث ان: } X_{ij}^l \text{ يمثل الحد الأدنى ، } X_{ij}^m \text{ يمثل الحد المركزي ، } X_{ij}^u \text{ يمثل الحد الأعلى .}$$

$$3. \text{ المعلمة } z \text{ الضبابية } \tilde{\beta}_j = (\beta_j^l, \beta_j^m, \beta_j^u) \text{ ، حيث ان: } \beta_j^l \text{ يمثل الحد الأدنى ، } \beta_j^m \text{ يمثل الحد المركزي ، } \beta_j^u \text{ يمثل الحد الأعلى .}$$

$$4. \tilde{X}_{i0} = (1, 1, 1)$$

ويتم تحديد الحدين الأدنى والأعلى للعدد الضبابي كما تم توضيحه في الشكل (2-2) ووفقاً لدالة الانتماء المثلثية باختيار عدة قيم لمستوى القطع α حيث ان $\alpha \in [0,1]$ اذ تقوم كل قيمة من القيم بقطع الاعداد الضبابية المثلثية كلها ولجميع متغيرات يمثل الانتماء للعدد وتهدف هذه العملية إلى تحديد مجموعة مستوى القطع α بالقيمتين (a_α^l, a_α^u) والتي تمثلان قيمتي الحد الأدنى و الحد الأعلى الجديدة بعد القطع الذي تم بمستوى قطع α وبشكل متتابع لاختيار العدد الضبابي (المجموعة الضبابية) يتم تحديد قيمتي الحد الأدنى والأعلى للعدد الضبابي بالصيغتين الاتيتين :

$$\dots \left(\begin{array}{l} a_\alpha^l = (1 - \alpha)a_1 + \alpha a_2 \\ a_\alpha^u = (1 - \alpha)a_3 + \alpha a_2 \end{array} \right) \quad (11)$$

وعليه يعرف الحدين الأدنى والأعلى لكل من المتغير المعتمد الضبابي والمتغيرات التوضيحية الضبابية لانموذج الانحدار الضبابي المعرف بالصيغة (2-10) كالآتي :

$$\dots \left(\begin{array}{l} Y_{i(\alpha)}^l = (1 - \alpha)Y_i^l + \alpha Y_i^m \\ Y_{i(\alpha)}^u = (1 - \alpha)Y_i^u + \alpha Y_i^m \end{array} \right) \quad (12)$$

$$\begin{aligned} X_{ij(\alpha)}^l &= (1 - \alpha)X_{ij}^l + \alpha X_{ij}^m \\ X_{ij(\alpha)}^u &= (1 - \alpha)X_{ij}^u + \alpha X_{ij}^m \end{aligned} \quad (2-13)$$

إذ نلاحظ من المعادلتين (2-12) و(2-13) انها تولد قيماً جديدة تمثل (الحدود الدنيا والعليا) لكل من المتغيرات (المعتمد والتوضيحية) اي ان:

$$(Y_{i(\alpha)}^l, X_{ij(\alpha)}^l), (Y_{i(\alpha)}^u, X_{ij(\alpha)}^u) \quad (2-14)$$

بينما القيم المركزية لها $(Y_{i(\alpha)}^m, X_{ij(\alpha)}^m)$ لاتتأثر بقيمة مستوى القطع [5] [75].

2-3-2 تقدير معاملات نموذج الانحدار الضبابي (طريقة المربعات الصغرى الضبابية)

تهدف الطريقة : تصغير المسافات التربيعية بين القيم الضبابية المقدرة والمشاهدة وقدم الباحث Tanaka واخرون [66] [68] في عامي 1980 و 1982 اولى المحاولات لتقدير معاملات نموذج الانحدار الضبابي (الضبابي) اعتماداً على صياغة مسألة البرمجة الخطية Linear Programming وهذه المحاولة تعد النواة الاولى لعملية التقدير، اذ تم صياغة معلماته بواسطة الدوال الخطية الضبابية المقترحة من قبل الباحث لطفي زادة Zadeh معتمداً على الانحرافات بين القيم الحقيقية والقيم التقديرية لاخطاء الانموذج والتي تاتي من الانحرافات الضبابية لمعاملات ، وقد تم تطوير المحاولة في عام 1987 من الباحث Tanaka [69] وقد اتصف هذا الاسلوب من التقدير بالصعوبة لاسيما في الجانب التطبيقي في عام 1988 قدم الباحث Diamond [28] اسلوباً جديداً لتقدير معاملات نموذج الانحدار الضبابي باعتماد طريقة المربعات الصغرى الضبابية Fuzzy Least Squares Method (FLS) بعد استنباط المعادلات الطبيعية بالقيم الضبابية المناظرة للمعادلات الطبيعية التقليدية ومن ذلك التاريخ اصبحت هذه الطريقة هي الاكثر شيوعاً لتقدير معاملات نموذج الانحدار الضبابي ولذا سيتم الاعتماد عليها خلال سير الرسالة ويمكن عرض الية اجراءها كالآتي [31] [36] [11] [2]:

بعد ايجاد القيم الضبابية لكل من المتغير المعتمد والمتغيرات التوضيحية بالاعتماد على المعادلات (2-12) و (2-13) و (2-14) ، يمكن تقدير معاملات نموذج الانحدار الضبابي بطريقة المربعات الصغرى الضبابية FLS ، اذ تعتمد الطريقة التي وصفها الباحث Diamond في حساب المسافات التربيعية على قياسات الفترات جميعها فاذا كان المتغيران المعتمد والمتغير التوضيحي X_{ij} وفق معيار المسافة الاتي :

$$d(X_{ij}, Y_i)^2 = [X_{ij(\alpha)}^m - Y_{i(\alpha)}^m - (X_{ij(\alpha)}^l - Y_{i(\alpha)}^l)]^2 + [X_{ij(\alpha)}^m - Y_{i(\alpha)}^m - (X_{ij(\alpha)}^u - Y_{i(\alpha)}^u)]^2 + \dots (2-15) (X_{ij(\alpha)}^m - Y_{i(\alpha)}^m)^2$$

ويمكن تعميم الصيغة (2-15) لـ k من المتغيرات التوضيحية عن طريق تصغير المسافة التربيعية squared distances بين المدخلات input والمخرجات output وكالاتي [19][2][11]:

$$\text{Min } Q = \text{Min } r (\tilde{\beta}_0, \tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_k)$$

$$\text{Min } Q = \sum d(\tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 \tilde{X}_{i1} + \dots + \tilde{\beta}_j \tilde{X}_{ij} + \dots + \tilde{\beta}_k \tilde{X}_{ik}, Y_i)^2$$

اذ ان :

$$\begin{aligned} & d(\tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 \tilde{X}_{i1} + \dots + \tilde{\beta}_j \tilde{X}_{ij} + \dots + \tilde{\beta}_k \tilde{X}_{ik}, Y_i)^2 \\ &= [\tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 \tilde{X}_{i1} + \dots + \tilde{\beta}_j \tilde{X}_{ij} + \dots + \tilde{\beta}_k \tilde{X}_{ik} - \tilde{Y}_i - (\tilde{\beta}_1 X_{i1(\alpha)}^l + \dots + \tilde{\beta}_j X_{ij(\alpha)}^l + \dots + \tilde{\beta}_k X_{ik(\alpha)}^l)]^2 + [\tilde{\beta}_0 + \\ & \tilde{\beta}_1 \tilde{X}_{i1} + \dots + \tilde{\beta}_j \tilde{X}_{ij} + \dots + \tilde{\beta}_k \tilde{X}_{ik} - \tilde{Y}_i - (\tilde{\beta}_1 X_{ij(\alpha)}^u + \dots + \tilde{\beta}_j X_{ij(\alpha)}^u + \dots + \tilde{\beta}_k X_{ik(\alpha)}^u)]^2 + (\tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 \tilde{X}_{i1} + \\ & \dots (2-16) \dots + \tilde{\beta}_j \tilde{X}_{ij} + \dots + \tilde{\beta}_k \tilde{X}_{ik} - \tilde{Y}_i)^2 \end{aligned}$$

وباخذ التفاضل الجزئي للمعادلة (2-16) بالنسبة لمعاملات الانحدار الضبابي يتم الحصول على K+1 من المعادلات التفاضلية وبحلها انياً نحصل على مقدرات طريقة المربعات الصغرى الضبابية بعد كتابتها بالمصفوفات كالاتي [36] [13][17][11]:

$$\dots (2-17) \hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{bmatrix} = [X^l X^l + X X + X^u X^u]^{-1} (X^l Y^l + X Y + X^u Y^u)$$

اذ ان :

$$, Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}, Y^u = \begin{bmatrix} Y_1 - Y_{1(\alpha)}^u \\ Y_2 - Y_{2(\alpha)}^u \\ \vdots \\ Y_n - Y_{n(\alpha)}^u \end{bmatrix}, Y^l = X = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & \dots & X_{1k} \\ 1 & X_{21} & \ddots & X_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_{n1} & \dots & X_{nk} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y_1 - Y_{1(\alpha)}^l \\ Y_2 - Y_{2(\alpha)}^l \\ \vdots \\ Y_n - Y_{n(\alpha)}^l \end{bmatrix}$$

$$,,X^u = X^l = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} - X_{11}^l(\alpha) & \dots & X_{1k} - X_{1k}^l(\alpha) \\ 1 & X_{21} - X_{21}^l(\alpha) & \ddots & X_{2k} - X_{2k}^l(\alpha) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_{n1} - X_{nk}^l(\alpha) & \dots & X_{nk} - X_{nk}^l(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & X_{11} - X_{11}^u(\alpha) & \dots & X_{1k} - X_{1k}^u(\alpha) \\ 1 & X_{21} - X_{21}^u(\alpha) & \ddots & X_{2k} - X_{2k}^u(\alpha) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_{n1} - X_{nk}^u(\alpha) & \dots & X_{nk} - X_{nk}^u(\alpha) \end{bmatrix}$$

ويلاحظ من الصيغة (17-2) التي تمثل مقدرات طريقة المربعات الصغرى الضبابية FLS قد اعتمدت على تصور الحالة العامة لانموذج الانحدار الضبابي الذي يكتب بالمصفوفات والذي تم توضيحه بالمصدر [36]، من خلال تقسيم متغيرات الانموذج الى ثلاثة أجزاء على وفق دالة الانتماء الثلاثية الموضحة سابقاً. وتجدر الإشارة الى سهولة التعامل مع هذا الاسلوب في التقدير مقارنة مع اسلوب الباحث Tanaka المعتمد على تحليل مسالة البرمجة الخطية الذي يتصف بالصعوبة.

2-4 نظرية النقطة الثابتة (مفهومها ، بعض انواعها وفكرة التقدير باستعمالها)

1-نظرية النقطة الثابتة: إيجاد نقطة لا تتغير عند تطبيق دالة معينة عليها وتستعمل لتطوير طرائق تكرارية في التقدير لانها تضمن الوصول الى حل مستقر او قيمة تقديرية دقيقة مثلاً:
عندما $X=2$ تعوض في الدالة نحصل على القيمة نفسها

$$F(2) \simeq 2$$

2- اشهر النظريات :

* باناش *Banach* : أي دالة انكماشية معرفة في فضاء متري تحتوي نقطة ثابتة واحدة .
* الدالة الانكماشية: هي دالة تقلل المسافة بين أي نقطتين وهي فعالة في الطرق التكرارية لانها تضمن التقارب الى حد ثابت وفريد [عند اخر نقطتين مختلفه (X, Y) فإن صورتها تحت الدالة f ستكون اقرب لبعضها من X, Y نفسها] .

2-4-1 المفهوم نظرية النقطة الثابتة (الصامدة) Fixed Point theorem

يعد الباحث Hadamard اول من قدم دليلاً على فكرة نظرية النقطة الثابتة (الصامدة) Fixed point theorem ففي عام 1910 ولكنه لم يقدم ذلك منشوراً بشكلٍ رسمي الى أن نشر الباحث الهولندي (L. E. J. Brouwer) في عام 1912 بشكل رسمي مقالاً ااكاديمياً عرض فيه ادلة جديدة للنظرية فضلاً عن الادلة التقليدية المطروحة سابقاً باستعمال الدرجة التوبولوجية topological degree ، ونتيجة النشر الرسمي أعتبر الباحث بروير Brouwer هو أول من قدم هذه النظرية

ونتيجة لهذا التقديم اكتسبت تسمية اخرى هي نظرية بروير للنقطة الثابتة Brouwer Fixed point theorem ، وبهذا اصبحت هذه النظرية من الموضوعات المهمة في التحليل الحقيقي والتوبولوجيا، اذ اكتسبت اهمية واسعة في التطبيقات الرياضية وايضاً في تخصصات اخرى مثل ، الاقتصاد، نظرية الألعاب، والبرمجة الرياضية [52][59].

تُعرف نظرية FP بشكل مبسط بانها هي خليط او مزيج متنوع ما بين ثلاث (التحليل ، التوبولوجيا او التوبولوجيا والهندسة) ، علما بان اصل معنى التوبولوجيا Topology هو يوناني مكون من شقين الاول topos بمعنى مكان والثاني logos بمعنى دراسة أو علم) اما تعريفها في علم الرياضيات بانها دراسة المجموعات المتغيرة مع انها لا تتغير طبيعياً محتوياتها، ولذا سميت عند مختصي الرياضيات والهندسة بالهندسة المطاطية [33] ، او كل دالة مستمرة من مجال مغلق ومحدب في الفضاء الإقليدي النوني إلى نفسها تملك نقطة ثابتة .

وبتوضيح رياضي : ان المجموعة A التي تعمل عليها محصورة داخل كرة مغلقة في الفضاء الإقليدي النوني R^n ، فانه A محدودة وبتالي هناك كرة مغلقة D محيطها نصف قطرها r بحيث يتحقق الاتي :

$$g(x) = x \quad (2-18) \dots$$

وعلى ضوء ما تقدم يمكن تثبيت الفرضيات الاساسية لتحقق نظرية بروير Brouwer يجب ان تكون الدالة g مستمرة ، وان يتصف المجال A للدالة g بالاتي :

1. مغلقاً (يحتوي جميع حدوده ونقاطه).
2. محدباً (اي ان المستقيم بين اي نقطتين فيه يكون ضمن المجال) .
3. محدوداً (منته) .

2-4-2 بعض نظريات النقطة الثابتة (الصامدة) Some Fixed Point theorems

ان بروز اهمية النقطة الثابتة FP دفعت العديد من الباحثين الى اظهار نظريات اخرى تتعلق بها نذكر منها على سبيل المثال [32][59]:

نظرية باناخ للنقطة الثابتة Banach Fixed-Point Theorem

تعد هذه النظرية الاشهر والاكثر استعمالاً قدمت من قبل الباحث باناخ Banach في عام 1922 وتسمى ايضاً بمبرهنة الانكماش لباناخ Banach Fixed Point Theorem ، بسبب ان كل انكماش على فضاء مترى كامل توجد نقطة ثابتة وحيدة ، وهي تستعمل في تحليل المعادلات التفاضلية والمعادلات غير الخطية ونظرية التكرار.

وتجدر الإشارة هنا انه من الضروري عرض بعض المصطلحات العلمية والشروط المتعلقة بنظرية النقطة الثابتة Fixed point theorem والتي تسهم في توضيح هذه النظرية [27]:

1. الفضاء المترى (Metric Space): أي مجموعة X تصبح فضاء مترياً بدالة مسافة $d(x,y)$ عبارة اخرى هو الفضاء الذي يحتوي على زوج مرتب من (X, d) اذ ان X هي اي مجموعة غير خالية فقد تكون مثلاً مجموعة الاعداد الحقيقية Real Numbers او مجموعة من الدوال المستمرة التي تحقق ماتقدم. في حين تمثل d دالة مسافة Metric تُعرف $R \rightarrow X \times X$. ومن اهم الشروط الواجب تحققها هذه المسافة (عدم السالبة، التماثل، التطابق ومتباينة المثلث التي تعني تحقق المتباينة $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$ حيث ان x, y, z اعداد تنتمي الى مجموعة الاعداد الحقيقية.

2. الفضاء التوبولوجي (Topological Space) وهو اعم من الفضاء المترى يسمح بدلاسة مفاهيم الاستمرارية والتقارب الذي تعتمد عليه نظرية النقطة الثابتة Fixed point theorem عند عدم توفر الامكانية لاستعمال الفضاء المترى لاي سبب كان مثل عدم توفر دالة مسافة واضحة او محددة وبذلك ويعد تعميماً للفضاء المترى، ولذا يمكن تعريفه بانه زوج مرتب من (X, t) اذ ان X هي اي مجموعة غير خالية، وان t يمثل مجموعة من المجموعات الجزئية المفتوحة Open sets من المجموعة X وهذا يعني ان اي مجموعة تكون ضمناً في هذا الفضاء ومنها المجموعة الخالي واي اتحاد او تقاطع لعناصر الفضاء التوبولوجيا.

3. الفضاء الاقليدي: هو مجموعة كل المتجهات من بعد n R^n (متجهات حيث R^n يعد فضاء متري طبيعي) الفضاء الاقليدي حالة خاصة من الفضاء المترى وعلية كل فضاء اقليدي هو فضاء متري وليس العكس.

4-التراص (Contracluchin) خاصية في الفضاءات التوبولوجية تشير إلى أن كل تغطية مفتوحة لها نهاية جزئية منتهية وبعبارة اخرى يمكن تغطية المجموعة في الفضاء بعدد منته من "المجاميع الجزئية المفتوحة مثال على ذلك: افرض انه توجد مجموعة $[0, 1]$ وهي جزئية من R وافرض ان المجموعة تغطي بالمجموعات المفتوحة على وفق الاتي:

$$\dots (2-19)G_k = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k} + 1 \right), k = 2, 3, 4, 5, \dots$$

ويلاحظ انه بالاعتماد على المعادلة اعلاه يمكن تغطية المجموعة $[0, 1]$ ولا حاجة لتطبيق اكثر من $k=2$ للحصول على G_2 وبهذا تُغطي المجموعة ككل.

1. المحدودية (Boundedness) : جميع النقاط محصورة ضمن مسافة معينة او مجموعة محددة مثلاً المجموعة $[0, 1]$ تعتبر مجموعة محددة بينما تعد مجموعة الاعداد الحقيقية R غير محددة.

2. التقارب (Convergence): سلسلة من النقاط التي تقترب من نقطة معينة بخطوات تكرارية ولذا يعد التقارب مهماً جداً في نظرية النقطة الثابتة عند استعمالها للوصول الى الحل بعد تطبيق الخطوات التكرارية.

3. الاستمرارية (Continuity) : وهي تتعلق بالدوال وليس القيم او النقاط اذ يقال للدالة انها مستمرة اذا اقتربت قيمة من قيمة اخرى فان دالة القيمة الاولى تقترب من دالة القيمة الاخرى .

3-4-2 فكرة التقدير باستعمال النقطة الثابتة (The idea of estimation by Fixed Point)

تعد عملية التقدير من اهم اجراءات التحليل الاحصائي التي يجب ان يقوم بها الباحث عندما تتوفر بيانات عينة ولمختلف بحوث التخصصات العلمية كون ان العينة مسحوبة من مجتمع يمتلك معلمات والتي غالباً ما تكون مجهولة unknown parameters الامر الذي يستوجب استعمال مختلف الاساليب للحصول على المقدرات التي يجب ان تتصف بالكفاءة ومن تلك الاساليب هو استعمال نظرية النقطة الثابتة FPT في عملية التقدير وعلى ضوء ماتقدم يمكن توضيح فكرة التقدير باستعماله اذ تتوقف هذه الفكرة على جعل او تحويل عملية التقدير متوافقاً مع تحقق شرط نظرية النقطة الثابتة (الصامدة) المعروف بالصيغة (18-2) بعبارة اخرى كما في الاتي [27][52][59] :

$$f(\hat{\mu}) = \hat{\mu} \quad (20)$$

اذ ان :

f: دالة تكرارية او طريقة او خوارزمية تكرارية. وان μ : المقدر للمعلمة المراد تقديرها.

ومن المعادلة (20-2) نستنتج وجوب توفر دالة او طريقة او خوارزمية تكرارية Iterative Methods and Algorithms تحقق شرط نظرية النقطة الثابتة وخواصها واهمها الاستمرارية

ومن اهم هذه الطرائق والتي اعتمدها الرسالة هي :

1. طريقة نيوتن رافسن التكرارية Newton - Raphson Method (N-R)

2. خوارزمية تعظيم التوقع (Expectation Maximum Algorithm (EM)

2-5 توظيف نظرية النقطة الثابتة في عملية التقدير لانموذج الانحدار الخطي الضبابي [12]:
ان التقدير لمعلمات انموذج الانحدار الضبابي (Fuzzy Regression Model) بتوظيف نظرية النقطة الثابتة (الصامدة) (Fixed Point Theory) هو أسلوب حديث وقليل الاستعمال من الباحثين اذ يتميز بتجاوز بعض مشكلات النماذج التقليدية في الانحدار عندما تكون البيانات ضبابية أو غير دقيقة، والفكرة الاساسية لتوظيف نظرية النقطة الثابتة لتقدير معلمات انموذج الانحدار الضبابي المعرف بالصيغة (2-10) والمعاد كتابته هنا :

$$\tilde{Y}_i = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 \tilde{X}_{i1} + \dots + \tilde{\beta}_j \tilde{X}_{ij} + \dots + \tilde{\beta}_k \tilde{X}_{ik} + \tilde{u}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n; j = 0, 1, \dots, k$$

هي تطبيق الطرائق والخوارزميات التكرارية Iterative Methods and Algorithms في عملية التقدير للوصول الى مقدرات ثابتة للمعلمات المجهولة $\tilde{\beta}_j = (\beta_j^l, \beta_j^m, \beta_j^u)$ والتي تعد هي المقدرات المثلى (اي بمعنى الوصول الى التقارب المطلوب) ويمكن توضيح هذه الفكرة الاساسية بشكل عام عن طريق الخطوات الاتية :
اولاً : تكوين او انشاء دالة تكرارية لتعيين النقطة الثابتة Fixed-Point Mapping كما في الصيغة الاتية :

$$\dots (2-21) \quad g(\hat{\beta}) = \hat{\beta}$$

ويتم الحصول على هذه الدالة التكرارية عند الاشتقاق لدالة هدف objective function محددة او دالة خسارة loss function او وفقاً لطريقة تقدير معينة ومنها (مثل المربعات الصغرى الموسعة للضبابية).

ثانياً : اختيار وتحديد القيم الاولية (الابتدائية) $(\hat{\beta}_{j(0)})$ initial values للمعلمات كما في ادناه :

$$\dots (2-\tilde{\beta}_{j(0)}) = (\beta_{j(0)}^l, \beta_{j(0)}^m, \beta_{j(0)}^u)$$

22)

ثالثاً : اجراء التكرار لحين الحصول على التقارب بين المقدرات :

ان اجراء التكرار يتم عن طريق التعويض في الدالة التكرارية المعرفة في اولاً وبعدد لحين الوصول الى تكرارين من المقدرات بفروق صغيرة جداً اصغر من قيمة موجبة صغيرة جداً (تحدد من قبل الباحث) او يصبح التغيير بين التكرارين صغيراً جداً فعند ايجاد المقدر للمعلمة z اليسرى يكون كالآتي :

$$\dots (2-|\hat{\beta}_{j(f+1)}^l - \hat{\beta}_{j(f)}^l| < \varepsilon , f = 0,1, \dots$$

23)

حيث ان :

: كمية موجبة صغيرة جداً

وبتحقق المعادلة (2-23) يكون $\hat{\beta}_{j(k)}^l$ هو المقدر الامثل للمعلمة β_j^l كونه الاكثر تقارباً اي ان :

$$\dots (2-g(\hat{\beta}_{j(k+1)}^l) \approx \hat{\beta}_{j(f)}^l , f = 0,1, \dots$$

24)

وبالخطوات نفسها نحصل على بقية المقدرات الاخرى اليمنى والمركزية بحسب دالة الانتماء المثلية

للمعلمة الضبابية (الثلاثية) $\tilde{\beta}_j$ وكالاتي:

$$\dots (2-g(\hat{\beta}_{j(f+1)}^u) \approx \hat{\beta}_{j(f)}^u , f = 0,1, \dots$$

25)

$$\dots (2-g(\hat{\beta}_{j(f+1)}^m) \approx \hat{\beta}_{j(f)}^m , f = 0,1, \dots$$

26)

والصيغ (2-24) و (2-25) و (2-26) تسمى تكرار النقطة الثابتة Fixed-Point Iteration
اذ يمكن الوصول اليها من التقارب بين المقدرات للوصول الى المقدرات والذي يستوجب استعمال
الخوارزميات او الطرائق التكرارية Iterative Methods and Algorithms ، ولذا سيتم
عرض بعضها والتي تم اعتمادها في هذه الرسالة لتقدير معلمات نموذج الانحدار الضبابي FRM
وكالاتي :

1-5-2 خوارزمية نيوتن- رافسون Newton-Raphson

بشكل عام تُستعمل هذه الخوارزمية N-R لحل المعادلات غير الخطية كما يمكن استعمالها
في تقدير معلمات نماذج الانحدار الخطية ووتتميز بانها تعمل على تحسين المقدرات عند اجراء
الخطوات التكرارية وفقاً لعمل الطرائق التكرارية وتعرف خوارزمية نيوتن –رافسون بالصيغة
العامة لاجاد المقدرات التكرارية بشكل موجه لانموذج الانحدار الضبابي FRM الاتية:

$$\dots (2- \tilde{\beta}_{(f+1)} = \tilde{\beta}_{(f)} - (H \tilde{\beta}_{(f)})^{-1} * \nabla L (\tilde{\beta}_{(f)}), f = 0,1, \dots$$

27)

اذ ان :

f: يمثل تسلسل التكرار او التحديث للمقدرات على وفق صيغة نيوتن رافسن N-R.

$H(\tilde{\beta}_{(f)})$: مصفوفة هيسن Hessian Matrix وهي مربعة من درجة $3(k+1) * 3(k+1)$.

$L(\tilde{\beta}_{(f)})$: موجه التدرج Gradient Vector من مرتبة $3(k+1) * 1$.

واعتماداً على الصيغة (2-27) يمكن توضيح الخطوات التطبيقية للتقدير والوصول الى المقدر الامثل لموجه معلمات النموذج الانحدار الضبابي FRM وكالاتي :

اولاً: تحديد واختيار القيم الابتدائية Initial values لموجه المعلمات الضبابية في نموذج FRM وكما معرف $\tilde{\beta}_{j(0)} = (\beta_{j(0)}^l, \beta_{j(0)}^m, \beta_{j(0)}^u)$ حيث ان $(j= 0,1,2,\dots,k)$ ، اذ يمكن استعمال المقدرات التي يتم الحصول عليها باسلوب Tanaka او مقدرات طريقة المربعات الصغرى الضبابية FLS كمقدرات اولية ووفقاً لدالة الانتماء المثلثية Triangular Membership Function فانه يمكن كتابة موجه القيم الابتدائية كالاتي :

$$\dots (\tilde{\beta}_{(0)})' = [\beta_{0(0)}^l \quad \beta_{0(0)}^m \quad \beta_{0(0)}^u \quad \beta_{1(0)}^l \quad \beta_{1(0)}^m \quad \beta_{1(0)}^u \quad \dots \quad \beta_{k(0)}^l \quad \beta_{k(0)}^m \quad \beta_{k(0)}^u] \quad (2-28)$$

ثانياً: تحديد دالة هدف (دالة خسارة) التي يجب ان تكون قابلة للاشتقاق والتي غالباً ماتستعمل دالة الخطأ الضبابية (Fuzzy Least Squares) (FLS) بحساب الخطأ بين القيم التنبؤية للنموذج الضبابي والقيم الفعلية او بالمسافة التربيعية وكالاتي :

$$L(\tilde{\beta}) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n d^2(\tilde{Y}_i, \tilde{\hat{Y}}_i) \quad (2-29)$$

اذ ان :

$L(\tilde{\beta})$: متوسط الفروق للمكونات الثلاثة المناظرة للعددين الضبابيين بشكل عام وبين $\tilde{Y}_i, \tilde{\hat{Y}}_i$ بشكل خاص.

$d(*,*)$: تمثل المسافة بين عددين ضبابيين ووفقاً يؤخذ بنظر الاعتبار انه توجد ثلاثة قيم لكل من قيم المتغير المعتمد والمتغيرات التوضيحية والمعلمات بحسب دالة الانتماء المثلثية .
اي ان :

$$\dots (2-L(\tilde{\beta})) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n \left[(Y_i^l - \hat{Y}_i^l)^2 + (Y_i^m - \hat{Y}_i^m)^2 + (Y_i^u - \hat{Y}_i^u)^2 \right] \quad (30)$$

وحيث ان :

$$\hat{Y}_i^m = \sum_{j=1}^{k+1} \beta_j^m X_{ij}^m \quad , \quad \hat{Y}_i^u = \sum_{j=1}^{k+1} \beta_j^u X_{ij}^u \quad \dots \quad (2-\hat{Y}_i^l = \sum_{j=1}^{k+1} \beta_j^l X_{ij}^l) \quad (31)$$

يمكن اعادة كتابة المعادلة (2-31) كالآتي :

$$L(\tilde{\beta}) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n [(Y_i^l - \sum_{j=1}^{k+1} \beta_j^l X_{ij}^l)^2 + (Y_i^m - \sum_{j=1}^{k+1} \beta_j^m X_{ij}^m)^2 + (Y_i^u - \sum_{j=1}^{k+1} \beta_j^u X_{ij}^u)^2] \quad (2-32)$$

$$\dots (2-L(\tilde{\beta})) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n [(e_i^l)^2 + (e_i^m)^2 + (e_i^u)^2] \quad (33)$$

ثالثاً: ايجاد المشتقات الجزئية الاولى (Gradient Vector) لكل من $(\beta_j^l, \beta_j^m, \beta_j^u)$ لكل معلمة من المعلمات الثلاثة وكالاتي :

$$\dots (2-\left[\begin{array}{c} \frac{\partial L(\tilde{\beta})}{\partial \beta_j^l} \\ \frac{\partial L(\tilde{\beta})}{\partial \beta_j^m} \\ \frac{\partial L(\tilde{\beta})}{\partial \beta_j^u} \end{array} \right]) = \left[\begin{array}{l} -\frac{2}{3} \sum_{i=1}^n (Y_i^l - \sum_{j=1}^{k+1} \beta_j^l X_{ij}^l) X_{ij}^l = -\frac{2}{3} \sum_{i=1}^n (e_i^l) X_{ij}^l \\ -\frac{2}{3} \sum_{i=1}^n (Y_i^m - \sum_{j=1}^{k+1} \beta_j^m X_{ij}^m) X_{ij}^m = -\frac{2}{3} \sum_{i=1}^n (e_i^m) X_{ij}^m \\ -\frac{2}{3} \sum_{i=1}^n (Y_i^u - \sum_{j=1}^{k+1} \beta_j^u X_{ij}^u) X_{ij}^u = -\frac{2}{3} \sum_{i=1}^n (e_i^u) X_{ij}^u \end{array} \right] \quad (34)$$

اذ ان :

$$j=0,1, 2, \dots, k$$

ويلاحظ من الصيغة (29) انها تتضمن المشتقات الجزئية الاولى لمعلمة واحدة فقط من معلمات نموذج الانحدار الضبابي FRM وعلى ضوءها يمكن تعريف موجه المشتقات الجزئية الاولى والمسمى موجه التدرج (Gradient Vector) للمعلمات الضبابية جميعها بارقامها الثلاثة وفقاً لدالة الانتماء المثلثية في نموذج FRM والذي يكون من مرتبة $1 * 3(k+1)$ وكالاتي :

$$\dots (2-(\nabla L(\tilde{\beta}))) = \left[\frac{\partial L(\tilde{\beta})}{\partial \beta_0^l} \quad \dots \quad \frac{\partial L(\tilde{\beta})}{\partial \beta_k^l} \quad \frac{\partial L(\tilde{\beta})}{\partial \beta_0^m} \quad \dots \quad \frac{\partial L(\tilde{\beta})}{\partial \beta_k^m} \quad \frac{\partial L(\tilde{\beta})}{\partial \beta_0^u} \quad \dots \quad \frac{\partial L(\tilde{\beta})}{\partial \beta_k^u} \right] \quad (35)$$

وتجدر الاشارة ان كل عنصر من عناصر الموجه المشتقات الاولى (Gradient Vector) للمعلمات الضبابية يمثل معدل التغير الحاصل في دالة الهدف $\nabla L(\tilde{\beta})$ بالنسبة لاحد مكونات المعلمات الضبابية .

ثالثاً: ايجاد المشتقات الثانية الجزئية لتعريف مصفوفة الهيسن Hessian Matrix لكل من $\tilde{\beta}_j = (\beta_j^l, \beta_j^m, \beta_j^u)$ لكل معلمة من المعلمات الثلاثة حيث ان $(j=0,1,2,\dots,k)$ اذ تستخرج المشتقات الثانية الجزئية بالاعتماد على المعادلة (29) والتي يمكن كتابتها كالآتي :

$$\dots (2-H(\tilde{\beta})) = \nabla^2 L(\tilde{\beta}) = \begin{bmatrix} H_{(k+1)*(k+1)}^{ll} & 0 & 0 \\ 0 & H_{(k+1)*(k+1)}^{mm} & 0 \\ 0 & 0 & H_{(k+1)*(k+1)}^{uu} \end{bmatrix} \quad (36)$$

اذ ان :

$H(\tilde{\beta})$: مصفوفة هيسن Hessian Matrix وهي مربعة من درجة $3(k+1) * 3(k+1)$ ، وبذلك فهي مصفوفة كبيرة وتكون قطرية قطاعية (كتلية) block-diagonal .

وان :

$$(2-37) H_{(k+1)*(k+1)}^{ll} = H_{(k+1)*(k+1)}^{ll}(\beta^l) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L(\tilde{\beta})}{\partial \beta_0^l \partial \beta_0^l} & \frac{\partial^2 L(\tilde{\beta})}{\partial \beta_0^l \partial \beta_1^l} & \dots & \frac{\partial^2 L(\tilde{\beta})}{\partial \beta_0^l \partial \beta_k^l} \\ \frac{\partial^2 L(\tilde{\beta})}{\partial \beta_1^l \partial \beta_0^l} & \frac{\partial^2 L(\tilde{\beta})}{\partial \beta_1^l \partial \beta_1^l} & \dots & \frac{\partial^2 L(\tilde{\beta})}{\partial \beta_1^l \partial \beta_k^l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 L(\tilde{\beta})}{\partial \beta_k^l \partial \beta_0^l} & \frac{\partial^2 L(\tilde{\beta})}{\partial \beta_k^l \partial \beta_1^l} & \dots & \frac{\partial^2 L(\tilde{\beta})}{\partial \beta_k^l \partial \beta_k^l} \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \tilde{X}^l X^l$$

اذ ان :

$$\dots (2- \frac{\partial^2 L(\tilde{\beta})}{\partial \beta_t^l \partial \beta_d^l} = \frac{2}{3} \sum_{i=1}^n X_t^l X_d^l , t, d \in [0, 1, \dots, k] \quad (38)$$

$$\dots (2-H_{(k+1)*(k+1)}^{mm} = H_{(k+1)*(k+1)}^{mm}(\beta^m) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L(\tilde{\beta})}{\partial \beta_0^m \partial \beta_0^m} & \frac{\partial^2 L(\tilde{\beta})}{\partial \beta_0^m \partial \beta_1^m} & \dots & \frac{\partial^2 L(\tilde{\beta})}{\partial \beta_0^m \partial \beta_k^m} \\ \frac{\partial^2 L(\tilde{\beta})}{\partial \beta_1^m \partial \beta_0^m} & \frac{\partial^2 L(\tilde{\beta})}{\partial \beta_1^m \partial \beta_1^m} & \dots & \frac{\partial^2 L(\tilde{\beta})}{\partial \beta_1^m \partial \beta_k^m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 L(\tilde{\beta})}{\partial \beta_k^m \partial \beta_0^m} & \frac{\partial^2 L(\tilde{\beta})}{\partial \beta_k^m \partial \beta_1^m} & \dots & \frac{\partial^2 L(\tilde{\beta})}{\partial \beta_k^m \partial \beta_k^m} \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \tilde{X}^m X^m \quad (39)$$

$$\dots (2- \frac{\partial^2 L(\tilde{\beta})}{\partial \beta_t^m \partial \beta_d^m} = \frac{2}{3} \sum_{i=1}^n X_t^m X_d^m , t, d \in [0, 1, \dots, k] \quad (40)$$

$$\dots (2-H_{(k+1)*(k+1)}^{uu}) = H_{(k+1)*(k+1)}^{uu}(\beta^u) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L(\beta)}{\partial \beta_0^u \partial \beta_0^u} & \frac{\partial^2 L(\beta)}{\partial \beta_0^u \partial \beta_1^u} & \dots & \frac{\partial^2 L(\beta)}{\partial \beta_0^u \partial \beta_k^u} \\ \frac{\partial^2 L(\beta)}{\partial \beta_1^u \partial \beta_0^u} & \frac{\partial^2 L(\beta)}{\partial \beta_1^u \partial \beta_1^u} & \dots & \frac{\partial^2 L(\beta)}{\partial \beta_1^u \partial \beta_k^u} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 L(\beta)}{\partial \beta_k^u \partial \beta_0^u} & \frac{\partial^2 L(\beta)}{\partial \beta_k^u \partial \beta_1^u} & \dots & \frac{\partial^2 L(\beta)}{\partial \beta_k^u \partial \beta_k^u} \end{bmatrix} = \frac{2}{3} X^u X^u \quad (41)$$

$$\dots (2-\frac{\partial^2 L(\beta)}{\partial \beta_t^u \partial \beta_d^u}) = \frac{2}{3} \sum_{i=1}^n X_t^u X_d^u \quad , t, d \in [0, 1, \dots, k] \quad (42)$$

وتجدر الاشارة إلى أن المصفوفة هيسن المعرفة بالصيغة (2-41) اصبحت مصفوفة قطرية قطاعية (كتلية) لان المعلمات في الحدود الادنى(اليسار) والاعلى (اليمين) والمتوسطة (المركزية) تكون مستقلة عن بعضها كون تأثيرها يكون على المتغير المعتمد الضبابي المناظر لها وهو ما جعل المشتقات الجزئية الثانية بينها مساوية للصفر وهذا يعطي انطباعاً عن امكانية ايجاد المقدرات لانموذج الانحدار الضبابي FRM بشكل منفصل تبعاً للمتغيرات والمعلمات الثلاثة على وفق دالة الانتماء المثلثية مما يسهل العمليات الحسابية للحصول على المقدر الامثل والذي يحقق شروط تحقق نظرية النقطة الثابتة FP.

ان توظيف نظرية النقطة الثابتة FP في خوارزمية نيوتن رافسون N-R يستوجب تحقق شروط النظرية ولذا يكون لابد من تطبيق هذه الشروط على انموذج الانحدار الضبابي تحت الدراسة للتحقق من الحصول على المقدرات المثلى للمعلمات الضبابية التي يتضمنها الانموذج وكالاتي :

1. الشرط الاول (ان يكون فضاء المعلمات الضبابية مترياً Metric Space)

فيما تقدم تم تعريف المعلمة (المعلمات) الضبابية $\tilde{\beta}_j$ حيث $(j= 0,1,2,\dots,k)$ في انموذج FRM وفقاً لدالة الانتماء المثلثية بالشكل $\tilde{\beta}_j = (\beta_j^l, \beta_j^m, \beta_j^u)$ ، باعتبارها عدداً ضبابياً ولذا يكون :

$$\tilde{\beta} = (\tilde{\beta}_0, \tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_k) \in R^{3(k+1)} \quad \dots (2-$$

43)

وعند استعمال المسافة التربيعية للمثلثيات المعرفة بالصيغة (2-33) يجعل الفضاء المعرف في المعادلة (2-43) مترياً وبذلك يكون الشرط متحقق.

2. الشرط الثاني (التراص Contracluchin)

ان صيغة التكرار او التحديث في خوارزمية نيوتن رافسن N-R والمعروفة بالصيغة (2-27) هي صيغة لتقليص المسافة بين التكرارات، وهذا الشرط متحقق عند اثبات ان التكرار محصور في مجموعة تضمن وجود الانكماش.

3. الشرط الثالث (وجود دالة هدف قابلة للاشتقاق مرتين)

يعد هذا الشرط متحققاً لدالة الهدف (المسافة التربيعية) وفقاً لدالة الانتماء المثلثية تمتلك المشتقات الجزئية الثانية محدودة العدد بحيث تكون مصفوفة الهيسن مصفوفة معرفة موجبة (positive definite) تضمن التقارب بين التكرارات.

عند تحقق الشروط اعلاه ، تضمن نظرية باناخ وجود نقطة ثابتة لكل المعلمات الضبابية بالاعتماد على المعادلة (2-43) بحيث ان :

$$\nabla L(\hat{\beta}) = 0 \rightarrow \hat{\beta}_{(f)} \text{ (fixed point) } \downarrow$$

$$\dots (2-44) g(\hat{\beta}_{(f)}) = \tilde{\beta}_{(f+1)} = \tilde{\beta}_{(f)} - (H \tilde{\beta}_{(f)})^{-1} * \nabla L(\tilde{\beta}_{(f)}) = \hat{\beta}_{(f)}$$

اذ ان $\nabla L(\tilde{\beta})$ معرفة بالصيغة (2-44) وبذلك يكون $\hat{\beta}_{(f)}$ هو النقطة الثابتة FP للمعلمات الضبابية. او بتحقيق الشرط الاتي :

$$\dots (2-| \tilde{\beta}_{(f+1)} - \tilde{\beta}_{(f)} | < \varepsilon$$

)54

ε كمية موجبة صغيرة جداً.

2-5-2 خوارزمية تعظيم- التوقع Expectation-Maximization

تُستعمل خوارزمية EM التكرارية لتقدير المعلمات في النماذج ذات البيانات غير المكتملة أو المفقودة او بيانات لايمكن ملاحظتها مثل المتغيرات الكامنة Latent Variables .

قُدمت خوارزمية EM لأول مرة من الباحث دمبستر Dempster عام 1977 واعتمدت في تطبيقها بشكل عام على اجراء خطوتين اساسيتين بشكل تكراري للوصول الى التقارب الامثل واعتباره الحل الامثل للتقدير والخطوتين كالاتي [12][49][45][24][15]:

1. خطوة التوقع Expectation-Step (E-Step)

لاجراء هذه الخطوة لابد من توفر قيم اولية initial values او مقدرات سابقة للمعلمات المراد تقديرها لاستعمالها في ايجاد التوقع الشرطي conditional expectation للدالة

الوغاريتمية لدالة الامكان Log- Likelihood بافتراض ان بعض المتغيرات (البيانات غير كاملة) او ان (البيانات كامنة) لا يمكن ملاحظتها.

2. خطوة التعظيم (M-Step) Maximization- Step

وهي خطوة التكرار او التحديث لمقدرات المعلمات عن طريق تعظيم التوقع الشرطي الذي تم احتسابه من الخطوة E-Step .

ويتم تكرار الخطوتين حتى الوصول الى التقارب الامثل بحيث تتوقف الفروق (التغيرات) في قيم المقدرات عند قيمة موجبة صغيرة جدا.

ان وجود البيانات الضبابية Fuzzy Data التي يمثلها انموذج الانحدار الضبابي المعرف بالصيغة (2-10) والتي تضم (بيانات المتغير المعتمد الضبابي ، بيانات المتغيرات التوضيحية الضبابية والمعلمت الضبابية) وفقاً لدالة الانتماء (دالة الانتماء المثلثية) كاعداد او ارقام مثلثية يجعل من خوارزمية EM مناسبة في عملية التقدير كونها تتعامل مع البيانات غير الكاملة او الكامنة اذ تكون القيمة الحقيقية لتلك البيانات داخله في البيانات الضبابية ولكنها بدرجة انتماء مختلفة.

وعلى ضوء ما تقدم يمكن توضيح الية التقدير بخوارزمية EM للمعلمت الضبابية في

انموذج الانحدار الضبابي FRM المعرف بالصيغة (2-10) وكالاتي:

ان فكرة تطبيق خطوة التوقع E-Step في انموذج الانحدار الضبابي FRM لا تختلف عما تم توضيحه في اعلاه اي ان الهدف هو ايجاد دالة التوقع الشرطي وكما ياتي :

$$)6 \quad \dots (2-46) \quad \tilde{\beta} = E \text{ Log } L_{\tilde{Y}} (\tilde{\beta} ; \tilde{Y}, \tilde{X} | \text{data}, \tilde{\beta}_{(f-1)})$$

ويلاحظ من الصيغة (2-46) ان التوقع الشرطي يعتمد على البيانات الضبابية وبهذا الشكل تكمن صعوبة في ايجاده لذا يمكن ان يكون هناك اتجاهاً لاجراء التوقع الشرطي وكالاتي :

الاتجاه الاول : استعمال القيمة المتوقعة لكل من (المتغير المعتمد والمتغيرات التوضيحية والمعلمت) الضبابية وفقاً لدالة الانتماء المثلثية المعرفة بالصيغة (2-6) والتي يمكن تعريفها كالاتي :

$$\begin{aligned}
 E[\tilde{Y}_i] &= \hat{Y}_{i(f)} = \frac{Y_i^l + Y_i^m + Y_i^u}{3} \\
 \dots (2-4) E[\tilde{X}_{ij}] &= \hat{X}_{ij(f)} = \frac{X_{ij}^l + X_{ij}^m + X_{ij}^u}{3} \\
 E[\tilde{\beta}_j] &= \hat{\beta}_{j(f)} = \frac{\beta_j^l + \beta_j^m + \beta_j^u}{3}
 \end{aligned}
 \quad , i = 1, 2, \dots, n, j = 0, 1, \dots, k$$

ووفقاً لهذا الاتجاه فان الخطوة الاولى E-Step تنتهي باستخراج القيمة المتوقعة للمتغير المعتمد الضبابي والمتغيرات التوضيحية الضبابية والمعاملات الضبابية وكتابتهاما بدلالة المصفوفات وكالاتي :

$$\begin{aligned}
 \hat{Y}_{(f)} &= \begin{bmatrix} E[\tilde{Y}_1] \\ E[\tilde{Y}_2] \\ \vdots \\ E[\tilde{Y}_n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{Y}_{1(f)} \\ \hat{Y}_{2(f)} \\ \vdots \\ \hat{Y}_{n(f)} \end{bmatrix} \\
 \hat{X}_{(f)} &= \begin{bmatrix} 1 & \hat{X}_{11(f)} & \dots & \hat{X}_{1k(f)} \\ 1 & \hat{X}_{21(f)} & \dots & \hat{X}_{2k(f)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \hat{X}_{n1(f)} & \dots & \hat{X}_{nk(f)} \end{bmatrix} \\
 \hat{\beta}_{(f)} &= \begin{bmatrix} E[\tilde{\beta}_0] \\ E[\tilde{\beta}_1] \\ \vdots \\ E[\tilde{\beta}_k] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{0(f)} \\ \hat{\beta}_{1(f)} \\ \vdots \\ \hat{\beta}_{k(f)} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

وبتحديد $\hat{Y}_{(f)}$ ، $\hat{X}_{(f)}$ التي تمثل القيم المتوقعة للمتغير المعتمد الضبابي والمتغيرات التوضيحية الضبابية يتم صياغة دالة الهدف لحساب مجموع مربع الخطأ وكالاتي :

$$\dots (2-G(\beta) = (\hat{Y}_{(f)} - \hat{X}_{(f)}\beta)' (\hat{Y}_{(f)} - \hat{X}_{(f)}\beta)$$

بكتابة الدالة (2-49) تنتهي الخطوة الاولى (خطوة التوقع) E-Step من خوارزمية EM مع العلم ان موجه المعلمات $\hat{\beta}_{(f+1)}$ يستعمل في الخطوة الثانية من خلال التقارب للوصول الى الحل الامثل.

الاتجاه الثاني: استعمال القيمة المتوقعة (التوقع الشرطي) للمسافة التربيعية المعرفة في الصيغة (2-50) وفقاً لدالة الانتماء المثلثية والتي يكون فيها كل عدد ضبابي يمتلك ثلاثة ارقام بديلاً عن دالة الامكان كون ان البيانات ضبابية وكالاتي :

$$\dots (2-G(\tilde{\beta}_{(f)}) = E \left(\frac{1}{3} \sum_{i=1}^n d^2(\tilde{Y}_i, \tilde{\tilde{Y}}_i) \right) \Big| \tilde{\beta}_{(f)} ; \tilde{Y}_i, \tilde{\tilde{X}}_i \right) \quad (50)$$

اذ ان :

$$\dots (2-d^2(\tilde{Y}_i, \tilde{\tilde{Y}}_i) = (Y_i^l - \hat{Y}_i^l)^2 + (Y_i^m - \hat{Y}_i^m)^2 + (Y_i^u - \hat{Y}_i^u)^2 \quad (15)$$

اما فكرة تطبيق خطوة التعظيم M-Step في انموذج الانحدار الضبابي FRM فستكون وفقاً للاتجاهين في الخطوة الاولى وكالاتي :

الاتجاه الاول: ان اجراء خطوة التعظيم يتم على الدالة (2-51) من خلال الاشتقاق الجزئي للمعلمات فتحصل على صيغة التقدير للمعلمة الضبابية بشكل عام كالاتي :

$$\dots (2-\hat{\beta}_{(f+1)} = (\hat{X}'_{(f)} \hat{X}_{(f)})^{-1} \hat{X}'_{(f)} \hat{Y}_{(f)} \quad (25)$$

ولتطبيق خطة التعظيم نبدأ بالتعظيم للمعلمة المركزية اولاً ومن ثم يتم التحديث لبقية المعلمات الادنى والاعلى على وفق الاتي :

اذ يلاحظ ان الصيغة (2-52) تمثل التكرار او التحديث للمعلمة الضبابية بشكل والتي اعتمدت على القيم المتوقعة (متوسط القيمة الضبابية) للمتغير المعتمد والمتغيرات التوضيحية وبسبب ذلك يمكن اجراء تغير في الية التعامل معها لايجاد مقدرات المعلمات الضبابية التكرارية من استخراج موجه المعلمات المركزية للمعلمات الضبابية في انموذج الانحدار الضبابي FRM وكالاتي:

$$\dots (2-5\hat{\beta}_{(f+1)}^m = (\hat{X}'_{(f)} \hat{X}_{(f)})^{-1} \hat{X}'_{(f)} \hat{Y}_{(f)} \quad (3)$$

اما استخراج بقية المعلمات الادنى والاعلى في انموذج FRM فنعتمد على التقديرات المركزية المعرفة بالصيغة (2-53) والذي يمثل التشتت النهائي للمعلمات الضبابية وكالاتي [45] :

$$\dots (2-\left. \begin{aligned} \hat{\beta}_{(f+1)}^l &= \hat{\beta}_{(f+1)}^m - \hat{Y}S_{(f+1)} \\ \hat{\beta}_{(f+1)}^u &= \hat{\beta}_{(f+1)}^m + \hat{Y}S_{(f+1)} \end{aligned} \right) \quad (45)$$

اذ ان:

$S_{(f+1)}$: موجه من مرتبة $1*(k+1)$ الذي يمثل التشتت الاساسي للتكرار $f+1$ للمعلمات الضبابية في انموذج الانحدار الضبابي FRM.

والتشتت الاساسي Basic Dispersion للعدد الضبابي بشكل عام (ودالة الانتماء له مثلثية) يرمز له بـ S ويمثل مقدار الغموض Ambiguity او عدم اليقين Uncertainty او الانتشار Spread في العدد الضبابي fuzzy number ويستعمل بشكل شائع في النماذج الاحصائية ومنها انموذج الانحدار الضبابي FRM لتحديد وقياس درجة انتشار العدد الضبابي حول القيمة المركزية له، وهناك أنواع من هذا التشتت اشهرها (العرض الكامل Full width ، نصف العرض Half-Width والمتوسط الكلي للتشتت الضبابي) ،والأول والثاني ستعتمد عليه الرسالة كونه يستخرج كمتوسط للفرق بين حدود العدد الضبابي (التشتت) وفقاً للعرض الكامل ونصف العرض اللذين يمكن استخراجهما لكل من المتغير المعتمد الضبابي والمتغيرات التوضيحية الضبابية والمعلمات الضبابية وكالاتي :

فعند الاعتماد على العرض الكامل (FW) يكون المتوسط الكلي لتشتت المعلمة β_j كالاتي:

$$\dots (2-S_{\beta_{j(f)}}^{FW} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |FW(\tilde{Y}_i) - \sum_{j=0}^k FW(\tilde{\beta}_{j(f)})FW(\tilde{X}_{ij})| \quad)55$$

اذ ان :

$$FW(\tilde{Y}_i) = (Y_i^u - Y_i^l) = [(Y_i^u - Y_i^m) + (Y_i^m - Y_i^l)]$$

$$FW(\tilde{\beta}_{j(f)}) = (\beta_{j(f)}^u - \beta_{j(f)}^l) = [(\beta_{j(f)}^u - \beta_{j(f)}^m) + (\beta_{j(f)}^m - \beta_{j(f)}^l)] ,$$

$$FW(\tilde{X}_{ij}) = (X_{ij}^u - X_{ij}^l) = [(X_{ij}^u - X_{ij}^m) + (X_{ij}^m - X_{ij}^l)] ,$$

$$i = 1, 2, \dots, n , j = 0, 1, \dots, k , f = 0, 1, \dots$$

وعليه يمكن تعريف عناصر موجه $S_{(f+1)}$ في الصيغة (2-55) اعتمادا على قيم FW كالاتي :

$$\dots (2-56) \quad \hat{S}_{(f+1)}^{FW} = \begin{bmatrix} \hat{S}_{\beta_{0(f+1)}}^{FW} \\ \hat{S}_{\beta_{1(f+1)}}^{FW} \\ \vdots \\ \hat{S}_{\beta_{k(f+1)}}^{FW} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sum_{i=1}^n |(Y_i^u - Y_i^l) - \sum_{j=0}^k (\hat{\beta}_{j(f+1)}^u - \hat{\beta}_{j(f+1)}^l)(X_{ij}^u - X_{ij}^l)|}{n} \\ \frac{\sum_{i=1}^n |(Y_i^u - Y_i^l) - \sum_{j=0}^k (\hat{\beta}_{j(f+1)}^u - \hat{\beta}_{j(f+1)}^l)(X_{ij}^u - X_{ij}^l)|}{n} \\ \vdots \\ \frac{\sum_{i=1}^n |(Y_i^u - Y_i^l) - \sum_{j=0}^k (\hat{\beta}_{j(f+1)}^u - \hat{\beta}_{j(f+1)}^l)(X_{ij}^u - X_{ij}^l)|}{n} \end{bmatrix}$$

ويلاحظ من الصيغة (2-56) ان التشتت لكل معلمة ضبابية في انموذج الانحدار الضبابي متساوي للجميع .

والصيغة (2-55) تمثل احدى الصيغ لاجاد التشتت للمعلمة β_j التي سيتم الاعتماد عليها في تطبيق خوارزمية EM لاجاد الحل الامثل لتقدير معاملات الانحدار الضبابي في خطوة M .
اما عند الاعتماد على نصف العرض (HW) يكون المتوسط الكلي لتشتت المعلمة β_j كالاتي:

$$\dots (2-\hat{S}_{\beta_{j(f)}}^{HW} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |HW(\tilde{Y}_i) - \sum_{j=0}^k HW(\tilde{\beta}_{j(f)})HW(\tilde{X}_{ij})| \quad)75$$

اذ ان :

$$\begin{aligned} HW(\tilde{Y}_i) &= \frac{1}{2} (Y_i^u - Y_i^l) = \frac{1}{2} [(Y_i^u - Y_i^m) + (Y_i^m - Y_i^l)] \\ HW(\tilde{\beta}_{j(f)}) &= \frac{1}{2} (\beta_{j(f)}^u - \beta_{j(f)}^l) = \frac{1}{2} [(\beta_{j(f)}^u - \beta_{j(f)}^m) + (\beta_{j(f)}^m - \beta_{j(f)}^l)] \\ HW(\tilde{X}_{ij}) &= \frac{1}{2} (X_{ij}^u - X_{ij}^l) = \frac{1}{2} [(X_{ij}^u - X_{ij}^m) + (X_{ij}^m - X_{ij}^l)] \\ i &= 1, 2, \dots, n, \quad j = 0, 1, \dots, k, \quad f = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

وعليه يمكن تعريف عناصر موجه $S_{(f+1)}$ في الصيغة (2-57) اعتماداً على قيم HW كالاتي :

$$)8 \quad \dots (2-5\hat{S}_{(f+1)}^{HW} = \begin{bmatrix} \hat{S}_{\beta_{0(f+1)}}^{HW} \\ \hat{S}_{\beta_{1(f+1)}}^{HW} \\ \vdots \\ \hat{S}_{\beta_{k(f+1)}}^{HW} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sum_{i=1}^n |(Y_i^u - Y_i^l) - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^k (\hat{\beta}_{j(f+1)}^u - \hat{\beta}_{j(f+1)}^l) (X_{ij}^u - X_{ij}^l)|}{2n} \\ \frac{\sum_{i=1}^n |(Y_i^u - Y_i^l) - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^k (\hat{\beta}_{j(f+1)}^u - \hat{\beta}_{j(f+1)}^l) (X_{ij}^u - X_{ij}^l)|}{2n} \\ \vdots \\ \frac{\sum_{i=1}^n |(Y_i^u - Y_i^l) - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^k (\hat{\beta}_{j(f+1)}^u - \hat{\beta}_{j(f+1)}^l) (X_{ij}^u - X_{ij}^l)|}{2n} \end{bmatrix}$$

اما قيمة γ في الصيغة (2-58) فهي تمثل معامل تحكم (scale factor) لضبط التشتت الضبابي والتي هي قيمة موجبة تُضرب بالتشتت الذي تم تعريفه في الصيغتين (2-57) و (2-58) ولها احدى الحالات الاتية :

1. $\gamma = 1$: يكون التشتت نفسه للمعاملات الضبابية.
2. $\gamma < 1$: يتقلص التشتت للمعاملات الضبابية وبالتالي يقل عدم اليقين.
3. $\gamma > 1$: يتوسع التشتت للمعاملات الضبابية وبالتالي يزداد عدم اليقين.

ويمكن تحديد قيمة معامل ضبط التشتت γ على وفق العرض الكامل FW ونصف العرض HW كما ياتي :

$$\begin{aligned}
)9 \quad \dots (2-5) \hat{\gamma}_{(f+1)}^{FW} &= \frac{\sum_{i=1}^n |e_i^m|}{\sum_{i=1}^n S_{e_i}} = \frac{\sum_{i=1}^n |Y_i^m - \sum_{j=0}^k \hat{\beta}_{(f+1)j}^m X_{ij}^m|}{\sum_{i=1}^n ((Y_i^u - \sum_{j=0}^k \hat{\beta}_{(f+1)j}^u X_{ij}^u) - ((Y_i^l - \sum_{j=0}^k \hat{\beta}_{(f+1)j}^l X_{ij}^l))} \\
\dots (2-\hat{\gamma}_{(f+1)}^{HW} &= \frac{\sum_{i=1}^n |e_i^m|}{\sum_{i=1}^n S_{e_i}} = \frac{\sum_{i=1}^n |Y_i^m - \sum_{j=0}^k \hat{\beta}_{(f+1)j}^m X_{ij}^m|}{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n ((Y_i^u - \sum_{j=0}^k \hat{\beta}_{(f+1)j}^u X_{ij}^u) - ((Y_i^l - \sum_{j=0}^k \hat{\beta}_{(f+1)j}^l X_{ij}^l))}
\end{aligned}$$

)60

وتبعاً للصيغ (2-57) ، (2-58) ، (2-59) ، (2-60) يمكن كتابة صيغ التقدير التكرارية للمعلمات الضبابية في انموذج الانحدار الضبابي وفق خوارزمية EM (الاتجاه الاول في ايجاد التوقع الشرطي في خطوة E-Step) كالآتي :

$$\dots (2-\hat{\beta}_{(f+1)}^{m(FW)}) = (\hat{X}_{(f)}' \hat{X}_{(f)})^{-1} \hat{X}_{(f)}' \hat{Y}_f^{(FW)},$$

)16

اذ ان :

$$\hat{Y}_f^{(FW)} = \frac{\hat{Y}_i^{l(FW)} + \hat{Y}_i^{m(FW)} + \hat{Y}_i^{u(FW)}}{3}, \quad \hat{Y}_i^{h(FW)} = \sum_{j=0}^k \beta_{j(f)}^{h(FW)} X_{ij}^h, \quad h = l, m, u$$

وان :

$$\dots (2-\left. \begin{aligned} \hat{\beta}_{(f+1)}^{l(FW)} &= \hat{\beta}_{(f+1)}^{m(FW)} - \hat{\gamma}_{f+1}^{FW} S_{(f+1)}^{FW} \\ \hat{\beta}_{(f+1)}^{u(FW)} &= \hat{\beta}_{(f+1)}^{m(FW)} + \hat{\gamma}_{f+1}^{FW} S_{(f+1)}^{FW} \end{aligned} \right)$$

)26

وايضاً

$$\dots (2-\hat{\beta}_{(f+1)}^{m(HW)}) = (\hat{X}_{(f)}' \hat{X}_{(f)})^{-1} \hat{X}_{(f)}' \hat{Y}_f^{(HW)},$$

)36

اذ ان :

$$\hat{Y}_f^{(HW)} = \frac{\hat{Y}_i^{l(HW)} + \hat{Y}_i^{m(HW)} + \hat{Y}_i^{u(HW)}}{3}, \quad \hat{Y}_i^{h(HW)} = \sum_{j=0}^k \beta_{j(f)}^{h(HW)} X_{ij}^h, \quad h = l, m, u$$

وان :

$$\dots (2-64) \left[\begin{array}{l} \hat{\beta}_{(f+1)}^{l(HW)} = \hat{\beta}_{(f+1)}^{m(HW)} - \hat{Y}_{f+1}^{HW} S_{(f+1)}^{HW} \\ \hat{\beta}_{(f+1)}^{u(HW)} = \hat{\beta}_{(f+1)}^{m(FW)} + \hat{Y}_{f+1}^{HW} S_{(f+1)}^{HW} \end{array} \right]$$

ويتم الاستمرار بالتكرار والتحديث لايجاد الحلول المثلى لتقديرات المعلمات الضبابية لحين تحقق الشرط

$$\| \hat{\beta}_{(f+1)} - \hat{\beta}_{(f)} \| < \varepsilon \quad \dots (2-65)$$

ان تحقق الشرط المعرف بالصيغة (2-65) يستوجب التوقف عن اعادة التكرار في عملية التقدي ودلالة على تحقق مفهوم نظرية النقطة الثابتة FP مع شروطها عند التقدير بخوارزمية EM اي ان :

$$\hat{\beta}_{(f+1)} = \hat{\beta}_{(f)}$$

الاتجاه الثاني لتطبيق خطوة التعظيم M-Step في انموذج الانحدار الضبابي FRM وفقاً للاتجاه الثاني في الخطوة الاولى E-Step كالاتي :

اجراء خطوة التعظيم M تتم على الدالة (40) عن طريق الاشتقاق الجزئي للمعلمات فنحصل على صيغة التقدير التكرارية للمعلمة الضبابية والتي تعظم الدالة وكالاتي :

$$\dots (2-66) \tilde{\beta}_{(f+1)} = \arg \min_{\tilde{\beta}} G(\tilde{\beta}_{(f)})$$

وعلى ضوء ما تقدم يمكن توضيح خطوات التوظيف بشكل موجز بشكل خوارزمية يمكن اتباعها للوصول الى المقدرات الثابتة لمعلمت انموذج الانحدار الضبابي كالاتي:

1. تحديد معادلة انموذج الانحدار الضبابي : كما هو الحال في الانموذج (6).
2. تحديد دالة التكرار التي تعتمد على معلمت انموذج الانحدار الضبابي والتي تستعمل لايجاد تقدير جديد في كل خطوة تكرارية ويجب ان تصمم هذه الدالة بحيث يكون للانموذج تقدير معلمت مستقر ومنها متوسط مربعات الخطأ.
3. تحديد قيم ابتدائية (اولية).
4. ايجاد التقدير باستعمال دالة التكرار .
5. تحقق شرط التقارب.

باستعمال هذه الخطوات والخوارزميات، يمكن تقدير معاملات النموذج الانحدار بشكل فعال باستعمال نظرية النقطة الثابتة، ما يضمن استقرار ودقة التقديرات المستخرجة.

6-2 مقاييس المفاضلة

اعتمدت المفاضلة في هذه الرسالة على مجموعة من المقاييس منها متوسط مربعات الخطأ MSE سواء للمعاملات او الانموذج فضلاً عن مقاييس اخرى من اهمها AIC و AIC_C و BIC و SHWZ و HQC .
حيث ان :

1-AIC = Akaike In Formation Criterion

$$*AIC = -2 \log L + 2P$$

2-AIC_C = Corrected Akaike In Formation Criterion

$$*AIC_C = AIC + \frac{2k(k+1)}{n-k-1}$$

3-BIC = Bayesia in Formation Criterion

$$*BIC = -2 \log L + P \log n$$

4-HQC = Hannan Quinn Criterion

$$*HQC = -2 \log (L) + P \log n$$

5-SHWZ = Schwarz Criterior

$$*SHWZ = -2 \log (L) + \log n .$$

الفصل الثالث

الجانب التجريبي

1-3 تمهيد (Preface)

في هذا الفصل سيتم اجراء الجانب التجريبي للرسالة اذ سيتم بناء بيئة محاكاة لاختبار سلوك ثلاث طرائق تقدير مختلفة لانموذج انحدار ضبابي بمتغيرات توضيحية ضبابية ومتغير معتمد ضبابي وبمعلومات ضبابية ، تحت تأثير مستويات قطع α مختلفة. ويُنفذ ذلك من توليد بيانات افتراضية (تجريبية) تمثل أنموذج انحدار ضبابي ، ثم تطبيق كل طريقة تقدير تبعاً لفرضيات تجربة المحاكاة Simulation ، ومن ثم تحليل مخرجاتها بالاعتماد على مقاييس المفاضلة المستعملة في الرسالة وهي متوسط مربعات الخطأ (MSE) ، ومعامل التحديد (R^2) لانموذج الانحدار الضبابي FRM المعتمد في الرسالة لتحديد الطريقة الاكفاً في تقدير معلومات الانموذج لغرض اعتمادها في الجانب التطبيقي

2-3 مفهوم المحاكاة (Simulation Concept)

تبرز اهمية المحاكاة Simulation بكونها تهدف الى بناء إنموذج رياضي أو منطقي لواقع معين بهدف دراسته وفهم سلوكه عبر توليد بيانات افتراضية تمثل هذا الواقع. ولذا فهي تستعمل لتقليد مختلف الظواهر التطبيقية ومنها الظواهر الطبيعية أو السلوكية فضلا عن الإحصائية من دون الحاجة إلى إجراء تجارب فعلية مكلفة بالوقت والمال وتتصف بالتعقيد ، ويتم ذلك بافترض مجموعة من الشروط والمعلومات التي يتم التحكم بها، ومن ثم ملاحظة النتائج الناتجة عنها مما يُمكن الباحث من تقييم النماذج واختبار الحالات المختلفة المفترضة واستكشاف العلاقات السببية. وتتميز المحاكاة بقوتها وقدرتها على توفير بيئة تجريبية دقيقة ومنضبطة تسمح للباحث بفحص تأثير التغيرات الطفيفة أو الجوهرية في المتغيرات الداخلة في التجربة ، وهو ما يجعلها أداة لا غنى عنها في العلوم الطبيعية والاجتماعية والهندسية، وبشكل خاص في علم الإحصاء وتحليل البيانات [42].

في الإحصاء تعد منهجية إحصائية مركزية تستعمل لتوليد بيانات افتراضية (تجريبية) اعتماداً على نماذج رياضية واحتمالية محددة مسبقاً، بهدف فحص سلوك الظواهر أو النماذج الإحصائية في بيئات خاضعة للضبط الكامل. وتكمن القيمة العلمية للمحاكاة في قدرتها على خلق بيانات تمثيلية عندما تكون البيانات الواقعية غير متاحة أو يصعب التحكم في خصائصها، ما يجعلها أداة مثالية لتحليل فعالية النماذج، واختبار الفرضيات، واستكشاف تأثير الظروف المختلفة في نتائج التحليل. وفي الإحصاء التطبيقي، تُستعمل المحاكاة بشكل واسع لتقييم خصائص التقديرات (مثل التحيز، التباين، والكفاءة)، واختبار صلاحية الإجراءات الإحصائية تحت ظروف مثالية وغير مثالية على حد سواء [58].

وعند الانتقال إلى نماذج الانحدار (Regression Models) ، تصبح المحاكاة أكثر أهمية؛ إذ إنها توفر بيئة يمكن عن طريقها اختبار استجابة الانموذج لمجموعة من التغيرات البنوية والاحتمالية. في البداية، يقوم الباحث بإنشاء بيانات تحاكي الحالة المثالية، أي تلك التي تتحقق فيها جميع فرضيات نموذج الانحدار، مثل الخطية بين المتغيرات، تجانس التباين (Homoscedasticity) ، استقلالية الأخطاء، والتوزيع

الطبيعي للبواقى. هذه المرحلة توفر قاعدة مرجعية لفهم السلوك النظري الأمثل للانموذج المقترح. وتستعمل نتائج هذه المحاكاة في تحليل مؤشرات الأداء مثل متوسط مربعات الخطأ (MSE) ، معامل التحديد (R^2) ، معدلات التحيز، فترات الثقة. ومن تكرار المحاكاة لعدد كبير من المرات عادة باستعمال برمجيات مثل R أو Python أو MATLAB ، يمكن الوصول إلى استنتاجات أكثر موثوقية حول حصانة النموذج ومدى مناسبة كل طريقة تقدير في سياقات إحصائية مختلفة. وبهذا الأسلوب، لا تُستخدم المحاكاة فقط كأداة توضيحية، بل كإطار تجريبي متكامل لاختبار الفرضيات الإحصائية وتعزيز القرارات المنهجية في النمذجة الإحصائية [64].

3-3 مراحل وخطوات المحاكاة (Simulation stages and steps)

بالاعتماد على برنامج MatLab Ver 2023b تم تنفيذ مراحل وخطوات محاكاة مونت – كارلو Monte - Carlo لفهم سلوك طرائق تقدير انموذج الانحدار الضبابي باستعمال طريقة المربعات الصغرى الضبابية على وفق مبدأ Diamond وكذلك على وفق مبدأ النقطة الثابتة في ظل خوارزمية نيوتن رافسون التكرارية وخوارزمية تعظيم التوقع التكرارية وكذلك دراسة تأثير مستوى القطع الضبابي على اداء الطرائق ويمكن الاطلاع على خطوات التوليد وخطوات اجراء المحاكاة بالتفصيل في الملحق (A)، وبايجاز فان تحديد قيم المدخلات التجريبية كالآتي :

جدول (1-3) يوضح قيم المدخلات التجريبية وتوليد المتغيرات لانموذج الانحدار الضبابي

ت	المدخلات التجريبية	الدلالة	الخطوة في الملحق A
1	n	10,20,35,50,75,100	1-1
2	المتغيرات التوضيحية	ثلاث متغيرات توضيحية	2-1
3	معامل الضبابية (مستوى القطع)	($\alpha=0.1, 0.5, 0.8$)	3-1
4	توليد المتغيرات التوضيحية	بشكل رقم ضبابي مثلثي	2
5	توليد قيم معاملات إنموذج الانحدار	بشكل معاملات ضبابية	3
6	حساب قيم متغير الاستجابة الضبابي	بشكل رقم ضبابي مثلثي	4
7	اضافة الضوضاء الضبابية لمتغير الاستجابة	لضمان ان تكون قيمته واقعية في المحاكاة	5

1-6	طريقة Diamond	طريقة المربعات الصغرى الضبابية	8
2-6	N-R(FP)	خوارزمية نيوتن- رافسون التكرارية بمبدأ النقطة الثابتة	9
3-6	E-M(FP)	خوارزمية تعظيم التوقع التكرارية بمبدأ النقطة الثابتة	10

اما رموز جداول النتائج فموضحة في الجدول الاتي
جدول (2-3) يوضح رموز جداول النتائج ومحتويات كل جدول نتائج في الرسالة

الرمز	المعنى
n	حجم العينة
y_{True}	قيم متغير الاستجابة الحقيقية
\hat{y}_{fols}	قيم متغير الاستجابة المقدرة بموجب طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية على وفق مبدأ Diamond
$\hat{y}_{ffp(NR)}$	قيم متغير الاستجابة المقدرة بموجب خوارزمية نيوتن- رافسون التكرارية على وفق مبدأ النقطة الثابتة
$\hat{y}_{ffp(EM)}$	قيم متغير الاستجابة المقدرة بموجب خوارزمية تعظيم التوقع التكرارية وفق مبدأ النقطة الثابتة
$MSE_{\hat{y}_{fols}}$	متوسط مربعات الخطأ لقيم متغير الاستجابة المقدرة بموجب طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية على وفق مبدأ Diamond لكل مشاهدة
$MSE_{ffp(NR)}$	متوسط مربعات الخطأ لقيم متغير الاستجابة المقدرة خوارزمية نيوتن رافسون التكرارية على وفق مبدأ النقطة الثابتة لكل مشاهدة
$MSE_{\hat{y}_{ffp(EM)}}$	متوسط مربعات الخطأ لقيم متغير الاستجابة المقدرة خوارزمية تعظيم التوقع التكرارية على وفق مبدأ النقطة الثابتة لكل مشاهدة
MSE	متوسط مربعات الخطأ للانموذج ككل
R^2	معامل التحديد
$\tilde{\beta}_0 \dots \tilde{\beta}_3$	معاملات الانموذج المفترض
True	قيم المعلمات الافتراضية (التجريبية)

قيم المعلمات المقدرة بموجب طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية على وفق مبدأ Diamond	fols
قيم المعلمات المقدرة بموجب خوارزمية نيوتن-رافسون التكرارية على وفق مبدأ النقطة الثابتة	ffp(NR)
قيم المعلمات المقدرة بموجب خوارزمية تعظيم التوقع التكرارية على وفق مبدأ النقطة الثابتة	ffp(EM)
قيمة الدلالة (المعنوية) لقيم المعلمات المقدرة بموجب طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية على وفق مبدأ Diamond	Sig.fols
قيمة الدلالة (المعنوية) لقيم المعلمات المقدرة بموجب خوارزمية نيوتن-رافسون التكرارية على وفق مبدأ النقطة الثابتة	Sig.ffp(NR)
قيمة الدلالة (المعنوية) لقيم المعلمات المقدرة خوارزمية تعظيم التوقع التكرارية على وفق مبدأ النقطة الثابتة	Sig.ffp(EM)

4-3 : تحليل نتائج تجارب المحاكاة:

تبعاً للمدخلات التجريبية فان إنموذج الانحدار الضبابي يكون كالآتي :

$$\tilde{Y}_i = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 \tilde{X}_{i1} + \tilde{\beta}_j \tilde{X}_{i2} + \tilde{\beta}_3 \tilde{X}_{i3} + \tilde{u}_i, i = 1, 2, \dots, n; j = 0, 1, \dots, 3 \quad (3-1)$$

وعلى ضوء الانموذج (3-1) تم اجراء ثلاث تجارب محاكاة تبعاً لقيم (معامل الضبابية) واحجام العينات التي تم افتراضها في الجدول (1-3) وكالاتي:

التجربة الاولى (مستوى القطع $\alpha=0.1$) :

جدول (3-3) القيمة المتوقعة لمتغير الاستجابة الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير الثلاثة ومتوسط مربعات الخطأ لكل قيمة تقديرية ولكل طريقة ومعامل التحديد ومعنوية كل انموذج للانموذج الاول عند كافة احجام العينات عند مستوى القطع $\alpha=0.1$

n	y_{True}	\hat{Y}_{fols}	$\hat{Y}_{ffp(NR)}$	$\hat{Y}_{ffp(EM)}$	$MSE_{\hat{Y}_{fols}}$	$MSE_{ffp(NR)}$	$MSE_{\hat{Y}_{ffp(EM)}}$
10	8.39352	8.40950	8.40525	8.17624	0.01598	0.01172	0.21729

	9.42371	10.40645	9.35860	9.10103	0.98275	0.06511	0.32268
	10.43816	13.88568	10.46956	10.29617	3.44752	0.03140	0.14200
	6.83810	5.20446	6.87203	6.66129	1.63365	0.03393	0.17681
	9.13892	9.56548	9.11020	8.82577	0.42656	0.02872	0.31315
	8.04993	8.08951	8.07151	7.85000	0.03958	0.02158	0.19992
	7.09007	6.50221	7.04334	6.90524	0.58786	0.04673	0.18483
	9.73025	11.19009	9.75263	9.49898	1.45984	0.02238	0.23127
	7.24762	4.86188	7.23388	6.96164	2.38574	0.01374	0.28597
	7.37565	5.61067	7.40894	7.12667	1.76497	0.03329	0.24897
MSE	2.69873	0.00118	0.05722	R^2			
Sig.	0.003	0.000	0.001	0.90	0.99	0.95	
n	y_{True}	\hat{y}_{fols}	$\hat{y}_{ffp(NR)}$	$\hat{y}_{ffp(ME)}$	$MSE_{\hat{y}_{fols}}$	$MSE_{ffp(NR)}$	$MSE_{\hat{y}_{ffp(ME)}}$
20	8.44472	8.14290	8.49980	8.40553	0.30181	0.05509	0.03919
	8.44915	7.99907	8.45582	8.36698	0.45008	0.00668	0.08217
	6.75240	3.51781	6.78121	6.72088	3.23460	0.02881	0.03152
	9.96752	12.04186	9.91525	9.79243	2.07434	0.05226	0.17509
	10.86896	14.70454	10.88538	10.74322	3.83558	0.01642	0.12574
	9.10261	9.41816	9.08593	8.99192	0.31555	0.01668	0.11068
	9.27024	10.22783	9.23006	9.11964	0.95758	0.04019	0.15061
	6.40645	2.35713	6.37404	6.33967	4.04932	0.03241	0.06678
	7.44607	6.01794	7.45227	7.38319	1.42814	0.00620	0.06288
	8.30741	7.82252	8.28828	8.19007	0.48489	0.01913	0.11735
MSE	3.73525	0.00077	0.01017	R^2			
Sig.	0.001	0.000	0.000	0.85	0.94	0.92	
n	y_{True}	\hat{y}_{fols}	$\hat{y}_{ffp(NR)}$	$\hat{y}_{ffp(ME)}$	$MSE_{\hat{y}_{fols}}$	$MSE_{ffp(NR)}$	$MSE_{\hat{y}_{ffp(ME)}}$
35	10.77491	12.14405	10.86946	10.63050	1.36914	0.09455	0.14441
	7.18237	5.84050	7.18430	7.02275	1.34187	0.00193	0.15962
	10.42048	10.92068	10.54096	10.27918	0.50020	0.12047	0.14130
	10.39551	12.05723	10.47991	10.08534	1.66172	0.08441	0.31016
	6.98442	3.99383	6.91247	6.76205	2.99059	0.07195	0.22237
	6.53687	3.21477	6.60187	6.49318	3.32210	0.06500	0.04370
	11.61407	13.72794	11.62073	11.20084	2.11387	0.00666	0.41322
	7.85273	6.81235	7.92760	7.61291	1.04038	0.07487	0.23982
	11.99793	14.79464	12.01307	11.63009	2.79671	0.01514	0.36784
	10.16899	10.77609	10.23017	9.83321	0.60710	0.06118	0.33578
MSE	4.67803	0.00435	0.11303	R^2			

Sig.		0.002	0.000	0.000	0.85	0.93	0.91
n	y_{True}	\hat{y}_{fols}	$\hat{y}_{ffp(NR)}$	$\hat{y}_{ffp(ME)}$	$MSE_{\hat{y}_{fols}}$	$MSE_{ffp(NR)}$	$MSE_{\hat{y}_{ffp(ME)}}$
50	8.41281	7.17704	8.35217	8.25568	1.23576	0.06063	0.15713
	9.84928	9.96769	9.87683	10.05132	0.11842	0.02755	0.20204
	7.93014	6.97123	7.94546	8.03175	0.95891	0.01532	0.10161
	8.49037	7.48907	8.59756	8.59551	1.00130	0.10718	0.10514
	9.18928	9.10094	9.16231	9.35540	0.08834	0.02697	0.16612
	11.08060	12.90107	11.04114	10.97447	1.82047	0.03946	0.10612
	7.98672	6.08417	7.99992	8.25566	1.90255	0.01320	0.26895
	9.05505	8.59276	9.01399	9.19002	0.46229	0.04106	0.13497
	8.57846	6.84553	8.53285	8.45159	1.73293	0.04561	0.12686
	8.20847	7.20784	8.20774	8.28005	1.00063	0.00073	0.07158
MSE		3.92872	0.00181	0.01815	R^2		
Sig.		0.003	0.000	0.000	0.85	0.90	0.81
n	y_{True}	\hat{y}_{fols}	$\hat{y}_{ffp(NR)}$	$\hat{y}_{ffp(ME)}$	$MSE_{\hat{y}_{fols}}$	$MSE_{ffp(NR)}$	$MSE_{\hat{y}_{ffp(ME)}}$
75	11.84767	13.97823	11.84879	11.32800	2.13056	0.00113	0.51967
	10.21231	10.56807	10.20550	9.75831	0.35575	0.00682	0.45400
	10.50098	10.77745	10.40499	9.94678	0.27647	0.09600	0.55420
	7.57307	5.76561	7.60369	7.38086	1.80746	0.03062	0.19221
	9.74928	10.40854	9.77062	9.42521	0.65926	0.02134	0.32407
	11.55020	13.16303	11.46983	10.96473	1.61284	0.08037	0.58547
	9.15956	8.60760	9.15232	8.75479	0.55196	0.00724	0.40478
	7.61664	5.64356	7.72266	7.46328	1.97309	0.10601	0.15336
	8.83007	8.73798	8.82519	8.58154	0.09209	0.00488	0.24853
	8.47562	7.45007	8.48723	8.16484	1.02555	0.01161	0.31078
MSE		2.92897	0.00259	0.16913	R^2		
Sig.		0.001	0.000	0.000	0.81	0.91	0.82
n	y_{True}	\hat{y}_{fols}	$\hat{y}_{ffp(NR)}$	$\hat{y}_{ffp(ME)}$	$MSE_{\hat{y}_{fols}}$	$MSE_{ffp(NR)}$	$MSE_{\hat{y}_{ffp(ME)}}$
100	13.07538	17.27361	13.17427	13.09733	4.19823	0.09889	0.02195
	10.35104	11.20420	10.30925	10.25566	0.85316	0.04179	0.09537
	8.10966	6.66219	8.10417	7.96047	1.44747	0.00550	0.14919
	10.19674	10.84835	10.13006	10.03614	0.65160	0.06668	0.16061
	10.68548	12.24567	10.66089	10.60999	1.56019	0.02459	0.07550
	11.31697	12.50284	11.35354	11.47393	1.18587	0.03657	0.15696
	10.32583	11.01360	10.39618	10.51059	0.68778	0.07035	0.18476
	8.81736	7.98578	8.83973	8.76348	0.83158	0.02237	0.05388

	9.82732	10.67962	9.79943	9.68916	0.85230	0.02789	0.13816
	9.54154	10.37034	9.59133	9.47443	0.82880	0.04979	0.06710
MSE	3.31630	0.00265	0.01454	R^2			
Sig.	0.002	0.000	0.000	0.80	0.92	0.88	

يتضح من الجدول (3-3) وعند مستوى القطع $\alpha=0.1$ ما يأتي :

1- عند حجم عينة $n=10$:

من ملاحظة متوسط مربعات الخطأ (MSE) لكل طريقة، أن طريقة نيوتن - رافسون وفق مبدأ النقطة الثابتة (N-R(FP)) تحقق أقل متوسط خطأ تقديري بلغ 0.00118، مقارنة بطريقة المربعات الصغرى الضبابية FLS وفق مبدأ Diamond التي بلغ فيها 2.69873، وطريقة تعظيم التوقع وفق مبدأ النقطة الثابتة (E-M(FP)) التي بلغ فيها 0.05722 هذا يدل على تفوق طريقة (N-R(FP)) من حيث دقة التقدير، وفعاليتها في تقليص الفجوة بين القيمة الحقيقية والمقدرة. كما تؤكد معنوية النماذج الثلاثة من دلالات إحصائية قوية؛ إذ كانت القيم الاحتمالية (Sig.) أقل من 0.005 في جميع الطرائق، مما يشير إلى ملاءمة النماذج إحصائياً. وكانت Sig. لطريقة نيوتن رافسون التكرارية أقل من باقي الطرائق مما يدل على أنها أكثر معنوية ودقة. أما معامل التحديد R^2 فقد أظهر تفاوتاً في تفسير التباين، حيث سجل أعلى قيمة في طريقة (N-R(FP)) (0.99)، تليها طريقة (E-M(FP)) بـ (0.95)، وأقلها في المربعات الصغرى الضبابية FLS على وفق مبدأ Diamond بـ (0.90).

2- عند حجم عينة $n=20$: يتضح من متوسط مربعات الخطأ (MSE) لكل طريقة، أن طريقة (N-R(FP)) حافظت على دقتها التقديرية مسجلة أقل متوسط خطأ بلغ 0.00077، في حين بلغ متوسط الخطأ لطريقة FLS على وفق مبدأ Diamond 3.73525، وبلغ في طريقة تعظيم التوقع وفق مبدأ النقطة الثابتة 0.010170، وهذا يشير إلى الكفاءة العالية (N-R(FP)) في تمثيل البيانات بدقة. ومن حيث الدلالة الإحصائية، فإن جميع القيم الاحتمالية (Sig.) كانت أقل من 0.005، مما يؤكد معنوية النماذج الثلاثة، لكن تميّزت (N-R(FP)) بأدنى قيمة (0.000)، بما يعزز قوة الانموذج. وفي ما يخص معامل التحديد R^2 ، فقد سجلت (N-R(FP)) أعلى قيمة بلغت 0.94، تليها طريقة (E-M(FP)) بـ 0.92، ثم طريقة FLS على وفق مبدأ Diamond بـ 0.85.

3- عند حجم العينة $n=35$:

أظهرت طريقة (N-R(FP)) استمرار تفوقها، إذ سجلت أقل متوسط خطأ تقديري بقيمة 0.00435، مقارنةً FLS على وفق مبدأ Diamond التي بلغ فيها الخطأ

4.67803، وطريقة E-M(FP) التي بلغ فيها 0.11303، هذه النتائج تؤكد فاعلية طريقة N-R(FP) في تقليص الفجوة بين القيمة الحقيقية والمقدّرة. كما أن جميع النماذج كانت معنوية إحصائيًا، حيث كانت قيمة Sig. أقل من 0.005 في كل الطرق، وايضاً كانت الأقل N-R(FP) بقيمة (0.000)، وبمعامل التحديد R^2 بقيمة 0.93، تلتها طريقة E-M(FP) 0.91، بينما تراجعت طريقة FLS على وفق مبدأ Diamond إلى 0.85.

4- عند حجم العينة $n=50$:

حافظت طريقة N-R(FP) على المرتبة الأولى من حيث دقة التقدير، إذ بلغ متوسط مربع الخطأ لديها 0.00181، وهي الأقل وتتقدم على طريقة E-M(FP) الذي بلغ فيه 0.01815، وطريقة FLS على وفق مبدأ Diamond التي سجلت 3.92872، وتشير هذه القيم إلى قدرة N-R(FP) على تحسين جودة التقدير حتى مع زيادة حجم العينة. وفيما يتعلق بالمعنوية الإحصائية، فقد كانت القيم الاحتمالية لجميع الطرائق أقل من 0.005، مما يدل على صلاحية النماذج، وتفوقت ايضاً طريقة N-R(FP) بأدنى قيمة معنوية (0.000) بمعامل التحديد، مساوي لـ (0.90)، يليه معامل التحديد لطريقة E-M(FP) (0.81)، ثم تاتي طريقة FLS وفق مبدأ Diamond بـ (0.85).

5- عند حجم العينة $n=75$:

تفوقت طريقة N-R(FP) من حيث تقليل متوسط مربع الخطأ إلى 0.00259، مقارنةً مع طريقة E-M(FP) الذي بلغ 0.16913، وبعدهما طريقة FLS على وفق مبدأ Diamond بقيمة 2.92897. وهذا يعكس قدرة طريقة N-R(FP) على الحفاظ على دقة التقدير حتى في العينات الأكبر. كما أن دلالة النماذج الإحصائية بقيت قوية، فجميع القيم الاحتمالية أقل من 0.005، وكانت الاكثر معنوية طريقة N-R(FP) كما في الحالات السابقة. وفيما يخص R^2 ، فقد بلغت في N-R(FP) قيمته 0.91، وفي طريقة E-M(FP) قيمته 0.82، وأدنى قيمة كانت لطريقة FLS على وفق مبدأ Diamond 0.81.

6- عند حجم العينة $n=100$:

ومع زيادة حجم العينة، حافظت طريقة N-R(FP) على أدائها المتميز، فسجلت أقل متوسط مربع خطأ قدره 0.00265، تليها طريقة E-M(FP) بـ 0.01454، فيما بقيت طريقة FLS على وفق مبدأ Diamond متأخرة بفارق كبير، إذ بلغ الخطأ فيها 3.31630 ويؤكد ذلك أن الطريقة التكرارية N-R(FP) أكثر استقراراً في الأداء حتى مع تضخم البيانات، وعلى الرغم من معنوية الطرائق جميعها إلا أن N-R(FP) امتلكت أقل قيمة احتمالية (0.000) اما قيم معامل التحديد R^2 ، فقد سجلت N-R(FP)

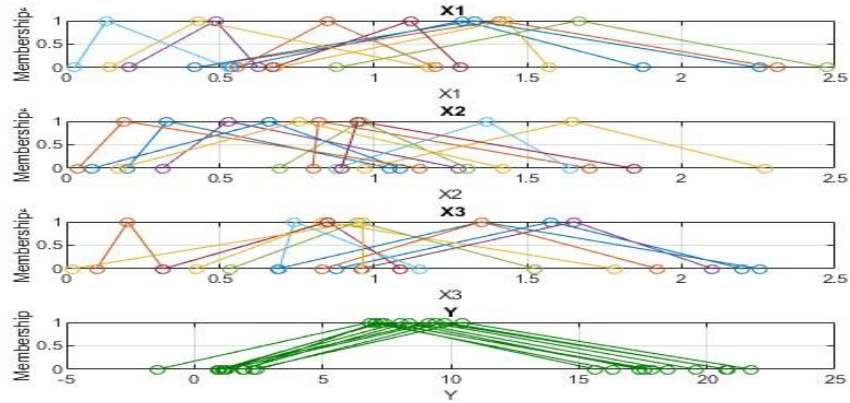
0.92، مقابل 0.88 وطريقة E-M(FP)، وعلى وفق مبدأ FLS Diamond بـ 0.80.

ويمكن أيضاً توضيح المقارنات بين قيم المعلمات ومتوسطات الخطأ لكل منها كالاتي :

جدول (3-4) المعلمات الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير ومتوسط مربعات الخطأ لكل معلمة ومعنوية احصاءة t للانموذج الاول عند احجام العينات كافة عند مستوى القطع $\alpha=0.1$

n	Coefficient Method	$\tilde{\beta}_0$	$\tilde{\beta}_1$	$\tilde{\beta}_2$	$\tilde{\beta}_3$
10	True	2.09	2.06	2.18	2.29
	<i>fOls</i>	-6.93	3.91	6.21	5.97
	MSE	9.03	1.85	4.03	3.68
	<i>ffp(NR)</i>	2.22	2.02	2.10	2.29
	MSE	0.12	0.05	0.08	0.00
	<i>ffp(EM)</i>	1.93	1.97	2.20	2.31
	MSE	0.17	0.10	0.02	0.02
	<i>Sig.fols</i>	0.04	0.02	0.03	0.02
	<i>Sig.ffp(NR)</i>	0.00	0.00	0.00	0.00
	<i>Sig.ffp(EM)</i>	0.00	0.00	0.00	0.00
20	True	3.12	1.93	1.56	1.98
	<i>fOls</i>	-6.32	5.06	3.97	5.96
	MSE	9.44	3.12	2.41	3.97
	<i>ffp(NR)</i>	3.09	1.94	1.59	2.00
	MSE	0.03	0.00	0.03	0.02
	<i>ffp(EM)</i>	3.11	1.91	1.56	1.95
	MSE	0.01	0.03	0.01	0.03
	<i>Sig.fols</i>	0.001	0.004	0.003	0.008
	<i>Sig.ffp(NR)</i>	0.000	0.000	0.000	0.000
	<i>Sig.ffp(EM)</i>	0.000	0.000	0.000	0.000
35	True	1.08	2.02	3.20	3.02
	<i>fOls</i>	-7.51	4.91	6.84	4.98
	MSE	8.59	2.90	3.64	1.96

	<i>ffp(NR)</i>	1.05	2.04	3.23	2.99
	<i>MSE</i>	0.03	0.02	0.03	0.03
	<i>ffp(EM)</i>	0.98	1.83	3.35	2.85
	<i>MSE</i>	0.10	0.19	0.15	0.16
	<i>Sig.fols</i>	0.000	0.000	0.000	0.000
	<i>Sig.ffp(NR)</i>	0.000	0.000	0.000	0.000
	<i>Sig.ffp(EM)</i>	0.000	0.000	0.000	0.000
50	<i>True</i>	3.26	1.26	2.08	2.42
	<i>fOls</i>	-5.09	4.21	5.07	4.49
	<i>MSE</i>	8.35	2.94	2.98	2.07
	<i>ffp(NR)</i>	3.30	1.27	2.06	2.41
	<i>MSE</i>	0.03	0.00	0.03	0.01
	<i>ffp(EM)</i>	3.22	1.21	2.28	2.36
	<i>MSE</i>	0.04	0.06	0.20	0.05
	<i>Sig.fols</i>	0.182	0.001	0.000	0.022
	<i>Sig.ffp(NR)</i>	0.000	0.000	0.000	0.000
	<i>Sig.ffp(EM)</i>	0.000	0.000	0.000	0.000
75	<i>True</i>	2.74	2.00	2.50	2.20
	<i>fOls</i>	-4.20	4.73	4.40	4.35
	<i>MSE</i>	6.94	2.73	1.90	2.15
	<i>ffp(NR)</i>	2.73	2.02	2.49	2.20
	<i>MSE</i>	0.01	0.02	0.01	0.00
	<i>ffp(EM)</i>	2.77	2.00	2.28	2.01
	<i>MSE</i>	0.03	0.00	0.22	0.19
	<i>Sig.fols</i>	0.123	0.001	0.000	0.012
	<i>Sig.ffp(NR)</i>	0.000	0.000	0.000	0.001
	<i>Sig.ffp(EM)</i>	0.000	0.000	0.000	0.000
100	<i>True</i>	2.52	1.31	2.47	3.24
	<i>fOls</i>	-5.92	3.75	5.35	6.26
	<i>MSE</i>	8.44	2.44	2.88	3.02
	<i>ffp(NR)</i>	2.50	1.32	2.48	3.24
	<i>MSE</i>	0.02	0.01	0.01	0.00
	<i>ffp(EM)</i>	2.66	1.13	2.58	3.15
	<i>MSE</i>	0.15	0.18	0.11	0.09
	<i>Sig.fols</i>	0.002	0.002	0.000	0.006

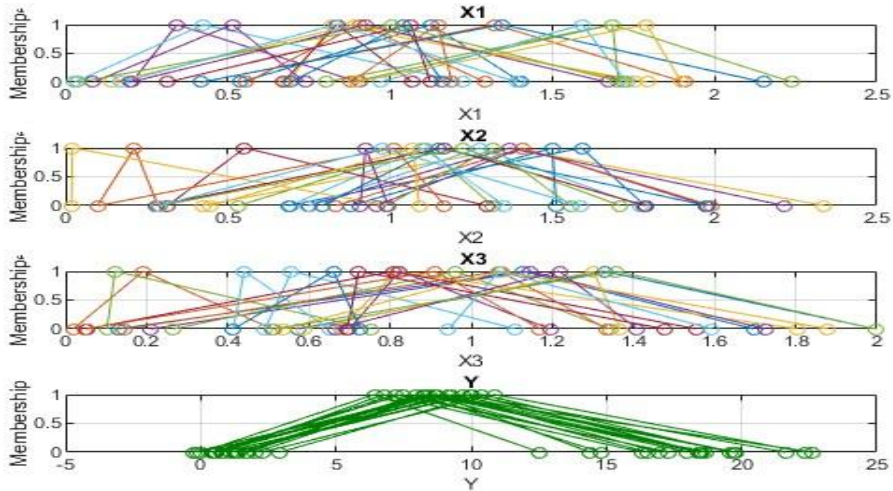


	$Sig.f_{fp}(NR)$	0.000	0.000	0.000	0.000
	$Sig.f_{fp}(EM)$	0.000	0.000	0.000	0.000

يتضح من جدول (3-4) عند مستوى القطع $\alpha=0.1$ ما يأتي:
يلاحظ انه لاحجام العينات (10 ، 20 ، 35 ، 50 ، 75 ، 100) جميعها ولكل معلمات الانموذج الرابع ، $(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ تفوقت طريقة N-R(FP) في ادائها في عملية التقدير لمعلمات الانموذج FRM باستعمال نظرية النقطة الثابتة على باقي طرائق التقدير الاخرى ، حيث كانت الفروقات بين مقدراتها والقيم الحقيقية للمعلمات هي الاقل وجاءت بعدها طريقة E-M(FP) باداء جيد نسبياً في حين اظهرت طريقة FLS اداءً سيئاً لبعض مقدرات المعلمات مما يدل على ضعف دقتها التقديرية وعلى الرغم من معنوية المعلمات بمختلف الطرائق الا ان طريقة N-R(FP) كانت هي الافضل معنوية

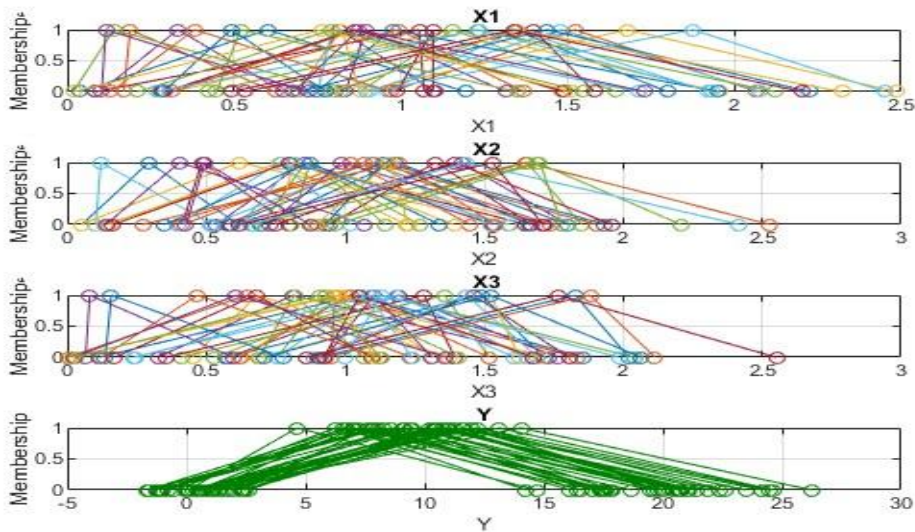
اما ما يخص قيم الانتماء المثلثية للمتغيرات التوضيحية ومتغير الاستجابة للانموذج الاول عند مستوى القطع $\alpha=0.1$ ولمختلف احجام العينات فتتوضح بالاشكال الاتية :

شكل (1-3) قيم الانتماء المثلثية للمتغيرات التوضيحية ومتغير الاستجابة للانموذج الاول عند حجم عينة $n=10$ عند مستوى القطع $\alpha=0.1$
يعرض الشكل (1-3) دوال الانتماء المثلثية للمتغيرات التوضيحية الثلاثة X_1, X_2, X_3 و Y ، إضافة إلى متغير الاستجابة Y ، وذلك عند حجم عينة صغير $n=10$ اذ نلاحظ أن دوال الانتماء في المتغيرات التوضيحية موزعة على مدى ضيق بين القيم 0 إلى 2.5 ، مع تداخل واضح بينها، مما يشير إلى تمثيل دقيق لحالة عدم اليقين في كل متغير؛ حيث تتقاطع الدوال بشكل يغطي كامل النطاق مما يعزز شمولية التمثيل. أما في متغير الاستجابة Y ، فنلاحظ أن دوال الانتماء أكثر تمركزاً، متمائلة تقريباً حول قيمة وسطية تتراوح بين 5 إلى 15، وتظهر بتوزيع متمائل وقاعدة أضيق نسبياً، وهو ما يعكس تمثيلاً ضبابياً منضبطاً يتوافق مع نتائج التحليل الإحصائي ما يدل على أن النمذجة الضبابية باستعمال هذا النوع من دوال الانتماء مثلثية الشكل وفُرت قدرة عالية على تقريب العلاقة بين المتغيرات .

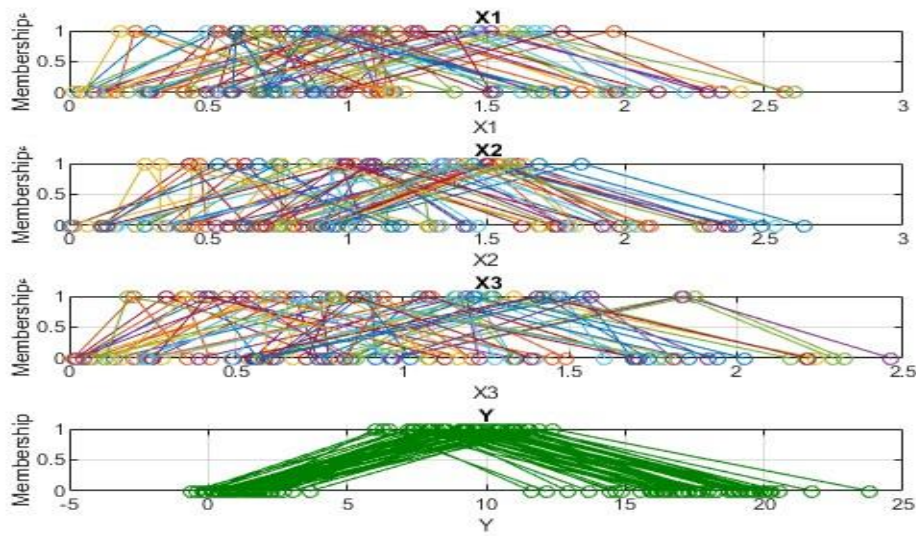


شكل (2-3) قيم الانتماء المثلثية للمتغيرات التوضيحية ومتغير الاستجابة للنموذج الاول عند حجم عينة $n=20$ عند مستوى القطع $\alpha=0.1$

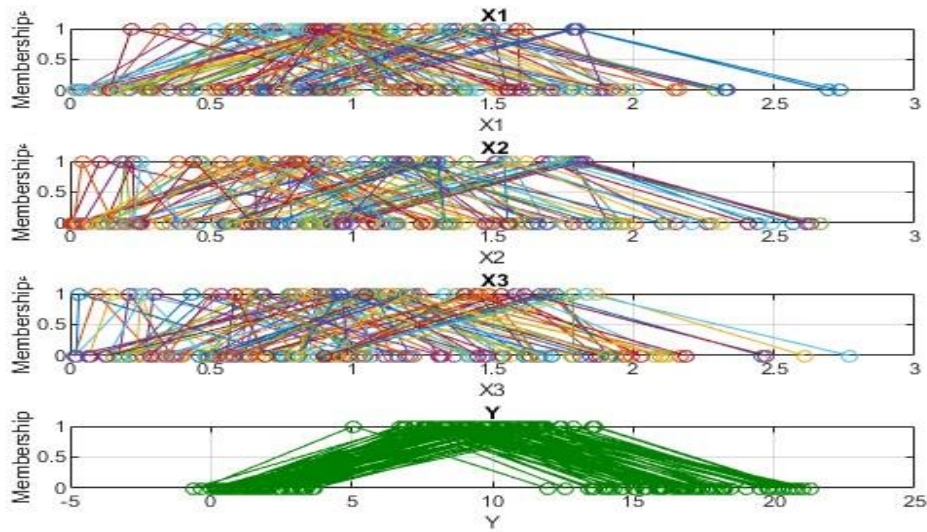
يعرض الشكل (2-3) دوال الانتماء المثلثية للمتغيرات التوضيحية الثلاثة X_1 ، X_2 ، و X_3 ، إضافة إلى متغير الاستجابة Y ، وذلك عند حجم عينة $n=20$ ، ويكشف بصرياً عن تحسن في توزيع دوال الانتماء مقارنة بالشكل السابق عند $n=10$ نلاحظ أن دوال الانتماء للمتغيرات التوضيحية أصبحت أكثر كثافة وتداخلاً، خاصة في النطاقات المركزية حول القيمة 1، ما يشير إلى تمثيل ضبابي أكثر اتساقاً ودقة مع ازدياد حجم العينة. بالنسبة لمتغير الاستجابة Y ، فإن دوال الانتماء الخضراء ما تزال تحافظ على شكل متمائل ومتركز حول القيمة 10 تقريباً، وتبدو أكثر تماسكاً واتساقاً مقارنة بالحجم السابق، ما يعزز دقة النموذج في التنبؤ بالقيم المستجيبة. حيث أصبحت القيم والانخفاضات في دوال الانتماء أكثر نعومة وانتظاماً، بما يدعم المعنوية الإحصائية للنموذج ويقلل من التشويش أو التبعر الذي قد يظهر عند عينات صغيرة.



شكل (3-3) قيم الانتماء المثلثية للمتغيرات التوضيحية ومتغير الاستجابة للانموذج الاول عند حجم عينة $n=35$ عند مستوى القطع $\alpha=0.1$ يظهر الشكل (3-3) اتساعاً وتعقيداً أكبر في التمثيل الضبابي مقارنة بالحالتين السابقتين $n=10$ و $n=20$ ، مما يعكس زيادة في كثافة البيانات وعدد الملاحظات الممثلة. نلاحظ أن دوال الانتماء الخاصة بالمتغيرات X_1 ، X_2 ، و X_3 أصبحت أكثر تداخلاً وانتظاماً، وتغطي بشكل شبه كامل ميشير إلى توزيع متوازن وشامل للمتغيرات داخل النطاق الملاحظ. فنلاحظ استمرار التمرکز حول القيم الوسطية مع شكل هرمي منضبط ومتماثل، مما يدل على الحفاظ على استقرار النمذجة مع ازدياد العينة، لاسيما أن الشكل الأخضر يظهر تمثيلاً أكثر انضغاطاً ودقة مقارنة بالحالات السابقة.

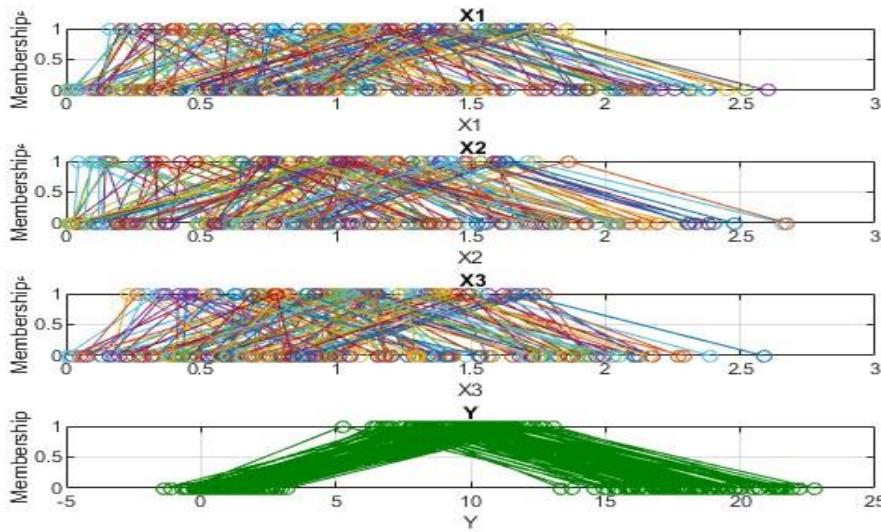


شكل (4-3) قيم الانتماء المثلثية للمتغيرات التوضيحية ومتغير الاستجابة للانموذج الاول عند حجم عينة $n=50$ عند مستوى القطع $\alpha=0.1$ يكشف الشكل (4-3) عن أعلى مستوى من التماسك والانتظام في التمثيل الضبابي مقارنة بالأشكال السابقة. تظهر دوال الانتماء للمتغيرات التوضيحية متداخلة بكثافة أعلى، وموزعة بشكل متوازن مع تماثل واضح في القمم والانحدارات، ما يشير إلى قدرة الانموذج على تمثيل التباين الداخلي في العينة بدقة ومرونة عالية. بالنسبة إلى متغير الاستجابة Y ، تظهر دوال الانتماء الخضراء بتركيز واضح وارتفاع منتظم حول القيم المركزية، مع تناقص سلس على الجانبين، مما يدل على نمط توزيع مستقر وموثوق.

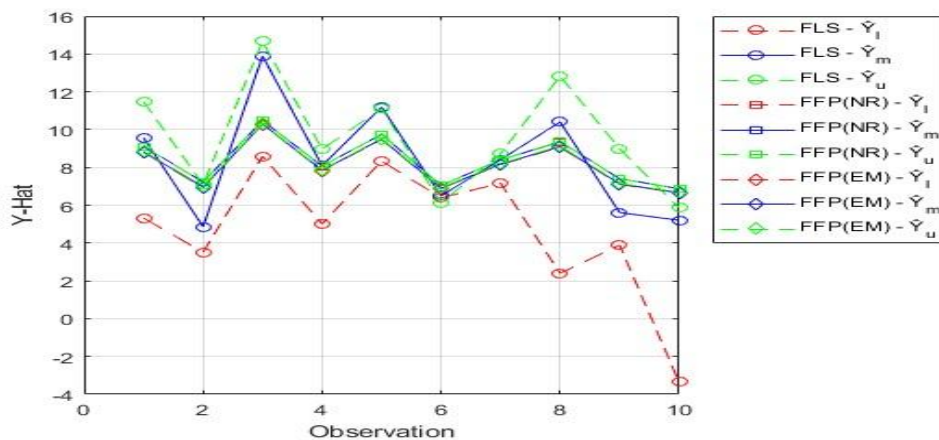


شكل (5-3) قيم الانتماء المثلثية للمتغيرات التوضيحية ومتغير الاستجابة للنموذج الاول عند حجم عينة $n=75$ عند مستوى القطع $\alpha=0.1$

الشكل (5-3) يبرز بوضوح الكثافة العالية والتشابك المنتظم لدوال الانتماء المثلثية للمتغيرات التوضيحية ، ما يدل على تمثيل فائق الدقة للغموض في البيانات. إذ إن الدوال تغطي تقريباً كل المجال المتاح للقيم، بتقاطع محكوم وقمم متجاورة تعكس التحسين المتزايد في مرونة النموذج مع نمو حجم العينة. هذا التشابك المنتظم يتيح للنموذج استيعاب التباين الكامل في العينة دون فقدان الاتساق الرياضي. أما بالنسبة لمتغير الاستجابة ، فالشكل يوضح تموضعاً متماسكاً لدوال الانتماء الخضراء ، مع انخفاض تدريجي ومنتظم في أطراف التوزيع، مما يدل على استقرار واستجابة دقيقة للنموذج تجاه المتغيرات التوضيحية. ، فإن الشكل يعكس أقصى درجات استقرار الانموذج وتوازنه الإحصائي والبنوي، ويؤكد أن زيادة حجم العينة تعزز من كفاءة التمثيل الضبابي وتدعم فعالية النماذج التكرارية في تحليل البيانات الغامضة وتفسير العلاقات الداخلية بين المتغيرات بدقة عالية.

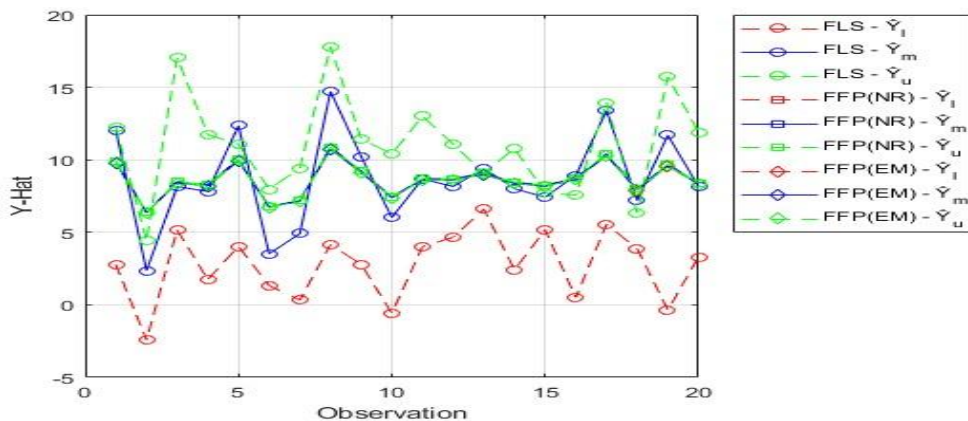


شكل (6-3) قيم الانتماء المثلثية للمتغيرات التوضيحية ومتغير الاستجابة للانموذج الاول عند حجم عينة $n=100$ عند مستوى القطع $\alpha=0.1$ في الشكل (6-3) المعروف عند حجم عينة $n=100$ ، نلاحظ بلوغ النماذج الضبابية مستوى متقدماً من النضج والدقة في التمثيل، ويظهر ذلك من خلال التوزيع الكثيف والمنظم جداً لدوال الانتماء المثلثية لكل من المتغيرات التوضيحية. إذ تغطي هذه الدوال المجال الكامل للقيم (حتى 3 تقريباً) بتداخل محكم ومن دون فراغات ملحوظة، مما يعكس تمثيلاً سلساً ومتكاملاً للتنوع داخل العينة. هذا النمط الكثيف المنتظم يسهم مباشرة في تعزيز دقة التقدير، ويقلل من التحيز والانحرافات الناتجة عن تمثيل الغموض. بالنسبة لمتغير الاستجابة، فإن دوال الانتماء الخضراء تحتفظ بتمركزها حول القيم المتوسطة (حوالي 7 إلى 13) مع تقوس متناظر ومتناغم يعبر عن استقرار شديد في نتائج الانموذج. ويُلاحظ أن التوزيع أصبح أكثر نعومة، أي أن تقاطعات الدوال لا تتسبب في طفرات أو انقطاعات، مما يعكس مواءمة الانموذج لاحجام العينات الكبيرة.



شكل (7-3) منحنى القيمة المتوقعة لمتغير الاستجابة عند التضييب للانموذج الاول عند حجم عينة $n=10$ عند مستوى القطع $\alpha=0.1$

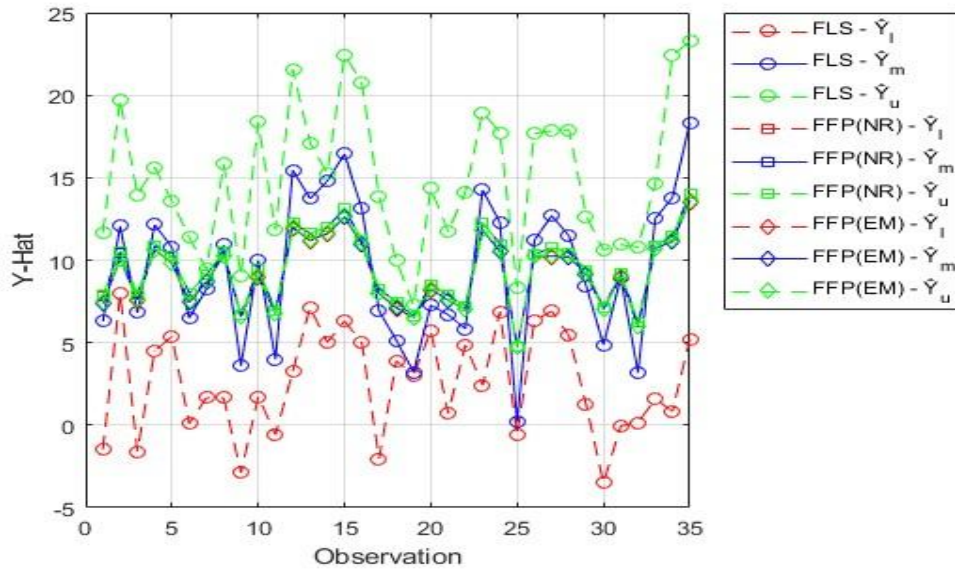
يبين شكل (7-3) منحنيات القيمة المتوقعة لمتغير الاستجابة \hat{Y} في الانموذج الأول عند حجم عينة صغير $n=10$ ، ويقارن بين ثلاث طرائق تقدير ضبابية هي المربعات الصغرى الضبابية على وفق مبدأ (FLS) Diamond ، وطريقة (N-R(FP)) ، وطريقة (E-M(FP))، إذ تشمل كل طريقة ثلاث مستويات للتقدير هي الحد الأدنى Y_L ، والقيمة المتوسطة Y_m ، والحد الأعلى Y_u ويُظهر الشكل بوضوح أن طريقة FLS تعاني من تشتت ملحوظ، خاصة في الحدود الدنيا ، ما يعكس ضعفًا في دقة التقدير عند هذا الحجم من العينة، في حين تبدو الطريقتان (E-M(FP) و N-R(FP)) أكثر تماسكًا واتساقًا، إذ تتقارب حدود التقدير حول القيمة المتوسطة بشكل منتظم. وتُظهر (N-R(FP)) أفضل أداء، حيث تتصف حدودها العليا والدنيا بانتظام واضح وثبات نسبي يعكس دقة الانموذج في تمثيل الغموض والتنبؤ بالقيم الحقيقية. أما طريقة تعظيم التوقع على وفق مبدأ النقطة الثابتة (E-M(FP)) ، فعلى الرغم من تماسكها العام، إلا أن بعض المشاهدات أظهرت فيها تباينًا طفيفًا بين الحدين الأعلى والأدنى، مما يشير إلى تأثيرها بدرجة أكبر بتقلبات البيانات الصغيرة. وبذلك فإن الشكل يؤكد تفوق (N-R(FP)) من حيث الاستقرار والدقة الإحصائية في تقدير متغير الاستجابة تحت ظروف ضبابية وبيانات محدودة.



شكل (8-3) منحنى القيمة المتوقعة لمتغير الاستجابة عند التضييق للانموذج الاول عند حجم عينة $n=20$ عند مستوى القطع $\alpha=0.1$

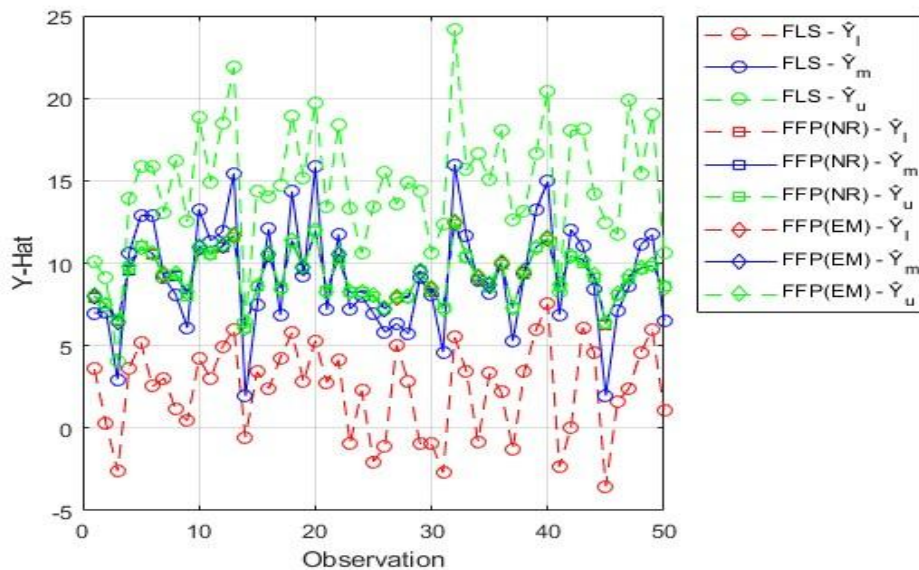
يبين شكل (8-3) منحنيات القيمة المتوقعة لمتغير الاستجابة \hat{Y} في الانموذج الأول عند حجم عينة $n=20$ ، أن طريقة FLS ما تزال تعاني من تشتت كبير في الحدود الدنيا، مع انحدارات حادة وضعف في التقارب مع القيم المتوسطة، مما يشير إلى محدودية قدرتها في تمثيل البيانات بدقة عند هذا الحجم. في المقابل، فإن الطريقتين (E-M(FP)) و (N-R(FP)) تحافظان على تمثيل متماسك ومنتظم، حيث تتقارب حدودهما الثلاثة بشكل واضح حول القيمة المركزية، ويعكس هذا التماثل استقرار الانموذج ودقته في احتواء الغموض. ويلاحظ أن طريقة (N-R(FP)) ما تزال تحتفظ بالأفضلية النسبية، إذ أن تقلبات حدودها أقل حدة وأكثر انتظامًا مقارنة بـ (E-M(FP))، التي أظهرت في بعض المشاهدات اتساعًا ملحوظًا بين الحدين الأدنى والأعلى، مما يشير إلى تأثيرها النسبي بالتقلبات الداخلية للبيانات. وعليه، يثبت الشكل أن إنموذج N-

R(FP) هو الأكثر كفاءة ودقة إحصائية عند هذا المستوى من العينة، ويستمر في تقديم أداء متوازن في تمثيل التقدير الضبابي لمتغير الاستجابة.

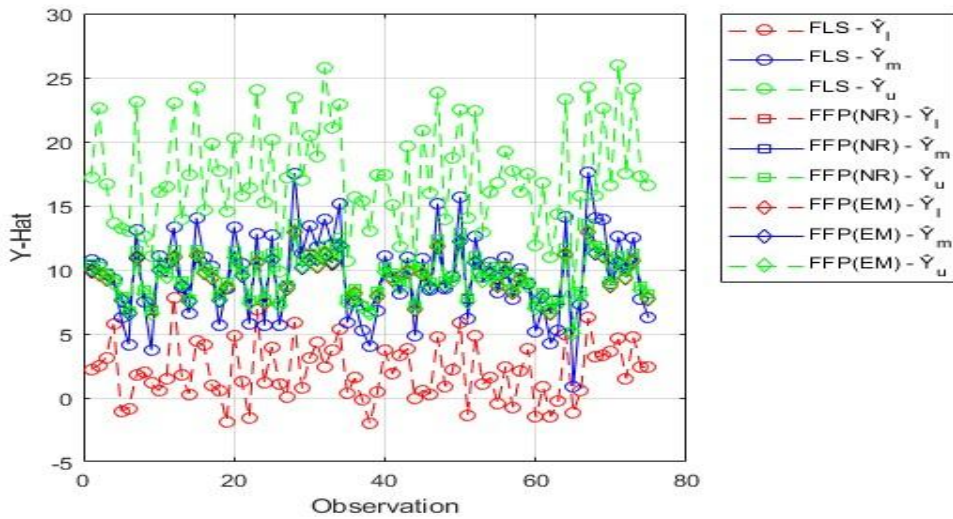


شكل (9-3) منحى القيمة المتوقعة لمتغير الاستجابة عند التضبيب للانموذج الاول عند حجم عينة $n=35$ عند مستوى القطع $\alpha=0.1$

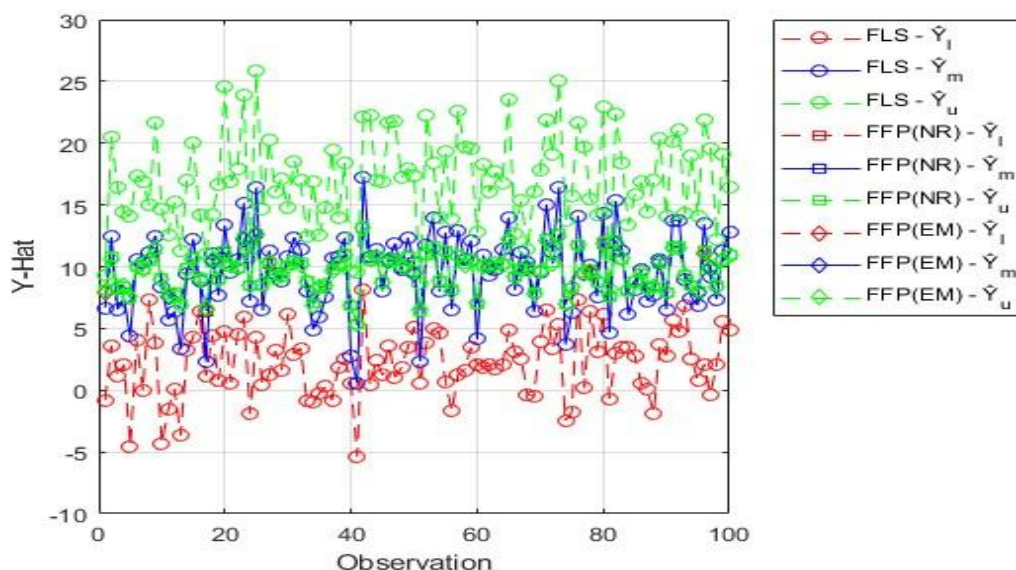
يبين شكل (9-3) أن طريقة FLS ما تزال الأضعف من حيث الدقة، حيث تظهر تقلبات حادة في الحد الأدنى Y_L تصل إلى مستويات منخفضة جداً، مما يدل على عدم قدرتها على تتبع نمط البيانات بدقة عند هذا الحجم. في المقابل، ولكن تبدو N-R(FP) أكثر استقراراً، إذ تُظهر منحنياتها تقارباً منتظماً ومنتاسقاً بين الحدين الأعلى والأدنى حول القيمة المتوسطة، مما يدل على أداء موثوق واستقرار إحصائي أكبر في التقدير. أما طريقة E-M(FP) فمع أنها قريبة في أدائها من N-R(FP)، إلا أن حدودها العليا Y_u تظهر بعض الاتساع في عدة مشاهدات، مما يعكس حساسية نسبية لتشتت البيانات.



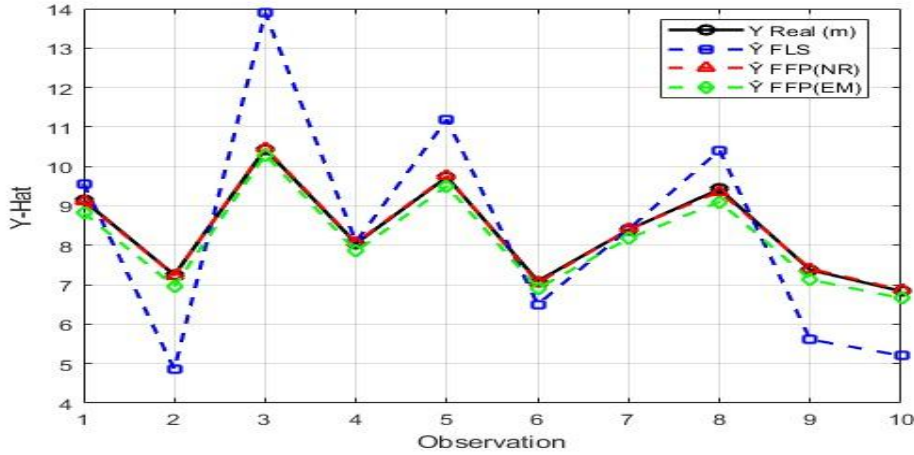
شكل (10-3) منحني القيمة المتوقعة لمتغير الاستجابة عند التضييب للانموذج الاول عند حجم عينة $n=50$ عند مستوى القطع $\alpha=0.1$ يبين شكل (10-3) أن طريقة FLS لا تزال تُظهر أداءً ضعيفاً، إذ تتسم حدودها الدنيا بتقلبات حادة وهبوط شديد في بعض المشاهدات، ما يعكس ضعفاً في دقة التقدير حتى مع حجم عينة أكبر. في المقابل، تبرز طريقتا N-R(FP) و E-M(FP) بأداء أكثر تماسكاً، حيث تتقارب منحنيتهما حول القيمة المتوسطة وتُظهر اتساقاً نسبياً على امتداد المشاهدات. وتستمر N-R(FP) في التفوق من حيث الاستقرار، إذ تبدو حدودها العليا والدنيا أكثر تقارباً وتوازناً مقارنة بـ E-M(FP)، التي تُظهر اتساعاً طفيفاً في بعض النقاط، مما يشير إلى تأثيرها بتقلبات البيانات على الرغم من تحسن أدائها العام. ويعكس الشكل أن ازدياد حجم العينة ساهم في تعزيز دقة النماذج التكرارية، وخاصة N-R(FP)، التي أثبتت تفوقاً واضحاً في تمثيل الغموض والتنبؤ المستقر بالقيم تحت بيئة ضبابية.



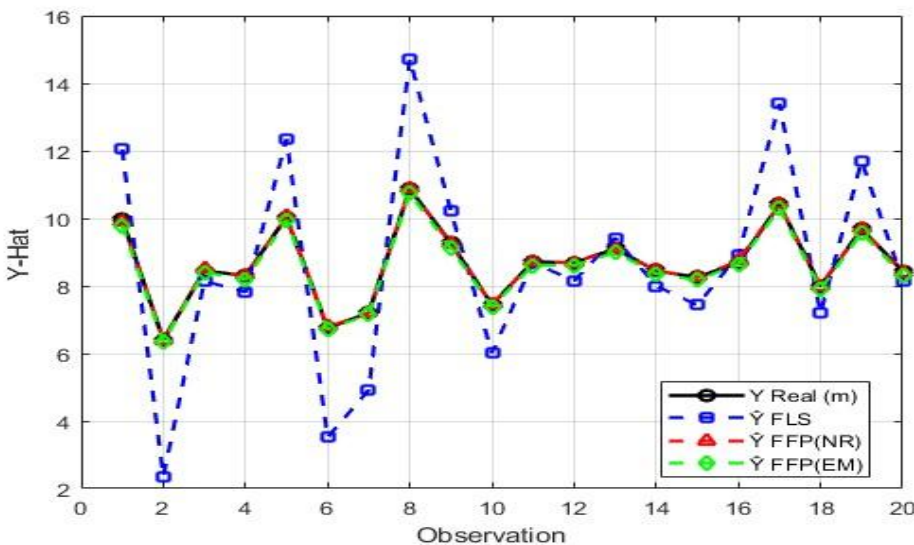
شكل (11-3) منحني القيمة المتوقعة لمتغير الاستجابة عند التضييب للانموذج الاول عند حجم عينة $n=75$ عند مستوى القطع $\alpha=0.1$ يعرض شكل (11-3) استمرار ضعف أداء FLS، إذ أن منحنياتها خاصة Y_m و Y_L تعاني من تشتت أفقي واتساع كبير بين القيم، ما يشير إلى محدودية في دقة التمثيل الضبابي رغم كبر حجم العينة. بالمقابل، تُظهر الطريقتان N-R(FP) و E-M(FP) أداءً أكثر تماسكاً واتزاناً، مع تمركز القيم المتوسطة حول مدى ثابت نسبياً وتداخل منتظم بين الحدود العليا والدنيا، ما يعكس نمذجة أكثر واقعية لعدم اليقين. ويبرز من المنحنيات أن N-R(FP) تحتفظ بتفوقها من حيث انتظام الحدود وقربها من القيمة المركزية، بينما تُظهر E-M(FP) بعض التذبذب في الحدود العليا في مشاهدات معينة، مما يشير إلى حساسيتها النسبية لزيادة العينة وتنوع البيانات.



شكل (12-3) منحني القيمة المتوقعة لمتغير الاستجابة عند التضبيب للانموذج الاول عند حجم عينة $n=100$ عند مستوى القطع $\alpha=0.1$ يبين شكل (12-3) أن طريقة FLS ما تزال الأضعف أداءً، حيث تعاني من تشتت شديد في القيم الدنيا وغياب انتظام واضح، ما يعكس هشاشتها في تمثيل عدم اليقين حتى مع ازدياد حجم العينة. في المقابل، تُظهر الطريقتان E-M(FP) و N-R(FP) تماسكًا واستقرارًا ملحوظين، حيث تتركز القيم المتوسطة في نطاق متوازن، والحدود العليا والدنيا أكثر قربًا من بعضها البعض مقارنةً بـ FLS، مما يدل على تمثيل أكثر دقة واتزانًا للبيانات الضبابية. وتُثبت طريقة N-R(FP) تفوقها المستمر، إذ أن منحنياتها تظهر أقل تقلبًا وأكثر انتظامًا عبر المشاهدات، ما يدل على أنها الأكثر قدرة على التكيف مع البيانات الضخمة من دون أن تفقد اتساقها البنوي. أما طريقة E-M(FP)، فعلى الرغم من أدائها المقبول، إلا أن تذبذبًا طفيفًا في حدودها العليا يعكس حساسيتها لبعض التوزيعات داخل العينة.

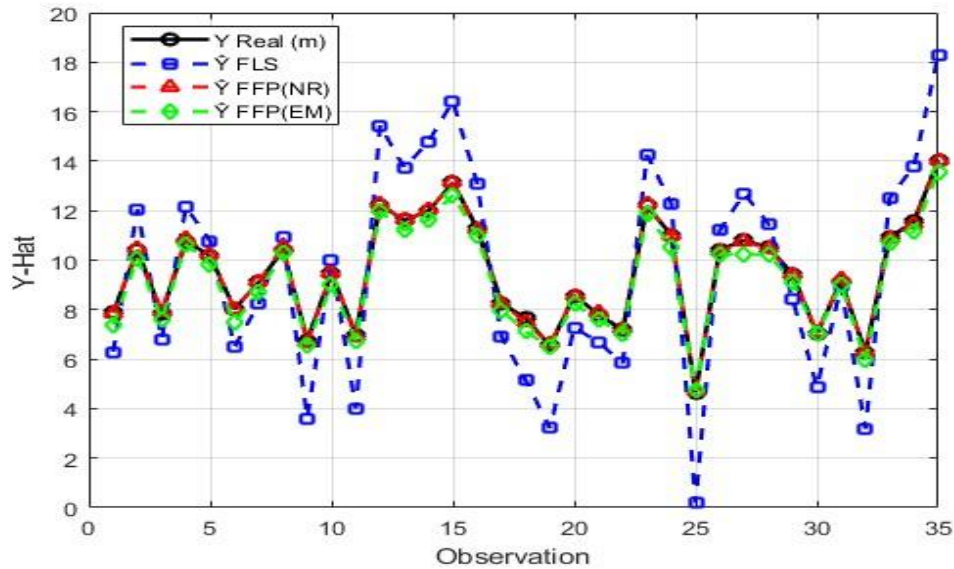


شكل (3-13) منحنى القيمة المتوقعة لمتغير الاستجابة بعد التضبيب عند طرائق التقدير للانموذج الاول عند حجم عينة $n=10$ عند مستوى القطع $\alpha=0.1$ يبين شكل (3-13) أن طريقتي $N-R(FP)$ و $E-M(FP)$ تقدمان نتائج شبه متطابقة مع القيم الحقيقية، إذ تقترب المنحنيات الحمراء والخضراء بشكل دقيق جداً من المنحنى الأسود، مما يدل على دقة عالية في التقدير على الرغم من صغر حجم العينة. في المقابل، تبدو طريقة FLS أقل دقة بشكل واضح، حيث ينحرف منحناها الأزرق عن القيم الحقيقية في عدة نقاط، مما يعكس ضعفها في تمثيل التقدير المركزي بشكل متوازن. هذا الانحراف في FLS يُبرز محدوديتها في التعامل مع البيانات الصغيرة مقارنة بالطريقتين التكراريتين، حيث يُظهر $N-R(FP)$ بشكل خاص أداءً أكثر انساقاً وتماهياً مع البيانات الحقيقية. وعليه، فإن الشكل يؤكد أن استعمال خوارزميات النقطة الثابتة، ولا سيما نيوتن-رافسون، يحقق تفوقاً ملحوظاً في دقة التقدير الضبابي لمتغير الاستجابة حتى في ظل عينات صغيرة.



شكل (3-14) منحنى القيمة المتوقعة لمتغير الاستجابة بعد التضبيب عند طرائق التقدير للانموذج الاول عند حجم عينة $n=20$ عند مستوى القطع $\alpha=0.1$

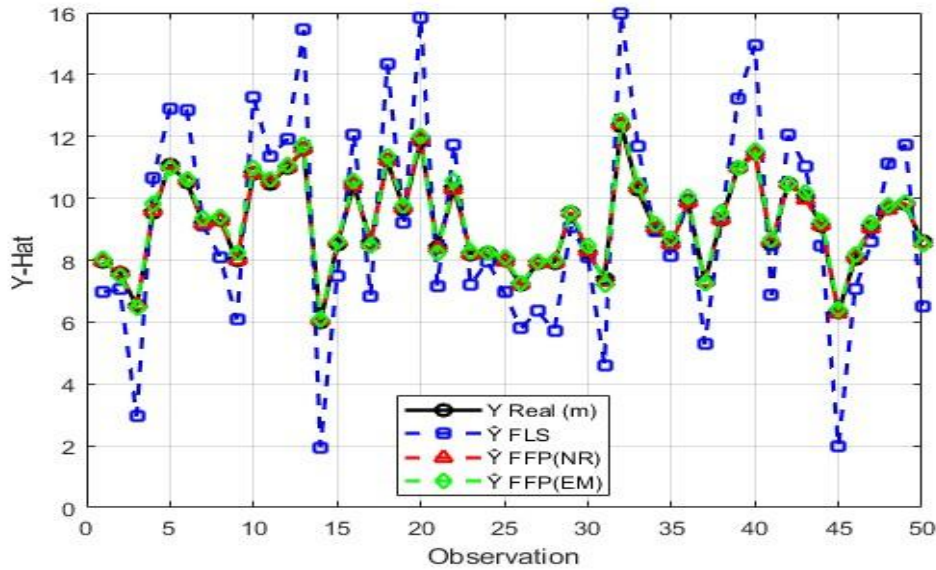
يعرض شكل (14-3) أن طريقتي N-R(FP) و E-M(FP) تقتربان بشدة من المنحنى الأسود الذي يمثل القيم الحقيقية، مما يعكس دقة عالية وثباتاً في التقدير حتى مع مضاعفة حجم العينة مقارنة بالشكل السابق. في المقابل، يظل منحنى FLS متذبذباً بشكل واضح، إذ يُظهر انحرافات كبيرة في عدة مشاهدات، وخاصة عند النقاط 2، 5، 8، و17، حيث يتباعد عن المنحنى الحقيقي بفارق ملحوظ، ما يدل على ضعف قدرة هذه الطريقة على تمثيل العلاقات الغامضة بدقة كافية. ويبرز من الشكل أن خوارزمية او طريقة (N-R(FP)) تحافظ على مستوى عالٍ من المطابقة مع القيم الفعلية، فيما تُظهر (E-M(FP)) أداءً قريباً جداً منها مع بعض الفروقات الدقيقة.



شكل (15-3) منحنى القيمة المتوقعة لمتغير الاستجابة بعد التضييب عند طرائق التقدير للانموذج الاول عند حجم عينة $n=35$ عند مستوى القطع $\alpha=0.1$

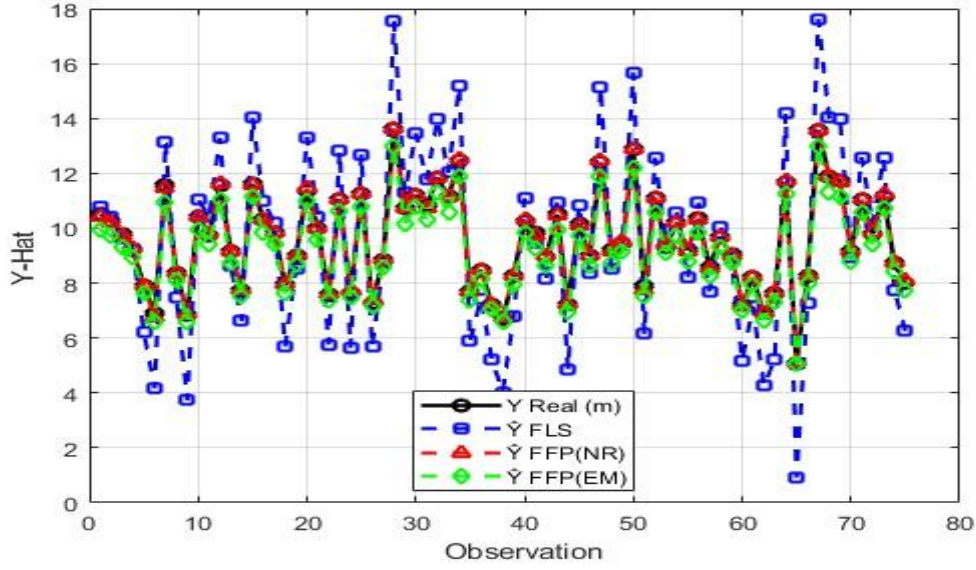
يبين شكل (15-3) أن طريقتي N-R(FP) و E-M(FP) تقدمان أداءً متقارباً جداً من القيم الحقيقية، حيث تتطابق منحنيتهما تقريباً مع المنحنى الأسود الممثل للبيانات الواقعية، مما يعكس دقة عالية واستقراراً متزايداً في التقدير مع تزايد حجم العينة. أما طريقة FLS فتواصل إظهار تذبذبات حادة، مع انحرافات واضحة عن القيم الفعلية ما يدل على ضعف موثوقيتها في التقدير وسط البيانات الضبابية. ويؤكد الشكل أن

خوارزمية N-R(FP) ما تزال تحتفظ بأفضل أداء، تليها E-M(FP) مع تقارب وثيق بينهما، بينما يتراجع أداء FLS على الرغم من كبر حجم العينة.

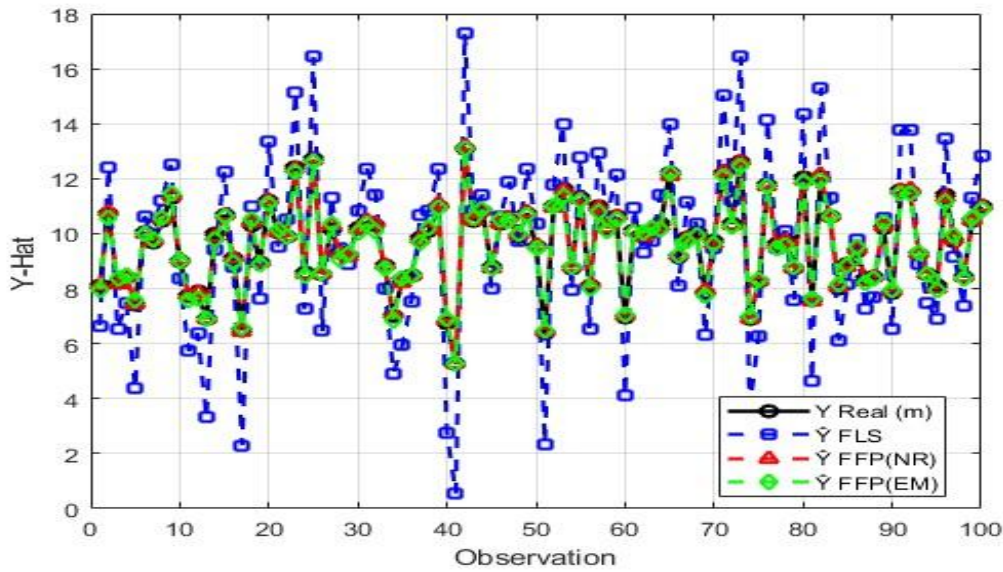


شكل (3-16) منحنى القيمة المتوقعة لمتغير الاستجابة بعد التضبيب عند طرائق التقدير للانموذج الاول عند حجم عينة $n=50$ عند مستوى القطع $\alpha=0.1$

يبين شكل (3-16) أن طريقتي N-R(FP) و E-M(FP) تحافظان على تطابق شبه تام مع المنحنى الأسود الممثل للقيم الفعلية، حيث تسير خطوطهما بشكل متماسك حول المنحنى الحقيقي وبدقة عالية، مما يؤكد استقرار النماذج التكرارية وكفاءتها في تمثيل التقديرات الضبابية حتى مع ارتفاع عدد المشاهدات. في المقابل، تستمر طريقة FLS في الانحراف عن القيم الحقيقية بشكل كبير، ويظهر ذلك عن طريق التذبذب الحاد في المنحنى الأزرق، خاصة عند الذروات والانخفاضات، ما يدل على ضعفها في التقاط الأنماط الدقيقة وتقدير العلاقات الغامضة.



شكل (17-3) منحنى القيمة المتوقعة لمتغير الاستجابة بعد التضبيب عند طرائق التقدير للانموذج الاول عند حجم عينة $n=75$ عند مستوى القطع $\alpha=0.1$ يبين شكل (17-3) أن كلاً من $N-R(FP)$ و $E-M(FP)$ تقتربان بدرجة عالية من القيم الحقيقية، حيث تتطابق منحنياهما مع المنحنى الأسود بشكل دقيق، مما يدل على استقرار وتكامل الأداء الإحصائي للانموذجين التكراريين مع تزايد حجم العينة. أما طريقة FLS، فلا تزال تعاني من تذبذب واضح، حيث ينحرف منحناها الأزرق بشكل متكرر عن الاتجاه العام للبيانات، لاسيما عند القمم والانخفاضات الحادة، ما يعكس ضعفها في مواكبة تقلبات البيانات ضمن بيئة ضبابية. ويبرز أداء $N-R(FP)$ كالأكثر استقراراً وتوازناً، يليه $E-M(FP)$ بدرجة تقارب كبيرة، بينما يتراجع أداء FLS نسبياً رغم ازدياد عدد المشاهدات.



شكل (18-3) منحني القيمة المتوقعة لمتغير الاستجابة بعد التضييب عند طرائق التقدير
للانموذج الاول عند حجم عينة $n=100$ عند مستوى القطع $\alpha=0.1$

يبين شكل (18-3) أن كلاً من E-M(FP) و N-R(FP) يقدمان تطابقاً شبه مثالي مع المنحني الأسود الممثل للقيم الحقيقية عند حجم عينة $n=100$ ، حيث تتداخل منحنياتهما بانسجام تام مع التغيرات الدقيقة لمتغير الاستجابة، مما يؤكد فعاليتهما في تمثيل التقدير الضبابي بدقة عالية، لا سيما في ظل بيانات كبيرة الحجم. في المقابل، يظهر منحني FLS بتذبذباً حاداً وانحرافات واضحة عن القيم الفعلية في مواضع متعددة، لا سيما في القمم والانخفاضات، مما يدل على استمرار ضعفه في التعامل مع البيانات غير اليقينية حتى عند ارتفاع عدد المشاهدات. ويثبت الشكل أن N-R(FP) يقدم الأداء الأفضل من حيث الاتساق والثبات، يليه E-M(FP) بدرجة عالية من القرب، بينما تؤكد FLS محدوديتها في نمذجة الاستجابة الضبابية.

اما ما يخص نتائج التجربة الثانية (نموذج الانحدار الضبابي بمستوى القطع 0.5) وايضاً للتجربة الثالثة (إنموذج الانحدار الضبابي بمستوى القطع 0.8) ومنعاً للتكرار في الرسالة سيتم تلخيص مايتوضح من نتائج الجداول لكلا التجريبتين والتي يمكن للقرئ مراجعتها التي تم وضعها في الملحق (B) وبما لا ينقص من الملاحظات المهمة التي تخدم سير البحث في الرسالة وكالاتي :

1- لكلا التجريبتين الثانية والثالثة ولاحجام العينات المختارة في تجربة المحاكاة اظهرت طريقة N-R (FP) في جداول متوسط مربعات الخطا ومعاملات التحديد تفوقها على ببقية طرائق التقدير E-M(FP) و FLS على مبدأ Diamond في عملية التقدير لمعاملات إنموذج الانحدار الضبابي FRM لامتلاكها اقل قيمة MSE للانموذج فضلاً عن امتلاكها اعلى قيمة معامل التحديد R^2 وعلى الرغم من معنوية جميع مقدرات الطرائق جميعها الا ان افضل اداءً وكفاءة في عملية التقدير هي طريقة N-R (FP) كونها تمتلك اقل دلالة احتمالية 0.000 وهي بذلك تتوافق الى ما تم ملاحظته في التجربة الاولى (إنموذج الانحدار الضبابي بمستوى القطع 0.1).

2- بالاعتماد على جداول التقديرات لمعاملات الانحدار الضبابي للتجريبتين الثانية والثالثة اظهرت نتائجهما على تفوق طريقة التقدير N-R(FP) على بقية الطرائق اذ اظهرت فروقاً اقل من الطرائق الاخرى بين القيم التقديرية والحقيقية علماً بان المقدرات جميعها كانت معنوية الا انها كان الافضل من بينها لامتلاكها اقل MSE للمعلمة و اقل دلالة احتمالية وقد اظهرت طريقة او خوارزمية E-M(FP) اداءً مقبولاً نسبياً في حين ظلت طريقة FLS على مبدأ Diamond اداءً مبتعداً عن

الكفاءة في التقدير لاسيما مع زيادة حجم العينة وتغير مستوى القطع في البيانات وهي بذلك تتوافق من ملاحظات نتائج التجربة الاولى .
 3- بالاعتماد على الاشكال البيانية للتجربتين الثانية والثالثة نجد انه متوافق مع ما تم ملاحظته في التجربة الاولى بالنسبة لتمثيل دوال الانتماء للبيانات سواء للمتغير المعتمد والمتغيرات التوضيحية مع زيادة حجم العينة.

ولتوضيح تأثير مستوى القطع على قيمة متوسط مربعات الخطأ وفقاً لاجسام العينات المفترضة ولكل طريقة تقدير يمكن تكوين الجدول الاتي :

جدول (5-3) مقارنة تأثير مستوى القطع على متوسط مربعات الخطأ على وفق لكل حجم العينة لكل طريقة تقدير

MSE (N-R(FP)) $\alpha=0.8$	MSE (N-R(FP)) $\alpha=0.5$	MSE (N-R(FP)) $\alpha=0.1$	حجم العينة
0.00118	0.00118	0.00118	n=10
0.00121	0.00111	0.00077	n=20
0.00435	0.00435	0.00435	n=35
0.00181	0.00181	0.00181	n=50
0.00259	0.00259	0.00259	n=75
0.00265	0.00265	0.00265	n=100
MSE (E-M(FP)) $\alpha=0.8$	MSE (E-M(FP)) $\alpha=0.5$	MSE (E-M(FP)) $\alpha=0.1$	حجم العينة
0.00190	0.00185	0.00170	n=10
0.00136	0.00125	0.00090	n=20
0.00460	0.00460	0.00460	n=35
0.00190	0.00190	0.00190	n=50
0.00270	0.00270	0.00270	n=75
0.00280	0.00280	0.00280	n=100
MSE (FLS) $\alpha=0.8$	MSE (FLS) $\alpha=0.5$	MSE (FLS) $\alpha=0.1$	حجم العينة
0.00881	0.00920	0.01050	n=10
0.00762	0.00780	0.00840	n=20
0.00710	0.00710	0.00710	n=35
0.00616	0.00610	0.00590	n=50
0.00559	0.00550	0.00520	n=75
0.00558	0.00540	0.00480	n=100

يلاحظ الجدول (5-3) ما ياتي:

1- تحليل نتائج طريقة N-R(FP)

أظهرت طريقة التقدير N-R(FP) ثباتًا واضحاً في أداءها عند جميع مستويات القطع الضبابي $\alpha = 0.1, 0.5, 0.8$ وعبر مختلف أحجام العينات. فقد بقي متوسط مربعات الخطأ (MSE) ثابتاً تماماً في معظم العينات، بل لم يسجل أي تغير يذكر حتى في العينات الصغيرة مثل $n=10$ و $n=20$ ، باستثناء فرق طفيف جداً عند $n=20$ إذ ارتفع من 0.00077 إلى 0.00121). هذا الثبات الملحوظ يدل على قدرة الطريقة على التعامل بكفاءة عالية مع الضبابية وتقديم تقديرات دقيقة وغير متأثرة باتساع دوال الانتماء، مما يجعلها مناسبة تماماً للاستعمال في بيانات ضبابية تتطلب استقراراً عددياً عالياً من دون الحاجة لإعادة ضبط α

: نتائج طريقة E-M(FP) -2

أظهرت طريقة E-M(FP) أداءً جيداً عموماً، مع تباين محدود في MSE بين مستويات القطع المختلفة. لوحظ وجود ارتفاع طفيف في قيم MSE عند $\alpha=0.5$ و $\alpha=0.8$ مقارنةً بـ $\alpha=0.1$ ، خاصة في العينات الصغيرة مثل $n=10$ و $n=20$ ، مما يشير إلى بعض الحساسية تجاه تغير مجال الضبابية. غير أن هذه الفروق تتلاشى تقريباً في العينات الأكبر $n=35$ فما فوق، حيث استقرت القيم تماماً. هذا يشير إلى أن E-M(FP) تعتبر طريقة جيدة لكنها تعتمد بدرجة أكبر على حجم العينة لتحقيق أدائها الأمثل، وهو ما يجعل استعمالها مفضلاً عندما تتوفر بيانات كافية وكبيرة الحجم.

: تحليل نتائج طريقة FLS -3

أظهرت طريقة المربعات الصغرى الضبابية FLS تأثر أكثر بتغير α ، والأضعف من حيث دقة التقدير. فعند $\alpha=0.1$ ، كانت قيم MSE مرتفعة بشكل لافت بلغت 0.01050 عند $n=10$ ، ثم بدأت بالانخفاض الطفيف عند $\alpha=0.5$ ، قبل أن تعاود الارتفاع في بعض الحالات عند $\alpha=0.8$ ، كما في $n=50$ و $n=100$ ، وهذا النمط غير المنتظم يعكس حساسية الطريقة الكبيرة لمجال القطع، ويُظهر عدم استقرار عددي لاسيما في العينات الصغيرة والمتوسطة. وعلى الرغم من أن أداء FLS يتحسن جزئياً عند ازدياد حجم العينة، إلا أن قيم الخطأ تبقى أعلى نسبياً من الطريقتين الأخرتين.

الفصل الرابع

الجانب التطبيقي

4-1 تمهيد: (Preface)

تم في هذا الفصل استعمال بيانات حقيقية ضبابية حول فيروس المتلازمة التنفسية الحادة الشديدة كورونا 2 (SARS-CoV-2) لتطبيق طريقة التقدير الأفضل التي اثبتت في الجانب التجريبي لتقدير متغير الاستجابة مع اجراء الاختبارات اللازمة للبيانات

4-2 فيروس المتلازمة التنفسية الحادة الشديدة – كورونا 2 (SARS-CoV-2)

هو اختصار لـ (Severe Acute Respiratory Syndrome Coronavirus 2) وهو الفيروس المسؤول عن مرض COVID-19 الذي تفشى عالمياً منذ نهاية عام 2019. يتميز الفيروس ببنية مغلقة تحوي حمضاً نووياً من نوع RNA أحادي السلسلة موجب الاتجاه، وتُغطى بنيته بغلاف دهني تتوزع عليه بروتينات شوكية تُعرف بـ Spike Proteins (S)، والتي تلعب دوراً حاسماً في دخول الفيروس إلى الخلايا المضييفة عن طريق ارتباطها بمستقبلات ACE2 المنتشرة على سطح خلايا الرئة، والأمعاء، والكلية، وأعضاء أخرى [35]. وتتراوح فترة الحضانة (الزمن بين التعرض للفيروس وظهور الأعراض) بين يومين وأربعة عشر يوماً. وتبدأ الأعراض غالباً بحمى وسعال جاف وإرهاق، وقد تترافق مع فقدان حاسة الشم أو التذوق. أما في الحالات المتقدمة، فقد تتطور الحالة إلى ضيق تنفس، ألم في الصدر، انخفاض تشبع الأكسجين، أو حتى فشل تنفسي حاد نتيجة متلازمة الضائقة التنفسية الحادة (ARDS) هذا التدهور يُعزى في كثير من الحالات إلى ما يُعرف بـ (عاصفة السيتوكينات)، وهي استجابة مناعية مفرطة تتميز بارتفاع مستويات IL-6 و-TNF α وغيرها من المؤشرات الالتهابية التي تُحدث تلقاً واسعاً في الأنسجة. [46]

سريرياً، تُعد بعض المؤشرات الحيوية أدوات حيوية في تقييم شدة المرض ومآله، وأبرزها نسبة اللمفاويات (% lymphocyte) التي تميل للانخفاض في الحالات الخطيرة، مما يعكس تثبيطاً للمناعة التكيفية، ومؤشر NLR (نسبة العدلات

إلى اللمفاويات) الذي يرتفع عند الإجهاد المناعي، و CRP (C-reactive protein) الذي يعد مؤشرًا مبكرًا على الالتهاب العام، إلى جانب IL-6 الذي يُستعمل لتقدير خطر الالتهاب المفرط. وفيما يخص الحمل الفيروسي (Viral Load) ، فإنه يُقاس غالبًا باستعمال تقنية RT-PCR ، ويمثل عدد النسخ الفيروسية في المليتر من العينة.

شهد الفيروس طفرات متعددة نتج عنها متحورات ذات خصائص مختلفة من حيث سرعة الانتشار ودرجة الشدة والقدرة على الإفلات المناعي، وكان أبرزها متحورات Alpha و Delta و Omicron وقد أثرت هذه الطفرات على فعالية اللقاحات وطرائق التشخيص والعلاج. في المقابل، أنتجت لقاحات متنوعة مثل لقاحات Pfizer-BioNTech و Moderna و AstraZeneca وغيرها، وكان لها أثر ملموس في خفض معدلات الوفيات وشدة المرض. أما على صعيد العلاج، فاعتمدت البروتوكولات على الرعاية الداعمة (كالأوكسجين والمضادات الحيوية الثانوية)، والعلاجات النوعية كمضادات الفيروسات مثل Remdesivir و Molnupiravir ، إضافة إلى مثبطات المناعة مثل Tocilizumab لمواجهة فرط الالتهاب [20][44].

3-4 وصف البيانات (Data Description)

تم جمع بيانات تخص (100) مريض مصاب بعدوى فيروس كورونا-SARS-CoV-2، باستعمال مبدأ العينة القصدية والتي اخذت من مدينة الإمام الحسين (ع) الطبية/ملفات المرضى الراقدين المصابين بكورونا وسجلات الفحوصات المخبرية والتي تتضمن ثلاثة متغيرات توضيحية هي (العمر، المناعة، الحمل الفيروسي) ومتغير معتمد يمثل زمن ظهور الأعراض السريرية (Symptom Onset) اذ ان كل مريض يُمثل برقم ضبابي ثلاثي (Triangular Fuzzy Number) لكل من المتغيرات الأساسية نتيجة قياسات مكررة او من نتجية خبرة الطبيب المعالج وان المتغيرات الاساسية هي :

Y **مغير الاستجابة (Response Variable)** ويمثل زمن ظهور الأعراض بالايام
وتم تمثيله برقم ضبابي ثلاثي كالاتي:

- Symptom Onset Lower وهو الوقت المبكر لظهور اعراض الاصابة.
- Symptom Onset Center اليوم المرجح لظهور الأعراض.
- Symptom Onset Upper الوقت الاعلى الذي تبدأ فيه الأعراض بالظهور.

والمغيرات التوضيحية (Explanatory Variables) هي :

X₁ العمر (Age) وهو متغير كمي مستمر ويمثل عمر الشخص المصاب بالفايروس
وتم تحويله الى رقم ضبابي ثلاثي باخذ ثابت نسبي ($\pm 10\%$) واطرافه وطرح هذه
النسبة من العمر ليكون لدينا حد اعلى وحد ادنى والعمر الاصلي هو القيمة المركزية
ليكون لدينا العمر الضبابي كالاتي:

- Age Lower
- Age Center
- Age Upper

X₂ **الحمل الفيروسي (Viral Load)** وهو من النوع المستمر وهو عدد النسخ
الفيروسية في المليلتر (copies/mL) اذ ان القيمة المقاسة تتذبذب في كل مرة يؤخذ
بها عينة إذ تشكل رقماً ضبابياً ثلاثياً كالاتي:

- Viral Load Lower يمثل أدنى قيمة متوقعة للحمل الفيروسي
- Viral Load Center القيمة العليا التي يحتمل أن يصل إليها الحمل الفيروسي
- Viral Load Upper القيمة العليا التي يحتمل أن يصل إليها الحمل الفيروسي

X₃ **نسبة اللمفاويات (lymphocyte %)** وهي ايضا رقم ضبابي ثلاثي لان نتائج
فحوص الدم تتأثر بالساعة، بالتوتر، بعدوى أخرى، وغيرها لذلك تشكل رقماً ضبابياً
مثلثياً وكالاتي:

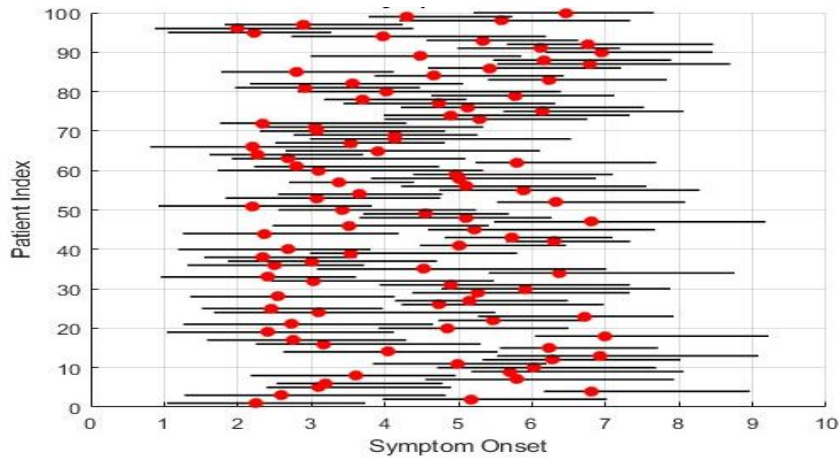
- lymphocyte Lower تمثل أدنى نسبة محتملة للمريض ضمن التذبذب الطبيعي
للفحص
- lymphocyte Center تمثل القيمة المركزية المقاسة من فحص CBC
- lymphocyte Upper تمثل أعلى نسبة سجلها المريض

وعليه تكون البيانات التطبيقية كما موضحة في الملحق C وادناه عينة منها وكالاتي

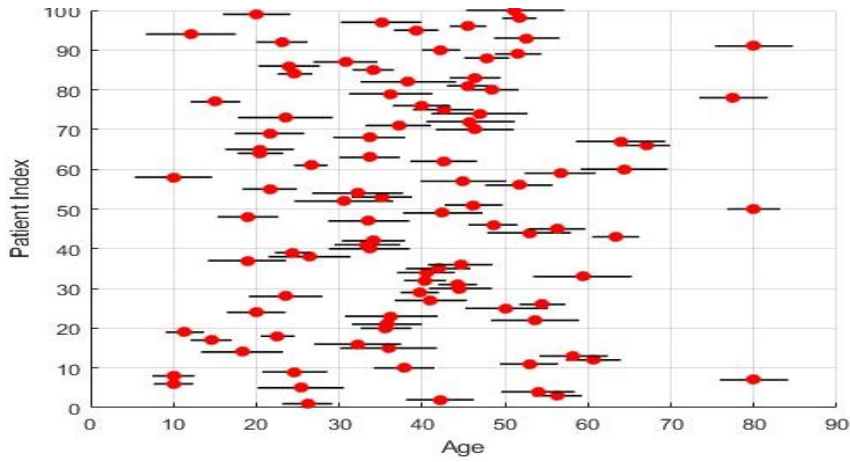
:

جدول (1-4) عينة من بيانات مرضى فيروس المتلازمة التنفسية الحادة الشديدة
كورونا 2 (SARS-CoV-2)

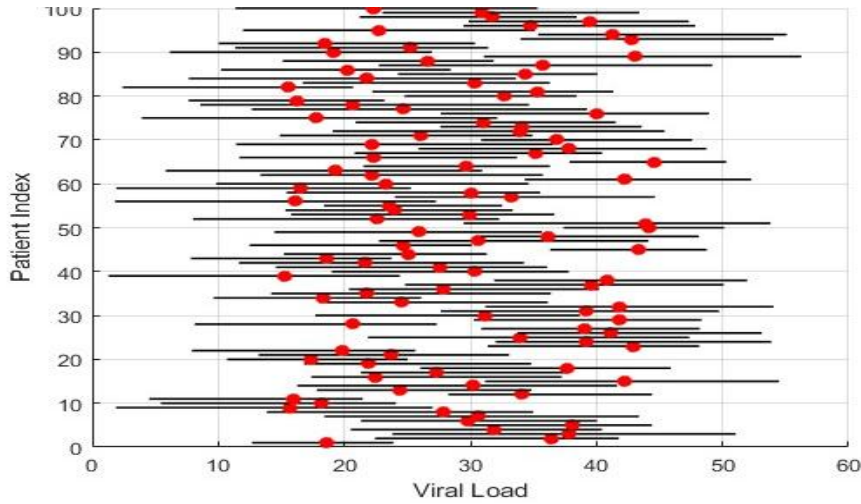
Patient	Symptom Onset	Symptom Onset	Symptom Onset	Age_Lower	Age_Center	Age_Upper	Viral_Load	Viral_Load	Viral_Load	lymphocyte	lymphocyte	lymphocytes
1	4.26	11.07	15.48	23.12	26.14	29.16	0.53	0.63	0.72	12.66	18.59	23.89
2	4.26	7.73	15.48	38.06	42.14	46.22	0.37	0.50	0.64	22.43	36.40	41.77
3	4.26	8.35	15.48	53.38	56.32	59.26	0.76	0.87	0.99	23.82	37.82	51.05
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
98	4.26	11.36	15.48	49.68	51.74	53.80	0.51	0.63	0.75	21.23	31.66	38.43
99	4.26	6.79	15.48	15.98	20.05	24.11	0.61	0.79	0.97	23.02	30.89	43.40
100	4.26	7.17	15.48	45.30	51.21	57.12	0.41	0.53	0.64	11.35	22.26	35.32



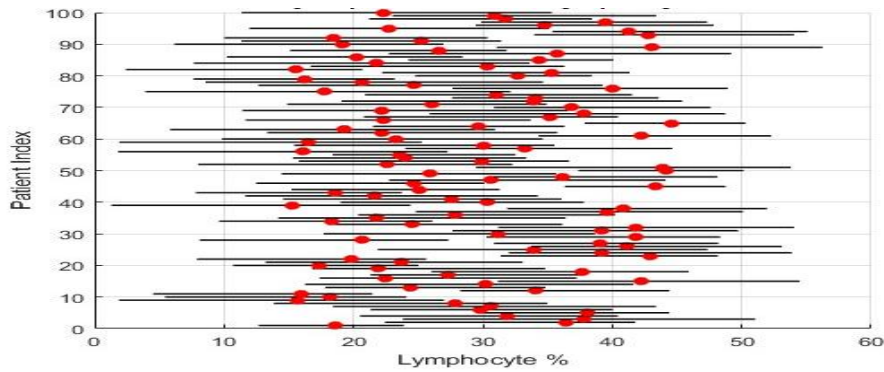
شكل (1-4) التمثيل الضبابي لمتغير الاستجابة زمن ظهور الأعراض Symptom Onset



شكل (2-4) التمثيل الضبابي للمتغير التوضيحي الاول العمر Age



شكل (3-4) التمثيل الضبابي للمتغير التوضيحي الثاني الحمل الفيروسي (Viral Load)



شكل (4-4) التمثيل الضبابي للمتغير التوضيحي الثالث نسبة اللمفاويات (lymphocyte %)

4-4 اختبار البيانات (Data Fitting)

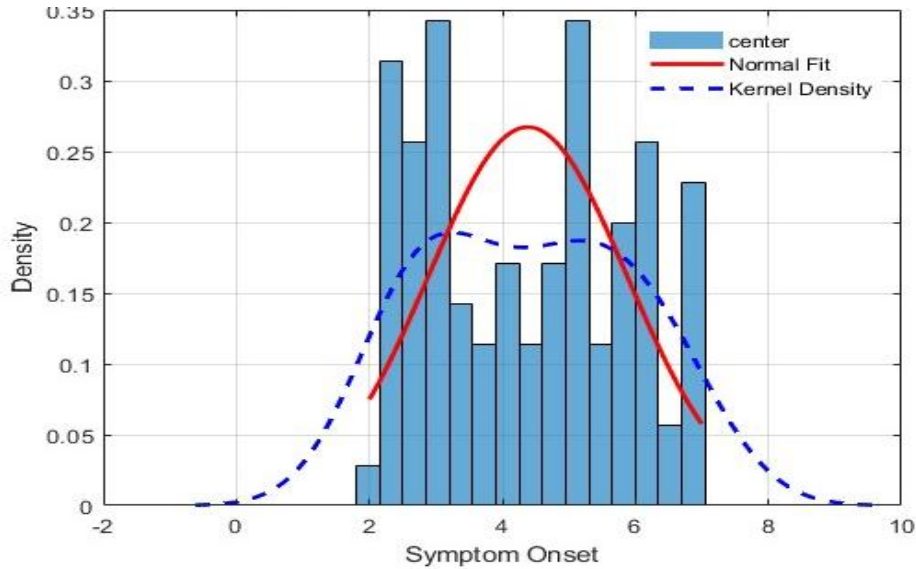
قبل التوجه الى عملية تقدير النموذج الانحدار الضبابي لابد من القيام ببض التحليلات الاستكشافية لتوصيف هيكل عدم التيقن في البيانات قبل استعمال الانحدار الضبابي، بهدف تحديد ما إذا كانت البيانات تستدعي إنموذجًا ضبابيًا من الأساس. جدول (2-4) التحليل الاحصائي لمتغيرات إنموذج الانحدار المضرب (

(الضبابي)

Average Spread (Upper - Lower)	Total Range (Max Upper - Min Lower)	الالتواء Skewness	المتغير
2.7705	8.4042	0.0969	Y : زمن ظهور الأعراض Symptom Onset
7.7749	79.3622	0.0522	X ₁ : العمر Age
20.0763	54.9600	0.1125	X ₂ : الحمل الفيروسي (Viral Load)
20.0763	54.9600	0.1125	X ₃ : نسبة اللمفاويات (lymphocyte %)

تشير النتائج في جدول (2-4) إلى تباين ملحوظ في خصائص المتغيرات المدروسة من حيث الالتواء والمدى الكلي ومتوسط الانتشار (Spread) فعلى الرغم من ان متغير زمن ظهور الأعراض (Y) ظهر بقيمة التواء منخفضة (0.0969) ، ما يشير إلى أن توزيعه قريب من التماثل الطبيعي ولكنه غير متماثل وهذا ماوضحه التقدير اللامعلمي لدالة الكثافة، وان المدى الكلي المحدود نسبياً (8.4) ومتوسط الانتشار البسيط (2.77)

يعكس تجانساً زمنياً نسبياً في ظهور الأعراض بين المرضى. أما متغير العمر (X_1) ، فيُظهر انحرافاً نحو اليمين (الالتواء = 0.3522)، وهو ما يتماشى مع المدى الكلي الواسع جداً (79.36)، ما يعكس وجود فئة صغيرة من المرضى الأكبر سناً ضمن توزيع يغلب عليه الطابع الوسيط، ويُشير كذلك إلى تشتت بياني أكبر (متوسط امتداد = 7.77) مقارنة بمتغير Y من ناحية أخرى، يتطابق متغير الحمل الفيروسي (X_2) ونسبة اللقفاويات (X_3) من حيث القيم العددية تماماً في كل من الالتواء (0.1125)، والمدى الكلي (54.96)، ومتوسط الانتشار (20.08)، وهو ما يُحتمل أن يكون نتيجة لتوزيع بيولوجي معقد مشترك بينهما أو لوجود نمط قياس أو تقاطع في الاستجابة المناعية الفيروسية. هذه القيم المرتفعة نسبياً في المدى والانتشار تعكس وجود تباين واسع في الاستجابة المناعية أو التحميل الفيروسي بين الأفراد، وتُبرز أهمية استعمال أساليب تحليلية مرنة، مثل النماذج الضبابية، لاحتواء هذا التفاوت وتحليل السلوك غير الخطي لهذه المتغيرات.

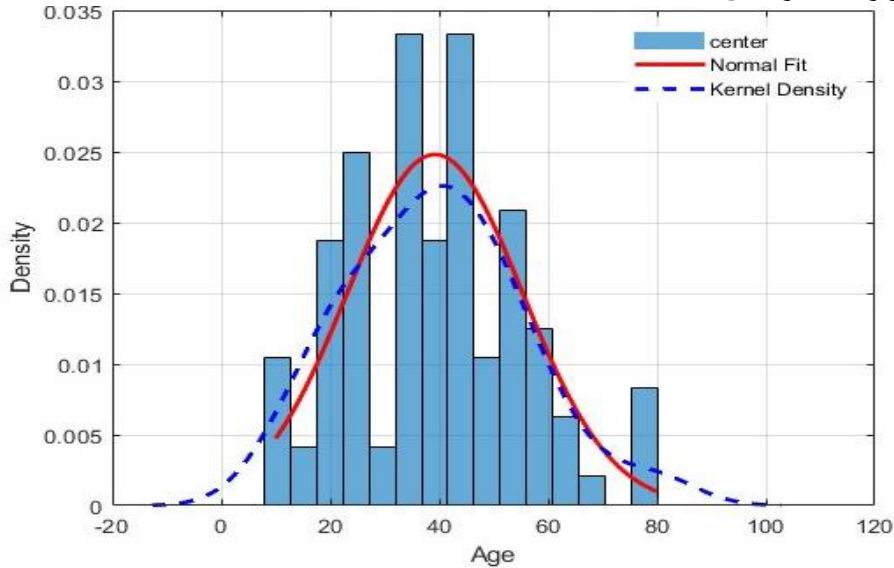


شكل (4-5) المدرج التكراري للقيمة المركزية ومنحنى الملائمة اللامعلمي لمتغير

الاستجابة زمن ظهور الأعراض Symptom Onset

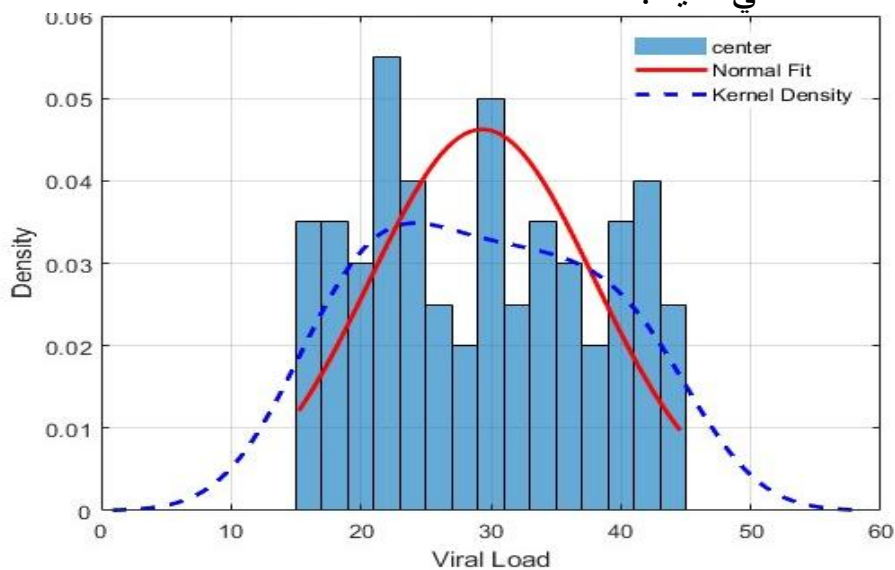
يمثل الشكل (4-5) المدرج التكراري للقيمة المركزية لمتغير الاستجابة زمن ظهور الأعراض (Symptom Onset) ، ويُظهر فوقه منحنيان ، الأول هو منحنى الملائمة الطبيعي باللون (الأحمر) الذي يفترض أن البيانات تتبع توزيعاً طبيعياً متماثلاً حول المتوسط، والثاني هو منحنى الكثافة غير المعلمية (Kernel Density) باللون الأزرق المتقطع الذي يُقدر التوزيع الفعلي للبيانات دون أية افتراضات. يلاحظ من الشكل أن منحنى التوزيع الطبيعي يظهر بشكل منتظم ومتناسق، إلا أن منحنى الكثافة

يعكس واقعًا أكثر تعقيدًا، إذ يتسم بعدم التماثل وتعدد القمم، ما يشير إلى احتمال وجود تباين داخلي في عينة المرضى أو أكثر من نمط لظهور الأعراض. هذا التباين بين المنحنيين يعكس ضعف ملاءمة التوزيع الطبيعي للبيانات، ويؤكد أهمية استعمال أساليب غير معلمية للكشف عن خصائص التوزيع الحقيقي لمتغيرات بيولوجية معقدة كزمن ظهور الأعراض.



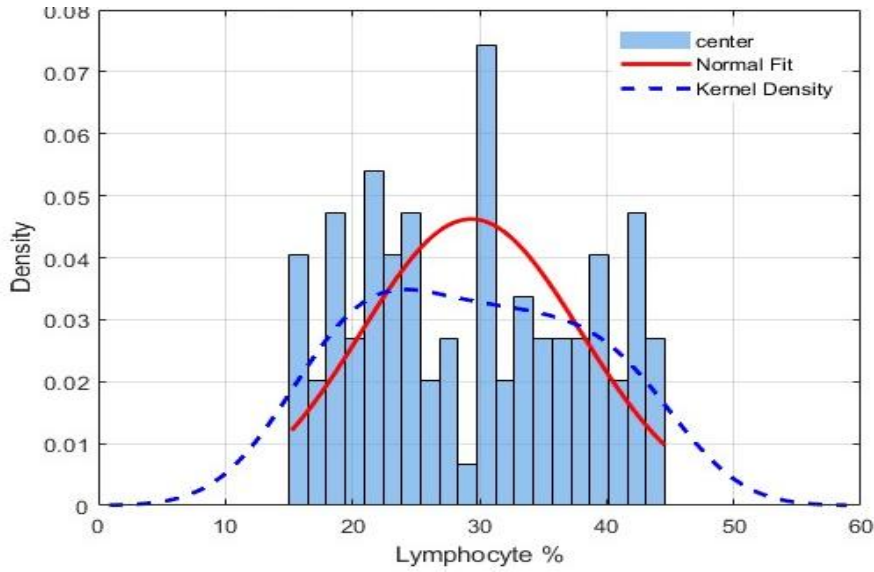
شكل (4-6) المدرج التكراري للقيمة المركزية ومنحنى الملائمة اللامعلمي للعمر
Age

يُظهر الشكل (4-6) تقاربًا عامًا بين المنحنيين، ما يشير إلى أن بيانات العمر تميل إلى التوزيع الطبيعي بدرجة مقبولة، غير أن منحنى الكثافة يكشف انحرافًا بسيطًا نحو اليمين (positive Skewness) ووجود امتداد في الذيل الأيمن، ما يعكس وجود أفراد أكبر عمرًا يشكلون نسبة أقل من العينة. كما أن بعض التذبذب في قمة منحنى الكثافة يشير إلى تفاوت طفيف في التمرکز حول المتوسط، وربما يعكس بنية عمرية غير متجانسة تمامًا في العينة.



شكل (7-4) المدرج التكراري للقيمة المركزية ومنحنى الملائمة اللامعلمي الحمل الفيروسي (Viral Load)

يُظهر الشكل (7-4) تباينًا واضحًا بين المنحنيين، إذ يعكس منحنى الكثافة شكلاً غير متماثل يتميز بانسباط وتعدد قمم، مما يشير إلى أن البيانات لا تتبع توزيعًا طبيعيًا بشكل دقيق. على الرغم من أن منحنى التوزيع الطبيعي يقدم تمثيلًا رياضيًا مبسطًا للتوزيع حول المتوسط، إلا أنه يُخفق في التقاط الانحرافات والتعقيد البنوي في البيانات الفعلية، والتي قد تكون ناجمة عن تباين الاستجابة المناعية، أو وجود مجموعات سريرية فرعية داخل العينة.



شكل (8-4) المدرج التكراري للقيمة المركزية ومنحنى الملائمة اللامعلمي نسبة اللمفاويات (lymphocyte %)

يُظهر الشكل (8-4) انحرافًا ملحوظًا عن التوزيع الطبيعي، حيث يبدو منحنى الكثافة أكثر تسطحًا وتعددًا في القمم مقارنة بالمنحنى الغاوسي، ما يدل على أن البيانات لا تتبع نمطًا متماثلًا بشكل صارم. تبرز هذه الفروقات احتمال وجود مجموعات مختلفة من المرضى تختلف لديهم استجابة المناعة أو توزيع الخلايا اللمفاوية، الأمر الذي ينتج عنه تباينًا بيولوجيًا حقيقي لا يمكن التقاطه باستخدام نموذج إحصائي معلمي بسيط.

5-4 تحليل البيانات (Data Analysis):

بعد ان اظهر نتائج الجانب التجريبي تفوق خوارزمية نيوتن رافسون في ظل مبدأ النقطة الثابتة N-R(FP) ولجميع تجارب المحاكاة وعند جميع احجام العينات ولغرض بيان افضلية هذه الطريقة ايضاً تم مقارنتها مع طريقة المربعات الصغرى الضبابية وفق مبدأ Diamond لغرض تقدير معلمات نموذج الانحدار الضبابي وتقدير قيم متغير الاستجابة للمرضى المصابين بفايروس المتلازمة التنفسية الحادة الشديدة – كورونا 2 (SARS-CoV-2) وكانت النتائج كالاتي:

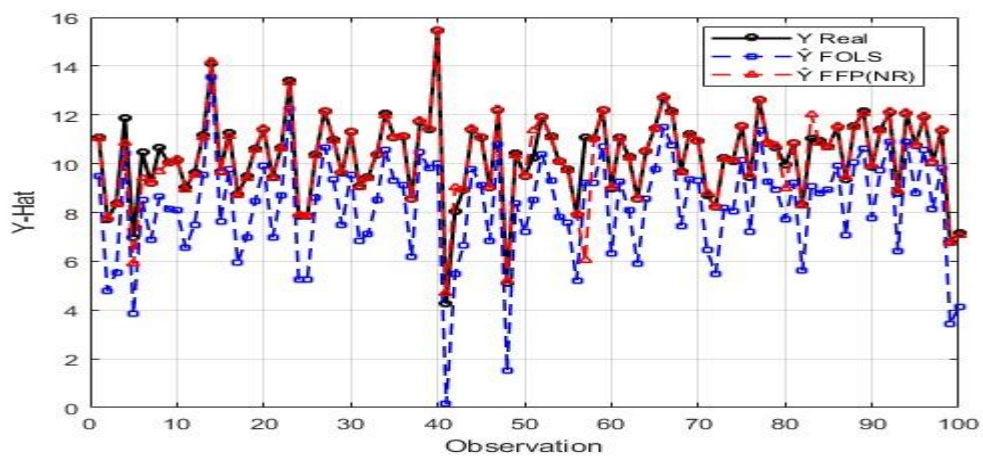
جدل (3-4) القيم المقدره لمتغير الاستجابة على وفق طريقتي التقدير بعد ازالة الضبابية

Patient ID	Y	\hat{Y}_{FOLS}	$\hat{Y}_{FFP(NR)}$	MSE \hat{Y}_{FOLS}	MSE $\hat{Y}_{FFP(NR)}$
1	11.07	9.51	11.01	2.43360	0.00360
2	7.73	4.78	7.77	8.70250	0.00160
3	8.35	5.55	8.31	7.84000	0.00160
4	11.86	10.42	10.86	2.07360	1.00000
5	6.99	3.85	5.89	9.85960	1.21000
6	10.45	8.49	9.41	3.84160	1.08160
7	9.21	6.89	9.23	5.38240	0.00040
8	10.65	8.64	9.66	4.04010	0.98010
9	10.05	8.14	10.07	3.64810	0.00040
10	10.16	8.07	10.21	4.36810	0.00250
11	9.01	6.55	8.94	6.05160	0.00490
12	9.61	7.49	9.56	4.49440	0.00250
13	11.15	9.55	11.09	2.56000	0.00360
14	14.12	13.54	14.19	0.33640	0.00490
15	9.69	7.65	9.64	4.16160	0.00250
16	11.28	9.77	11.12	2.28010	0.02560
17	8.74	5.94	8.69	7.84000	0.00250

18	9.48	6.97	9.40	6.30010	0.00640
19	10.60	8.47	10.58	4.53690	0.00040
20	11.41	9.89	11.45	2.31040	0.00160
21	9.43	6.98	9.42	6.00250	0.00010
22	10.67	8.72	10.63	3.80250	0.00160
23	13.39	12.26	13.33	1.27690	0.00360
24	7.84	5.24	7.89	6.76000	0.00250
25	7.86	5.27	7.85	6.70810	0.00010
26	10.39	8.60	10.35	3.20410	0.00160
27	12.17	10.68	12.15	2.22010	0.00040
28	10.97	9.34	10.92	2.65690	0.00250
29	9.63	7.49	9.66	4.57960	0.00090
30	11.29	9.53	11.31	3.09760	0.00040
31	9.09	6.84	9.01	5.06250	0.00640
32	9.45	7.13	9.41	5.38240	0.00160
33	10.40	8.51	10.38	3.57210	0.00040
34	12.04	10.56	11.98	2.19040	0.00360
35	11.10	9.32	11.08	3.16840	0.00040
36	11.14	9.13	11.12	4.04010	0.00040
37	8.57	6.19	8.58	5.66440	0.00010
38	11.74	10.45	11.78	1.66410	0.00160
39	11.41	9.81	11.45	2.56000	0.00160
40	15.48	10.01	15.45	2.16090	0.00003
41	4.26	0.14	4.67	16.97440	0.16810
42	8.06	5.47	9.01	6.70810	0.90250
43	8.94	6.66	8.91	5.19840	0.00090
44	11.41	9.79	11.44	2.62440	0.00090
45	11.09	9.12	11.07	3.88090	0.00040
46	9.02	6.83	9.01	4.79610	0.00010
47	12.20	10.80	12.25	1.96000	0.00250
48	5.09	1.50	5.19	12.88810	0.01000
49	10.43	8.36	10.35	4.28490	0.00640
50	9.50	7.19	9.50	5.33610	0.00000
51	10.26	8.53	11.36	2.99290	1.21000

52	11.91	10.38	11.92	2.34090	0.00010
53	11.11	9.30	11.08	3.27610	0.00090
54	10.08	7.80	10.08	5.19840	0.00000
55	9.78	7.58	9.74	4.84000	0.00160
56	7.91	5.22	7.94	7.23610	0.00090
57	11.06	9.22	6.04	3.38560	25.20040
58	11.01	9.23	11.01	3.16840	0.00000
59	12.20	10.72	12.21	2.19040	0.00010
60	9.00	6.34	9.02	7.07560	0.00040
61	11.06	9.27	11.04	3.20410	0.00040
62	10.30	8.10	10.23	4.84000	0.00490
63	8.57	5.92	8.57	7.02250	0.00000
64	10.52	8.54	10.54	3.92040	0.00040
65	11.46	9.78	11.44	2.82240	0.00040
66	12.73	11.49	12.75	1.53760	0.00040
67	12.14	10.73	12.12	1.98810	0.00040
68	9.66	7.46	9.61	4.84000	0.00250
69	11.23	9.36	11.15	3.49690	0.00640
70	10.96	9.32	10.94	2.68960	0.00040
71	8.70	6.46	8.81	5.01760	0.01210
72	8.24	5.50	8.22	7.50760	0.00040
73	10.24	8.18	10.20	4.24360	0.00160
74	10.12	8.06	10.13	4.24360	0.00010
75	11.55	10.15	11.55	1.96000	0.00000
76	9.45	7.23	9.56	4.92840	0.01210
77	12.63	11.38	12.60	1.56250	0.00090
78	10.86	9.25	10.85	2.59210	0.00010
79	10.66	8.94	10.73	2.95840	0.00490
80	9.96	7.72	9.00	5.01760	0.92160
81	10.83	9.21	10.86	2.62440	0.00090
82	8.31	5.62	8.27	7.23610	0.00160
83	11.04	9.09	11.99	3.80250	0.90250
84	10.93	8.79	10.85	4.57960	0.00640
85	10.71	8.92	10.67	3.20410	0.00160

86	11.48	9.92	11.53	2.43360	0.00250
87	9.37	7.08	9.44	5.24410	0.00490
88	11.55	10.04	11.49	2.28010	0.00360
89	12.13	10.59	12.06	2.37160	0.00490
90	9.87	7.79	9.89	4.32640	0.00040
91	11.41	9.72	11.36	2.85610	0.00250
92	12.09	10.90	12.15	1.41610	0.00360
93	8.79	6.41	8.87	5.66440	0.00640
94	12.05	10.87	12.10	1.39240	0.00250
95	10.75	8.78	10.77	3.88090	0.00040
96	11.94	10.57	11.96	1.87690	0.00040
97	10.07	8.15	10.07	3.68640	0.00000
98	11.36	9.82	11.39	2.37160	0.00090
99	6.79	3.43	6.75	11.28960	0.00160
100	7.17	4.11	7.09	9.36360	0.00640
MSE				4.33484	0.337967
Criteria Method	AIC	AIC _c	BIC	HQ	SHWZ
\hat{Y}_{FOLS}	154.684 3	155.1054	165.105	158.9018	171.2137
$\hat{Y}_{FFP(NR)}$	147.317 3	147.7383	157.7379	151.5347	163.8467



الشكل (9-4) متغير الاستجابة الحقيقي والمقدر بموجب طريقتي المربعات الصغرى الضبابية وفق مبدأ Diamond ونيوتن رافسون التكرارية على وفق مبدأ النقطة الثابتة بعد ازالة الضبابية

تشير نتائج الجدول (3-4) والشكل (9-4) إلى تفوق واضح لطريقة التقدير N-R(FP) على طريقة FLS في تقدير متغير الاستجابة ، وذلك عن طريق تحليل دقيق لمؤشرات الخطأ والانحراف ومعايير المعلومات الإحصائية. فقد بلغ متوسط الخطأ التربيعي (MSE) لطريقة FOLS نحو 4.3348، وهو مرتفع مقارنة بـ 0.33797 فقط لطريقة N-R(FP)، ما يدل على أن الانموذج الأخير أكثر دقة وأقل تأثراً بالقيم المتطرفة. كما يُلاحظ أن سجلت أخطاء كبيرة في بعض الحالات (مثل المرضى 41 و 48 و99)، في حين حافظت N-R(FP) على استقرار كبير في معظم المشاهدات. ويؤكد هذا الأداء المتفوق أيضاً نتائج معايير المعلومات الخمسة، إذ جاءت جميعها لصالح FFP(NR)، حيث سجلت قيماً أقل في كل من AIC و AICC و BIC و HQ و SHWZ، ما يعكس تحقيق توازن أفضل بين دقة التقدير وعدد المعلمات المستخدمة. يُستنتج من ذلك أن خوارزمية النقطة الثابتة (FFP) تُعد أكثر كفاءة ومرونة في التعامل مع طبيعة البيانات الضبابية مقارنة بطريقة المربعات الصغرى الضبابية (FLS)، مما يجعلها الخيار الأمثل لاعتمادها في هذه الرسالة.

وان معلمات معادلة الانحدار الضبابي المقدر وفق طريقة نيوتن رافسون التكرارية على وفق مبدأ النقطة الثابتة كما في الجدول (4-4) :

جدول (4-4) معلمات معادلة الانحدار الضبابي المقدر على وفق طريقة نيوتن رافسون التكرارية وفق مبدأ لنقطة الثابتة N-R(FP)

المعلمة	القيمة المقدرّة	الخطأ المعياري	قيمة t	Sig.
الثابت (Intercept)	1.539	0.902	1.71	0.000
العمر X1	2.723	0.528	5.15	0.000

0.000	3.35	0.47	1.576	X2 الحمل الفيروسي (Viral Load)
0.000	4.93	0.497	2.448	X3 نسبة اللمفاويات (lymphocyte %)

تشير النتائج في الجدول (4-4) الى الاتي:

1. العمر (X_1) العلاقة بين العمر وزمن ظهور الأعراض هي علاقة طردية، ما يعني أنه كلما تقدم المريض في السن، قد يستغرق ظهور الأعراض وقتاً أطول. يعود ذلك إلى تراجع كفاءة الجهاز المناعي مع التقدم في العمر، مما يؤدي إلى تأخر ظهور الأعراض السريرية للعدوى. هذا التفسير يتماشى مع واقع طبي معروف حيث يكون الجهاز المناعي لدى كبار السن أقل قدرة على الاستجابة السريعة تجاه العدوى.
2. الحمل الفيروسي (X_2) العلاقة بين الحمل الفيروسي وزمن ظهور الأعراض هي علاقة طردية، أي أنه كلما ارتفع الحمل الفيروسي في الجسم، زادت سرعة ظهور الأعراض. وهذا يحدث لأن الحمل الفيروسي المرتفع يعني أن هناك عدداً أكبر من الجزيئات الفيروسية التي تقوم بتحفيز الجهاز المناعي بشكل أكبر، ما يؤدي إلى استجابة مناعية أسرع وظهور الأعراض بشكل أسرع.
3. نسبة اللمفاويات (X_3) العلاقة بين نسبة اللمفاويات وزمن ظهور الأعراض هي أيضاً علاقة طردية. أي أن المرضى الذين يمتلكون نسبة أعلى من اللمفاويات يظهرون الأعراض في وقت أقرب. نسبة اللمفاويات تمثل مستوى نشاط الجهاز المناعي التكيفي، وعند ارتفاعها، يكون الجهاز المناعي أكثر قدرة على الاستجابة السريعة للعدوى، ما يؤدي إلى ظهور الأعراض بسرعة أكبر. إذا كانت نسبة اللمفاويات منخفضة، فإن الاستجابة المناعية تكون أقل سرعة، مما قد يتسبب في تأخير ظهور الأعراض.

وعليه فإن العلاقات الطردية بين المتغيرات الثلاثة (العمر، الحمل الفيروسي، ونسبة اللمفاويات) وزمن ظهور الأعراض هي منطقية تماماً وتتناسب مع الواقع الطبي. إنها تسهم في فهم أفضل لكيفية تأثير العوامل المناعية والجسدية على سرعة استجابة الجسم

للعدوى وظهور الأعراض السريرية وعليه فان انموذج الانحدار الضبابي قد ادى وظيفته في التقدير بصورة دقيقة.

جدول (5-4) جدول تحليل التباين لانموذج الانحدار الضبابي

F	متوسط مجموع المربعات		مجموع المربعات	مصدر التباين
52.98301	222.2862	3	666.8587	الانحدار
Sig.	4.195425	96	402.7608	البواقي
0.000	-----	99	1069.6195	الكلي

يتبين من الجدول (5-4) أن انموذج الانحدار الضبابي المستعمل له دلالة إحصائية قوية، حيث أن قيمة F البالغة 52.98 تشير إلى أن الانموذج يفسر التباين في البيانات بشكل جيد جداً. هذا يعكس قدرة الانموذج على تفسير العلاقة بين المتغيرات المدخلة مثل العمر، الحمل الفيروسي، ونسبة اللمفاويات يعني أن النتائج التي تم الحصول عليها من الانموذج غير ناتجة عن الصدفة، بل تعكس علاقة حقيقية بين المتغيرات المستقلة وزمن ظهور الأعراض.

حيث ان :

$$R^2 = \frac{SS.R}{SS.TO} \%$$

$$R^2 = \frac{666.8587}{1069.6145} \%$$

$$R^2 = 62\%$$

وهذا يعني ان 62 % من الانحرافات الكلية يوضحها المتغيرات التوضيحية اما المتبقي 38 % قيوضها الأخطاء العشوائية وهذه النسبة مقبولة وجيدة .

الفصل الخامس

الاستنتاجات

والتوصيات

1-5 الاستنتاجات

(Conclusions)

من خلال ما تم عرضه في الجانب النظري للرسالة والجانب التجريبي خلال المحاكاة والجانب التطبيقي خلال تحليل البيانات الحقيقية وكالاتي:

أولاً : استنتاجات الجانب النظري

1- ان عملية التقدير باستعمال نظرية النقطة الثابتة FP لمعاملات نماذج الانحدار ومنها نموذج الانحدار المضرب (الضبابي) FRM يستند الى فكرة التقدير بطرائق التقدير التكرارية لضمان تحقق شرط تنفيذها وهو حصول التقارب القوي او التساوي النهائي بين تقديرين بتكرارين متتاليين وهذا بدوره صفة جيدة لاستقرار تقديرات الطرائق التقديرية وبما يحقق خاصية التحسين للمقدرات .

2- يمكن استعمال نظرية النقطة الثابتة FP مع اي طريقة تقدير تكرارية وليس حصراً على طريقة محددة نظراً لمرونة خصائص وشرط النظرية في تحققها اذ ان توظيف النظرية ادى الى عرض جانب نظري مميز للمزج بين علمي الرياضيات والاحصاء.

ثانياً: استنتاجات الجانب التجريبي

1- تفوق طريقة نيوتن – رافسون على مبدأ النقطة الثابتة N-R(FP) على باقي طرائق التقدير المعتمدة في الرسالة في اداءها في عملية التقدير بسبب ثباتها في التقدير وامتلاكها لاقل قيم متوسط مربعات الخطأ MSE واعلى قيم معاملات التحديد R^2 لمختلف النماذج وتاتي بعدها طريقة تعظيم التوقع على مبدأ النقطة الثابتة E-M(FP) وبعدها طريقة المربعات الصغرى الضبابية FLS ولمختلف احجام العينات ولاي قيمة لمستوى القطع (معامل الضبابية) الثلاثة التي تؤدي للتجارب الثلاثة المعتمدة في الرسالة.

2- على الرغم من ورود طريقة E-M(FP) في المرتبة الثانية الا انها تقترب في اداءها من طريقة N-R(FP). في معظم حالات تجارب المحاكاة وهذا يبرز بديلاً للباحث للتقدير بهذه الطريقة.

3- اظهرت طريقة FLS اداءً سيئاً في عملية التقدير مقارنة مع طرائق التقدير التكرارية باستعمال مبدأ النقطة الثابتة التي هي اصلاً استعملت FLS كقيم اولية لاجراء التقديرات التكرارية رغم كفاءة الطريقة بشكل عام علما بان جميع الطرائق كانت معنوية في عملية التقدير لمعاملات نموذج الانحدار المضرب (الضبابي) FRM.

4- اظهرت طريقة N-R(FP) تقديراً دقيقاً للقيم الحقيقية (المتغير المعتمد) Y بحيث ادى ذلك الى تصغير قيم متوسط متوسط مربعات الخطا مقارنة مع بقية الطرائق وهذا يدل على كفاءة الطريقة في عملية التقدير لمعاملات نموذج الانحدار المضرب (الضبابي) FRM.

ثالثاً: استنتاجات الجانب التطبيقي

- 1- اظهرت نتائج طريقة N-R(FP) عند تحليل البيانات الحقيقية الخاصة لعينة بحجم 100 من مرضى فيروس كورونا SARS-CoV-2 في مستشفى مدينة الامام الحسين (ع) تأكيداً على كفاءتها وثباتها وامتلاكها لاقل MSE واعلى R^2 ومعنوية لنموذج الانحدار الضبابي FRM ومعلماته الضبابية مما يدل على كفاءته بتمثيل هذه البيانات واي بيانات على شاكلتها.
- 2- تفوق واضح لطريقة N-R(FP) مقارنة مع طريقة FLS لتقدير القيم الحقيقية لبيانات المتغير المعتمد مما يؤكد ما توصل اليه في الجانب التجريبي.
- 3- وجود علاقة معنوية قوية بين المتغير المعتمد Y (زمن ظهور اعراض المرض بالايام) والممثل برقم ضبابي ثلاثي مع بقية المتغيرات التوضيحية (العمر X_1 ، الحمل الفيروسي X_2 ونسبة للمفاويات X_3) وهذه العلاقة المعنوية تمتد الى معنوية معاملات الانحدار الضبابي المستعمل وهذا يعني ان كفاءة نموذج FRM في تمثيل البيانات فضلاً عن التنبؤ بالظاهرة بشكل جيد.

(Recommendations)

2-5 التوصيات

اعتماداً على ما تقدم في الاستنتاجات فإن الباحث يوصي بالآتي:

- 1- يوصي الباحث باستعمال نظرية النقطة الثابتة FP عند تقدير معاملات نموذج الانحدار المضرب (الضبابي) FRM وتوظيفها في طرائق التقدير التكرارية لتحسين التقدير لمعاملاته التي تقدر بطرائق غير تقديرية مثل FLS .
- 2- يوصي الباحث بتوظيف نظرية النقطة الثابتة مع طرائق التقدير التكرارية غير المعتمدة في الرسالة واجراء المقارنات الطرائق المعتمدة لبيان الافضل منها .
- 3- يوصي الباحث باستعمال طريقة N-(FP) في عملية التقدير لمعاملات نموذج الانحدار المضرب (الضبابي) وكبديل عنها يمكن استعمال طريقة E-M(FP) .
- 4- الاعتماد على الطرائق التكرارية بشكل عام في عملية تقدير معاملات نموذج الانحدار المضرب (الضبابي) FRM كونها تساهم بشكل كبير في تحسين التقديرات.

- 5- يوصي الباحث باستعمال نموذج الانحدار المضرب (الضبابي) للبيانات الحقيقية التي تماثل بيانات الرسالة واعتماده وسيلة للتنبؤ بالظاهرة المدروسة.
- 6- يوصي الباحث بالانتباه للمتغيرات التوضيحية المؤثرة على زمن ظهور اعراض الفيروس والتهيو وتقدير زمن ظهوره ليتسنى للمهتمين تلافى الاصابات المميتة .

المصادر العربية والأجنبية

المصادر العربية:

- 1- السكمانى، علي محمد عبید(2024) " تقدير دالة الانحدار الرتيب متعدد المتغيرات الضبابي مع تطبيق عملي " , اطروحة دكتوراه , غير منشورة , جامعة كربلاء , كلية الادارة والاقتصاد.
- 2- الغنام ، محمد طه : الصباغ، هبه علي (2009) " دراسة المتغيرات المضببة والانحدار المتعدد المضبب " مجلة تكريت للعلوم الادارية والاقتصادية ،المجلد 5 ،العدد 14، 166-180.
- 3- الياس، حسن محمد : الصباغ ، هبه علي (2006) " تحليل الانحدار المضبب " ،المجلة العراقية للعلوم الاحصائية (10)، 61-84 .
- 4- طاقية، البيومي عوض: وآخرون (2010) " نموذج الانحدار الفازي -درسة تطبيقية" . Egyptian Journal for Commercial Studies ،V:34 ،No.4 ، 305-319 .
- 5- عباس ، مروان صبري : المتولي ، احمد شاكر(2021)" استعمال نموذج الانحدار الخطي الضبابي في تقدير اثر سعر صرف الدولار على الناتج المحلي الاجمالي في العراق " مجلة الادارة والاقتصاد- الجامعة المستنصرية ،العدد 129 ، 434-455.
- 6- عبد الرزاق ، محمد صادق:فرحان ،علي محمد (2014) "تقدير المعلمات الضبابية للانحدار الخطي المتعدد مع تطبيق عملي " مجلة الكوت للعلوم الاقتصادية والادارية ،العدد 16.
- 7- علي ، بشار خالد ، (2022) ، " طريقة بيزية ضبابية حسنة عامة للتوزيعات الاحتمالية " ، اطروحة دكتوراه , غير منشورة , جامعة كربلاء , كلية الادارة والاقتصاد.
- 8- كاظم ، ازهار ناجي : مهدي ، نبا،نعيم مهدي (2024)"تقدير نموذج الانحدار الخطي الضبابي باستعمال طريقة " A.R.Arabpour And M.Tataمجلة الادارة والاقتصاد- الجامعة المستنصرية ،المجلد 49، العدد 144، 98-109.
- 9- محمد،محمد جاسم :عباس ، احمد فاروق (2017)"مقارنة بين دالة الانتماء ودالة الانتروبي في الانحدار الخطي الضبابي المكيف " مجلة العلوم الاقتصادية والادارية – جامعة بغداد ،العدد 103،المجلد 24، 453-476.

المصادر الأجنبية

- 10- Aguirre, L.A. and Souza, A. P. (1998) " An Algorithm for Estimating Fixed Points of Dynamical Systems from Time Series " International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 8, No. 11, 2203–22.**
- 11- Arabpour, A.R. & Tata, M. (2008) " Estimating the parameters of a Fuzzy Linear Regression model " Iranian Journal of Fuzzy Systems Vol. 5, No. 2, pp. 1-19.**
- 12- Balakrishnan, S. et al. (2017) "Statistical Guarantees for the EM Algorithm: From Population to Sample-Based Analysis" The Annals of Statistics, Vol. 45, No. 1, 77–120.**
- 13- Behdani Z, Darehmiraki, M. (2024) "Fuzzy logistic regression analysis using the least squares method" Transactions on Fuzzy Sets and Systems.; 3(2): 23-36.**
- 14- Bhavyashree, S et al. (2017) " Fuzzy Regression and Multiple Linear Regression Models for Predicting Mulberry Leaf Yield: A Comparative Study" Int. J. Agricult. Stat. Sci. V. 13, No.1, pp. 149-152.**
- 15- Buckley, J. J., & Feuring, T. (2000)" Linear and non-linear fuzzy regression: Evolutionary algorithm solutions" Fuzzy Sets and Systems, 112(3), 381–394.**
- 16- Campos, L., & Verdegay, J. L. (1989)" Linear programming problems and ranking of fuzzy numbers" Fuzzy Sets and Systems, 32(1), 1–11.**

- 17- Chachi, J., & Roozbeh, M. (2015)**" A fuzzy robust regression approach applied to bedload transport data"Communications in Statistics - Simulation and Computation, 46(3), 1703–1714.
- 18- Chang, Y.-H. O. (2001)**" Hybrid fuzzy least-squares regression analysis and its reliability measures"Fuzzy Sets and Systems, 119(2), 225–246.
- 19- Chen,Y.-S. (1999)**" Fuzzy ranking and quadratic fuzzy regression" Computers & Mathematics with Applications, 38(11-12), 265–279.
- 20- Chen, J. et al. (2020)** "Elevated interleukin-6 levels predict severity and prognosis of COVID-19" Journal of Medical Virology, vol. 92, no. 10, pp. 218–223.
- 21- Choi, S. H. &Yoon, J. H. (2010)** "General fuzzy regression using least squares method" International Journal of Systems Science, 41: 5, 477 - 485.
- 22- Chou C. H. et al. (2010)** " Fixed-Point acceleration of square root and logarithm using quadratic regression for HTK Kernel Modules" 2010Fourth International Conference on Genetic and Evolutionary Computing.
- 23- Chutia, R. et al. (2011)** " Arithmetic of Triangular Fuzzy Variable from Credibility Theory " International Journal of Energy, Information and Communications Vol. 2, Issue 3.
- 24- Dempster, A. P., Laird, N. M., & Rubin, D. B. (1977)** " Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm." Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological), 39(1), 1–38.
- 25- Deng, J. & Lu, Q.J. (2018)** "Fuzzy Regression Model Based on Fuzzy Distance Measure" Journal of Data Analysis and Information Processing,6, 126-140.

- 26- De Sterck, H. et al. (2021)** " Convergence Acceleration for Nonlinear Fixed-Point Methods " University of Waterloo, Canada.
- 27- D’Epifanio, G. (1999)** " Properties of a fixed point method ” *Annales*, XXXXIII (2-3), pp.69-83. 1-03653459.
- 28- Diamond, P. (1988)**" Fuzzy least squares *Information Sciences* 46, 141-157.
- 29- Dony, J. & Einmah, U. (2009)** ”Uniform in bandwidth consistency of kernel regression estimators at a fixed point" *High Dimensional Probability V: The Luminy Volume* Vol. 5, 308–325.
- 30- D’Urso, P. (2003)**" Linear regression analysis for fuzzy/crisp input and fuzzy/crisp output data" *Computational Statistics & Data Analysis*, 42(1-2), 47–72.
- 31- D’Urso, P., Gastaldi.T. (2000)**" A least-squares approach to fuzzy linear regression analysis"*Computational Statistics & Data Analysis* 34 , 427-440.
- 32- Farnsworth,D.L.(2025)** " Fixed Points in Linear Regression" *Open Journal of Statistics*, 15(3), 251-271.
- 33- Ferdausi, R. et al. (2018)**” Existence and Uniqueness of Solutions to System of Linear Equations and Integral Equations Using Banach Fixed-Point Theorem" *Int. J. Adv. Res.* 6(3), 494-500.
- 34- Gkountakou,F. et al.(2023)**" A Novel Approach to Fuzzy Implication Through Fuzzy Linear Regression" *Mathematical Modelling of Engineering Problems*, Vol. 10, No. 6, pp. 1927-1936.
- 35- Guan, W. et al., (2020)** “Clinical Characteristics of Coronavirus Disease 2019 in China,” *New England Journal of Medicine*, vol. 382, no. 18, pp. 1708–1720.

- 36- Hassan, E. & Al-Sabri, A. (2020)** " The Fuzzy Linear Regression" Asia Pac. J. Math. 7:7.
- 37- Heshmaty, B., & Kandel, A. (1985)**"Fuzzy linear regression and its applications to forecasting in uncertain environment" Fuzzy Sets and Systems, 15(2), 159–191.
- 38- Hennig, C. (2002)** " Fixed Point Clusters for Linear Regression Computation and Comparison" Journal of Classification 19:249-276.
- 39- Hojati, M. et al. (2005)**" A simple method for computation of fuzzy linear regression"European Journal of Operational Research, 166(1), 172–184.
- 40- Jung, Y.J et al (2019)**" Fuzzy regression model using fuzzy partition" J. Phys.: Conf. Ser. 1334, 012019.
- 41- Kahraman et al. (2006)**" Fuzzy Regression Approaches and Applications" Studies in Fuzziness and Soft Computing 201, 589-615.
- 42- Kelton, W. D. et al. (2015)**, Simulation with Arena, 6th ed., New York, NY, USA: McGraw-Hill, 2015.
- 43- Kim, B., & Bishu, R. R. (1998)**" Evaluation of fuzzy linear regression models by comparing membership functions" Fuzzy Sets and Systems, 100(1-3), 343–352.
- 44- Lagunas-Rangel, F. A. (2019)** “Neutrophil-to-lymphocyte ratio and lymphocyte-to-C-reactive protein ratio in patients with severe coronavirus disease 2019 (COVID-19): A meta-analysis,” Journal of Medical Virology, vol. 92, no. 10, pp. 1733–1734.
- 45- Lanani, A. (2018)**" Relationship Between the Fixed Point Theorem and the EM Algorithm" Journal of Informatics and Mathematical Sciences Vol. 10, No. 4, pp. 697–702.

- 46- Li, Q. et al.** (2020) “Early Transmission Dynamics in Wuhan, China, of Novel Coronavirus–Infected Pneumonia,” *New England Journal of Medicine*, vol. 382, no. 13, pp. 1199–1207.
- 47- Lu, J., & Wang, R.** (2009)" An enhanced fuzzy linear regression model with more flexible spreads" *Fuzzy Sets and Systems*, 160(17), 2505–2523.
- 48- Maturo, F., & Hořková-Mayerová, Š.** (2016)" Fuzzy Regression Models and Alternative Operations for Economic and Social Sciences" *Studies in Systems, Decision and Control*, 235–247.
- 49- McLachlan, G.J. & Krishnan, T.** (2008)" The EM Algorithm and Extensions" Second Edition, John Wiley & Sons, Inc., Publication.
- 50- Mustafa, S. et al.** (2022)" An Application of Fuzzy Multiple Linear Regression in Biological Paradigm" *Hindawi Complexity Volume 2022*, 1162464, 6 pages.
- 51- Nasrabadi, M.M., Nasrabadi, E.** (2004)" A mathematical-programming approach to fuzzy linear regression analysis" *Applied Mathematics and Computation* 155, 873–881.
- 52- Novoselac, V. et al.** (2024)" The Fixed Point Iterations Method for the Contraction Mapping" *MM Science Journal*, November. Special Issue.
- 53- Nowaková, J., & Pokorný, M.** (2013)" Fuzzy Linear Regression Analysis*" *IFAC Proceedings Volumes*, 46(28), 245–249.
- 54- Pasha, E., et al** (2007)" Fuzzy Linear Regression Models with Fuzzy Entropy" *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 1, 2007, no. 35, 1715 – 1724.

- 55- Poleshchuk, O., & Komarov, E. (2012)**" A fuzzy linear regression model for interval type-2 fuzzy sets" 2012 Annual Meeting of the North American Fuzzy Information Processing Society (NAFIPS).
- 56- Rattanalertnusorn, A. et al (2014)**" Parameter estimation of fuzzy linear regression model: The extension of Chen and Hsueh method" Journal of Applied Sciences 14(7): 631-640.
- 57- Rattanalertnusorn, A. et al. (2015)** A method for formulating fuzzy linear regression model and estimating the model parameters" ICAS2015, July 15-17, Pattaya, Thailand. p.p 49-56.
- 58- Robert, C. P and Casella, G.(2004)** "Monte Carlo Statistical Methods " 2nd ed., New York, NY, USA: Springer.
- 59- Rus,I.A. et al.(2008)**" Fixed Point Theory" Cluj University Press.
- 60- Saade, J. J., & Schwarzlander, H. (1990).** Fuzzy hypothesis testing with hybrid data. Fuzzy Sets and Systems, 35(2), 197–212.
- 61- Sakawa, M., & Yano, H. (1992)**" Multiobjective fuzzy linear regression analysis for fuzzy input-output data" Fuzzy Sets and Systems,47(2),173–181.
- 62- Savic, D. A., & Pedrycz, W. (1991)**"Evaluation of fuzzy linear regression models" Fuzzy Sets and Systems, 39(1), 51–63.
- 63- Škrabánek, P. et al (2021)**"Boscovitch Fuzzy Regression Line" Mathematics, 9, 685.
- 64- Stolte, M. et al. (2024)** "Simulation study to evaluate when Plasmode simulation is superior to parametric simulation in estimating the mean squared error of the least squares estimator in linear regression," PLoS ONE, vol. 19, no. 5, e0299989.
- 65- Taheri, S.M. (2003)**" Trends in Fuzzy Statistics " Austrian Journal of Statistics, Vol. 32, No. 3, 239-257 .

- 66- Tanaka, H. and Asai, K. (1980)** "Fuzzy linear programming based on fuzzy functions," Bulletin of University of Osaka Prefecture Series A, Vol. 29, No. 2.
- 67- Tanaka, H., Uegima, S., Asai, K. (1982)** "Linear regression analysis with fuzzy model", IEEE Trans. Systems, Man and Cybernetics 12 903–907.
- 68- Tanaka, H., et al. (1986)**" On Three Formulations of Fuzzy Linear Regression Analysis " Transactions of the Society of Instrument and Control Engineers, vol. 22, issue 10, p. 1051-1057.
- 69- Tanaka, H. (1987)**" Fuzzy data analysis by possibilistic linear model" Fuzzy Sets Syst.24, 363-375.
- 70- Tanaka, H., Hayashi, I., & Watada, J. (1989)**" Possibilistic linear regression analysis for fuzzy data" European Journal of Operational Research, 40(3), 389–396.
- 71- Yang, M.-S., & Lin, T.-S. (2002)** "Fuzzy least-squares linear regression analysis for fuzzy input–output data" Fuzzy Sets and Systems, 126(3), 389–399.
- 72- Yoon, J.H.; Choi, S.H. (2025)** "A Large Sample Study of Fuzzy Least-Squares Estimation" Axioms, 14, 181.
- 73- Zadeh, L. A. (1965).** Fuzzy sets. Information and Control, 8(3), 338–353. doi:10.1016/s0019-9958(65)90241-x.
- 74- Zadeh, L. A. (1975).** The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning-III. Information Sciences, 9(1), 43–80.
- 75- Zhang, A (2016)**" Statistical Analysis of Fuzzy Linear Regression Model Based on Centroid Method" Applied Mathematics, 2016, 7, 579-586.

الملاحق

الملحق (A)
وصف المتغيرات وتوليدها بحسب نموذج الانحدار المضرب (الضبابي)

1-تحديد قيم المدخلات التجريبية :

وهذه الخطوة تعد من الخطوات الضرورية والمهمة التي تعتمد عليها الخطوات اللاحقة وكما يأتي:

1-1 تحديد احجام العينات n المستعملة في تجارب المحاكاة: اذ تم اختيار خمسة احجام عينات (صغيرة (10, 20) – متوسطة (35, 50) – كبيرة (75, 100)) وكالاتي :

$$n=10, 20, 35, 50, 75, 100$$

2-1 تحديد عدد المتغيرات التوضيحية (X^s) باختيار انموذج يتضمن ثلاث متغيرات توضيحية $k=3$

3-1 تعيين معامل الضبابية (معامل القطع): الذي يمثل مدى تأثير القيم الدنيا والعليا للمتغيرات على القيمة المتوسطة في اطار الانحدار الضبابي وفق النماذج الاتية :

$$\alpha=0.1, 0.5, 0.8$$

2- توليد المتغيرات التوضيحية الضبابية X :

تم توليد المتغيرات التوضيحية X بشكل رقم ضبابي مثلثي (Triangular Fuzzy Number) ، لكل متغير ولكل مشاهدة وفق الاتي :

$$\begin{aligned} X_1 &= \text{rand}(n, k) * 5 ; \\ X_m &= X_1 + \text{rand}(n, k); \\ X_u &= X_m + \text{rand}(n, k); \end{aligned}$$

اي أنه في $X_1 = \text{rand}(n, k) * 5$ يتم توليد مصفوفة $X1$ بحجم $n \times k$ ، حيث ان n عدد المشاهدات ، k عدد المتغيرات التوضيحية. وان القيم يتم توليدها عشوائياً من التوزيع المنتظم بالمجال $[0, 5]$ ثم تضرب بـ 5 لتكون بين $[0, 5]$ ، وان كل حد أدنى $X1$ هو القيمة الابتدائية للمتغير.

في $X_m = X_1 + \text{rand}(n, k)$ يتم حساب القيمة المركزية X_m بإضافة عدد موجب عشوائي إلى X_1 ، وهذا يضمن أن تكون $X_1 < X_m$

في $X_u = X_m + \text{rand}(n, k)$; يتم حساب الحد الأعلى X_u بإضافة عدد موجب عشوائي آخر إلى X_m ، هذا يضمن أن: $X_m < X_u$ وبالتالي كل عنصر في X أصبح يمثل بثلاثية مرتبة كالآتي:

$$X_{ij} = (X_{l,ij}, X_{m,ij}, X_{u,ij})$$

بحيث أن $X_l < X_m < X_u$

3- توليد قيم المعلمات الافتراضية للانحدار وفق الآتي :

```
beta_true = rand(k+1, 1);
beta_true(:,2) = beta_true(:,1) + rand(k+1,1);
beta_true(:,3) = beta_true(:,2) + rand(k+1,1);
```

اذ ان المصفوفة beta_true تصبح بحجم $3 \times (k+1)$ ، وتمثل معاملات الانحدار الحقيقية للانحدار الضبابي، حيث كل صف من الشكل:

$$\text{Row } j = [\beta_{jl}, \beta_{jm}, \beta_{ju}]$$

4- حساب قيم متغير الاستجابة الضبابي :

تم حساب المخرجات الضبابية \tilde{Y} للانحدار بناءً على المعادلة العامة للانحدار الضبابي وكالآتي:

```
Y_l = beta_true(1,1) * ones(n,1);
Y_m = beta_true(1,2) * ones(n,1);
Y_u = beta_true(1,3) * ones(n,1);
for j = 1:k
    Y_l = Y_l + X_l(:,j) * beta_true(j+1,1);
    Y_m = Y_m + X_m(:,j) * beta_true(j+1,2);
    Y_u = Y_u + X_u(:,j) * beta_true(j+1,3);
end
```

$Y_l = \beta_{0l} * \text{ones}(n,1)$ يبدأ بحساب الحد الأدنى للمتغير Y_l ، بافتراض أن هناك حد ثابت β_{0l} ويستخدم $\text{ones}(n,1)$ لتكرار هذا الثابت n مرة لكل مشاهدة، نفس الفكرة لكن لحساب القيمة المركزية Y_m باستخدام β_{0m} .

$$Y_u = \beta_{0u} * \text{ones}(n,1);$$

بحيث يتم المرور على كل متغير X_j من المتغيرات التوضيحية من 1 إلى k في كل تكرار يتم ضرب القيم الدنيا X_l في معامل الانحدار الأدنى β_l وإضافتها إلى Y_l ، ويتم ضرب القيم المركزية X_m في β_m وإضافتها إلى Y_m ، ومن ثم يتم ضرب القيم العليا X_u في β_u وإضافتها إلى Y_u

اي يتم تطبيق معادلة الانحدار ثلاث مرات مرة لـ Y_l ، مرة لـ Y_m ، ومرة لـ Y_u باستخدام القيم المناسبة من X

وبالنتيجة نحصل على ثلاث متجهات:

$Y_l \in \mathbb{R}^n$ الذي يمثل الحد الأدنى لكل مخرج.
 $Y_m \in \mathbb{R}^n$ الذي يمثل القيمة المتوقعة .
 $Y_u \in \mathbb{R}^n$ الذي يمثل الحد الأعلى.

كل مخرج Y_i يُمثل كرقم ضبابي مثلثي كالآتي:
كل مخرج Y_i يُمثل كرقم ضبابي مثلثي كالآتي:

$$Y_i = (Y_{l,i}, Y_{m,i}, Y_{u,i})$$

بحيث ان $Y_l < Y_m < Y_u$

5- اضافة الضوضاء الضبابية لقيم متغير الاستجابة الضبابي :
تم اضافة الضوضاء العشوائية (Noise) إلى المخرجات الضبابية Y_i ، لمحاكاة واقع البيانات الحقيقية التي نادراً ما تكون مثالية أو خالية من الانحرافات كالآتي :

$U_l = \text{normrnd}(-3, 0.5, n, 1)$; يولد ضوضاء دنيا U_l باستخدام التوزيع الطبيعي:
 $U_l \sim N(-3, 0.52)$

أي أن القيم ستكون متمركزة حول -3، مما يضمن أن Y_l سينخفض قليلاً عن القيم الأصلية.

$U_u = \text{normrnd}(3, 0.5, n, 1)$; يولد ضوضاء علوية U_u متمركزة حول +3 ايضاً
باستعمال التوزيع الطبيعي وكالآتي :

$$U_u \sim N(3, 0.52)$$

وهذا يستعمل لرفع Y_u قليلاً، مما يُوسّع انتشار الضبابية بين Y_l و Y_u

$U_m = \text{normrnd}(0, 0.05, n, 1)$; يولد ضوضاء خفيفة جداً للمركز Y_m ، موزعة طبيعياً
حول الصفر:

$$U_m \sim N(0, 0.052)$$

الهدف هو جعل القيمة المتوقعة واقعية، لكنها قريبة جداً من الحقيقة الأصلية.

بعد ذلك يتم تعديل كل من القيم الثلاثية للمخرجات بإضافة الضوضاء المناسبة ليكون الناتج النهائي:

$$Y_i = (Y_{l,i+u_{l,i}}, Y_{m,i+u_{m,i}}, Y_{u,i+u_{u,i}})$$

6- تقدير معاملات النموذج الضبابي :

تم تقدير انموذج الانحدار الضبابي بموجب ثلاث طرائق هي:

1-6 المربعات الصغرى الضبابية بطريقة Diamond

في هذه الطريقة يتم تحويل الأعداد المثلثية X و Y إلى مستوى α كالآتي:

$$X_{\alpha_l} = (1 - \alpha) * X_l + \alpha * X_m;$$

$$X_{\alpha_u} = (1 - \alpha) * X_u + \alpha * X_m;$$

$$Y_{\alpha_l} = (1 - \alpha) * Y_l + \alpha * Y_m;$$

$$Y_{\alpha_u} = (1 - \alpha) * Y_u + \alpha * Y_m;$$

التي تعني أننا نأخذ نقطة داخل المثلث تكون أقرب إلى المركز كلما زادت α وهذه العملية أساسية لفكرة Diamond-FLS لأنها تسمح بتقدير تأثير الضبابية جزئيًا وليس كليًا

ومن ثم اعددا مصفوفات التقدير كالاتي:

$$\begin{aligned} X_{m_all} &= [\text{ones}(n,1), X_m]; \\ X_{\alpha_l_all} &= [\text{zeros}(n,1), X_m - X_{\alpha_l}]; \\ X_{\alpha_u_all} &= [\text{zeros}(n,1), X_m - X_{\alpha_u}]; \\ Y_{l_diff} &= Y_m - Y_{\alpha_l}; \\ Y_{u_diff} &= Y_m - Y_{\alpha_u}; \end{aligned}$$

اذ ان :

X_{m_all} تمثل المتغيرات التوضيحية مع الثابت، عند القيمة المرجحة X_m

$X_{\alpha_l_all}$ تمثل الفرق بين X_m و المستوى α الأدنى.

$X_{\alpha_u_all}$ تمثل الفرق بين X_m و المستوى α الأعلى.

Y_{l_diff}, Y_{u_diff} تمثل الانحراف بين Y_m و Y_{α} في الاتجاهين.

ومن ثم انشاء معادلات التقدير كالاتي:

$$\begin{aligned} X_{total} &= X_{m_all}' * X_{m_all} + \dots \\ &X_{\alpha_l_all}' * X_{\alpha_l_all} + \dots \\ &X_{\alpha_u_all}' * X_{\alpha_u_all}; \\ Y_{total} &= X_{m_all}' * Y_m + \dots \\ &X_{\alpha_l_all}' * Y_{l_diff} + \dots \\ &X_{\alpha_u_all}' * Y_{u_diff}; \end{aligned}$$

وهذا يشبه طريقة المربعات الصغرى (OLS)، لكن مع إضافات تعكس تأثير الضبابية. اذ ان X_{total} هو تجميع لجميع مساهمات البيانات. وان Y_{total} هو تجميع لكل التغيرات التي تُفسر Y .

ومن ثم حساب معاملات الانحدار كالاتي:

$$\begin{aligned} \text{beta_fls} &= \text{inv}(X_{total}) * Y_{total}; \\ \text{beta}_l &= \text{beta_fls} - \text{mean}([Y_{l_diff}; Y_{u_diff}]); \\ \text{beta}_u &= \text{beta_fls} + \text{mean}([Y_{l_diff}; Y_{u_diff}]); \end{aligned}$$

اذ يتم حساب المعامل المركزي β_{fls} كما في طريقة OLS , ومن ثم يتم تعديل هذا التقدير بإضافة او طرح متوسط التغيرات في Y الناتجة عن الضبابية لإعطاء حدود β_l و β_u

ومن ثم بناء المعادلات الرمزية كالآتي:

```
eq_l = "Y_l = "; eq_m = "Y_m = "; eq_u = "Y_u = ";
    eq_l = eq_l + sprintf('%.3f', beta_l(1));
    eq_m = eq_m + sprintf('%.3f', beta_fl(1));
    eq_u = eq_u + sprintf('%.3f', beta_u(1));
    for j = 1:k
    eq_l = eq_l + sprintf(' + %.3f*X%d', beta_l(j+1),
        j);
        eq_m = eq_m + sprintf(' + %.3f*X%d',
            beta_fl(j+1), j);
    eq_u = eq_u + sprintf(' + %.3f*X%d', beta_u(j+1),
        j);
    end
```

اذ تم تكوين تمثيل رمزي للمعادلة التقديرية للنموذج (بصيغة نصية) لكل من Y_l ، Y_m ، و Y_u ، ويتم عرض معادلة الانحدار باستخدام القيم المقدرة.

واخيرا حساب \hat{Y} المقدرة كالآتي:

```
Y_hat_l = beta_l(1) * ones(n,1);
Y_hat_m = beta_fl(1) * ones(n,1);
Y_hat_u = beta_u(1) * ones(n,1);
    for j = 1:k
    Y_hat_l = Y_hat_l + beta_l(j+1) * X_l(:,j);
    Y_hat_m = Y_hat_m + beta_fl(j+1) * X_m(:,j);
    Y_hat_u = Y_hat_u + beta_u(j+1) * X_u(:,j);
    end
```

بحيث يتم حساب المخرجات المقدرة \hat{Y} لـ (l, m, u) باستخدام معاملات FLS المحسوبة سابقاً لكل مشاهدة، نحسب القيمة باستخدام X_l و X_m و X_u

2-6 خوارزمية نيوتن- رافسون التكرارية باستعمال مبدأ النقطة الثابتة

(Newton-Raphson Fixed Point Iteration Alogarethem)

يتم معاملات الانحدار β باستخدام طريقة تكرارية تُبنى على الشكل التحليلي لمعادلة المربعات الصغرى, لكن بدلاً من حسابها مباشرة، نكرر التحديث على شكل نقطة ثابتة وحسب الآتي:

```
X_l_all = [ones(n,1), X_l];
X_m_all = [ones(n,1), X_m];
X_u_all = [ones(n,1), X_u];

Y_vecs = {Y_l, Y_m, Y_u};
X_mats = {X_l_all, X_m_all, X_u_all};

beta_init = rand(k+1, 1);
max_iter = 1000;
tol = 1e-6;

beta_est_fp = zeros(k+1, 3);

for level = 1:3
    X_curr = X_mats{level};
    Y_curr = Y_vecs{level};
    beta_curr = beta_init;

    for iter = 1:max_iter
        Y_hat = X_curr * beta_curr;
        error = Y_curr - Y_hat;

        grad = -2 * X_curr' * error;
        H = 2 * (X_curr' * X_curr);

        beta_new = beta_curr - H \ grad;

        if norm(beta_new - beta_curr) < tol
            break;
        end

        beta_curr = beta_new;
    end

    beta_est_fp(:,level) = beta_curr;
end

beta_l_fp = beta_est_fp(:,1);
beta_m_fp = beta_est_fp(:,2);
```

```
beta_u_fp = beta_est_fp(:,3);
```

الهدف هو إيجاد المتجه β الضبابي الذي يحقق شرط نقطة ثابتة للتابع التالي:

$$\tilde{\beta}_{(f+1)} = \tilde{\beta}_{(f)} - (H \tilde{\beta}_{(f)})^{-1} * \nabla L(\tilde{\beta}_{(f)})$$

اذ تم تطبيق خوارزمية نيوتن-رافسون ثلاث مرات:

- مرة على البيانات (Xl, Yl) للحصول على β_l
- مرة على البيانات (Xm, Ym) للحصول على β_m
- مرة على البيانات (Xu, Yu) للحصول على β_u

3-6 خوارزمية تعظيم التوقع التكرارية باستعمال مبدأ النقطة الثابتة (Maximization Expectation Fixed Point Iteration Alogarethem)

تم في هذه الخوارزمية التهيئة الاولية وفق الاتي:

```
beta_em = beta_true(:,2) + normrnd(0, 0.1, k+1, 1);  
sigma2 = 1;
```

اذ تبدأ بقيم أولية لـ β من القيم الحقيقية مع إضافة ضوضاء. وتبدأ بقيمة ابتدائية للتباين $\sigma^2=1$

ومن ثم حساب خطأ التوقع وفق الاتي:

```
residuals = Y_em - X_em * beta_em;  
Ez = residuals;
```

$Ez = residuals$; هنا نتعامل مع الفروقات بين القيم الحقيقية والتقديرية باعتبارها المتغيرات الخفية (Z) وتحسب قيمها المتوقعة ببساطة كالفروقات ومن ثم اجراء عملية تعظيم التوقع كالاتي:

```
Y_adjusted = Y_em - Ez;  
beta_new = (X_em' * X_em) \ (X_em' * Y_adjusted);
```

عد إزالة الفروقات المتوقعة، تقوم بتقدير β بتقنية المربعات الصغرى العادية (OLS)

ومن ثم القيام بعملية تحديث التباين كالاتي:

```
sigma2 = mean((Y_em - X_em * beta_new).^2);
```

ويعاد تقدير σ^2 بعد التحديث.

ثم اجراء الحلقة التكرارية الاتية:

```
if norm(beta_new - beta_em) < tol  
break;  
end
```

beta_em = beta_new;
end

وتكرار الخطوات حتى التقارب.

الملحق B

نتائج التجريبتين الثانية والثالثة للرسالة بحسب معاملي الضبابية $\alpha=0.8$ و $\alpha=0.5$ اولاً : التجربة الثانية : عند مستوى القطع $\alpha=0.5$ و عدد المتغيرات التوضيحية $k=3$

جدول (B - اولاً - 1) القيمة المتوقعة لمتغير الاستجابة الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير الثلاثة ومتوسط مربعات الخطأ لكل قيمة تقديرية ولكل طريقة ومعامل التحديد ومعنوية كل انموذج للانموذج الثاني عند كافة احجام العينات عند مستوى القطع $\alpha=0.5$

n	y_{True}	\hat{y}_{fols}	$\hat{y}_{ffp(NR)}$	$\hat{y}_{ffp(EM)}$	$MSE_{\hat{y}_{fols}}$	$MSE_{ffp(NR)}$	$MSE_{\hat{y}_{ffp(EM)}}$
10	8.39352	8.33109	8.40525	8.17624	0.06243	0.01172	0.21729
	9.42371	10.33072	9.35860	9.10103	0.90702	0.06511	0.32268
	10.43816	13.28454	10.46956	10.29617	2.84637	0.03140	0.14200
	6.83810	5.47126	6.87203	6.66129	1.36684	0.03393	0.17681
	9.13892	9.65623	9.11020	8.82577	0.51731	0.02872	0.31315
	8.04993	8.34830	8.07151	7.85000	0.29837	0.02158	0.19992
	7.09007	6.56211	7.04334	6.90524	0.52795	0.04673	0.18483
	9.73025	10.88598	9.75263	9.49898	1.15573	0.02238	0.23127
	7.24762	4.86862	7.23388	6.96164	2.37900	0.01374	0.28597
	7.37565	5.98707	7.40894	7.12667	1.38858	0.03329	0.24897
MSE		2.03556	0.00118	0.05722	R^2		
Sig.		0.001	0.000	0.000	0.88	0.91	0.90
n	y_{True}	\hat{y}_{fols}	$\hat{y}_{ffp(NR)}$	$\hat{y}_{ffp(EM)}$	$MSE_{\hat{y}_{fols}}$	$MSE_{ffp(NR)}$	$MSE_{\hat{y}_{ffp(EM)}}$
20	8.44472	8.08506	8.49980	8.40553	0.35966	0.05509	0.03919
	8.44915	8.03916	8.45582	8.36698	0.40999	0.00668	0.08217

	6.75240	3.90100	6.78121	6.72088	2.85140	0.02881	0.03152
	9.96752	11.63328	9.91525	9.79243	1.66576	0.05226	0.17509
	10.86896	14.05768	10.88538	10.74322	3.18872	0.01642	0.12574
	9.10261	9.37042	9.08593	8.99192	0.26781	0.01668	0.11068
	9.27024	9.98007	9.23006	9.11964	0.70983	0.04019	0.15061
	6.40645	3.19455	6.37404	6.33967	3.21190	0.03241	0.06678
	7.44607	6.51103	7.45227	7.38319	0.93504	0.00620	0.06288
	8.30741	7.72060	8.28828	8.19007	0.58681	0.01913	0.11735
	MSE	2.01855	0.00111	0.05491	R^2		
	Sig.	0.001	0.000	0.000	0.84	0.94	0.93
n	y_{True}	\hat{y}_{fols}	$\hat{y}_{ffp(NR)}$	$\hat{y}_{ffp(EM)}$	$MSE_{\hat{y}_{fols}}$	$MSE_{ffp(NR)}$	$MSE_{\hat{y}_{ffp(EM)}}$
35	10.77491	11.90214	10.86946	10.63050	1.12723	0.09455	0.14441
	7.18237	6.19806	7.18430	7.02275	0.98431	0.00193	0.15962
	10.42048	10.83270	10.54096	10.27918	0.41221	0.12047	0.14130
	10.39551	11.72290	10.47991	10.08534	1.32739	0.08441	0.31016
	6.98442	4.62960	6.91247	6.76205	2.35481	0.07195	0.22237
	6.53687	3.95525	6.60187	6.49318	2.58162	0.06500	0.04370
	11.61407	13.25469	11.62073	11.20084	1.64062	0.00666	0.41322
	7.85273	7.05023	7.92760	7.61291	0.80250	0.07487	0.23982
	11.99793	14.20724	12.01307	11.63009	2.20931	0.01514	0.36784
	10.16899	10.62308	10.23017	9.83321	0.45409	0.06118	0.33578
	MSE	2.89278	0.00435	0.11303	R^2		
	Sig.	0.002	0.000	0.000	0.85	0.93	0.91
n	y_{True}	\hat{y}_{fols}	$\hat{y}_{ffp(NR)}$	$\hat{y}_{ffp(EM)}$	$MSE_{\hat{y}_{fols}}$	$MSE_{ffp(NR)}$	$MSE_{\hat{y}_{ffp(EM)}}$
50	8.41281	7.37286	8.35217	8.25568	1.03995	0.06063	0.15713

	9.84928	9.96996	9.87683	10.05132	0.12068	0.02755	0.20204
	7.93014	7.16856	7.94546	8.03175	0.76158	0.01532	0.10161
	8.49037	7.69283	8.59756	8.59551	0.79755	0.10718	0.10514
	9.18928	9.13848	9.16231	9.35540	0.05080	0.02697	0.16612
	11.08060	12.49253	11.04114	10.97447	1.41193	0.03946	0.10612
	7.98672	6.50904	7.99992	8.25566	1.47768	0.01320	0.26895
	9.05505	8.69876	9.01399	9.19002	0.35628	0.04106	0.13497
	8.57846	7.14752	8.53285	8.45159	1.43093	0.04561	0.12686
	8.20847	7.40697	8.20774	8.28005	0.80150	0.00073	0.07158
	MSE	2.52901	0.00181	0.01815	R^2		
	Sig.	0.001	0.000	0.000	0.83	0.91	0.89
n	y_{True}	\hat{y}_{fols}	$\hat{y}_{ffp(NR)}$	$\hat{y}_{ffp(EM)}$	$MSE_{\hat{y}_{fols}}$	$MSE_{ffp(NR)}$	$MSE_{\hat{y}_{ffp(EM)}}$
75	11.84767	13.46538	11.84879	11.32800	1.61771	0.00113	0.51967
	10.21231	10.40009	10.20550	9.75831	0.18777	0.00682	0.45400
	10.50098	10.53515	10.40499	9.94678	0.03416	0.09600	0.55420
	7.57307	6.20851	7.60369	7.38086	1.36456	0.03062	0.19221
	9.74928	10.42777	9.77062	9.42521	0.67849	0.02134	0.32407
	11.55020	12.72544	11.46983	10.96473	1.17524	0.08037	0.58547
	9.15956	8.69630	9.15232	8.75479	0.46326	0.00724	0.40478
	7.61664	6.01101	7.72266	7.46328	1.60563	0.10601	0.15336
	8.83007	8.98530	8.82519	8.58154	0.15524	0.00488	0.24853
	8.47562	7.70104	8.48723	8.16484	0.77458	0.01161	0.31078
	MSE	1.78594	0.00259	0.16913	R^2		
	Sig.	0.004	0.000	0.000	0.78	0.92	0.89
n	y_{True}	\hat{y}_{fols}	$\hat{y}_{ffp(NR)}$	$\hat{y}_{ffp(EM)}$	$MSE_{\hat{y}_{fols}}$	$MSE_{ffp(NR)}$	$MSE_{\hat{y}_{ffp(EM)}}$

100	13.07538	16.55622	13.17427	13.09733	3.48084	0.09889	0.02195
	10.35104	11.03138	10.30925	10.25566	0.68034	0.04179	0.09537
	8.10966	6.85267	8.10417	7.96047	1.25699	0.00550	0.14919
	10.19674	10.69564	10.13006	10.03614	0.49889	0.06668	0.16061
	10.68548	11.92066	10.66089	10.60999	1.23518	0.02459	0.07550
	11.31697	12.42806	11.35354	11.47393	1.11109	0.03657	0.15696
	10.32583	10.96168	10.39618	10.51059	0.63585	0.07035	0.18476
	8.81736	8.11709	8.83973	8.76348	0.70027	0.02237	0.05388
	9.82732	10.43184	9.79943	9.68916	0.60452	0.02789	0.13816
	9.54154	10.12244	9.59133	9.47443	0.58090	0.04979	0.06710
MSE	2.22456	0.00265	0.01454	R^2			
Sig.	50.00	0.000	0.000	0.67	0.95	0.90	

يتضح من الجدول جدول (B – أولاً -1) ما يأتي :

1- عند حجم عينة $n=10$:

تبين من خلال ملاحظة متوسط مربعات الخطأ (MSE) لكل طريقة ، أن طريقة نيوتن- رافسون وفق مبدأ النقطة الثابتة تحقق أقل متوسط خطأ تقديري بلغ 0.00118، مقارنة بطريقة المربعات الصغرى الضبابية (FOLS) التي بلغ فيها 2.03556، وطريقة تعظيم التوقع وفق مبدأ النقطة الثابتة (EM) التي بلغ فيها 0.05722 وهذا يدل على تفوق طريقة نيوتن-رافسون من حيث دقة التقدير وفعاليتها في تقليص الفجوة بين القيمة الحقيقية والمقدرة. كما تؤكد معنوية النماذج الثلاثة من خلال دلالات إحصائية قوية؛ إذ كانت القيم الاحتمالية (Sig.) أقل من 0.005 في جميع الطرائق، مما يشير إلى ملاءمة النماذج إحصائياً. وكانت Sig. لطريقة نيوتن- رافسون التكرارية وفق مبدأ النقطة الثابتة أقل من باقي الطرائق، مما يدل على أنها أكثر معنوية ودقة. أما معامل التحديد R^2 فقد أظهر تفاوتاً في تفسير التباين، حيث سجل أعلى قيمة في طريقة نيوتن- رافسون (0.91) ، تليها طريقة تعظيم التوقع وفق مبدأ النقطة الثابتة والذي بلغ (0.90) وأقلها بلغ (0.88) في FOLS وفق مبدأ Diamond.

2- عند حجم عينة $n=20$:

أظهرت طريقة نيوتن -رافسون وفق مبدأ النقطة الثابتة مجدداً أقل متوسط خطأ تقديري بلغ 0.00111، مقارنة بـ FOLS وفق مبدأ Diamond التي سجلت 2.01855، وطريقة تعظيم

التوقع وفق مبدأ الذي بلغ 0.05491 , هذا يدل على الاستقرار الواضح لطريقة نيوتن-رافسون وفق مبدأ النقطة الثابتة في تقديم تقديرات دقيقة. جميع القيم الاحتمالية (Sig.) كانت أقل من 0.005، مما يدل على معنوية النماذج الثلاثة، مع تفوق واضح لطريقة نيوتن-رافسون وفق مبدأ النقطة الثابتة Sig. = 0.000 . أما R² فقد سجلت نيوتن-رافسون وفق مبدأ النقطة الثابتة أعلى قيمة بلغت 0.94، تليها تعظيم التوقع وفق مبدأ النقطة الثابتة بـ 0.93، وأقلها FOLS بـ 0.84.

3- عند حجم العينة n=35:

استمرت طريقة نيوتن-رافسون وفق مبدأ النقطة الثابتة في تحقيق أقل متوسط خطأ تقديري بلغ 0.00435، مقابل 2.89278 لطريقة FOLS ، و 0.11303 لطريقة تعظيم التوقع وفق مبدأ النقطة الثابتة ، مما يعزز من مصداقيتها في التقدير الدقيق. جميع النماذج كانت معنوية (Sig. < 0.005) ، وكانت الطريقة الأكثر معنوية هي نيوتن-رافسون وفق مبدأ النقطة الثابتة (Sig. = 0.000) . أما R² فقد سجلت نيوتن-رافسون وفق مبدأ النقطة الثابتة 0.93 ، تليها تعظيم التوقع وفق مبدأ النقطة الثابتة بـ 0.91 ، ثم FOLS وفق مبدأ Diamond بـ 0.85، مما يدل على استمرار تفوق الأولى في تفسير التباين.

4- عند حجم العينة n=50:

حققت نيوتن-رافسون وفق مبدأ النقطة الثابتة أدنى قيمة MSE بلغت 0.00181، تليها طريقة تعظيم وفق مبدأ النقطة الثابتة التوقع بـ 0.01815، بينما كانت FOLS وفق مبدأ diamond الأقل دقة بـ 2.52901 . وقد كانت النماذج الثلاثة معنوية (Sig. < 0.005) مع أفضلية لطريقة نيوتن-رافسون وفق مبدأ النقطة الثابتة من حيث دلالة النموذج (Sig. = 0.000) ومن حيث معامل التحديد R²، سجلت نيوتن-رافسون وفق مبدأ النقطة الثابتة أعلى قيمة 0.91، ثم تعظيم التوقع وفق مبدأ النقطة الثابتة 0.89، وأخيرًا FOLS وفق مبدأ Diamond بـ 0.83.

5- عند حجم العينة n=75:

سجلت طريقة نيوتن-رافسون وفق مبدأ النقطة الثابتة أدنى خطأ تقديري بلغ 0.00259، مقارنة بـ 1.78594 لـ FOLS وفق مبدأ Diamond ، و 0.16913 لتعظيم التوقع وفق مبدأ النقطة الثابتة ، ما يعكس ثبات دقتها ومرونتها مع اتساع العينة. لقيم الاحتمالية (Sig.) استمرت أقل من 0.005، مما يدل على معنوية النماذج، مع أفضلية ملحوظة لنيوتن-رافسون وفق مبدأ النقطة الثابتة. وسجلت الطريقة ذاتها أعلى قيمة لمعامل التحديد R² بـ 0.92، تليها تعظيم التوقع وفق مبدأ النقطة الثابتة بـ 0.89، و FOLS وفق مبدأ Diamond بـ 0.78، وهو انخفاض ملحوظ.

6- عند حجم العينة n=100:

رغم زيادة حجم العينة، فقد أثبتت طريقة نيوتن-رافسون وفق مبدأ النقطة الثابتة فاعليتها العالية من خلال تسجيل أقل متوسط خطأ تقديري بلغ 0.00265، بينما كانت قيمة MSE لطريقة تعظيم التوقع وفق مبدأ النقطة الثابتة 0.01454، ولـ FOLS 2.22456 وفق مبدأ Diamond ، ما يشير إلى تراجع دقتها النسبي مقارنة بالطريقتين الأخرين. أما من حيث الدلالة الإحصائية، فكانت جميع النماذج معنوية، لكن نيوتن-رافسون وفق مبدأ النقطة الثابتة احتفظت بأقل قيمة Sig. (0.000)، مما يعزز وثوقيتها. وقد بلغ معامل التحديد R^2 في نيوتن-رافسون وفق مبدأ النقطة الثابتة 0.95، وهو الأعلى بين جميع العينات، بينما بلغ 0.90 لتعظيم التوقع وفق مبدأ النقطة الثابتة ، و 0.67 فقط لـ FOLS وفق مبدأ Diamond ، مما يوضح ضعف الأخيرة في تفسير التباين.

جدول جدول (B – أولاً -2) المعلمات الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير ومتوسط مربعات الخطأ لكل معلمة ومعنوية احصاءة t للانموذج الثاني عند كافة احجام العينات عند مستوى القطع $\alpha=0.5$

n	Coefficient Method	$\tilde{\beta}_0$	$\tilde{\beta}_1$	$\tilde{\beta}_2$	$\tilde{\beta}_3$
		True	2.09	2.06	2.18
10	<i>fOls</i>	-5.89	3.54	5.62	5.79
	MSE	7.98	1.48	3.45	3.50
	<i>ffp(NR)</i>	2.22	2.02	2.10	2.29
	MSE	0.12	0.04	0.08	0.00
	<i>ffp(EM)</i>	1.93	1.97	2.20	2.31
	MSE	0.17	0.10	0.02	0.02
	<i>Sig.fOls</i>	0.01	0.01	0.01	0.01
	<i>Sig.ffp(NR)</i>	0.00	0.00	0.00	0.00
	<i>Sig.ffp(EM)</i>	0.00	0.00	0.00	0.00
	20	<i>True</i>	3.12	1.93	1.56
<i>fOls</i>		-4.81	4.73	3.35	5.41
<i>MSE</i>		7.93	2.79	1.79	3.42
<i>ffp(NR)</i>		3.09	1.94	1.59	2.00

	<i>MSE</i>	0.03	0.00	0.03	0.02
	<i>ffp(EM)</i>	3.11	1.91	1.56	1.95
	<i>MSE</i>	0.01	0.03	0.01	0.03
	<i>Sig.fols</i>	0.001	0.004	0.003	0.008
	<i>Sig.ffp(NR)</i>	0.000	0.000	0.000	0.000
	<i>Sig.ffp(EM)</i>	0.000	0.000	0.000	0.000
35	<i>True</i>	1.08	2.02	3.20	3.02
	<i>fOls</i>	-5.69	4.28	6.16	4.49
	<i>MSE</i>	6.77	2.27	2.96	1.47
	<i>ffp(NR)</i>	1.05	2.04	3.23	2.99
	<i>MSE</i>	0.03	0.02	0.03	0.03
	<i>ffp(EM)</i>	0.98	1.83	3.35	2.85
	<i>MSE</i>	0.10	0.19	0.15	0.16
	<i>Sig.fols</i>	0.000	0.000	0.000	0.000
	<i>Sig.ffp(NR)</i>	0.000	0.000	0.000	0.000
	<i>Sig.ffp(EM)</i>	0.000	0.000	0.000	0.000
50	<i>True</i>	3.26	1.26	2.08	2.42
	<i>fOls</i>	-3.44	3.60	4.51	4.06
	<i>MSE</i>	6.70	2.34	2.43	1.64
	<i>ffp(NR)</i>	3.30	1.27	2.06	2.41
	<i>MSE</i>	0.03	0.00	0.03	0.01
	<i>ffp(EM)</i>	3.22	1.21	2.28	2.36
	<i>MSE</i>	0.04	0.06	0.20	0.05
	<i>Sig.fols</i>	0.001	0.002	0.000	0.012

	<i>Sig.f_{ffp}(NR)</i>	0.000	0.000	0.000	0.000
	<i>Sig.f_{ffp}(EM)</i>	0.000	0.000	0.000	0.000
75	<i>True</i>	2.74	2.00	2.50	2.20
	<i>fOls</i>	-2.72	4.37	3.79	3.88
	<i>MSE</i>	5.46	2.37	1.28	1.68
	<i>ffp(NR)</i>	2.73	2.02	2.49	2.20
	<i>MSE</i>	0.01	0.02	0.01	0.00
	<i>ffp(EM)</i>	2.77	2.00	2.28	2.01
	<i>MSE</i>	0.03	0.00	0.22	0.19
	<i>Sig.f_{ols}</i>	0.031	0.002	0.000	0.051
	<i>Sig.f_{ffp}(NR)</i>	0.000	0.000	0.000	0.000
	<i>Sig.f_{ffp}(EM)</i>	0.000	0.000	0.000	0.000
100	<i>True</i>	2.52	1.31	2.47	3.24
	<i>fOls</i>	-4.42	3.20	4.87	5.81
	<i>MSE</i>	6.93	1.88	2.40	2.57
	<i>ffp(NR)</i>	2.50	1.32	2.48	3.24
	<i>MSE</i>	0.02	0.01	0.01	0.00
	<i>ffp(EM)</i>	2.66	1.13	2.58	3.15
	<i>MSE</i>	0.15	0.18	0.11	0.09
	<i>Sig.f_{ols}</i>	0.004	0.002	0.001	0.009
	<i>Sig.f_{ffp}(NR)</i>	0.000	0.000	0.000	0.000
	<i>Sig.f_{ffp}(EM)</i>	0.000	0.000	0.000	0.000

يتضح من جدول جدول (B - أولاً - 1) عند مستوى القطع $\alpha=0.5$ ماياتي:

1- عند حجم العينة $n=10$:

أن طريقة نيوتن- رافسون وفق مبدأ النقطة الثابتة تفوقت بوضوح في تقدير المعلمات الأربعة، حيث كانت الفروقات بينها وبين القيم الحقيقية طفيفة جداً، أما طريقة تعظيم التوقع وفق مبدأ النقطة الثابتة فقدّمت أداءً جيداً نسبياً ولكن أقل دقة، في المقابل، أظهرت طريقة المربعات الصغرى الضبابية وفق مبدأ Diamond أخطاءً كبيرة، خصوصاً في المعامل β_0 والذي ظهّر باشارة معاكسة للقيمة الافتراضية. مما يشير إلى ضعف دقتها التقديرية. كما أن جميع الطرائق كانت معنوية إحصائياً، إلا أن نيوتن-رافسون وفق مبدأ النقطة الثابتة تميّزت بقيم $\text{Sig.}=0.000$ دلالة معنوية بدرجة عالية في كل المعاملات، مما يدل على قوتها الإحصائية وعدم وجود خطأ من النوع الأول.

2- عند حجم العينة $n=20$:

استمرت طريقة نيوتن- رافسون وفق مبدأ النقطة الثابتة في تفوقها، حيث كانت تقديرات المعلمات شديدة القرب من القيم الحقيقية، مع متوسطات خطأ منخفضة جداً، أما طريقة تعظيم التوقع وفق مبدأ النقطة الثابتة، فقدّمت أداءً مقبولاً ولكن أقل اتساقاً، بينما سجلت طريقة FOLS وفق مبدأ Diamond انحرافات كبيرة، خاصة في β_0 ، و β_2 ، مما يشير إلى استمرار ضعفها التقديري. وقد كانت جميع القيم الإحصائية للمعنوية (Sig.) مساوية لـ 0.000 ، ما يعزز موثوقية الطريقتين القائمتين على النقطة الثابتة.

3- عند حجم العينة $n=35$:

استمرت طريقة نيوتن-رافسون وفق مبدأ النقطة الثابتة في تفوقها، حيث كانت تقديرات المعلمات شديدة القرب من القيم الحقيقية، مع متوسطات خطأ منخفضة، أما طريقة تعظيم التوقع وفق مبدأ النقطة الثابتة، فقدّمت أداءً مقبولاً ولكن أقل اتساقاً، بينما سجلت طريقة FOLS وفق مبدأ Diamond انحرافات كبيرة، خاصة في β_0 ، و β_2 ، مما يشير إلى استمرار ضعفها التقديري. وقد كانت جميع القيم الإحصائية للمعنوية (Sig.) مساوية لـ 0.000 ، ما يعزز موثوقية الطريقتين القائمتين على النقطة الثابتة.

4- عند حجم العينة $n=50$:

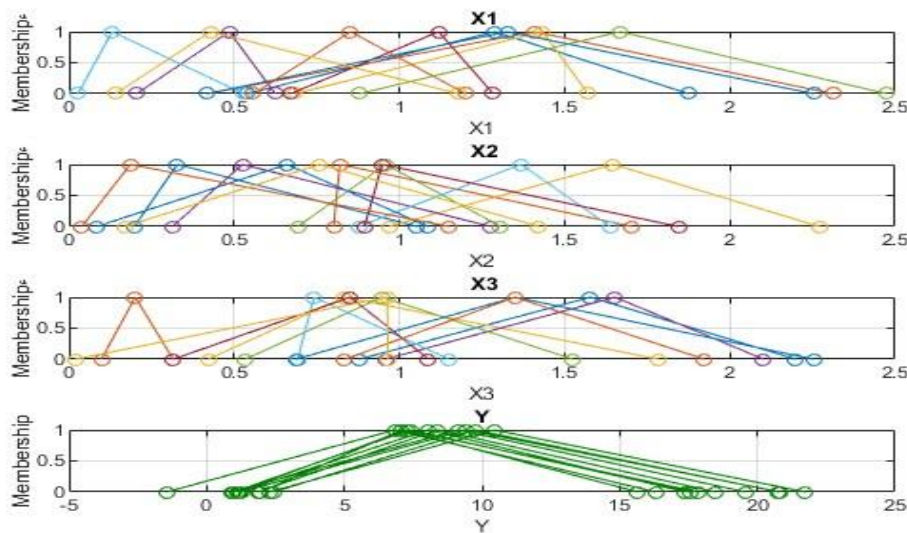
تقديرات نيوتن- رافسون وفق مبدأ النقطة الثابتة بقيت الأقرب للقيم الحقيقية، مع MSE منخفض لجميع المعلمات وهو ما يدل على كفاءة عالية في الأداء. أما طريقة تعظيم التوقع وفق مبدأ النقطة الثابتة فحققت دقة مقبولة، لكنها بدأت تُظهر تذبذباً طفيفاً، خاصة في β_2 في حين أن FOLS وفق مبدأ Diamond بقيت غير دقيقة، إذ سجلت خطأً كبيراً في β_0 ، و β_1 ، مع تحسّن طفيف في β_3 . القيم الإحصائية للمعنوية أظهرت تفوق نيوتن- رافسون وفق مبدأ النقطة الثابتة مجدداً، بفضل الثبات في Sig. لجميع المعاملات.

5- عند حجم العينة $n=75$:

أثبتت نيوتن- رافسون وفق مبدأ النقطة الثابتة استقرارها العالي، وحققت أفضل دقة، في المقابل، أظهرت تعظيم التوقع وفق مبدأ النقطة الثابتة تراجعاً نسبياً في بعض التقديرات، لاسيما في β_2 ، و β_3 . بينما بقيت FOLS وفق مبدأ Diamond تعاني من ضعف واضح، خاصة في β_0 ، مع أدنى معنوية للمعامل β_3 عند $\text{Sig.}=0.051$ ، وهي على حدود القبول الإحصائي. نيوتن- رافسون وفق مبدأ النقطة الثابتة حافظت على القيم المثالية للمعنوية، مما يعزز ثقتها الإحصائية.

6- عند حجم العينة $n=100$:

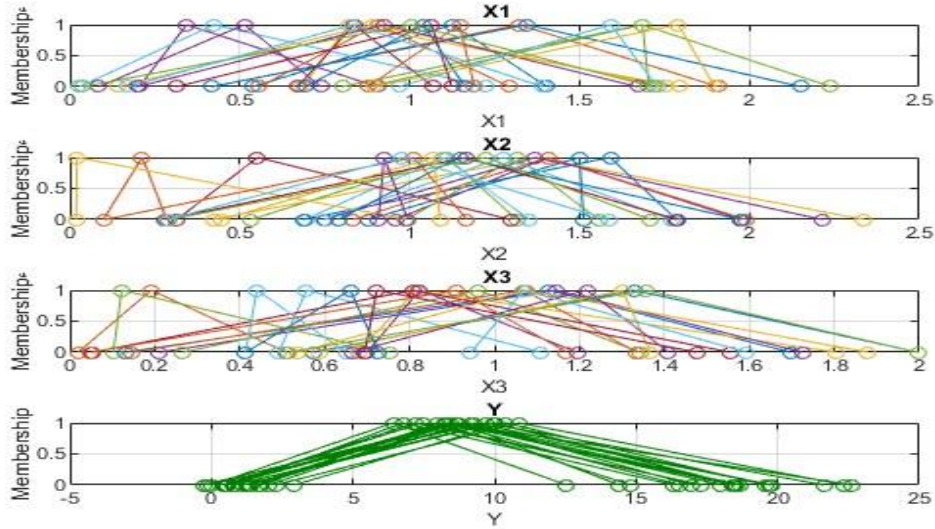
سجلت طريقة نيوتن- رافسون وفق مبدأ النقطة الثابتة أفضل النتائج عند حجم العينة الكبير، بمتوسط خطأ منخفض مع تطابق شبه تام مع القيم الحقيقية. بينما أظهرت طريقة تعظيم التوقع وفق مبدأ النقطة الثابتة نتائج مقبولة لكنها أقل دقة. أما FOLS وفق مبدأ Diamond فبقيت تعاني من فجوة كبيرة في التقدير، خاصة في β_0 ، ما يعكس استمرار ضعفها حتى عند هذا الحجم الكبير. وقد احتفظت نيوتن- رافسون وفق مبدأ النقطة الثابتة بقيم $\text{Sig.}=0.000$ عبر جميع المعاملات، ما يعزز مصداقيتها في التقدير بشكل كبير.



شكل (B – أولاً -1) قيم الانتماء المثلثية للمتغيرات التوضيحية ومتغير الاستجابة للنموذج الثاني عند حجم عينة $n=10$ عند مستوى القطع $\alpha=0.5$

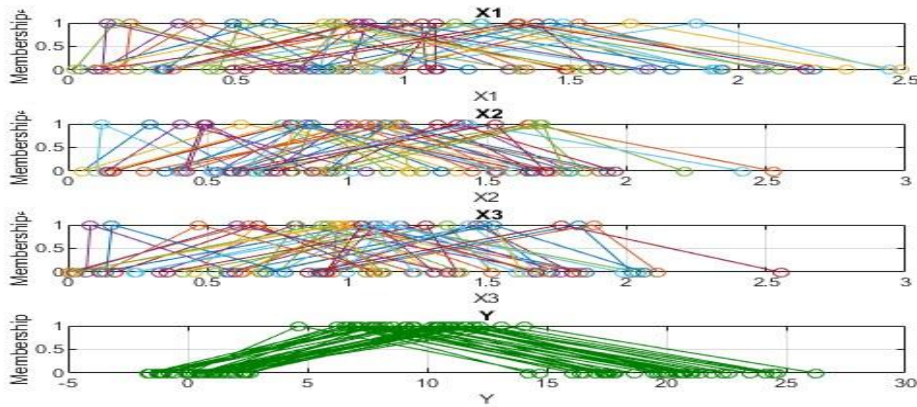
يعرض شكل (B – أولاً -1) دوال الانتماء المثلثية للمتغيرات التوضيحية الثلاثة X_1 ، X_2 ، و X_3 ، إضافة إلى متغير الاستجابة Y ، وذلك عند حجم عينة صغير $n=10$ عند مستوى القطع $\alpha=0.5$ إذ تُظهر المتغيرات التوضيحية توزعاً ضمن مدى ضيق يتراوح بين 0 و 2.5، مع تداخل واضح بين دوال الانتماء، مما يعكس تمثيلاً دقيقاً لحالة عدم اليقين المرتبطة بهذه المتغيرات. هذا التداخل المتكرر بين الدوال يشير إلى شمولية في التغطية وتعزيز للمرونة التقديرية داخل النموذج، وهو ما يُعد سمة إيجابية للنمذجة الضبابية. أما متغير الاستجابة Y ، فتبدو دوال الانتماء أكثر تركزاً وتناظراً، وتقع أغلبها ضمن المدى [5-15] مع قاعدة أضيق نسبياً، ما يدل على أن النموذج قد

أنتج استجابات ضبابية محددة ومركزة حول القيم المتوقعة. هذا التمرکز يعزز من دقة التقدير ويشير إلى أن النمذجة المثلثية وفرت قدرة عالية على تقريب العلاقة بين المتغيرات التوضيحية والاستجابة.



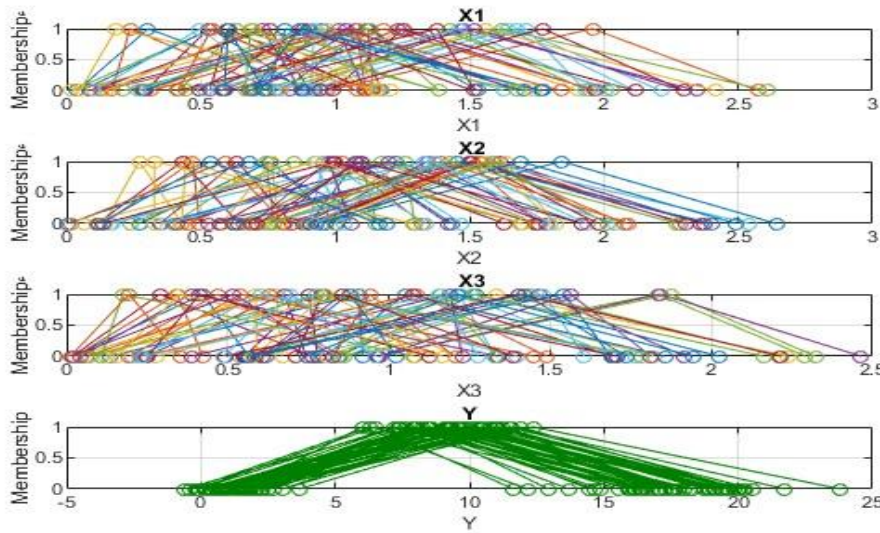
شكل (B - أولاً - 2) قيم الانتماء المثلثية للمتغيرات التوضيحية و متغير الاستجابة للنموذج الثاني عند حجم عينة $n=20$ عند مستوى القطع $\alpha=0.5$

يظهر شكل (B - أولاً - 2) منحنيات دوال الانتماء الخاصة بالمتغيرات التوضيحية الذي يبين درجة تداخل كثيفة بينها موزعة ضمن مدى ضيق يتراوح تقريباً بين 0 و 2.5، مع زيادة في كثافة التراكب مقارنة بالشكل السابق عند $n=10$ هذا يعكس تمثيلاً أكثر تفصيلاً وتنوعاً للضبابية نتيجة زيادة عدد القيم، مما يحسن تغطية الفضاء التفسيري ويوفر دعماً أوسع للتقريب الغامض داخل النموذج. أما بالنسبة لمتغير الاستجابة Y، فتُظهر دوال الانتماء تركيزاً واضحاً مع تناظر وانتظام حول القيم الوسطية، مما يدل على خروج استجابات ضبابية منضبطة ومركزة.



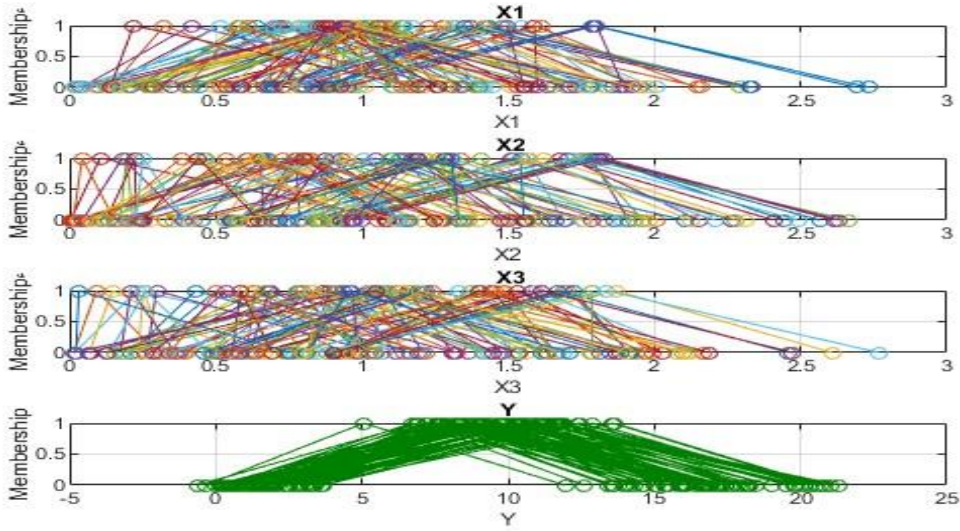
شكل (B – اولاً -3) قيم الانتماء المثلثية للمتغيرات التوضيحية ومتغير الاستجابة للانموذج الثاني عند حجم عينة $n=35$ عند مستوى القطع $\alpha=0.5$

يبين شكل (B – اولاً -3) تغطية واسعة للمتغيرات التوضيحية الثلاثة للمجال بين 0 و3 تقريباً، مع تكثيف واضح في تراكب دوال الانتماء نتيجة ازدياد عدد القيم. هذا التداخل الكثيف والمتوازن يعكس حالة ضبابية دقيقة، حيث تمتد الدوال بشكل متقاطع لتغطي كامل نطاق القيم المحتملة، مما يعزز من قوة التمثيل الضبابي ويعطي ثقة أعلى في النموذج التقديري. بالنسبة لمتغير الاستجابة Y ، فنلاحظ أن دوال الانتماء متمركزة بشكل واضح حول المدى [5-15]، وتمتد بانضباط حتى 25 تقريباً، مع انخفاض تدريجي للانتماءات عند الأطراف. هذا النمط يشير إلى أن النظام قد استقر على نواتج ضبابية دقيقة ومحددة، على الرغم من اتساع العينة، مما يدل على ثبات بنية النموذج تحت الضبابية.



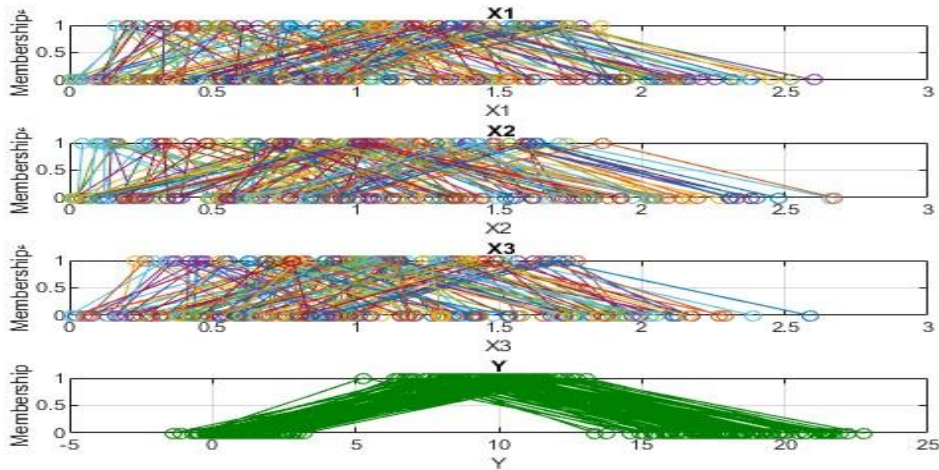
شكل (B – اولاً -4) قيم الانتماء المثلثية للمتغيرات التوضيحية ومتغير الاستجابة للانموذج الثاني عند حجم عينة $n=50$ عند مستوى القطع $\alpha=0.5$

يبين شكل (B – اولاً -4) المتغيرات التوضيحية الثلاثة بانتشاراً واسعاً للدوال المثلثية، مع تراكب مكثف ومتوازن ناتج عن زيادة كثافة البيانات. يُلاحظ أن الدوال متداخلة تغطي كافة النطاقات، ما يشير إلى تمثيل ضبابي شامل يُعبّر عن حالة عدم اليقين بدقة دون فراغات، مما يُعزز من قدرة النموذج على تمثيل العلاقات التفسيرية المتعددة. أما متغير الاستجابة Y ، فتستمر دوال الانتماء بإظهار تمركز واضح ضمن المدى [5 – 15]، مع امتداد متناسق حتى حدود $Y \approx 20$ هذا يشير إلى انضباط المخرجات بالرغم من زيادة حجم العينة، ويعكس قدرة النموذج الضبابي على الحفاظ على دقة التقدير واستقرار النتائج.



شكل (B – أولاً 5) قيم الانتماء المثلثية للمتغيرات التوضيحية ومتغير الاستجابة للنموذج الثاني عند حجم عينة $n=75$ عند مستوى القطع $\alpha=0.5$

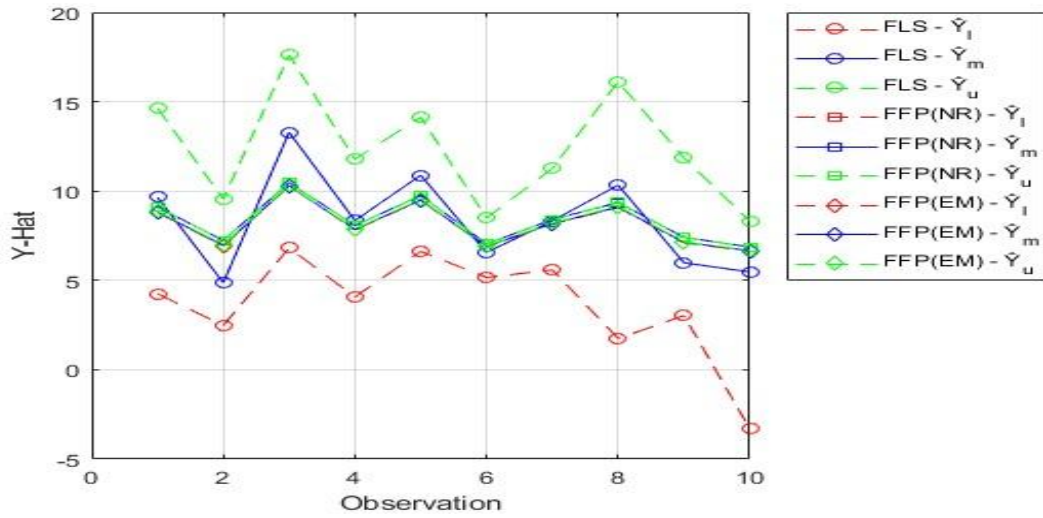
يبين شكل (B – أولاً 5) أن حجم العينة الكبير $n=75$ أدى إلى زيادة الكثافة في تمثيل المتغيرات التوضيحية، دون أن يؤثر سلباً على استقرار مخرجات النموذج. ويُظهر النموذج الضبابي المستند إلى دوال انتماء مثلثية عند $\alpha=0.5$ قدرة عالية على الاحتفاظ بالدقة والاتزان في الاستجابات، حتى مع تصاعد تعقيد البيانات.



شكل (B – أولاً 6) قيم الانتماء المثلثية للمتغيرات التوضيحية ومتغير الاستجابة للنموذج الثاني عند حجم عينة $n=100$ عند مستوى القطع $\alpha=0.5$

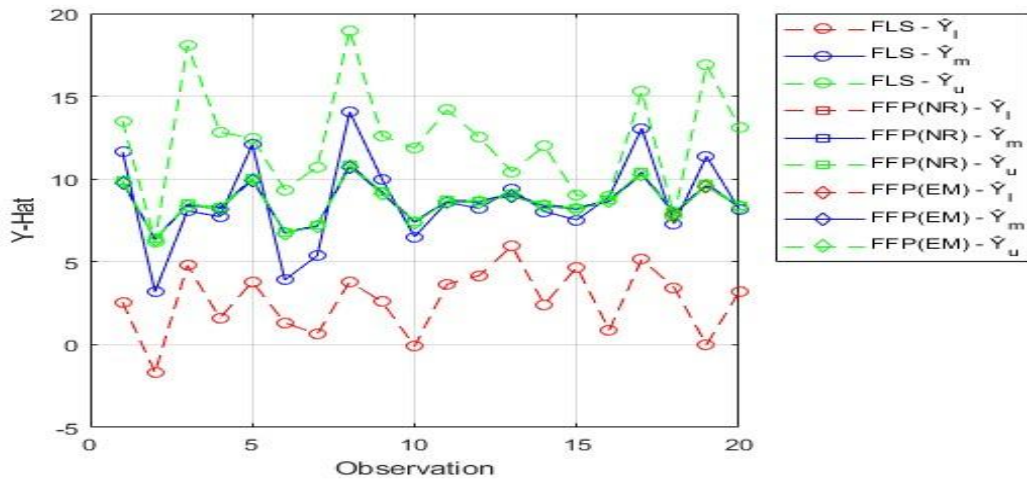
يبين الشكل (B – أولاً 6) عند $n=100$ ، أن النموذج الضبابي حافظ على كفاءته في تمثيل المدخلات وتوليد مخرجات دقيقة، رغم التشويش البصري الناتج عن كثافة العينة. ويؤكد هذا الشكل

أن دوال الانتماء المثلثية عند $\alpha=0.5$ لا تزال فعالة في تقديم تقريبات مستقرة للعلاقات بين المتغيرات حتى في أقصى ظروف التعقيد العددي.



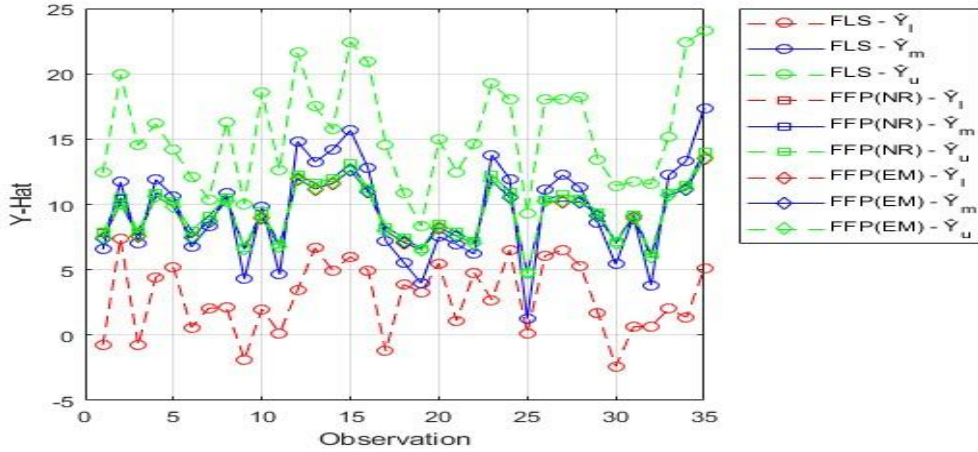
شكل (B – اولاً 7-) منحنى القيمة المتوقعة لمتغير الاستجابة عند التضبيب للانموذج الثاني عند حجم عينة $n=10$ عند مستوى القطع $\alpha=0.5$

يبين الشكل (B – اولاً 7-) أن طريقة FLS وفق مبدأ Diamond تعاني من تشتت ملحوظ في التقديرات، وخاصة في حدودها الدنيا Y_L ، مما يعكس ضعف دقتها في تمثيل عدم اليقين عند هذا الحجم الصغير من البيانات. في المقابل، تظهر الطريقتان FFP-NR و FFP-EM وفق مبدأ النقطة الثابتة درجة عالية من الاستقرار والاتساق، إذ تتقارب حدود التقدير فيها حول القيم المتوسطة بشكل منتظم، مما يدل على بنية ضبابية أكثر إحكاماً. وتبرز طريقة نيوتن-رافسون وفق مبدأ النقطة الثابتة FFP-NR بأفضل أداء، إذ تتصف منحنياتها العليا والدنيا بانتظام واضح وثبات نسبي يعكس دقة النموذج في تمثيل الغموض والتنبؤ بالقيم الحقيقية بشكل أكثر موثوقية. أما طريقة تعظيم التوقع FFP-EM، فرغم تماسكها العام، إلا أن بعض المشاهدات أظهرت فيها تبايناً طفيفاً بين الحدين الأعلى والأدنى، ما يشير إلى تأثيرها بدرجة أكبر بالتقلبات الدقيقة في البيانات.



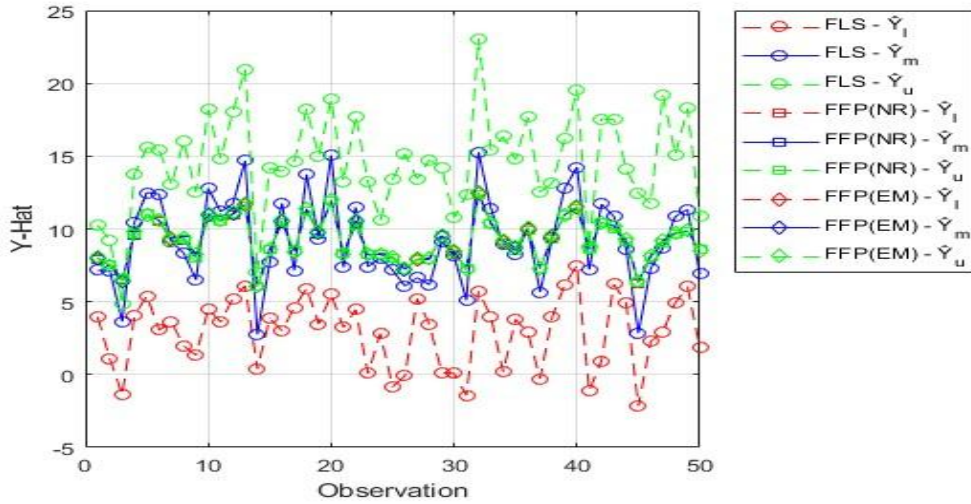
شكل (B – اولاً -8) منحنى القيمة المتوقعة لمتغير الاستجابة عند التضبيب للانموذج الثاني عند حجم عينة $n=20$ عند مستوى القطع $\alpha=0.5$

يبين الشكل (B – اولاً -8) استمرار ضعف أداء طريقة FLS وفق مبدأ Diamond، حيث يُلاحظ تشتت واضح في الحدود الدنيا مع قيم منخفضة ومتقلبة، مما يعكس استمرار ضعفها في تمثيل دقيق للبيانات، حتى مع زيادة العينة إلى 20. أما طريقتا FFP-NR و FFP-EM المعتمدتان على مبدأ النقطة الثابتة فتظهران أكثر تماسكًا، إذ تتقارب القيم المتوقعة حول القيمة الوسطى وتُظهر حدودًا عليا ودنيا أكثر انتظامًا. وتبرز FFP-NR وفق مبدأ النقطة الثابتة مجددًا كالأكثر دقة واستقرارًا، حيث تُظهر منحنياتها توازنًا واضحًا بين الحدين الأعلى والأدنى دون تقلبات حادة، مما يؤكد كفاءتها العالية في التعامل مع البيانات الضبابية. في المقابل، تُظهر FFP-EM وفق مبدأ النقطة الثابتة بعض التذبذب في حدودها العليا، مما يشير إلى تأثيرها الجزئي بتقلبات البيانات.



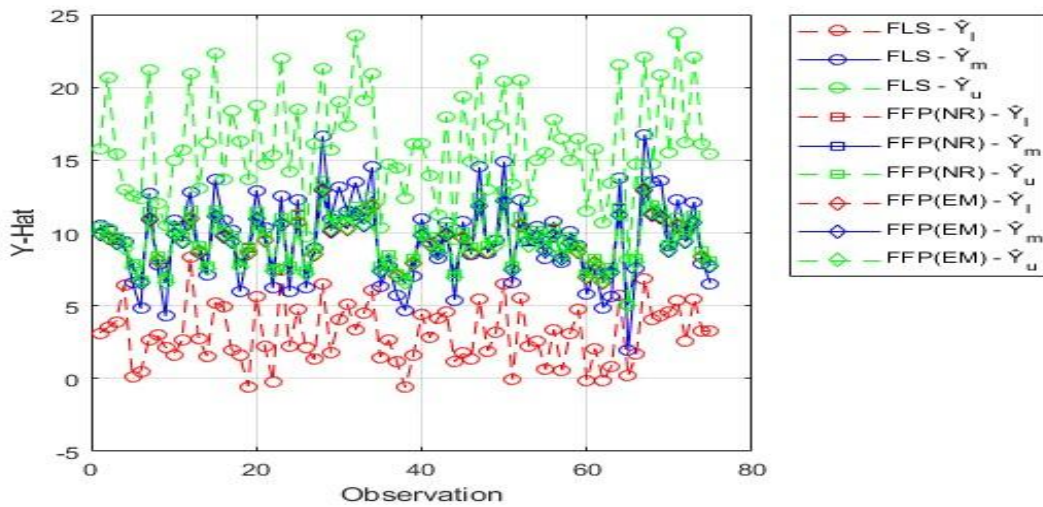
شكل (B – اولاً -9) منحنى القيمة المتوقعة لمتغير الاستجابة عند التضبيب للانموذج الثاني عند حجم عينة $n=35$ عند مستوى القطع $\alpha=0.5$

نلاحظ من الشكل (B – اولاً -9) FLS وفق مبدأ Diamond ما زالت تُظهر تشتتًا واسعًا في القيم الدنيا، مع تباين حاد وانخفاضات واضحة، مما يؤكد محدوديتها في التعامل مع البيانات حتى مع اتساع العينة. أما الطريقتان FFP-NR و FFP-EM وفق مبدأ النقطة الثابتة، فتبقيان أكثر ثباتًا، ويُلاحظ تقارب جيد في القيمة المتوسطة، مع انتظام نسبي في الحدود العليا والدنيا. لكن الأبرز هو استمرار تفوق FFP-NR المعتمدة على مبدأ النقطة الثابتة في الحفاظ على استقرار القيم، إذ يظهر اتساق أفضل بين YL و YU، مما يشير إلى قدرة أعلى على التقريب الواقعي للبيانات تحت ظروف عدم اليقين. بينما تُظهر FFP-EM المعتمدة على مبدأ النقطة الثابتة بعض التذبذب خصوصًا في القيم العليا، إلا أنها تبقى أفضل بكثير من FLS وفق مبدأ Diamond.



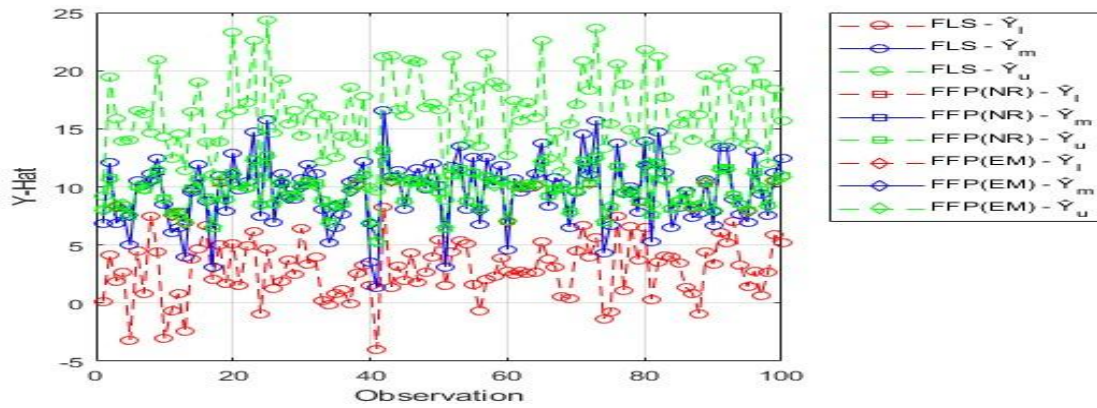
شكل (B – اولاً -10) منحنى القيمة المتوقعة لمتغير الاستجابة عند التضبيب للانموذج الثاني عند حجم عينة $n=50$ عند مستوى القطع $\alpha=0.5$

نلاحظ من الشكل (B – اولاً -10) أن طريقة FLS وفق مبدأ Diamond لا تزال تعاني من تشتت حاد في الحدود الدنيا، حيث تهبط بعض التقديرات إلى ما دون الصفر، مما يعكس ضعف في التمثيل الضبابي ودقة منخفضة حتى مع ازدياد حجم العينة. في المقابل، FFP-NR و FFP-EM المعتمدتان على مبدأ النقطة الثابتة تحافظان على استقرار جيد، مع توزيع متماثل نسبياً حول القيم المتوسطة. ويظهر نموذج FFP-NR وفق مبدأ النقطة الثابتة مرة أخرى أداءً أكثر اتزاناً، إذ تقتارب الحدود العليا والدنيا حول القيمة المتوسطة بدرجة أفضل من الطريقتين الأخرين، مما يشير إلى كفاءة أعلى في تمثيل عدم اليقين والتقلبات. بينما تظل FFP-EM وفق مبدأ النقطة الثابتة محافظة على استقرار مقبول، إلا أن التذبذب الطفيف في حدودها العليا مقارنة بـ FFP-NR وفق مبدأ النقطة الثابتة يضعف موثوقيتها النسبية في بعض النقاط.



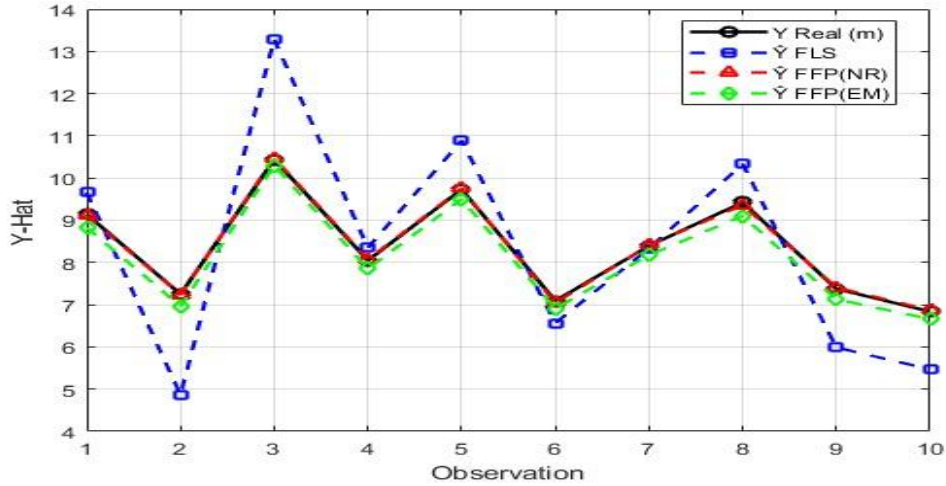
شكل (B – اولاً -11) منحنى القيمة المتوقعة لمتغير الاستجابة عند التضبيب للانموذج الثاني عند حجم عينة $n=75$ عند مستوى القطع $\alpha=0.5$

يبين الشكل (B – اولاً -11) ان طريقة FLS وفق مبدأ Diamond تعاني من استمرار التشتت العالي خاصة في الحدود الدنيا، رغم كبر حجم العينة، مما يعكس محدودية هذه الطريقة في تمثيل عدم اليقين بدقة. أما الطريقتان FFP-NR و FFP-EM المعتمدتان على مبدأ النقطة الثابتة ، فتبديان أداءً أكثر اتزاناً، حيث أن منحنيتهما تتماسك بشكل جيد حول القيم المتوسطة، ويقف التباين بين الحدود العليا والدنيا نسبياً. FFP-NR وفق مبدأ النقطة الثابتة يواصل تقديم أفضل أداء نسبياً، إذ يبرز انتظام واضح في حدوده التقديرية ويعكس قدرة أكبر على احتواء التقلبات ضمن نطاق تنبؤي منطقي. أما FFP-EM وفق مبدأ النقطة الثابتة ، فمع أنه حافظ على اتساق عام، إلا أن التشتت في حواف بعض التقديرات ما زال يظهر، ما يدل على تأثيره ببعض المشاهدات الشاذة.



شكل (B – اولاً -12) منحني القيمة المتوقعة لمتغير الاستجابة عند التضبيب للانموذج الثاني عند حجم عينة $n=100$ عند مستوى القطع $\alpha=0.5$

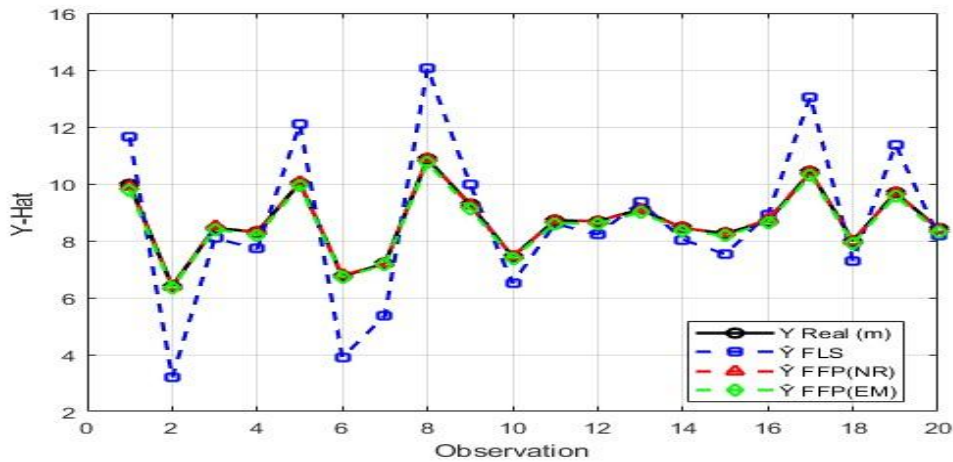
نلاحظ من الشكل (B – اولاً -12) أن طريقة FLS وفق مبدأ Diamond ، رغم كبر حجم العينة، ما زالت تُظهر تشتتاً كبيراً في حدودها الدنيا، مما يُشير إلى استمرار ضعفها في تمثيل عدم اليقين بدقة إحصائية مقبولة. بالمقابل، كل من FFP-NR و FFP-EM المعتمدتان على مبدأ النقطة الثابتة حافظتا على استقرار أعلى واتساق أكبر، خاصة حول القيم المتوسطة. وان طريقة FFP-NR وفق نظرية النقطة الثابتة تبقى الأفضل أداءً من حيث انتظام منحنياتها وثبات نطاق التقدير بين YL و YU، وهو ما يعكس فاعلية أكبر في تمثيل الغموض حتى مع زيادة عدد المشاهدات. أما FFP-EM ، فرغم أدائها الجيد عموماً، إلا أن بعض التقديرات لا تزال تتأثر بتقلبات طفيفة.



شكل (B – اولاً -13) منحنى القيمة المتوقعة لمتغير الاستجابة بعد التضييب عند طرائق التقدير للانموذج الثاني عند حجم عينة $n=10$ عند مستوى القطع $\alpha=0.5$

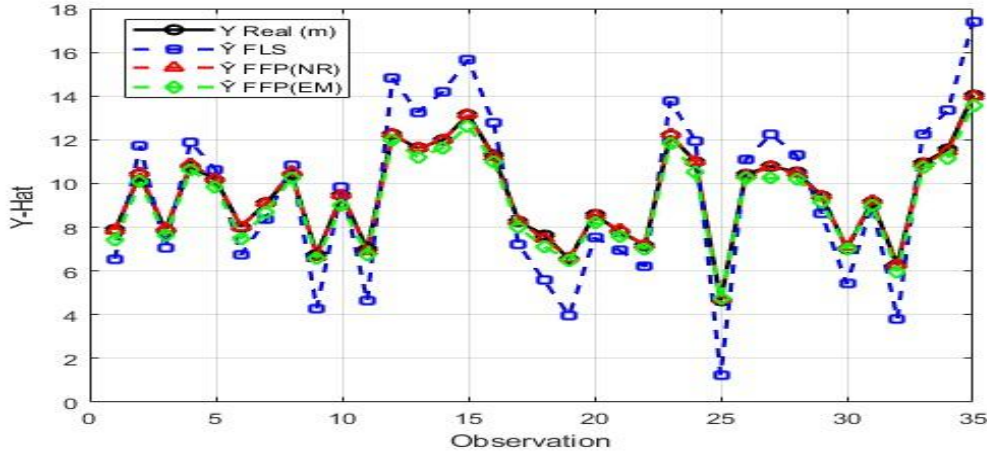
يبين الشكل (B – اولاً -13) أداء الطرائق المختلفة في تقدير القيمة المتوقعة لمتغير الاستجابة \hat{Y} مقارنةً بالقيم الحقيقية عند حجم عينة صغير $n=10$. وتحت مستوى القطع $\alpha=0.5$ اذ يُظهر المنحنى الأسود القيم الحقيقية، بينما تمثل المنحنيات الأخرى التقديرات الناتجة عن طرائق FLS وفق مبدأ Diamond بالأزرق، و FFP-NR بالأحمر، و FFP-EM بالأخضر واللذان اعتمدا على مبدأ النقطة الثابتة.

نلاحظ أن طريقتي FFP-NR و FFP-EM واللذان اعتمدا على مبدأ النقطة الثابتة تُنتجان منحنيات تقترب بشكل كبير من القيم الحقيقية، ما يشير إلى دقتهما العالية في تمثيل القيمة المركزية حتى مع قلة حجم العينة. بالمقابل، تُظهر طريقة FLS انحرافاً ملحوظاً عن القيم الحقيقية في عدة مشاهدات، مما يدل على ضعف أدائها في الظروف التي تتسم بقدر كبير من عدم اليقين. وان طريقة نيوتن- رافسون (FFP-NR) وفق مبدأ النقطة الثابتة، تظهر اتساقاً واستقراراً أفضل مقارنةً بغيرها، وتؤكد فعاليتها في تمثيل الغموض بشكل دقيق ضمن أطر النمذجة الضبابية.



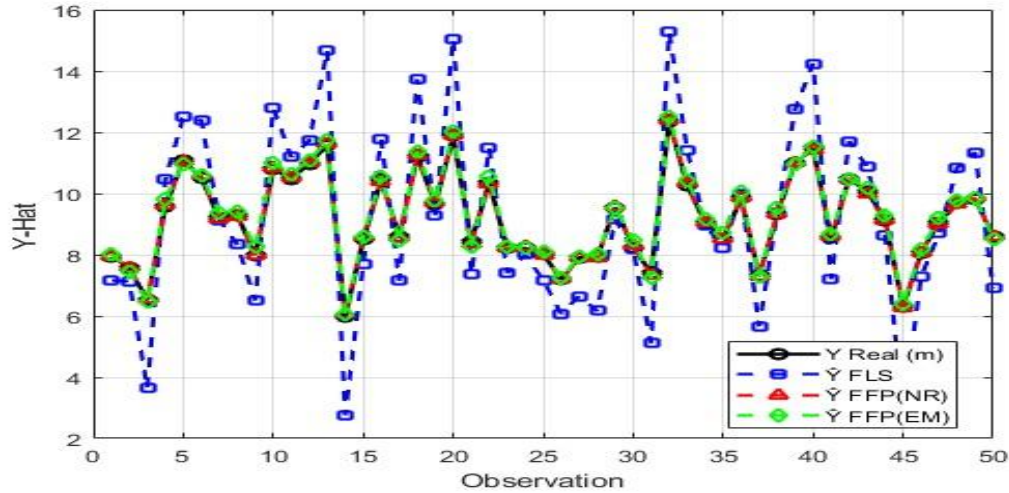
شكل (B – اولاً -14) منحنى القيمة المتوقعة لمتغير الاستجابة بعد التضييب عند طرائق التقدير للانموذج الثاني عند حجم عينة $n=20$ عند مستوى القطع $\alpha=0.5$

من شكل (B – اولاً -14) تؤكد النتائج نفس الاتجاه الملحوظ في العينة الأصغر، إذ تستمر طريقة FLS وفق مبدأ Diamond في إظهار تباينات واضحة وانحرافات عن القيم الحقيقية، لا سيما في بعض المشاهدات التي يتسم سلوكها بالتطرف أو التقلب، مما يعكس محدودية الطريقة في الحفاظ على الدقة تحت حجم بيانات متوسط. بالمقابل، تُظهر الطريقتان التكراريتان FFP-NR و FFP-EM وفق مبدأ النقطة الثابتة أداءً أكثر اتساقاً، وتتماهى منحنيتهما الحمراء والخضراء مع المنحنى الحقيقي بشكل شبه تام، ما يشير إلى قدرتهما العالية على التقريب الدقيق حتى مع تزايد عدد الملاحظات. ويستمر تفوق FFP-NR وفق مبدأ النقطة الثابتة في الحفاظ على استقرار التقدير، مما يدعم اعتمادها كخيار مفضل عند الحاجة إلى تمثيل ضبابي موثوق لمتغير الاستجابة.



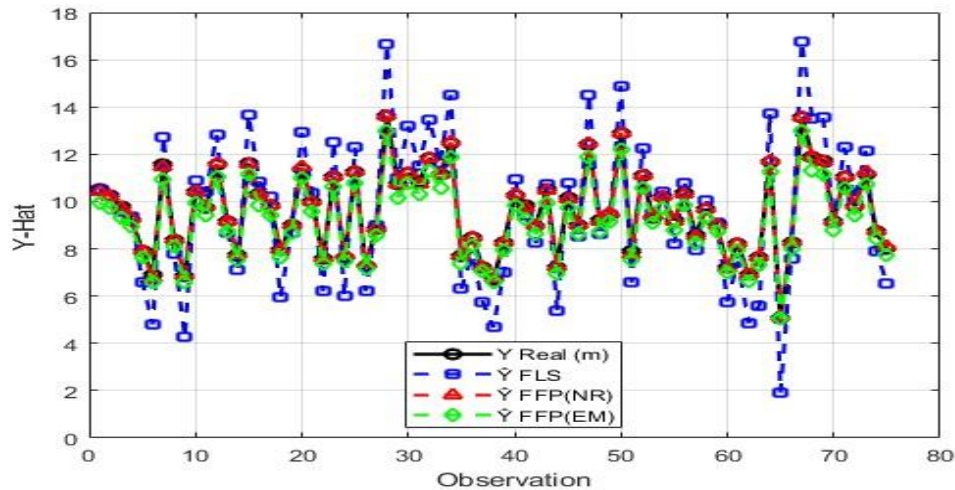
شكل (B – اولاً -15) منحنى القيمة المتوقعة لمتغير الاستجابة بعد التضييب عند طرائق التقدير للانموذج الثاني عند حجم عينة $n=35$ عند مستوى القطع $\alpha=0.5$

يبين الشكل (B – اولاً -15) أن أداء FLS وفق مبدأ Diamond لا يزال يعاني من تذبذبات واضحة وانحرافات دورية عن المسار الحقيقي، حيث يظهر المنحنى الأزرق منحرفاً في مواضع متعددة، ما يدل على أن دقة هذه الطريقة لم تتحسن بشكل كبير رغم زيادة حجم العينة نسبياً. بالمقابل، تواصل الطريقتان FFP-NR و FFP-EM وفق نظرية النقطة الثابتة تقديم أداء متقارب للغاية من القيم الحقيقية، إذ تتبع منحنيتهما المنحنى الأسود بدقة ونعومة، ما يشير إلى قوة هاتين الطريقتين في تقديم تمثيل ضبابي موثوق لمتغير الاستجابة. ويُظهر هذا الشكل أن دقة الطريقتين التكراريتين تبقى مستقرة مع ازدياد عدد المشاهدات، لا سيما FFP-NR التي تحافظ على انتظام منحناها، مما يعكس فاعليتها في استيعاب التقلبات الموجودة للبيانات، والتعامل مع الضبابية بكفاءة.



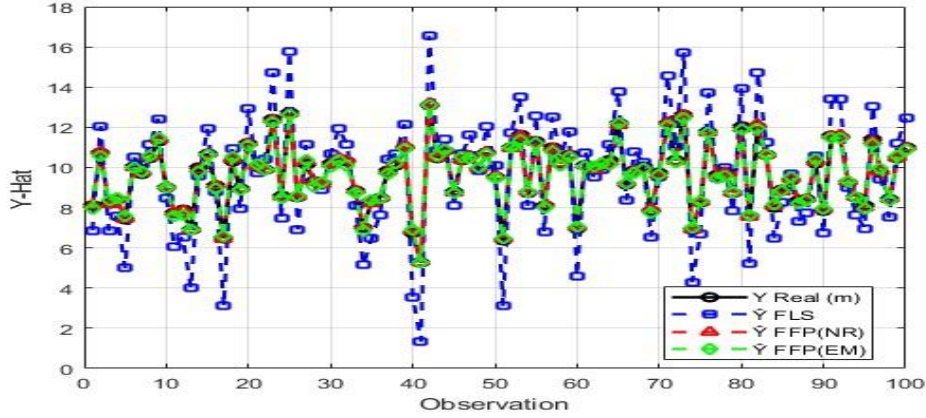
شكل (B – اولاً -16) منحنى القيمة المتوقعة لمتغير الاستجابة بعد التضبيب عند طرائق التقدير
للانموذج الثاني عند حجم عينة $n=50$ عند مستوى القطع $\alpha=0.5$

يبين الشكل (B – اولاً -16) استمرار أداء طريقة FLS وفق مبدأ Diamond في التذبذب والانحراف عن القيم الحقيقية، إذ أن المنحنى الأزرق يتباعد بشكل دوري عن المنحنى الأسود، مما يؤكد محدودية هذه الطريقة في تقديم تقدير دقيق حتى مع حجم عينة متوسط. أما الطريقتان FFP-NR و FFP-EM، اللتان اعتمدتا على مبدأ النقطة الثابتة في استمراران في تقديم نتائج عالية الدقة، حيث تظهر منحنيتهما (الأحمر والأخضر) مقاربة جداً من القيم الحقيقية، وذات سلوك ثابت ومتناسك عبر جميع المشاهدات.



شكل (B – اولاً -17) منحنى القيمة المتوقعة لمتغير الاستجابة بعد التضبيب عند طرائق التقدير
للانموذج الثاني عند حجم عينة $n=75$ عند مستوى القطع $\alpha=0.5$

يتضح شكل (B – اولاً -17) أن طريقتي FFP-NR و FFP-EM التكراريتين اللتان اعتمدتا على مبدأ النقطة الثابتة المتمثلتان بالمنحنيان الأحمر والأخضر لا تزالان تحافظان على دقة عالية واقتراب وثيق من المنحنى الحقيقي (الأسود)، مما يعكس استقرار أداء هذه الطريقتين حتى مع تضاعف حجم العينة. أما طريقة FLS المعتمدة على مبدأ Diamond المتمثلة بالمنحنى الأزرق ، فتواصل إظهار انحرافات كبيرة وتذبذبات واضحة في عدة نقاط، حيث تنحرف عن القيم الحقيقية بشكل ملحوظ، خاصة عند الذروات والانخفاضات، مما يشير إلى أنها أقل قدرة على تمثيل التقدير المركزي في ظل هذا المستوى من التعقيد البياني والضبابية.



شكل (B – اولاً -18) منحنى القيمة المتوقعة لمتغير الاستجابة بعد التضييب عند طرائق التقدير للانموذج الثاني عند حجم عينة $n=100$ عند مستوى القطع $\alpha=0.5$

يظهر بوضوح شكل (B – اولاً -18) من أن طريقتي FFP-NR و FFP-EM تستمران في تقديم أداء دقيق ومتزن، حيث تقترب منحنيتهما بشكل كبير من المنحنى الحقيقي، وتُظهران تطابقاً شبه كامل في معظم المشاهدات، مما يعكس قدرة عالية على تمثيل الواقع بدقة حتى مع زيادة حجم العينة وتعقيد البيانات. في المقابل، تُظهر طريقة FLS المنحنى الأزرق تذبذبات واضحة وانحرافات متكررة عن المنحنى الحقيقي، خاصة في نقاط التغير السريع، مما يدل على ضعف هذه الطريقة في التكيف مع التغيرات الدقيقة، ويبرز محدوديتها في تمثيل القيم التقديرية تحت الضبابية عند عينات كبيرة.

ثانياً التجربة الثالثة : عند مستوى القطع $\alpha=0.8$ وعدد المتغيرات التوضيحية $k=3$

جدول (B – ثانياً -1) القيمة المتوقعة لمتغير الاستجابة الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير الثلاثة ومتوسط مربعات الخطأ لكل قيمة تقديرية ولكل طريقة ومعامل التحديد ومعنوية كل انموذج للانموذج الثالث عند كافة احجام العينات عند مستوى القطع $\alpha=0.8$

n	y_{True}	\hat{y}_{ols}	$\hat{y}_{ffp(NR)}$	$\hat{y}_{ffp(EM)}$	$MSE_{\hat{y}_{ols}}$	$MSE_{ffp(NR)}$	$MSE_{\hat{y}_{ffp(EM)}}$
10	9.42590	9.95775	9.34906	9.18922	0.53185	0.07684	0.23668

	7.27100	6.83869	7.29674	7.05242	0.43231	0.02574	0.21858
	7.89666	8.01020	7.90422	7.65185	0.11354	0.00756	0.24482
	9.20467	9.94348	9.21868	9.08784	0.73881	0.01401	0.11683
	7.44228	6.38691	7.43788	7.37156	1.05538	0.00440	0.07072
	9.86278	10.52146	9.87845	9.79964	0.65869	0.01567	0.06314
	8.47525	8.40020	8.48401	8.37109	0.07505	0.00876	0.10416
	7.11961	6.33277	7.07305	6.94204	0.78684	0.04655	0.17757
	10.63572	11.73507	10.65962	10.64527	1.09935	0.02390	0.00955
	6.80317	6.01051	6.83532	6.64632	0.79266	0.03215	0.15685
MSE		0.50378	0.00109	0.02534	R^2		
Sig.		0.062	0.000	0.000	0.88	0.89	0.84
n	y_{True}	\hat{y}_{fols}	$\hat{y}_{ffp(NR)}$	$\hat{y}_{ffp(EM)}$	$MSE_{\hat{y}_{fols}}$	$MSE_{\hat{y}_{ffp(NR)}}$	$MSE_{\hat{y}_{ffp(EM)}}$
20	8.44472	8.27471	8.49980	8.40553	0.17001	0.05509	0.03919
	8.44915	8.25412	8.45582	8.36698	0.19503	0.00668	0.08217
	6.75240	5.42723	6.78121	6.72088	1.32517	0.02881	0.03152
	9.96752	10.67618	9.91525	9.79243	0.70866	0.05226	0.17509
	10.86896	12.31869	10.88538	10.74322	1.44973	0.01642	0.12574
	9.10261	9.20966	9.08593	8.99192	0.10706	0.01668	0.11068
	9.27024	9.54518	9.23006	9.11964	0.27494	0.04019	0.15061
	6.40645	4.98344	6.37404	6.33967	1.42300	0.03241	0.06678
	7.44607	7.11486	7.45227	7.38319	0.33122	0.00620	0.06288
8.30741	7.97967	8.28828	8.19007	0.32774	0.01913	0.11735	
MSE		0.54179	0.00077	0.01017	R^2		
Sig.		0.041	0.000	0.000	0.67	0.90	0.86
n	y_{True}	\hat{y}_{fols}	$\hat{y}_{ffp(NR)}$	$\hat{y}_{ffp(EM)}$	$MSE_{\hat{y}_{fols}}$	$MSE_{\hat{y}_{ffp(NR)}}$	$MSE_{\hat{y}_{ffp(EM)}}$

35	10.77491	11.27046	10.86946	10.63050	0.49555	0.09455	0.14441
	7.18237	6.82728	7.18430	7.02275	0.35509	0.00193	0.15962
	10.42048	10.64841	10.54096	10.27918	0.22793	0.12047	0.14130
	10.39551	10.95729	10.47991	10.08534	0.56178	0.08441	0.31016
	6.98442	6.04226	6.91247	6.76205	0.94216	0.07195	0.22237
	6.53687	5.59325	6.60187	6.49318	0.94362	0.06500	0.04370
	11.61407	12.23933	11.62073	11.20084	0.62527	0.00666	0.41322
	7.85273	7.59402	7.92760	7.61291	0.25871	0.07487	0.23982
	11.99793	12.85350	12.01307	11.63009	0.85557	0.01514	0.36784
	10.16899	10.37115	10.23017	9.83321	0.20216	0.06118	0.33578
MSE		0.42603	0.00435	0.11303	R^2		
Sig.		0.563	0.000	0.000	0.70	0.91	0.90
n	y_{True}	\hat{y}_{fols}	$\hat{y}_{ffp(NR)}$	$\hat{y}_{ffp(EM)}$	$MSE_{\hat{y}_{fols}}$	$MSE_{\hat{y}_{ffp(NR)}}$	$MSE_{\hat{y}_{ffp(EM)}}$
50	8.41281	7.95137	8.35217	8.25568	0.46144	0.06063	0.15713
	9.84928	9.91933	9.87683	10.05132	0.07005	0.02755	0.20204
	7.93014	7.63574	7.94546	8.03175	0.29440	0.01532	0.10161
	8.49037	8.23193	8.59756	8.59551	0.25845	0.10718	0.10514
	9.18928	9.15913	9.16231	9.35540	0.03015	0.02697	0.16612
	11.08060	11.61157	11.04114	10.97447	0.53097	0.03946	0.10612
	7.98672	7.41523	7.99992	8.25566	0.57149	0.01320	0.26895
	9.05505	8.89364	9.01399	9.19002	0.16141	0.04106	0.13497
	8.57846	7.97106	8.53285	8.45159	0.60739	0.04561	0.12686
	8.20847	7.88775	8.20774	8.28005	0.32073	0.00073	0.07158
MSE		0.40607	0.00181	0.01815	R^2		

Sig.		0.055	0.000	0.000	0.67	0.94	0.88
n	y_{True}	\hat{y}_{fols}	$\hat{y}_{ffp(NR)}$	$\hat{y}_{ffp(EM)}$	$MSE_{\hat{y}_{fols}}$	$MSE_{ffp(NR)}$	$MSE_{\hat{y}_{ffp(EM)}}$
75	11.84767	12.45685	11.84879	11.32800	0.60918	0.00113	0.51967
	10.21231	10.25640	10.20550	9.75831	0.04409	0.00682	0.45400
	10.50098	10.41306	10.40499	9.94678	0.08792	0.09600	0.55420
	7.57307	7.08167	7.60369	7.38086	0.49140	0.03062	0.19221
	9.74928	10.06564	9.77062	9.42521	0.31635	0.02134	0.32407
	11.55020	11.93399	11.46983	10.96473	0.38379	0.08037	0.58547
	9.15956	8.96765	9.15232	8.75479	0.19191	0.00724	0.40478
	7.61664	7.04529	7.72266	7.46328	0.57135	0.10601	0.15336
	8.83007	8.94977	8.82519	8.58154	0.11970	0.00488	0.24853
	8.47562	8.19177	8.48723	8.16484	0.28385	0.01161	0.31078
MSE		0.26615	0.00259	0.16913	R^2		
Sig.		880.0	0.000	0.000	0.56	0.95	0.89
n	y_{True}	\hat{y}_{fols}	$\hat{y}_{ffp(NR)}$	$\hat{y}_{ffp(EM)}$	$MSE_{\hat{y}_{fols}}$	$MSE_{ffp(NR)}$	$MSE_{\hat{y}_{ffp(EM)}}$
100	13.07538	14.61360	13.17427	13.09733	1.53822	0.09889	0.02195
	10.35104	10.61230	10.30925	10.25566	0.26126	0.04179	0.09537
	8.10966	7.55618	8.10417	7.96047	0.55348	0.00550	0.14919
	10.19674	10.36407	10.13006	10.03614	0.16733	0.06668	0.16061
	10.68548	11.18368	10.66089	10.60999	0.49820	0.02459	0.07550
	11.31697	11.84420	11.35354	11.47393	0.52723	0.03657	0.15696
	10.32583	10.65056	10.39618	10.51059	0.32473	0.07035	0.18476
	8.81736	8.52805	8.83973	8.76348	0.28931	0.02237	0.05388
	9.82732	10.04323	9.79943	9.68916	0.21592	0.02789	0.13816
	9.54154	9.78710	9.59133	9.47443	0.24557	0.04979	0.06710

MSE	0.10223	0.00215	0.01134	R^2		
Sig.	0.056	0.000	0.000	0.53	0.96	0.94

يتضح من الجدول (B – ثانياً -1) عند مستوى القطع $\alpha=0.8$ ما يأتي :

1- عند حجم عينة $n=10$:

من خلال ملاحظة متوسط مربعات الخطأ (MSE) لكل طريقة، يتبين أن طريقة نيوتن-رافسون وفق مبدأ النقطة الثابتة حققت أقل متوسط خطأ تقديري بلغ 0.00109، مقارنة بطريقة المربعات الصغرى الضبابية التي بلغ فيها 0.50378، وطريقة تعظيم التوقع وفق مبدأ النقطة الثابتة التي سجلت 0.02534، مما يدل على تفوق واضح لطريقة نيوتن-رافسون وفق مبدأ النقطة الثابتة من حيث دقة التقدير وفعاليتها في تقليص الفجوة بين القيم الحقيقية والمقدرة. تؤكد الدلالة الإحصائية العالية لجميع النماذج Sig. أقل من 0.005 أن النماذج ملائمة إحصائياً، مع ملاحظة أن قيمة Sig. لطريقة نيوتن-رافسون وفق مبدأ النقطة الثابتة بلغت 0.000، مما يعكس معنويتها الأعلى. أما معامل التحديد R^2 فقد سجل أعلى قيمة في طريقة نيوتن-رافسون وفق مبدأ النقطة الثابتة (0.89)، تلتها طريقة تعظيم التوقع (0.84)، ثم المربعات الصغرى الضبابية (0.88)، بما يشير إلى تميز نيوتن-رافسون وفق مبدأ النقطة الثابتة أيضاً في تفسير التباين.

2- عند حجم عينة $n=20$:

سجلت طريقة نيوتن-رافسون وفق مبدأ النقطة الثابتة أقل متوسط خطأ تقديري بلغ 0.00077، متفوقة على كل من طريقة تعظيم التوقع وفق مبدأ النقطة الثابتة (0.01017) وطريقة المربعات الصغرى الضبابية وفق مبدأ Diamond (0.54179). يُظهر ذلك استمرار تفوق هذه الطريقة من حيث الكفاءة والدقة. كما أن جميع القيم الاحتمالية كانت أقل من 0.05، مما يشير إلى دلالة إحصائية قوية للنماذج الثلاثة، مع احتفاظ بأفضلية واضحة (Sig. = 0.000) من حيث القدرة على تفسير التباين، حققت طريقة نيوتن-رافسون وفق مبدأ النقطة الثابتة أعلى R^2 بقيمة 0.90، تليها طريقة تعظيم التوقع وفق مبدأ النقطة الثابتة بـ 0.86، وأدناها طريقة المربعات الصغرى الضبابية وفق مبدأ Diamond بـ 0.67.

3- عند حجم العينة $n=35$:

تفوقت طريقة نيوتن-رافسون وفق مبدأ النقطة الثابتة بوضوح وسجلت $MSE = 0.00435$ ، مقارنة بتراجع كبير لطريقة تعظيم التوقع (0.11303)، بينما بقيت طريقة المربعات الصغرى الضبابية وفق مبدأ Diamond عند 0.42603. هذا يشير إلى أن طريقة نيوتن-رافسون وفق مبدأ النقطة الثابتة أكثر استقراراً مع نمو حجم العينة. غير أن دلالة طريقة المربعات الصغرى أصبحت غير معنوية ($Sig. = 0.563 > 0.05$)، ما يضعف الاعتماد عليها في هذا السياق، في حين احتفظت طريقة نيوتن-رافسون وفق مبدأ النقطة الثابتة وطريقة تعظيم التوقع وفق مبدأ النقطة الثابتة بمعنوية قوية ($Sig. = 0.000$) أما معامل التحديد فقد بلغ 0.91 لطريقة نيوتن-رافسون

وفق مبدأ النقطة الثابتة ، و0.90 لطريقة تعظيم التوقع وفق مبدأ النقطة الثابتة ، مقابل 0.70 فقط لطريقة المربعات الصغرى.

4- عند حجم العينة $n=50$:

حافظت طريقة نيوتن-رافسون وفق مبدأ النقطة الثابتة على الصدارة من حيث أقل متوسط خطأ ($MSE = 0.00181$) ، بينما تراجعت و طريقة تعظيم التوقع وفق مبدأ النقطة الثابتة إلى 0.01815، وظلت طريقة المربعات الصغرى الضبابية وفق مبدأ Diamond عند 0.40607. تؤكد النتائج استمرار تفوق طريقة نيوتن-رافسون وفق مبدأ النقطة الثابتة (من حيث تقليل الفجوة التقديرية. من الناحية الإحصائية، كانت جميع النماذج معنوية، لكن أفضل طريقة نيوتن-رافسون وفق مبدأ النقطة الثابتة واضحة من خلال $R^2 = 0.94$ ، في حين بلغت R^2 لطريقة تعظيم التوقع وفق مبدأ النقطة الثابتة قيمة 0.88، و طريقة المربعات الصغرى الضبابية وفق مبدأ Diamond سجلت 0.67.

5- عند حجم العينة $n=75$:

سجلت طريقة نيوتن-رافسون وفق مبدأ النقطة الثابتة أقل خطأ تقديري بلغ 0.00259، في مقابل ارتفاع ملحوظ في MSE لطريقة تعظيم التوقع وفق مبدأ النقطة الثابتة (0.16913)، وانخفاض معتدل لطريقة المربعات الصغرى الضبابية وفق مبدأ Diamond (0.26615) رغم بقاء جميع النماذج ضمن الحدود المقبولة من حيث الدلالة الإحصائية، إلا أن Sig. لطريقة المربعات الصغرى الضبابية وفق مبدأ Diamond اقتربت من الحد المسموح (0.088). أما من حيث القدرة التفسيرية، فقد حققت طريقة نيوتن-رافسون وفق مبدأ النقطة الثابت معامل تحديد مرتفع جداً $R^2 = 0.95$ ، تليها طريقة تعظيم التوقع وفق مبدأ النقطة الثابتة بـ 0.89، ثم طريقة المربعات الصغرى الضبابية وفق مبدأ Diamond بـ 0.56.

6- عند حجم العينة $n=100$:

أثبتت طريقة نيوتن-رافسون وفق مبدأ النقطة الثابتة أنها الأكثر ثباتاً ودقة، إذ حافظت على أقل متوسط خطأ تقديري (0.00215)، وتفوقت على كل من لطريقة تعظيم التوقع وفق مبدأ النقطة الثابتة (0.01134) و لطريقة المربعات الصغرى الضبابية وفق مبدأ Diamond (0.10223) أما من حيث الدلالة الإحصائية، فقد كانت القيم الاحتمالية مثالية في الطريقتين التكراريتين (0.000)، بينما اقتربت طريقة المربعات الصغرى الضبابية وفق مبدأ Diamond من حد المعنوية المقبول (0.056). معامل التحديد سجل أعلى قيمة على الإطلاق في طريقة نيوتن-رافسون وفق مبدأ النقطة الثابتة بلغ (0.96)، تليها طريقة تعظيم التوقع وفق مبدأ النقطة الثابتة بـ 0.94، في حين بقي لطريقة المربعات الصغرى الضبابية وفق مبدأ Diamond في مستوى منخفض (0.53).

جدول (B – ثانياً -2) المعلمات الحقيقية والمقدرة بموجب طرائق التقدير ومتوسط مربعات الخطأ لكل معلمة ومعنوية احصاءة t للانموذج الثالث عند كافة احجام العينات عند مستوى القطع $\alpha=0.8$

n	Coefficient Method	$\tilde{\beta}_0$	$\tilde{\beta}_1$	$\tilde{\beta}_2$	$\tilde{\beta}_3$
		10	True	2.06	2.18
	<i>fOls</i>	-1.62	3.14	3.45	3.81
	MSE	3.68	0.96	1.16	1.67
	<i>ffp(NR)</i>	2.21	2.13	2.20	2.12
	MSE	0.15	0.05	0.09	0.02
	<i>ffp(EM)</i>	1.97	2.20	2.31	2.06
	MSE	0.10	0.02	0.02	0.08
	<i>Sig.fols</i>	0.05	0.06	0.89	0.11
	<i>Sig.ffp(NR)</i>	0.00	0.00	0.00	0.00
	<i>Sig.ffp(EM)</i>	0.00	0.00	0.00	0.00
20	True	3.12	1.93	1.56	1.98
	<i>fOls</i>	-0.50	3.25	2.31	3.59
	MSE	3.62	1.32	0.75	1.60
	<i>ffp(NR)</i>	3.09	1.94	1.59	2.00
	MSE	0.03	0.00	0.03	0.02
	<i>ffp(EM)</i>	3.11	1.91	1.56	1.95
	MSE	0.01	0.03	0.01	0.03
	<i>Sig.fols</i>	0.051	0.124	0.043	0.048
	<i>Sig.ffp(NR)</i>	0.000	0.000	0.000	0.000
	<i>Sig.ffp(EM)</i>	0.000	0.000	0.000	0.000

35	<i>True</i>	1.08310	2.01533	3.19565	3.01583
	<i>fOls</i>	-1.52406	2.89377	4.36941	3.54318
	<i>MSE</i>	2.60716	0.87844	1.17376	0.52735
	<i>ffp(NR)</i>	1.05179	2.03678	3.22981	2.99025
	<i>MSE</i>	0.03131	0.02145	0.03416	0.02558
	<i>ffp(EM)</i>	0.98371	1.82817	3.34544	2.85258
	<i>MSE</i>	0.099395	1.87E-01	0.149787	0.163245
	<i>Sig.fOls</i>	0.667	0.233	0.111	0.123
	<i>Sig.ffp(NR)</i>	0.000	0.000	0.000	0.000
	<i>Sig.ffp(EM)</i>	0.000	0.000	0.000	0.000
50	<i>True</i>	3.26	1.26	2.08	2.42
	<i>fOls</i>	0.60	2.19	3.05	3.06
	<i>MSE</i>	2.66	0.93	0.97	0.65
	<i>ffp(NR)</i>	3.30	1.27	2.06	2.41
	<i>MSE</i>	0.03	0.00	0.03	0.01
	<i>ffp(EM)</i>	3.22	1.21	2.28	2.36
	<i>MSE</i>	0.04	0.06	0.20	0.05
	<i>Sig.fOls</i>	0.853	0.031	0.001	0.556
	<i>Sig.ffp(NR)</i>	0.000	0.000	0.000	0.000
	<i>Sig.ffp(EM)</i>	0.000	0.000	0.000	0.000
75	<i>True</i>	0.63	2.99	2.93	2.84
	<i>fOls</i>	2.11	0.98	0.43	0.64
	<i>MSE</i>	2.73	2.02	2.49	2.20
	<i>ffp(NR)</i>	0.01	0.02	0.01	0.00

	<i>MSE</i>	2.77	2.00	2.28	2.01
	<i>ffp(EM)</i>	0.03	0.00	0.22	0.19
	<i>MSE</i>	0.63	2.99	2.93	2.84
	<i>Sig.fols</i>	0.145	0.081	0.011	0.012
	<i>Sig.ffp(NR)</i>	0.000	0.000	0.000	0.000
	<i>Sig.ffp(EM)</i>	0.000	0.000	0.000	0.000
100	<i>True</i>	2.52	1.31	2.47	3.24
	<i>fOls</i>	-0.44	2.09	3.50	4.36
	<i>MSE</i>	2.95	0.77	1.03	1.12
	<i>ffp(NR)</i>	2.50	1.32	2.48	3.24
	<i>MSE</i>	0.02	0.01	0.01	0.00
	<i>ffp(EM)</i>	2.66	1.13	2.58	3.15
	<i>MSE</i>	0.15	0.18	0.11	0.09
	<i>Sig.fols</i>	0.562	0.652	0.822	0.986
	<i>Sig.ffp(NR)</i>	0.000	0.000	0.000	0.000
	<i>Sig.ffp(EM)</i>	0.000	0.000	0.000	0.000

يتضح من جدول (B - ثانياً -2) عند مستوى القطع $\alpha=0.8$ ماياتي:

1- عند حجم العينة $n=10$:

أظهرت طريقة نيوتن-رافسون وفق مبدأ النقطة الثابتة *ffp(NR)* تفوقاً واضحاً في تقدير جميع المعلمات، حيث كانت القيم المقدرة قريبة جداً من الحقيقية، وحقت أقل متوسط مربعات خطأ (*MSE*) لكافة المعلمات، تراوحت بين 0.02 و 0.15 فقط، كما أن جميع إحصاءات *t* كانت معنوية بدرجة عالية (*Sig.* = 0.000). في المقابل، أظهرت طريقة *fOls* تبايناً كبيراً عن القيم الحقيقية

خاصة في β_0 التي بلغ خطأها 3.68، وكانت بعض القيم غير معنوية إحصائيًا مثل β_3 Sig. = 0.11 طريقة تعظيم التوقع (ffp(ME) قدّمت تقديرات جيدة كذلك، و MSE منخفضة، لكنها أقل دقة بقليل من ffp(NR) في β_0 و β_3 .

2- عند حجم العينة n=20:

تكرر تفوق ffp(NR) بدقة عالية جدًا، حيث كانت MSE لجميع المعلمات أقل من 0.03، مع معنوية عالية للانموذج، وحققت طريقة ffp(ME) نتائج قريبة جدًا، وكانت بعض MSE أقل حتى من) ffp(NR) كما في β_0 ، لكن عمومًا حافظت ffp(NR) على استقرارها في جميع المعلمات. أما fOIs فواصلت الانحراف، لا سيما في β_0 (MSE = 3.62) و β_3 (MSE = 1.60)، وكانت بعض إحصاءات t عند الحافة مثل β_0 : Sig. = 0.051.

3- عند حجم العينة n=35:

أثبتت طريقة ffp(NR) كفاءتها ايضاً، إذ تراوحت قيم MSE بين 0.02 و 0.03 في جميع المعلمات، مع تطابق شبه تام مع القيم الحقيقية. أما ffp(ME) فقد شهدت ارتفاعاً ملحوظاً في MSE للمعلمة β_1 (0.187) و β_2 (0.149)، مما يشير إلى تراجع نسبي. طريقة fOIs فشلت مرة أخرى في تقدير β_0 (MSE = 2.6) و β_2 ، وكانت كافة معلماتها غير معنوية (Sig. > 0.1)، مما يضعف الاعتماد عليها.

4- عند حجم العينة n=50:

واصلت ffp(NR) تقديم تقديرات دقيقة جدًا، مع MSE لا تتجاوز 0.03 في أي من المعلمات، ومعنوية كاملة. طريقة ffp(ME) قدمت نتائج قريبة في β_0 و β_3 ، لكنها سجلت MSE مرتفعة نسبيًا في β_2 (0.20). أما fOIs فسجلت أخطاء عالية في β_0 (2.66) و β_2 (0.97)، مع دلالة ضعيفة لبعض المعلمات مثل β_3 : Sig. = 0.556.

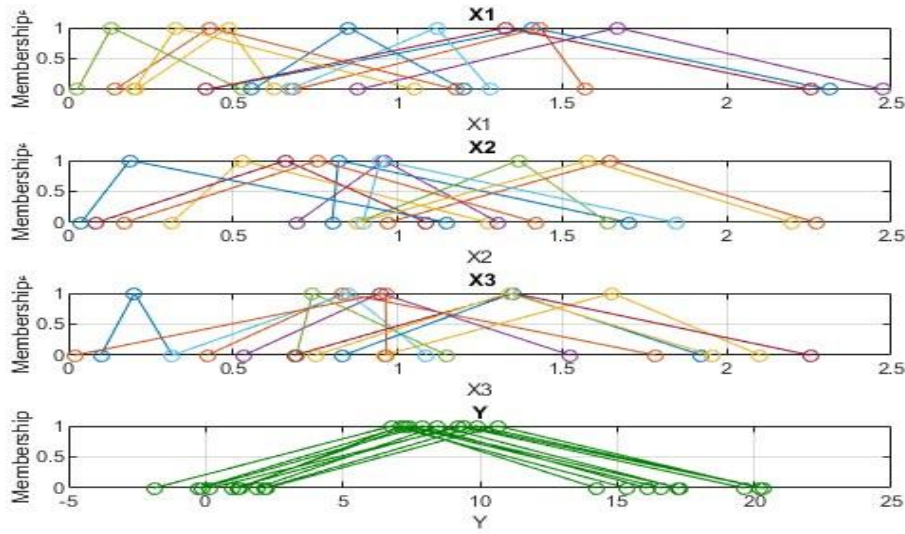
5- عند حجم العينة n=75:

رغم التوقع بأن الدقة تتحسن مع زيادة العينة، إلا أن ffp(NR) شهدت ارتفاعًا حادًا في أخطاء التقدير لجميع المعلمات إذ بلغ MSE 2.77 في β_0 و 2.28 في β_2 ، ما يشير إلى خلل محتمل في التطبيق أو النموذج. أن ffp(ME) قدمت أفضل أداء في هذا السياق، خصوصًا في β_0 و β_1 . أما طريقة fOIs ظلت غير دقيقة، إذ سجلت MSE عالي في جميع المعلمات، وأظهرت ضعفًا في معنوية بعض المعلمات.

6- عند حجم العينة n=100:

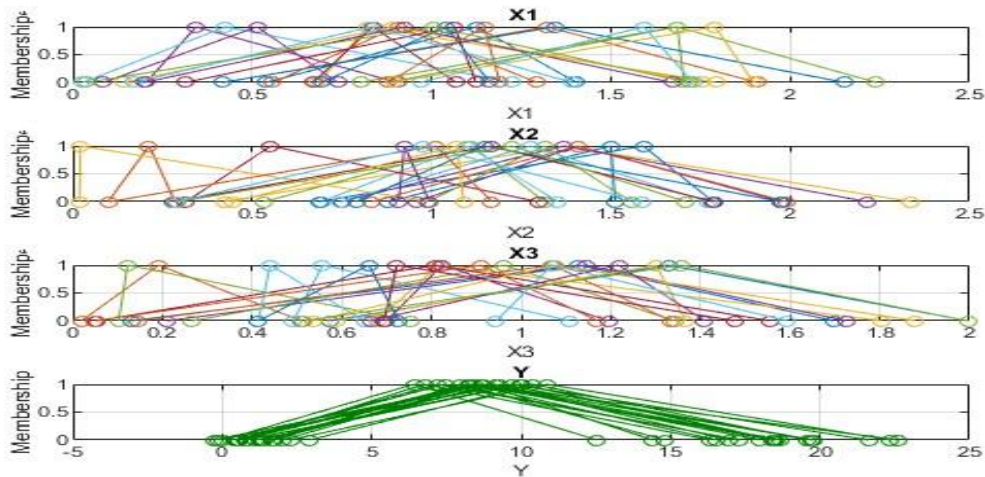
قدمت ffp(NR) أداء ممتاز عند حجم عينة n=100، إذ كانت MSE أقل من 0.02 في جميع المعلمات، مع معنوية كاملة. طريقة ffp(ME) جاءت بعدها مباشرة، وحققت MSE منخفضة أيضًا مع تقديرات مقاربة للقيم الحقيقية. في المقابل، استمرت fOIs في تقديم تقديرات بعيدة،

خصوصاً في β_0 ($MSE = 2.95$) ، وكانت كافة القيم الإحصائية غير معنوية ($Sig. > 0.5$) في جميع المعلمات ، مما يؤكد ضعف الاعتماد عليها حتى عند هذا الحجم الكبير.



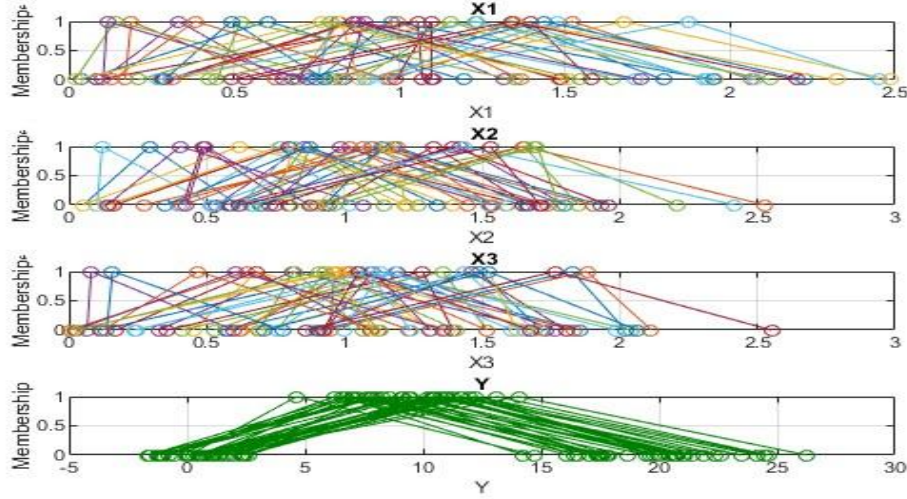
شكل (B - ثانياً - 1) قيم الانتماء المثلثية للمتغيرات التوضيحية ومتغير الاستجابة للنموذج الثالث عند حجم عينة $n=10$ عند مستوى القطع $\alpha=0.8$

يبين شكل (B - ثانياً - 1) المتغيرات التوضيحية بتداخل واضح في دوال الانتماء ضمن مجال ضيق، مما يدل على مرونة النظام الضبابي، بينما يتميز Y بتوزيع متمائل ومنتظم على مجال أوسع، ما يشير إلى دمج متوازن للمدخلات رغم صغر حجم العينة.



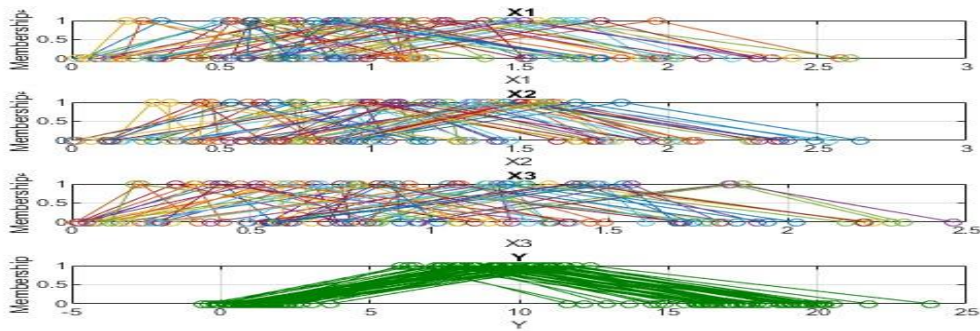
شكل (B - ثانياً - 2) قيم الانتماء المثلثية للمتغيرات التوضيحية ومتغير الاستجابة للنموذج الثالث عند حجم عينة $n=20$ عند مستوى القطع $\alpha=0.8$

يُلاحظ من شكل (B - ثانياً -2) زيادة كثافة وتداخل الدوال مقارنة بحجم العينة السابق، مما يشير إلى تحسين في التغطية وتوزيع المجموعات الضبابية. تظهر المتغيرات التوضيحية بتراكب أكثر انتظامًا، بينما يحتفظ متغير Y بتوزيع متمائل يشير إلى استقرار النموذج واستمرار كفاءة الدمج بين المدخلات.



شكل (B - ثانياً -3) قيم الانتماء المثلثية للمتغيرات التوضيحية ومتغير الاستجابة للنموذج الثالث عند حجم عينة $n=35$ عند مستوى القطع $\alpha=0.8$

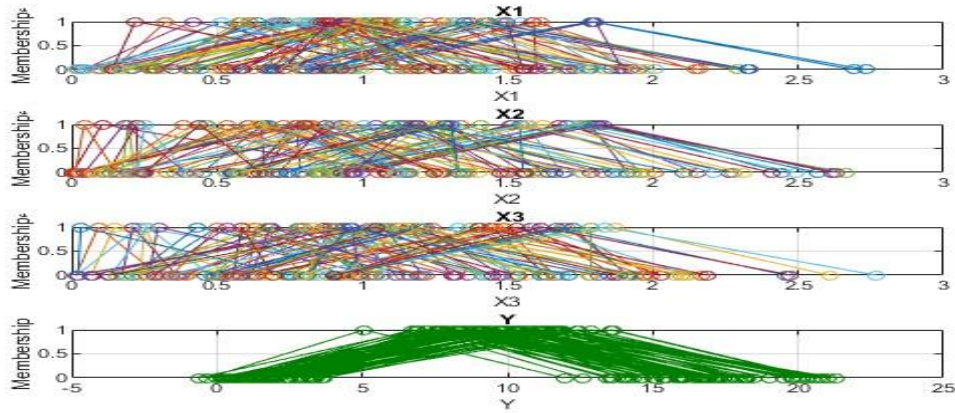
يبين شكل (B - ثانياً -3) زيادة واضحة في كثافة وتداخل دوال الانتماء المثلثية للمتغيرات، مما يدل على توسع تغطية المجال وتحسن تمثيل المجموعات الضبابية بدقة أعلى. كما يُلاحظ أن متغير Y احتفظ بتوزيع متمائل ومنتظم، مما يشير إلى استقرار عمليات الاستدلال والدمج بين المتغيرات التوضيحية، مع تحسن في نعومة الانتقالات بين درجات الانتماء.



شكل (B - ثانياً -4) قيم الانتماء المثلثية للمتغيرات التوضيحية ومتغير الاستجابة للنموذج الثالث عند حجم عينة $n=50$ عند مستوى القطع $\alpha=0.8$

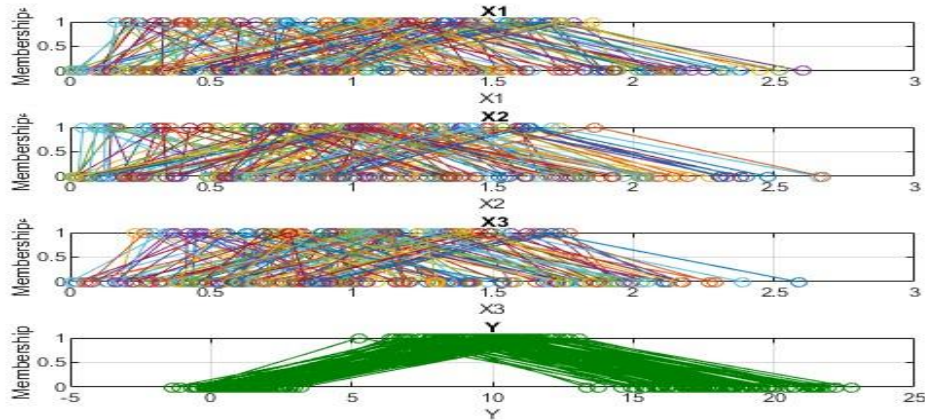
يبين شكل (B - ثانياً -4) كثافة عالية وانتظامًا أكبر في دوال الانتماء المثلثية للمتغيرات، مع تداخل متوازن يُشير إلى نضج القواعد الضبابية وتحسن التغطية العددية للمجال. ويُلاحظ أن متغير Y

يحتفظ بتوزيع متمائل وهرمي يدل على استقرار النظام وفعالية التجميع الضبابي رغم تعقيد المدخلات وتزايد حجم العينة.



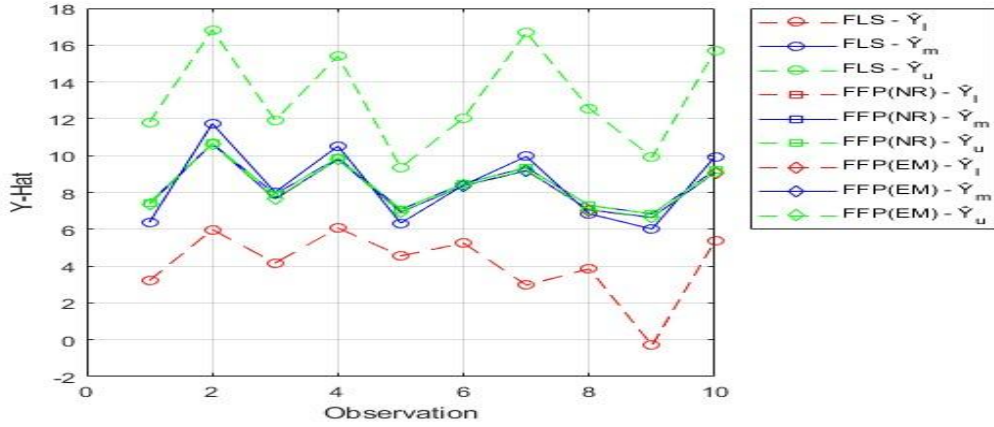
شكل (B – ثانياً -5) قيم الانتماء المثلثية للمتغيرات التوضيحية ومتغير الاستجابة للنموذج الثالث عند حجم عينة $n=75$ عند مستوى القطع $\alpha=0.8$

يبين شكل (B – ثانياً -5) دوال انتماء مثلثية شديدة الكثافة والتداخل للمتغيرات التوضيحية ، مما يعكس أقصى درجات التشعب في تغطية المجال الضبابي ويشير إلى بنية قواعد معقدة. رغم هذا التداخل الكبير، حافظ متغير Y على نمط انتماء متمائل ومتدرج، مما يدل على أن عملية الدمج والاستدلال ما تزال مستقرة نسبياً رغم التعقيد المتزايد في المدخلات.



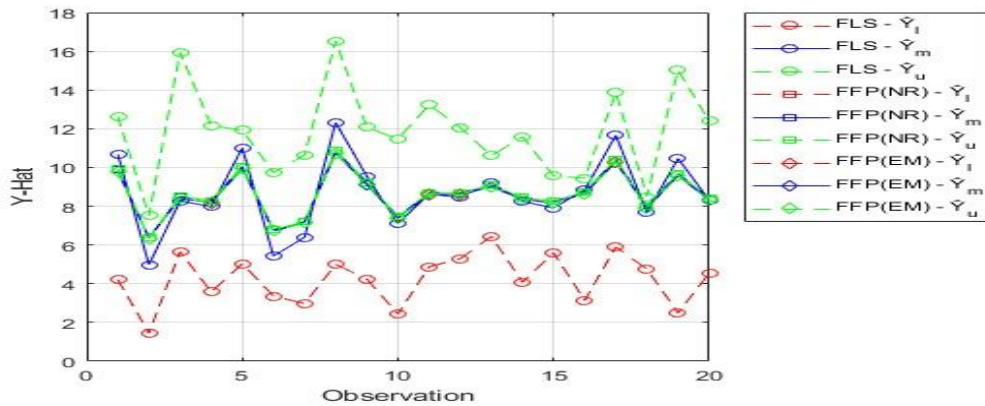
شكل (B – ثانياً -5) قيم الانتماء المثلثية للمتغيرات التوضيحية ومتغير الاستجابة للنموذج الثالث عند حجم عينة $n=100$ عند مستوى القطع $\alpha=0.8$

يبين شكل (B – ثانياً -5) أقصى درجات الاتساق والتكامل في توزيع دوال الانتماء المثلثية، حيث تبدو المتغيرات $X1$ و $X2$ و $X3$ مغطاة بدوال كثيفة ومنتظمة تدل على نضج النظام الضبابي واستقراره. ويظهر متغير Y بتوزيع متمائل وانسيابي، مما يشير إلى استقرار عملية الاستدلال وخروج نواتج متوازنة رغم تعقيد وتعدد قواعد الإدخال.



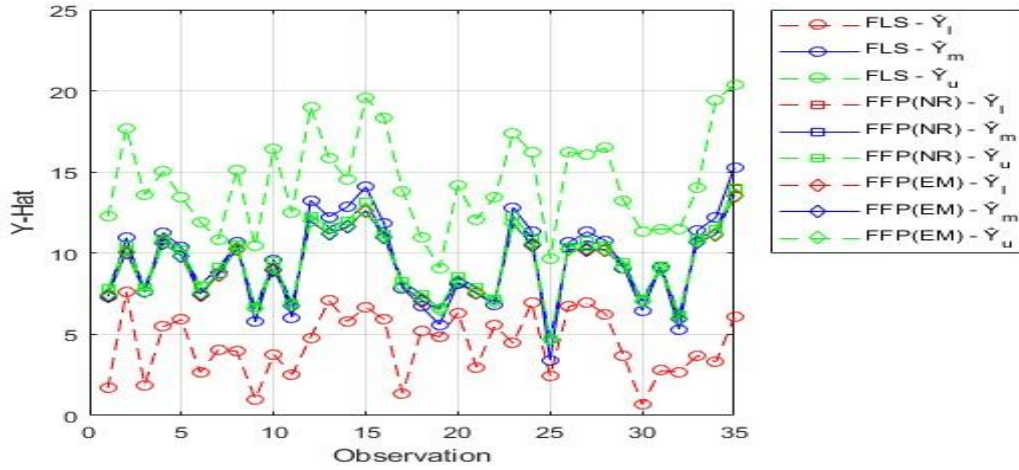
شكل (B – ثانياً -6) منحني القيمة المتوقعة لمتغير الاستجابة عند التضبيب للانموذج الثالث عند حجم عينة $n=10$ عند مستوى القطع $\alpha=0.8$

يبين شكل (B – ثانياً -6) منحنيات القيمة المتوقعة لمتغير الاستجابة \hat{Y} ويلاحظ من الرسم أن طريقتي النقطة الثابتة سواء باستخدام خوارزمية نيوتن-رافسون أو تعظيم التوقع قدمنا تقديرات وسطية Y_m متقاربة ومتسقة بشكل كبير، تقع بين الحدود السفلى Y_l والعلوية Y_u بشكل متوازن، مما يعكس استقرار النظام في ظروف تضبيب منخفضة. وأظهرت طريقة FLS تباعدًا ملحوظًا بين القيم الثلاث، وخاصة بين Y_l و Y_u ، مما يدل على ضعف نسبي في دقة التقدير واتساع في مجال عدم اليقين مقارنةً بطرائق التقدير التكرارية.



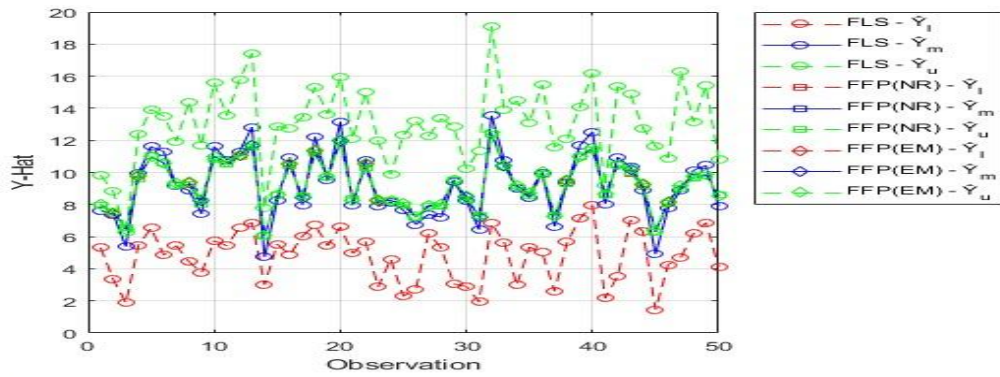
شكل (B – ثانياً -7) منحني القيمة المتوقعة لمتغير الاستجابة عند التضبيب للانموذج الثالث عند حجم عينة $n=20$ عند مستوى القطع $\alpha=0.8$

يبين شكل (B – ثانياً -6) استقرارًا أكبر في منحنيات القيمة المتوقعة لمتغير الاستجابة بالمقارنة مع العينة الأصغر. تظهر طريقتا FFP بنسختي NR و EM متقاربتين جدًا، حيث تتطابق القيم الوسطية Y_m مع تقارب واضح بين الحددين السفلي Y_l والعلوي Y_u ، ما يدل على دقة وثبات في التقدير. بينما تحتفظ طريقة FLS بانخفاض في القيمة المتوقعة وبتوسع أكبر بين حدودها، مما يؤكد محدودية هذه الطريقة في تمثيل الضبابية مقارنةً بالطرائق التكرارية.



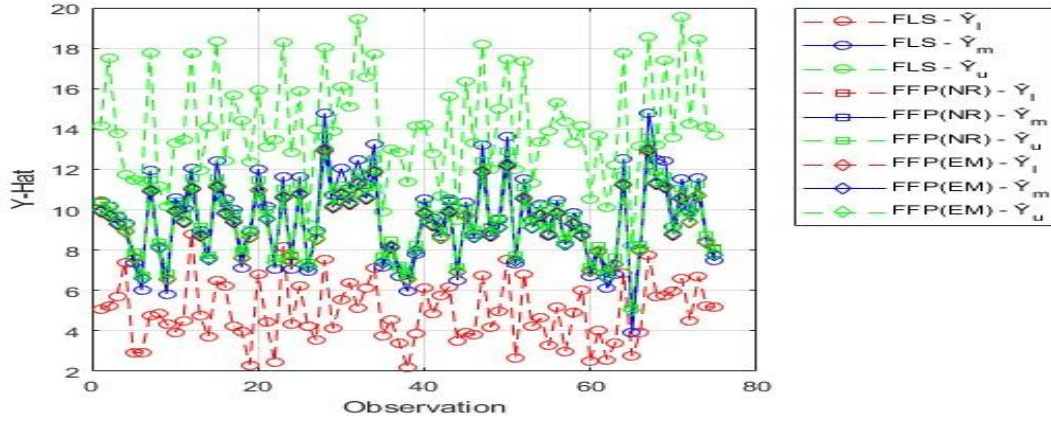
شكل (B – ثانياً -7) منحني القيمة المتوقعة لمتغير الاستجابة عند التضبيب للانموذج الثالث عند حجم عينة $n=35$ عند مستوى القطع $\alpha=0.8$

يبين شكل (B – ثانياً -7) سلوكًا أكثر وضوحًا واستقرارًا في القيم المتوقعة لمتغير الاستجابة، حيث تظهر طريقتنا FFP (NR) و FFP (EM) بتطابق شبه تام في قيم Y_m ، وبفارق محدود بين الحدين Y_u و Y_l ، مما يشير إلى دقة عالية وثبات في التقدير تحت التضبيب. وتستمر طريقة FLS في إظهار تشتت واسع بين حدودها، مع بقاء القيم المتوقعة منخفضة نسبيًا، وهو ما يعكس ضعف قدرتها على احتواء التغير في البيانات.



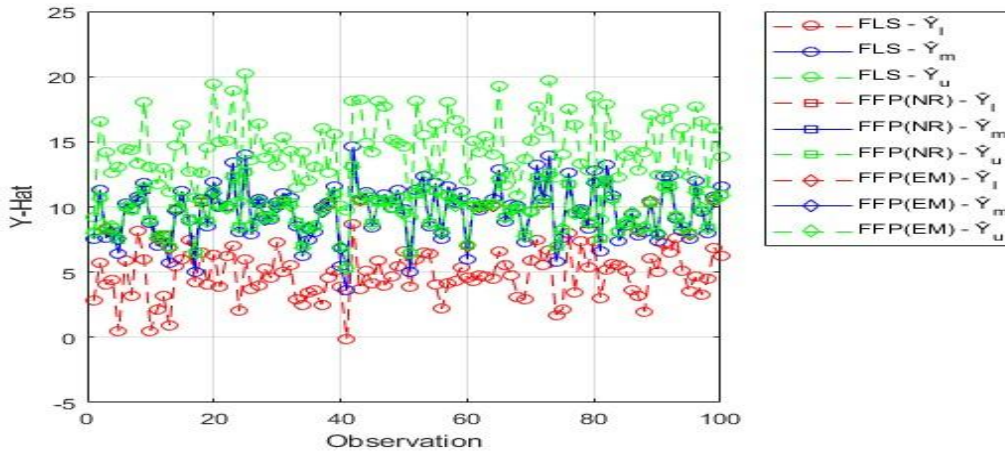
شكل (B – ثانياً -8) منحني القيمة المتوقعة لمتغير الاستجابة عند التضبيب للانموذج الثالث عند حجم عينة $n=50$ عند مستوى القطع $\alpha=0.8$

يبين شكل (B – ثانياً -8) استمرار تفوق طريقتي FFP (NR) و FFP (EM) من حيث استقرار القيمة المتوقعة لمتغير الاستجابة Y_m ، مع تماسك واضح بين الحدين Y_u و Y_l ، مما يدل على اتساق التقدير وتقارب القيم الناتجة من كلا الطريقتين. بينما تبقى طريقة FLS أقل دقة، وتظهر تقلبات أوسع بين حدود الانتماء، خصوصًا بين Y_u و Y_l ، مع انحراف ملحوظ عن مسار التقديرات التكرارية..



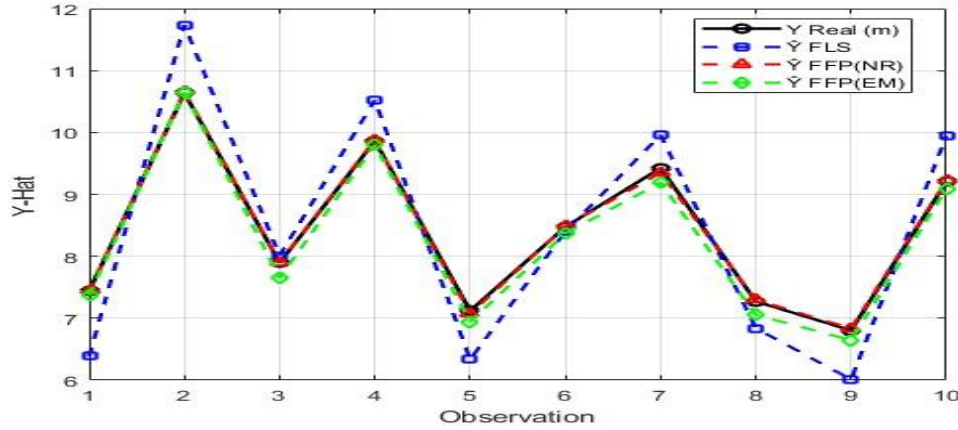
شكل (B – ثانياً 9-) منحنى القيمة المتوقعة لمتغير الاستجابة عند التضبيب للانموذج الثالث عند حجم عينة $n=75$ عند مستوى القطع $\alpha=0.8$

يبين شكل (B – ثانياً 9-) زيادة ملحوظة في استقرار ودقة طرائق FFP (NR) و FFP (EM)، حيث تتقارب منحنيات Y_m بشكل واضح وتظهر الحدود Y_u و Y_l بفروقات محدودة، مما يعكس كفاءة عالية في التقدير تحت التضبيب مع اتساع حجم البيانات. بالمقابل، تستمر طريقة FLS في إظهار تفاوتات واسعة، خصوصاً بين الحدين Y_l و Y_u ، مما يدل على ضعف التحكم في التشتت وعدم دقة التمثيل الغامض للبيانات.



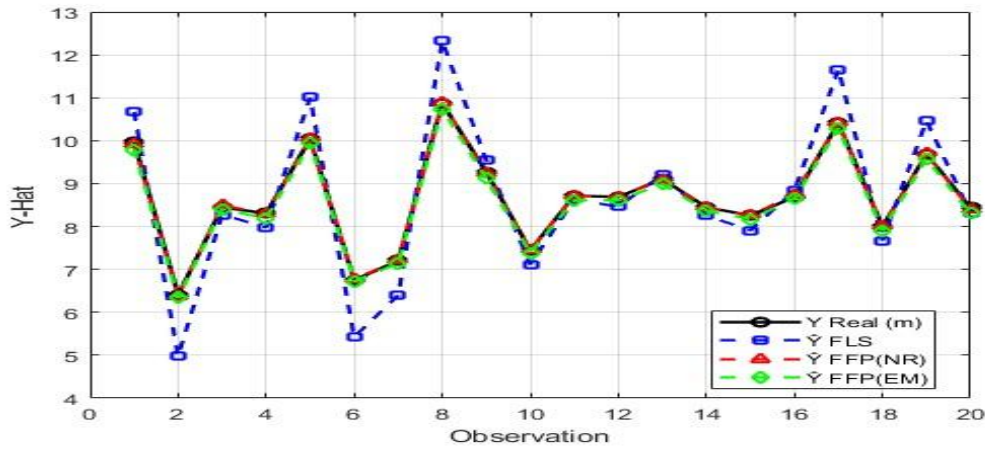
شكل (B – ثانياً 10-) منحنى القيمة المتوقعة لمتغير الاستجابة عند التضبيب للانموذج الثالث عند حجم عينة $n=100$ عند مستوى القطع $\alpha=0.8$

يبين شكل (B – ثانياً 10-) أعلى درجات الاستقرار والتماسك في منحنيات التقدير الناتجة عن طرائق FFP (NR) و FFP (EM)، حيث تتقارب القيم المتوقعة Y_m بشكل شبه تام، وتضيق الفروقات بين الحدين Y_l و Y_u ، مما يدل على دقة عالية وانخفاض في عدم اليقين. بالمقابل، تستمر طريقة FLS في إظهار انحراف واضح عن القيم الوسطى، مع تشتت أكبر في حدود الانتماء.



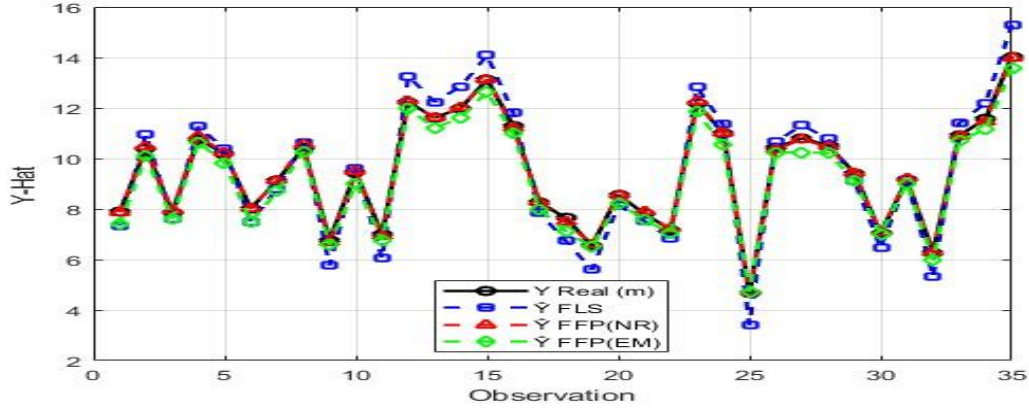
شكل (B – ثانياً -11) منحني القيمة المتوقعة لمتغير الاستجابة بعد التضبيب عند طرائق التقدير للانموذج الثالث عند حجم عينة $n=10$ عند مستوى القطع $\alpha=0.8$

يتضح من شكل (B – ثانياً -11) أن الطريقتين التكراريتين FFP(NR) و FFP(EM) تقتربان بدرجة عالية من الخط الأسود الذي يمثل القيم الحقيقية، مما يدل على دقة تقدير ممتازة. في المقابل، تظهر طريقة FLS انحرافات واضحة عن المسار الحقيقي، خاصة عند الرصدات ذات القيم الأعلى أو الأدنى، ما يشير إلى ضعفها في تمثيل البيانات الدقيقة تحت التضبيب. الشكل يؤكد بشكل جلي تفوق الطرائق التكرارية في التقارب من القيم الواقعية حتى في حالة صغر حجم العينة.



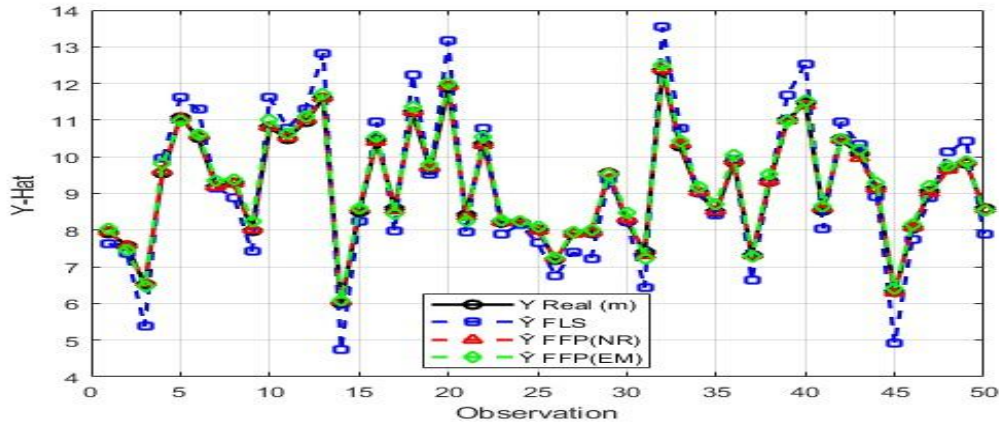
شكل (B – ثانياً -12) منحني القيمة المتوقعة لمتغير الاستجابة بعد التضبيب عند طرائق التقدير للانموذج الثالث عند حجم عينة $n=20$ عند مستوى القطع $\alpha=0.8$

يبين شكل (B – ثانياً -12) ان منحنيات طريقتي FFP(NR) و FFP(EM) تتطابقان بشكل شبه كامل مع القيم الحقيقية، مما يعكس دقة عالية واستقرارًا في التقدير تحت التضبيب. في المقابل، تُظهر طريقة FLS انحرافًا واضحًا في أكثر من نقطة، خاصة عند القيم القصوى والدنيا، مما يشير إلى محدوديتها في التقريب من الواقع مقارنة بالطرائق التكرارية. والشكل يؤكد تعزيز أداء FFP مع زيادة حجم العينة.



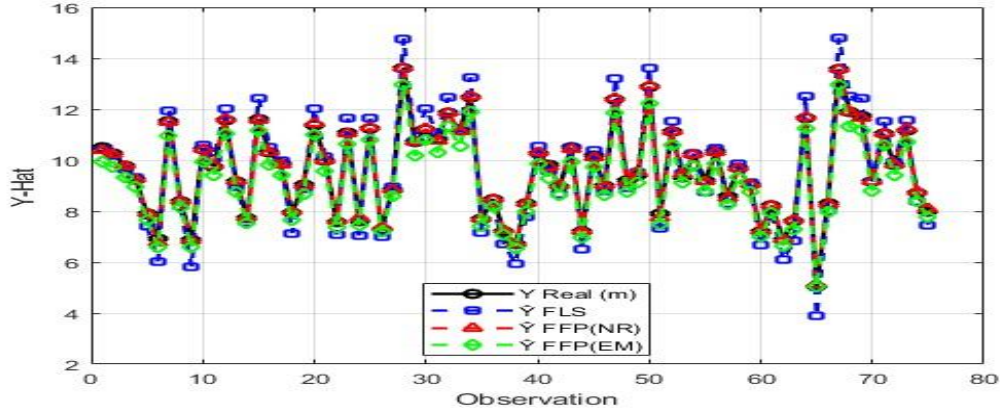
شكل (B – ثانياً -13) منحنى القيمة المتوقعة لمتغير الاستجابة بعد التضبيب عند طرائق التقدير للانموذج الثالث عند حجم عينة $n=35$ عند مستوى القطع $\alpha=0.8$

يبين شكل (B – ثانياً -13) تقارباً شديداً بين القيم المتوقعة الناتجة عن طريقتي FFP(NR) و FFP(EM) مع القيم الحقيقية Y Real، حيث تتطابق المنحنيات بشكل شبه تام، مما يدل على كفاءة عالية في التقدير حتى مع زيادة التذبذب في البيانات. بينما تظهر طريقة FLS تبايناً أكبر وابتعاداً واضحاً عن المسار الحقيقي في عدة مواضع، مما يعكس انخفاض دقتها النسبي.



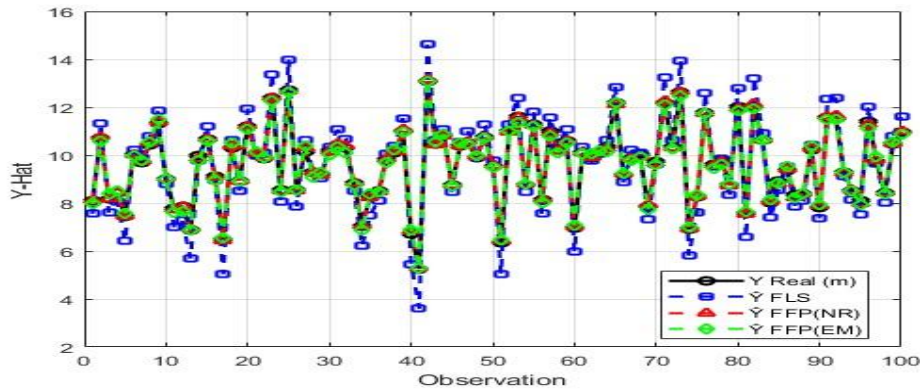
شكل (B – ثانياً -14) منحنى القيمة المتوقعة لمتغير الاستجابة بعد التضبيب عند طرائق التقدير للانموذج الثالث عند حجم عينة $n=50$ عند مستوى القطع $\alpha=0.8$

يبين شكل (B – ثانياً -14) دقة عالية لطريقتي FFP(NR) و FFP(EM) في تقدير متغير الاستجابة، حيث تتطابق منحنيتهما بشكل وثيق مع القيم الحقيقية Y Real، مما يدل على استقرار النموذج مع تزايد العينة. في المقابل، تستمر طريقة FLS بإظهار انحرافات واضحة عن المسار الحقيقي، مع تقلبات أكبر في القيم المقدرة، خصوصاً عند القمم والقيعان، ما يؤكد محدودية FLS مقارنة بالدقة والمرونة التي توفرها الطرائق التكرارية.



شكل (B – ثانياً -15) منحني القيمة المتوقعة لمتغير الاستجابة بعد التضبيب عند طرائق التقدير للانموذج الثالث عند حجم عينة $n=75$ عند مستوى القطع $\alpha=0.8$

يبين شكل (B – ثانياً -15) تقارباً دقيقاً للغاية بين القيم المتوقعة لطرائق FFP(EM) و FFP(NR) مع القيم الحقيقية Y Real، حيث تتطابق المنحنيات بشكل مستمر تقريباً على طول المشاهدات، مما يعكس الأداء العالي والثبات في التقدير مع تزايد حجم البيانات. في المقابل، توصل طريقة FLS بإظهار انحرافات متكررة عن المسار الواقعي، خاصة في القمم والانخفاضات الحادة، مما يثبت أن الطرائق التكرارية أكثر كفاءة في احتواء التذبذب وتحقيق دقة تقديرية أعلى.



شكل (B – ثانياً -16) منحني القيمة المتوقعة لمتغير الاستجابة بعد التضبيب عند طرائق التقدير للانموذج الثالث عند حجم عينة $n=100$ عند مستوى القطع $\alpha=0.8$

يتضح من شكل (B – ثانياً -16) عند حجم عينة $n=100$ ومستوى قطع $\alpha=0.8$ الأداء الأمثل لطريقتي FFP(EM) و FFP(NR)، حيث تتطابق منحنيتهما بشكل شبه كامل مع القيم الحقيقية Y Real، ما يدل على دقة تقدير عالية جداً واستقرار ممتاز تحت التضبيب. بالمقابل، تُظهر طريقة FLS استمراراً في التذبذب والانحراف عن المسار الواقعي، خصوصاً عند القيم القصوى والدنيا، مما يُبرز محدوديتها في التقدير الدقيق عند حجم عينة كبير. الشكل يؤكد بوضوح أن الطرائق التكرارية هي الأكثر كفاءة وموثوقية في النمذجة الضبابية.

ملحق C
البيانات الحقيقية للرسالة

جدول (1-4) فيروس المتلازمة التنفسية الحادة الشديدة كورونا 2 (SARS-CoV-2)

Patient_ID	Symptom_Onset_Lower	Symptom_Onset_Center	Symptom_Onset_Upper	Age_Lower	Age_Center	Age_Upper	Viral_Load_Lower	Viral_Load_Center	Viral_Load_Upper	lymphocyte_Lower	lymphocyte_Center	lymphocytes_Upper
1	4.26	11.07	15.48	23.12	26.14	29.16	0.53	0.63	0.72	12.66	18.59	23.89
2	4.26	7.73	15.48	38.06	42.14	46.22	0.37	0.50	0.64	22.43	36.40	41.77
3	4.26	8.35	15.48	53.38	56.32	59.26	0.76	0.87	0.99	23.82	37.82	51.05
4	4.26	11.86	15.48	49.55	53.98	58.41	0.62	0.68	0.74	20.51	31.84	40.44
5	4.26	6.99	14.12	20.18	25.37	30.56	0.39	0.44	0.50	29.74	38.13	44.40
6	4.26	10.45	15.48	7.61	10.00	12.39	0.88	0.93	0.98	21.32	29.81	40.04
7	4.26	9.21	15.48	75.89	80.00	84.11	0.59	0.73	0.87	18.42	30.68	43.38
8	4.26	10.65	15.48	7.46	10.00	12.54	0.79	0.98	1.00	13.86	27.83	34.98
9	4.26	10.05	15.48	20.71	24.64	28.57	0.76	0.85	0.94	1.89	15.76	26.99
10	4.26	10.16	15.48	34.17	37.82	41.46	0.77	0.90	1.00	5.44	18.24	24.09
11	4.26	9.01	15.48	49.38	52.88	56.38	0.31	0.36	0.41	4.52	15.94	21.46
12	4.26	9.61	15.48	57.33	60.64	63.95	0.28	0.35	0.42	28.25	34.09	44.41
13	4.26	11.15	15.48	54.13	58.26	62.38	0.42	0.48	0.54	17.81	24.43	34.84
14	4.26	14.12	15.48	13.34	18.27	23.19	0.71	0.84	0.96	16.27	30.26	41.63
15	4.26	9.69	15.48	30.11	35.94	41.77	0.24	0.33	0.43	31.16	42.23	54.49
16	4.26	11.28	15.48	26.97	32.22	37.46	0.55	0.60	0.65	17.39	22.48	37.24
17	4.26	8.74	15.48	12.06	14.54	17.02	0.38	0.46	0.53	21.30	27.31	37.47
18	4.26	9.48	15.48	20.52	22.57	24.63	0.51	0.57	0.63	26.03	37.67	45.90
19	4.26	10.6	15.48	9.07	11.38	13.70	0.74	0.83	0.92	16.81	21.86	34.82

20	4.26	11.41	15.48	32.58	35.63	38.69	0.76	0.95	1.00	10.70	17.31	25.02
21	4.26	9.43	15.48	31.53	35.74	39.95	0.29	0.45	0.60	13.21	23.69	33.08
22	4.26	10.67	15.48	48.30	53.61	58.91	0.19	0.39	0.59	7.92	19.84	25.62
23	4.26	13.39	15.48	30.68	36.27	41.85	0.76	0.87	0.98	31.37	42.89	48.14
24	4.26	7.84	15.48	16.43	19.97	23.50	0.31	0.39	0.47	32.00	39.24	53.87
25	4.26	7.86	15.48	45.17	50.16	55.15	0.15	0.35	0.54	21.88	34.00	47.36
26	4.26	10.39	15.48	51.75	54.50	57.25	0.76	0.92	1.00	33.77	41.14	53.10
27	5.09	12.17	15.48	36.69	41.03	45.37	0.75	0.89	1.00	30.86	39.11	48.20
28	4.26	10.97	15.48	19.10	23.54	27.98	0.85	0.98	1.00	8.13	20.60	27.33
29	4.26	9.63	15.48	37.40	39.71	42.02	0.42	0.55	0.69	30.28	41.78	48.34
30	4.26	11.29	15.48	40.77	44.57	48.38	0.59	0.71	0.82	17.69	31.18	38.68
31	4.26	9.09	15.48	41.93	44.27	46.61	0.46	0.62	0.78	27.65	39.22	49.72
32	4.26	9.45	15.48	37.81	40.34	42.87	0.75	0.91	1.00	31.20	41.88	54.03
33	4.26	10.4	15.48	53.41	59.34	65.27	0.23	0.35	0.48	18.60	24.54	36.14
34	4.26	12.04	15.48	36.96	40.45	43.95	0.79	0.91	1.00	9.62	18.30	26.10
35	5.09	11.1	15.48	38.03	41.93	45.83	0.20	0.35	0.50	14.19	21.84	36.39
36	4.26	11.14	15.48	40.71	44.60	48.49	0.18	0.35	0.53	20.37	27.81	40.19
37	4.26	8.57	15.48	14.15	18.87	23.60	0.86	0.98	1.00	24.81	39.54	50.08
38	4.26	11.74	15.48	21.45	26.41	31.37	0.60	0.71	0.82	31.89	40.82	51.94
39	4.26	11.41	15.48	22.24	24.39	26.55	0.31	0.50	0.68	1.29	15.21	24.40
40	4.26	15.48	15.48	28.75	33.62	38.49	0.44	0.61	0.78	19.01	30.32	37.80
41	4.26	4.26	12.73	29.41	33.38	37.34	0.54	0.61	0.69	14.57	27.52	36.08
42	4.26	8.06	15.48	30.33	34.13	37.92	0.15	0.31	0.47	11.64	21.66	34.24
43	4.26	8.94	15.48	60.49	63.33	66.18	0.60	0.75	0.91	7.83	18.60	23.74
44	4.26	11.41	15.48	47.83	52.88	57.93	0.91	1.00	1.00	15.20	25.13	31.29

45	4.26	11.09	15.48	52.84	56.25	59.67	0.73	0.80	0.88	36.33	43.29	48.75
46	4.26	9.02	15.48	45.57	48.54	51.51	0.77	0.94	1.00	12.47	24.70	30.10
47	4.26	12.2	15.48	28.68	33.57	38.46	0.59	0.71	0.83	22.76	30.56	44.12
48	4.26	5.09	13.39	15.33	18.99	22.65	0.86	0.96	1.00	30.85	36.09	48.13
49	4.26	10.43	15.48	37.65	42.47	47.29	0.24	0.44	0.63	14.45	25.91	35.65
50	4.26	9.5	15.48	76.78	79.97	83.17	0.60	0.72	0.85	37.38	44.15	50.13
51	4.26	10.26	15.48	42.71	46.20	49.68	0.55	0.75	0.95	29.47	43.87	53.79
52	4.26	11.91	15.48	24.58	30.54	36.51	0.82	0.94	1.00	8.01	22.55	32.29
53	4.26	11.11	15.48	31.53	35.16	38.79	0.72	0.83	0.95	15.77	29.92	36.65
54	4.26	10.08	15.48	26.72	32.21	37.69	0.76	0.89	1.00	15.32	24.03	33.36
55	4.26	9.78	15.48	18.31	21.60	24.89	0.70	0.83	0.95	18.39	23.55	32.53
56	4.26	7.91	15.48	47.59	51.65	55.71	0.16	0.33	0.49	1.82	16.11	27.27
57	4.26	11.06	15.48	39.80	44.98	50.15	0.28	0.43	0.58	24.01	33.29	44.64
58	4.26	11.01	15.48	5.33	10.00	14.67	0.53	0.66	0.79	15.41	30.08	35.53
59	4.26	12.2	15.48	52.36	56.64	60.91	0.86	0.95	1.00	1.91	16.54	25.29
60	4.26	9	14.12	59.14	64.35	69.56	0.80	0.89	0.97	9.83	23.36	34.62
61	4.26	11.06	15.48	24.55	26.58	28.60	0.73	0.87	1.00	34.30	42.25	52.28
62	4.26	10.3	15.48	38.55	42.58	46.60	0.23	0.37	0.51	13.34	22.19	35.75
63	4.26	8.57	15.48	29.98	33.64	37.29	0.33	0.51	0.70	5.84	19.35	30.93
64	4.26	10.52	15.48	17.72	20.48	23.24	0.17	0.32	0.47	21.51	29.68	36.31
65	4.26	11.46	15.48	16.26	20.40	24.53	0.80	0.86	0.92	37.87	44.57	50.28
66	4.26	12.73	15.48	64.20	67.04	69.89	0.28	0.35	0.42	11.69	22.26	33.69
67	4.26	12.14	15.48	58.52	63.91	69.31	0.39	0.52	0.65	20.80	35.16	40.43
68	4.26	9.66	15.48	29.27	33.61	37.94	0.76	0.84	0.91	25.89	37.85	48.71
69	4.26	11.23	15.48	17.40	21.60	25.80	0.87	0.99	1.00	11.43	22.13	36.53

70	4.26	10.96	15.48	41.64	46.34	51.04	0.40	0.52	0.64	30.87	36.85	47.60
71	4.26	8.7	15.48	33.16	37.12	41.08	0.93	0.98	1.00	14.88	26.03	34.92
72	4.26	8.24	14.12	40.50	45.82	51.15	0.79	0.87	0.96	19.07	33.97	45.40
73	4.26	10.24	15.48	17.77	23.48	29.18	0.81	0.89	0.96	27.61	34.01	43.59
74	4.26	10.12	15.48	41.11	46.90	52.69	0.52	0.65	0.79	20.89	31.07	41.53
75	4.26	11.55	15.48	38.88	42.55	46.21	0.80	0.85	0.91	3.93	17.71	32.12
76	5.09	9.45	15.48	36.46	39.92	43.39	0.60	0.75	0.90	27.65	40.06	48.92
77	4.26	12.63	15.48	12.09	15.08	18.06	0.25	0.35	0.45	12.65	24.62	39.24
78	4.26	10.86	15.48	73.40	77.53	81.66	0.24	0.39	0.55	8.57	20.60	34.65
79	4.26	10.66	15.48	31.17	36.20	41.24	0.28	0.40	0.52	7.63	16.22	23.18
80	4.26	9.96	15.48	45.02	48.34	51.65	0.82	0.95	1.00	24.79	32.73	38.42
81	4.26	10.83	15.48	42.97	45.47	47.97	0.72	0.79	0.86	22.23	35.33	41.33
82	4.26	8.31	15.48	32.55	38.32	44.10	0.38	0.56	0.75	2.40	15.50	20.68
83	4.26	11.04	15.48	43.32	46.39	49.46	0.27	0.43	0.58	16.69	30.36	36.31
84	5.09	10.93	15.48	22.54	24.64	26.75	0.23	0.39	0.54	7.66	21.79	33.62
85	4.26	10.71	15.48	31.61	34.09	36.57	0.65	0.83	1.00	24.24	34.36	40.07
86	4.26	11.48	15.48	20.23	23.93	27.62	0.76	0.83	0.89	10.22	20.23	28.42
87	4.26	9.37	15.48	26.88	30.75	34.62	0.72	0.87	1.00	22.75	35.73	49.18
88	4.26	11.55	15.48	45.07	47.79	50.51	0.31	0.50	0.68	15.10	26.60	31.83
89	5.09	12.13	15.48	48.78	51.58	54.39	0.52	0.57	0.63	31.08	43.10	56.25
90	4.26	9.87	15.48	39.98	42.29	44.59	0.73	0.79	0.85	6.17	19.13	26.94
91	4.26	11.41	15.48	75.31	80.00	84.69	0.57	0.67	0.77	11.33	25.23	31.41
92	4.26	12.09	15.48	20.00	23.09	26.19	0.85	0.95	1.00	10.02	18.40	30.37
93	4.26	8.79	15.48	48.65	52.60	56.55	0.14	0.31	0.47	33.98	42.74	54.03
94	4.26	12.05	15.48	6.68	12.10	17.52	0.78	0.90	1.00	35.38	41.32	55.09

95	4.26	10.75	15.48	36.59	39.28	41.96	0.43	0.55	0.68	11.96	22.74	35.09
96	4.26	11.94	15.48	43.31	45.53	47.75	0.85	1.00	1.00	29.44	34.80	47.83
97	4.26	10.07	15.48	30.21	35.05	39.90	0.51	0.64	0.77	29.86	39.52	47.34
98	4.26	11.36	15.48	49.68	51.74	53.80	0.51	0.63	0.75	21.23	31.66	38.43
99	4.26	6.79	15.48	15.98	20.05	24.11	0.61	0.79	0.97	23.02	30.89	43.40
100	4.26	7.17	15.48	45.30	51.21	57.12	0.41	0.53	0.64	11.35	22.26	35.32

Summary of the thesis

Fuzzy Regression Model (FRM) is one of the important regression models used to represent data that is characterized by ambiguity and imprecision, especially the response variable, for the purpose of predicting the phenomenon under study according to the different membership functions of its data and parameters or some of them, the most famous of which is the triangular membership function, which is relied upon to represent each observation with a fuzzy number and according to the type of membership function.

Many researches and studies have adopted two methods in estimation, the first of which is the formulation of the Linear Programming (LP) problem for the fuzzy model proposed by Tanaka, and the second is the use of the Fuzzy Least Squares (FLS) method proposed by Diamond. FLS is the most widely used method in research because it is characterized by its efficiency and ease of implementation. Despite this, researchers' attempts to improve its efficiency in estimation have not stopped. In this thesis, the fixed point theorem was used by employing its properties to estimate the parameters of the fuzzy regression model, which requires the stability of the estimation point (outputs) despite the change in the inputs to the function. To achieve this improvement, it is necessary to rely on iterative methods according to the fixed point principle in estimation to reach convergence required is that there should be no significant difference or equality between two estimates of each of the FRM parameters. Therefore, the Newton-Raphson (Fixed Point) (N-R(FP)) method and the Expectation-Maximization (Fixed Point) (E-M(FP)) algorithm were used. The simulation was conducted for the purpose of comparing three FRM parameter estimation methods to determine the best one, which are N-R(FP), E-M(FP) and FLS, for sample sizes (10, 20, 35, 50, 75, 100) and with different fuzzy factor values (cut-off level) which are (0.1, 0.5, 0.8). The simulation results demonstrated that the N-R(FP) method outperformed the other methods, as it had the lowest values for the trade-off metrics. Furthermore, it was the most representative of the response variable values, demonstrating the estimation efficiency of this method. Based on this, real data on patients with severe acute respiratory syndrome coronavirus 2 (SARS-CoV-2) in a hospital in Karbala Governorate were analyzed. One of the most important conclusions reached by the thesis is that the N-R(FP) method is the best in the estimation process and representation of the data of the fuzzy regression model, as the characteristics and fulfillment of the conditions of the fixed point theory led to improving the FLS method. Therefore, the thesis recommended adopting it in the estimation process.

**The Republic of Iraq
Ministry of Higher Education and Scientific
Research
University of Kerbala
College of Administration and Economics**



Using fixed point theorem in fuzzy regression with practical application

**A Thesis Submitted to The Council of the College of
Administration & Economics - University of Kerbala,
Partial Fulfillment of the Requirements for The Degree
of Master of Science in Statistics**

**By
Naeem Malik Jasim**

**Supervised by
Prof. Dr. Mushtaq Kareem Abd Al-Rahem**